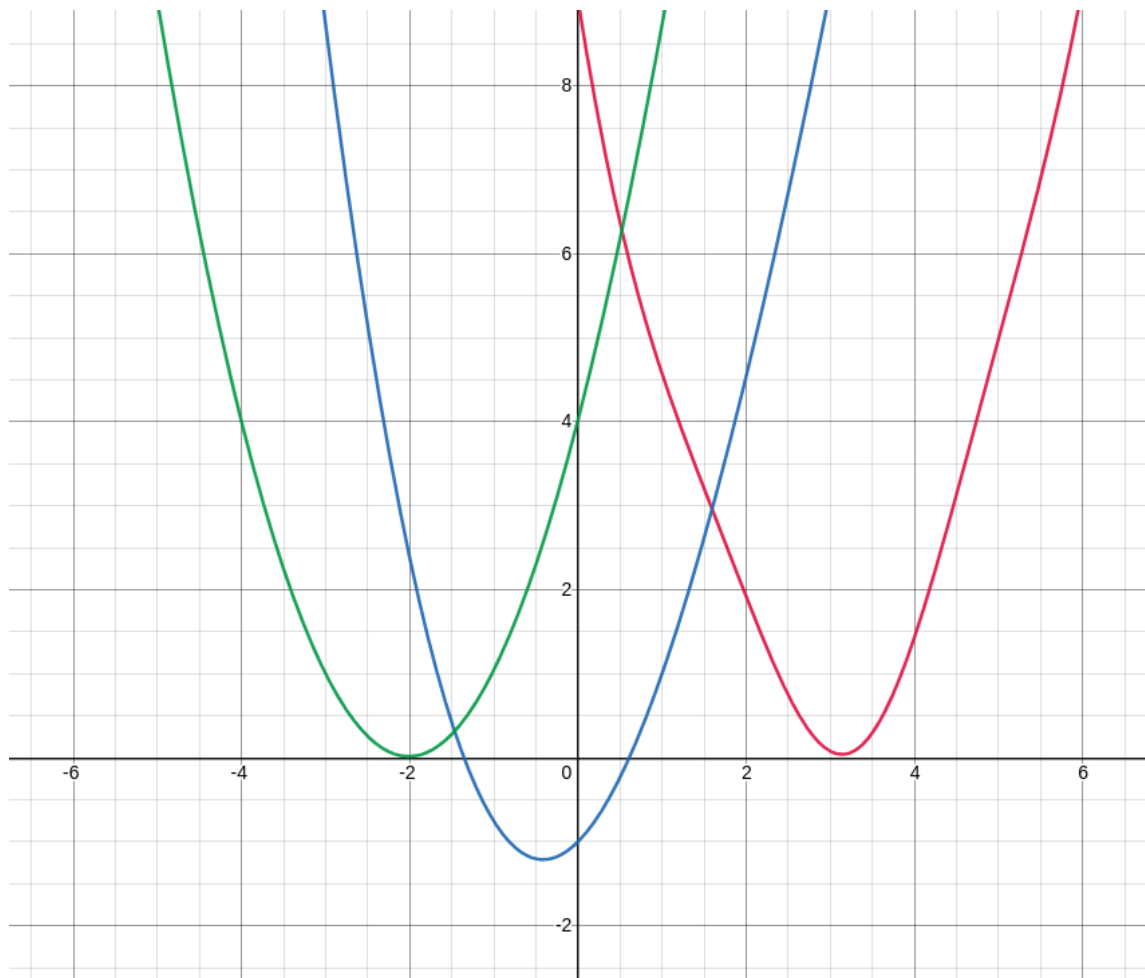


1η Εργασία

Ιορδάνης Κωνσταντίνιδης

AEM: 9492

iordaniak@ece.auth.gr



Εισαγωγή

Στα πλαίσια της 1ης εργασίας ασχολούμαστε με την εύρεση ελαχίστων σε κυρτές και σχεδόν κυρτές συναρτήσεις, χρησιμοποιώντας 4 μεθόδους αναζήτησης ελαχίστου.

Δοσμένου του αρχικού διαστήματος $[-4, 4]$, οι δοσμένες συναρτήσεις που πρέπει να ελαχιστοποιήσουμε είναι:

- $f_1(x) = (x - 3)^2 + \sin^2(x + 3)$
- $f_2(x) = (x - 1) \cos(\frac{x}{2}) + x^2$
- $f_3(x) = (x + 2)^2 + e^{x-2} \sin(x + 3)$

και οι 4 μέθοδοι που θα χρησιμοποιήσουμε είναι:

- Μέθοδος Διχοτόμου
- Μέθοδος Χρυσού Τομέα
- Μέθοδος Fibonacci
- Μέθοδος της Διχοτόμου με χρήση παραγώγου

Για το θέμα 1 της εργασίας τα ζητούμενα είναι:

- A. Υλοποίηση της Μεθόδου της Διχοτόμου στο Matlab και εφαρμογή της στις 3 συναρτήσεις.
- B. Για σταθερό το τελικό εύρος αναζήτησης l , να βρεθεί ο αριθμός των υπολογισμών της $f_i(x)$ $i = 1, 2, 3$ καθώς μεταβάλλουμε τη σταθερά ϵ .
- C. Για σταθερό ϵ , να βρεθεί ο αριθμός των υπολογισμών της $f_i(x)$ $i = 1, 2, 3$ καθώς μεταβάλλεται το l .
- D. Να σχεδιαστούν τα άκρα του διαστήματος $[a_k, b_k]$ συναρτήσει του δείκτη k , για διάφορες τιμές του l .

ενώ για τα θέματα 2, 3 και 4 τα ζητούμενα είναι:

- A. Υλοποίηση της εκάστοτε μεθόδου στο Matlab και εφαρμογή της στις 3 συναρτήσεις.
- B. Να βρεθεί ο αριθμός των υπολογισμών της $f_i(x)$ $i = 1, 2, 3$ καθώς μεταβάλλεται το τελικό εύρος l .
- C. Να σχεδιαστούν τα άκρα του διαστήματος $[a_k, b_k]$ συναρτήσει του δείκτη k , για διάφορες τιμές του l .

Θέμα 1 - Μέθοδος Διχοτόμου

A) Το αρχείο matlab βρίσκεται στον φάκελο thema1 με τίτλο thema1_A.

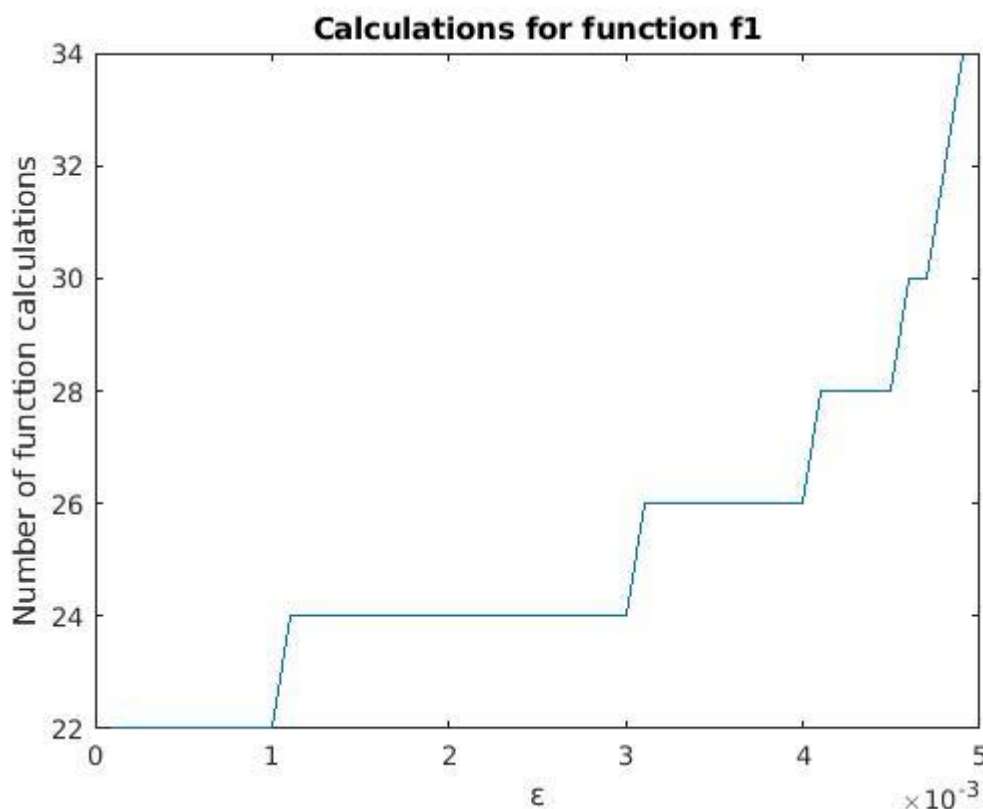
Οι σταθερές που επιλέγονται είναι $l = 0.01$ και $\varepsilon = 0.0049$ καθώς πρέπει να τηρείται ο περιορισμός $l > 2\varepsilon$. Τα άκρα του διαστήματος $[a_k, b_k]$ στο οποίο εμπεριέχεται η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης υπολογίστηκαν και φαίνονται παρακάτω:

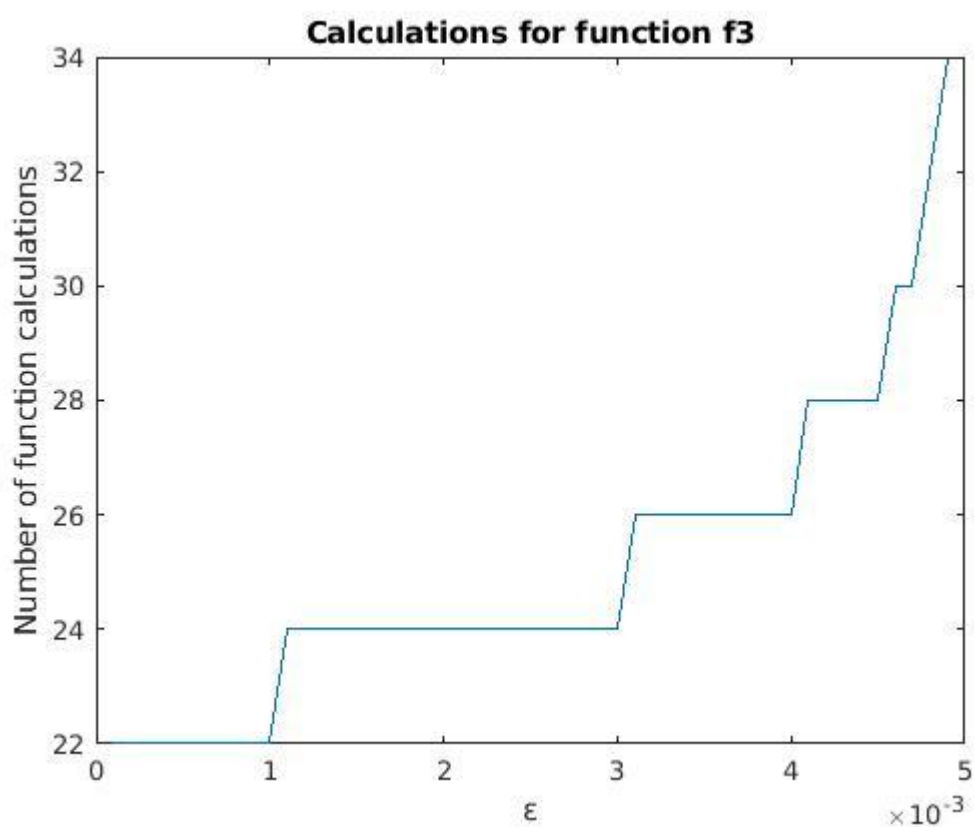
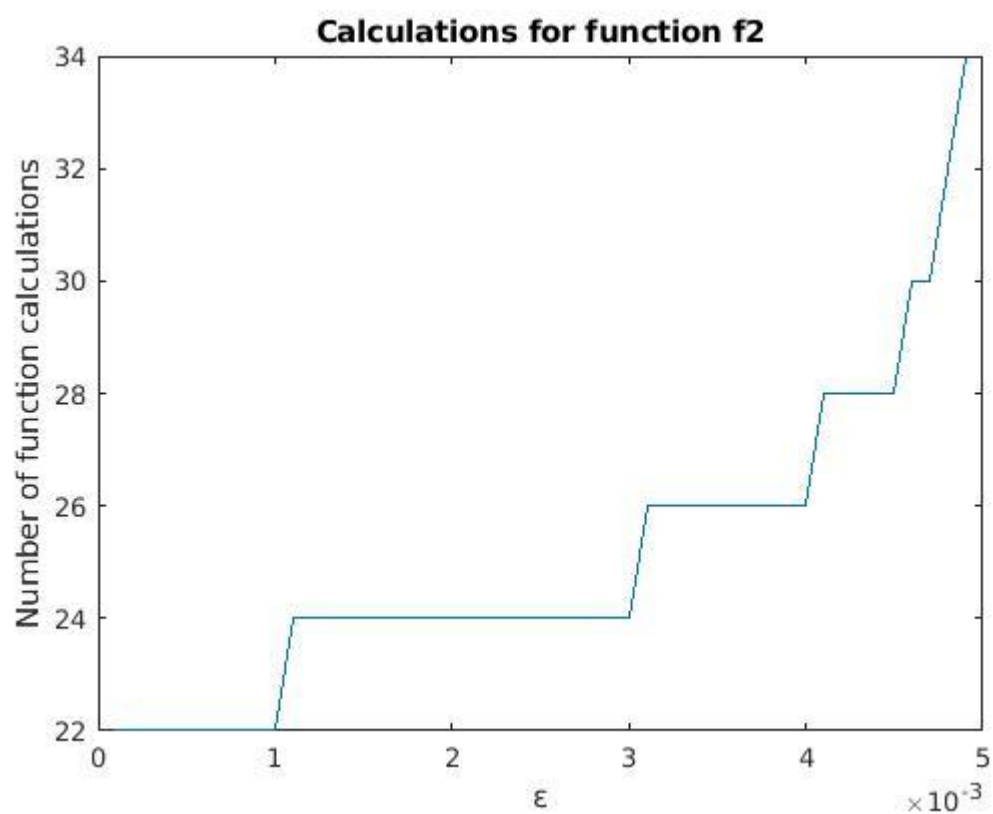
- Για την $f_1(x) \rightarrow [a_k, b_k] = [3.135657, 3.145579]$
- Για την $f_2(x) \rightarrow [a_k, b_k] = [-0.421016, -0.411094]$
- Για την $f_3(x) \rightarrow [a_k, b_k] = [-2.017446, -2.007524]$

B) Το αρχείο matlab βρίσκεται στον φάκελο thema1 με τίτλο thema1_B.

Κρατάμε σταθερό το $l = 0.01$ και μεταβάλλουμε το ε το οποίο παίρνει τιμές $\varepsilon = 0.0001 \rightarrow 0.0049$ καθώς πρέπει να τηρείται ο περιορισμός $l > 2\varepsilon$.

Τα τελικά αποτελέσματα φαίνονται στις παρακάτω γραφικές παραστάσεις. Στον κατακόρυφο άξονα απεικονίζονται οι υπολογισμοί της αντικειμενικής συνάρτησης f , ενώ στον οριζόντιο η σταθερά του ε . Παρατηρούμε πως όσο μεγαλώνει το ε τόσο περισσότερους υπολογισμούς χρειαζόμαστε για να καταλήξουμε στο αποδεκτό αποτέλεσμα.



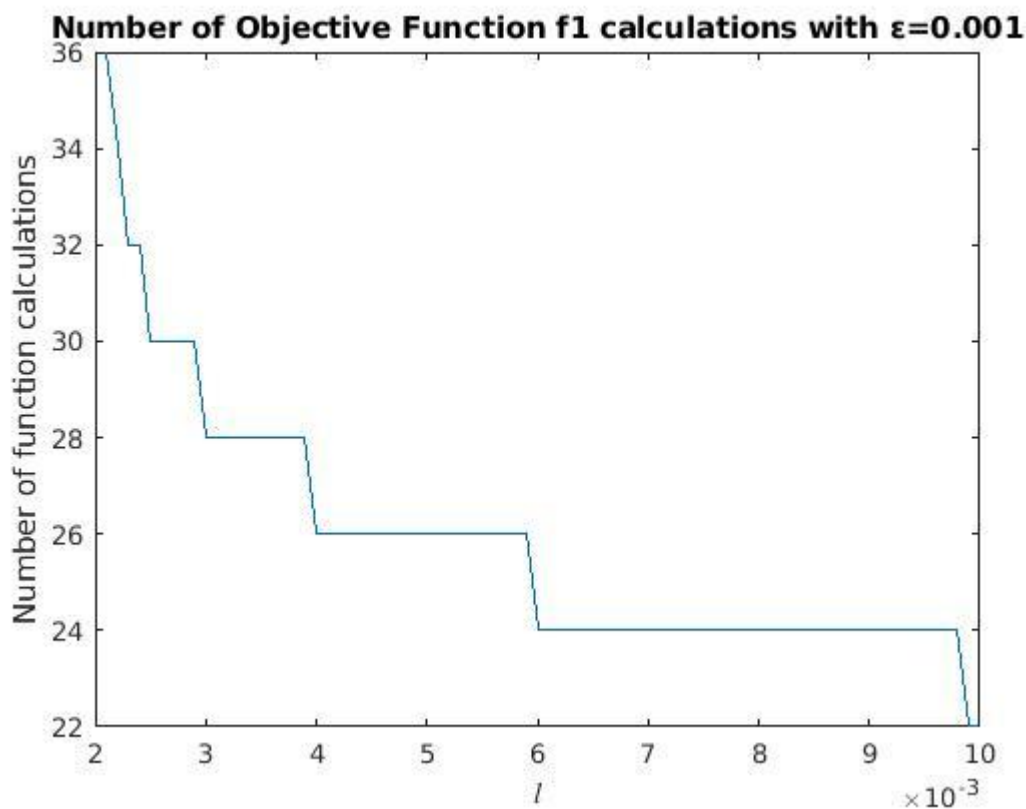


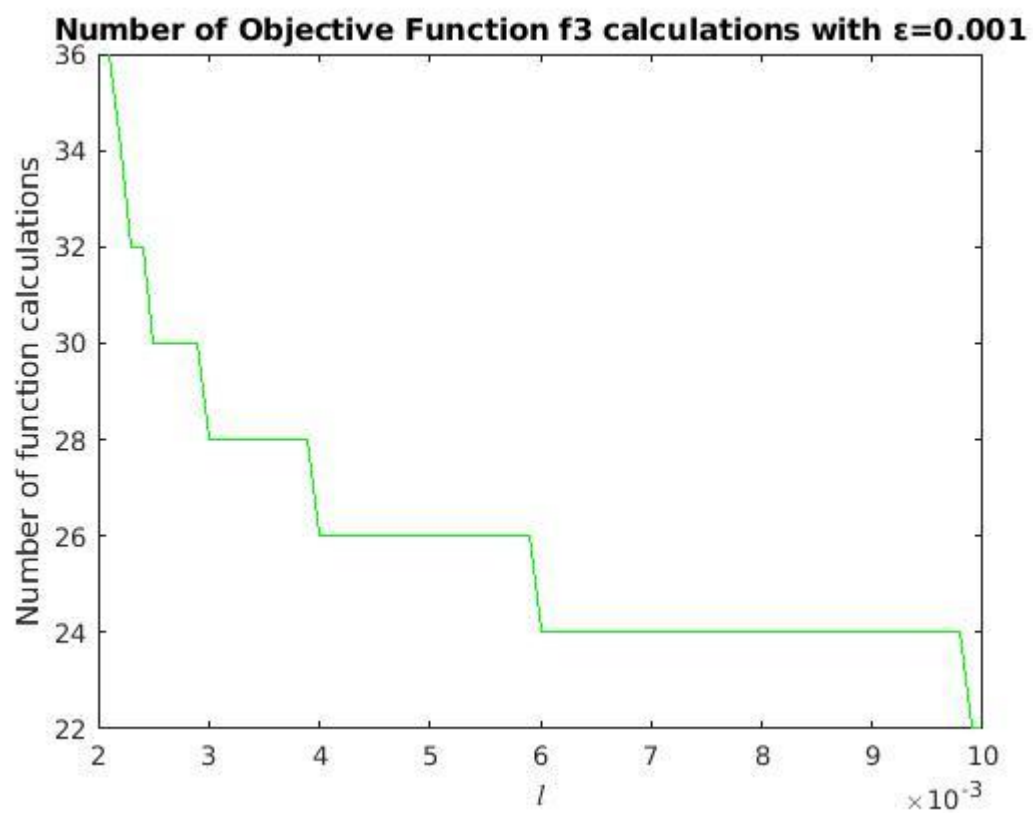
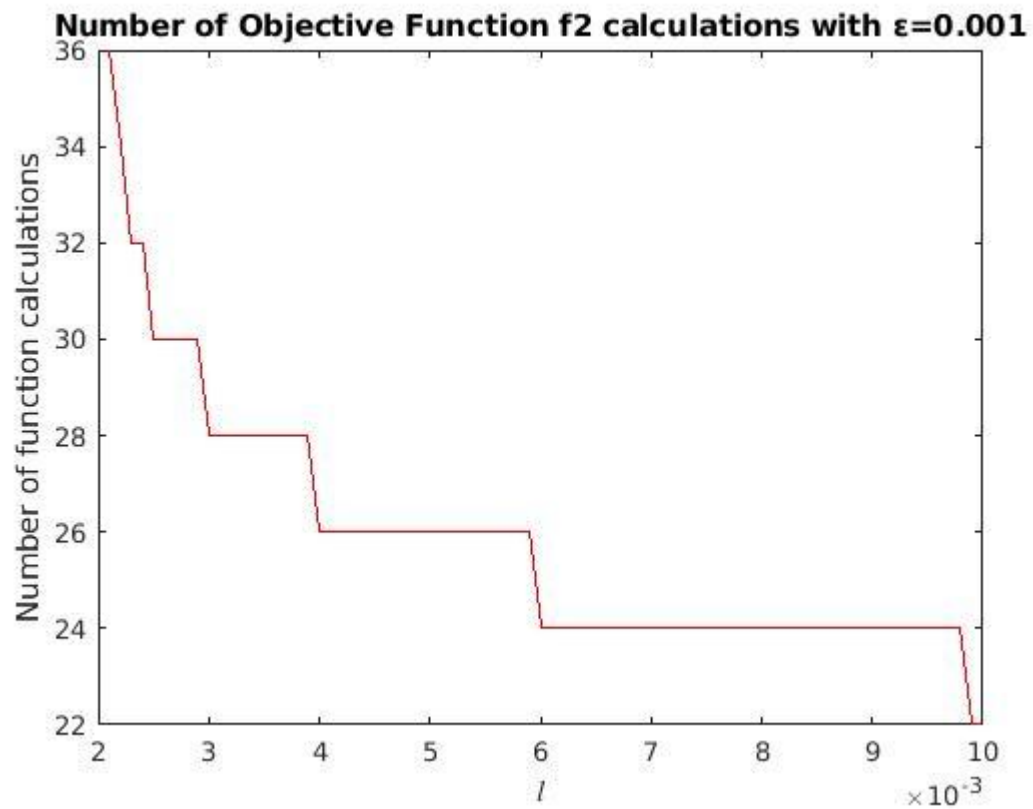
C) Το αρχείο matlab βρίσκεται στον φάκελο thema1 με τίτλο thema1_C.

Κρατάμε σταθερό το $\varepsilon = 0.001$ και μεταβάλλουμε το ε το οποίο παίρνει τιμές

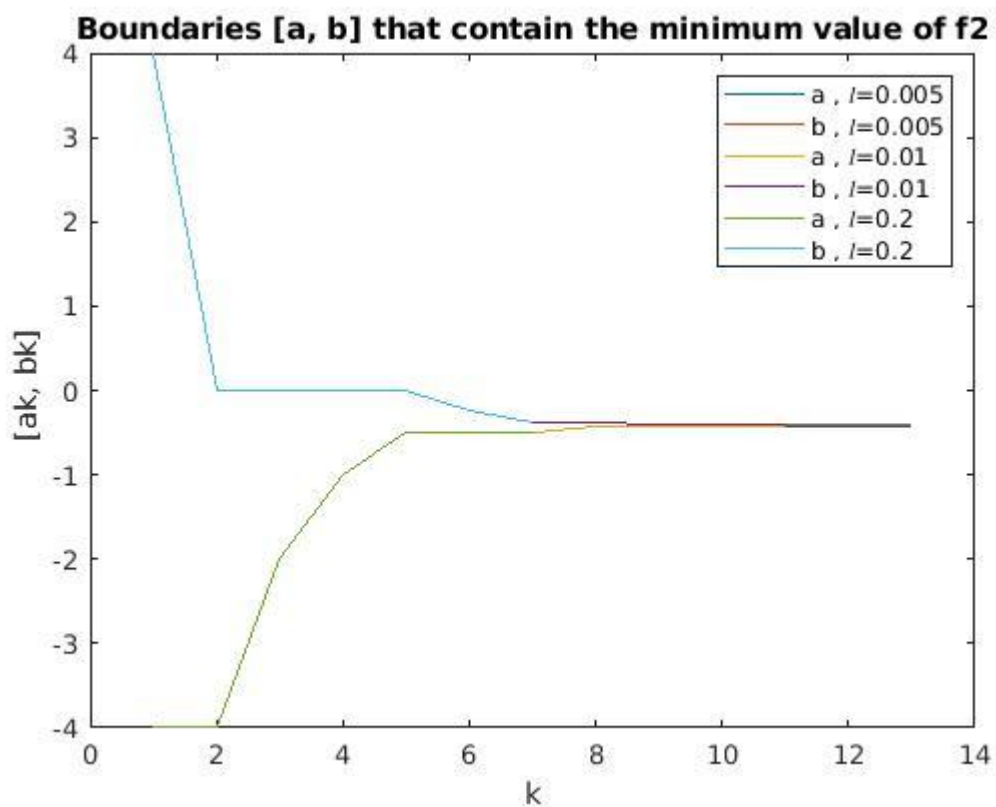
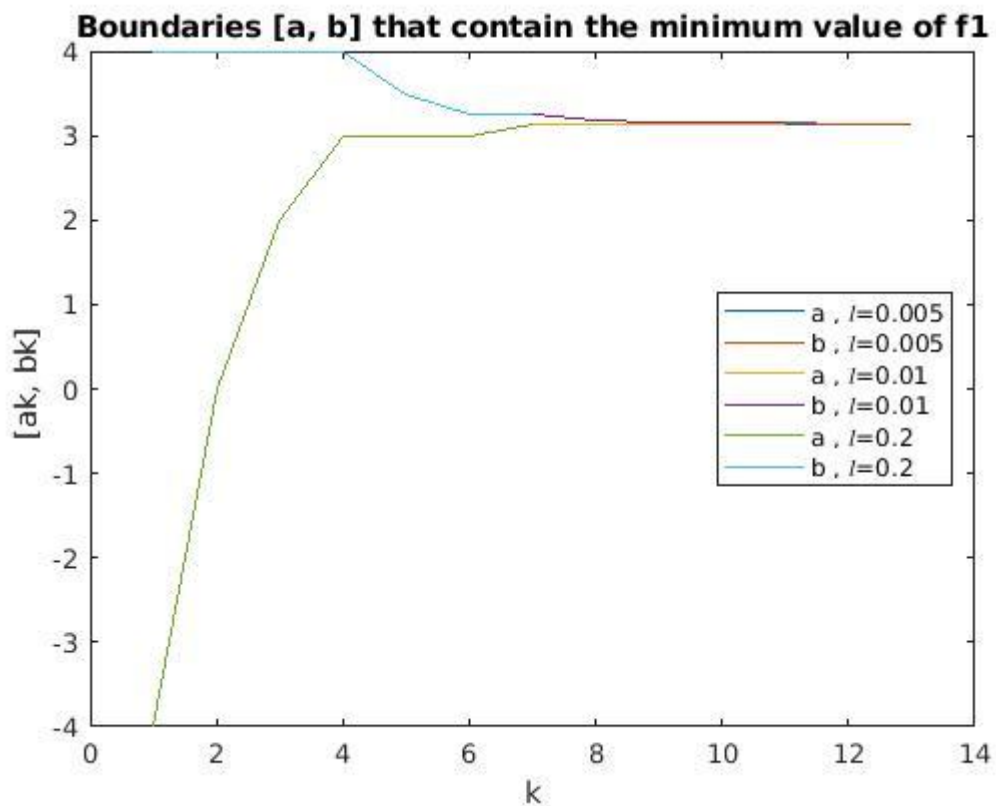
$l = 0.0021 \rightarrow 0.01$ καθώς πρέπει να τηρείται ο περιορισμός $l > 2\varepsilon$

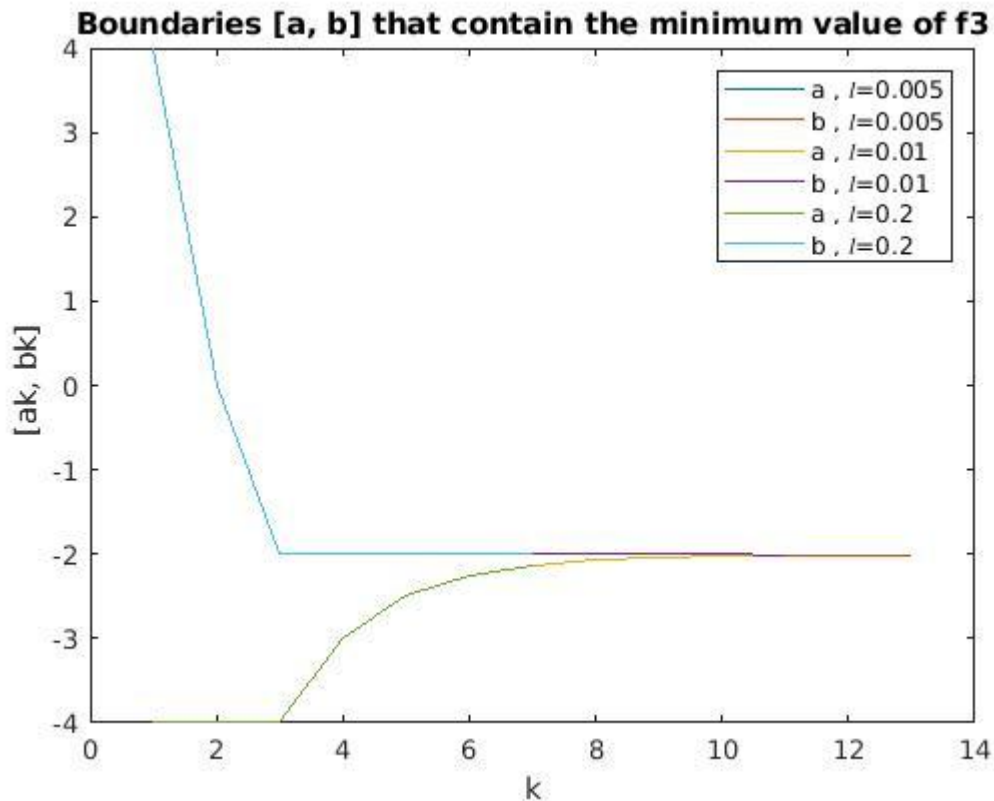
Στις γραφικές παραστάσεις, ο οριζόντιος άξονας αυτήν τη φορά απεικονίζει το πως μεταβάλλεται το l . Όπως θα δούμε, όσο μεγαλώνει το l , τόσο λιγότεροι υπολογισμοί χρειάζονται, κάτι λογικό αφού για μεγαλύτερη ακρίβεια θέλουμε περισσότερο κόπο. Ισχύει ότι **calculations = 2 * k**





D) Το αρχείο matlab βρίσκεται στον φάκελο thema1 με τίτλο thema1_D. Στα παρακάτω διαγράμματα φαίνονται τα άκρα του διαστήματος $[a_k, b_k]$ συναρτήσει του βήματος επανάληψης k , για 3 τιμές του l .



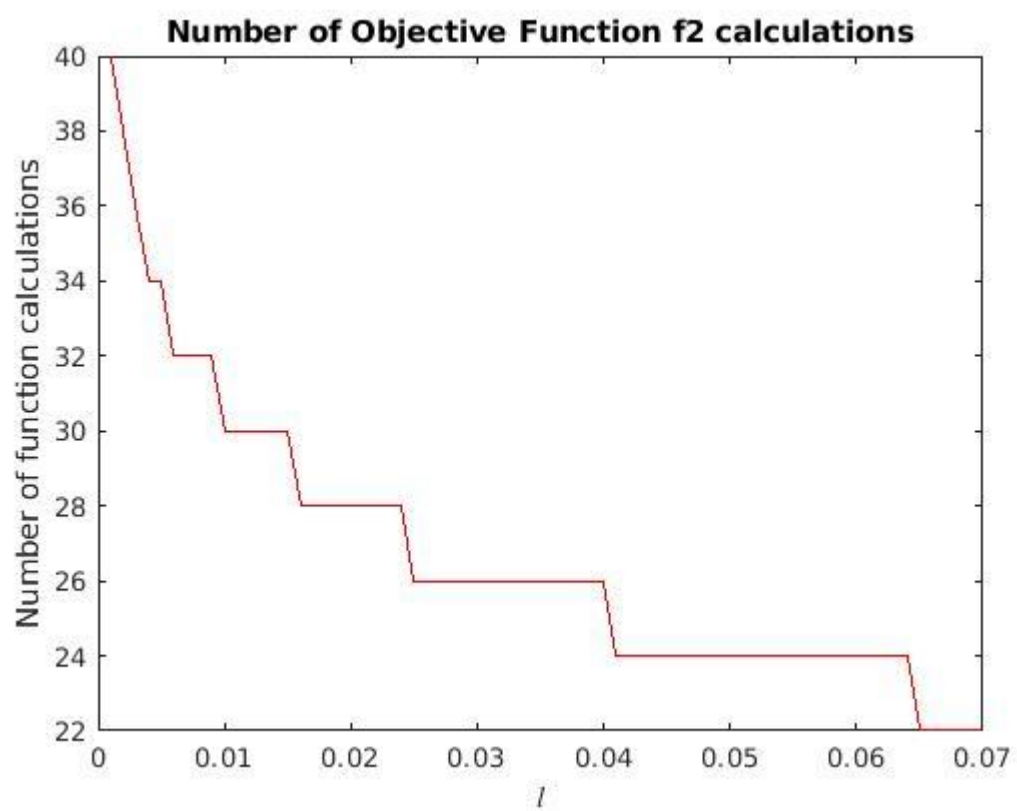
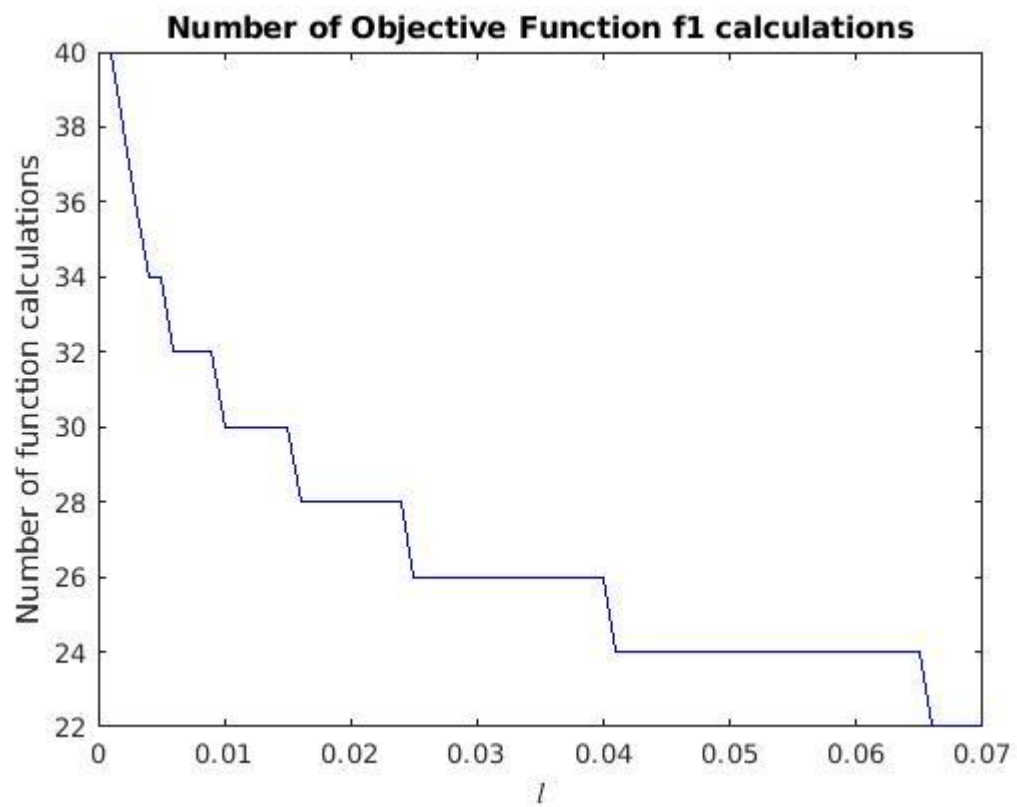


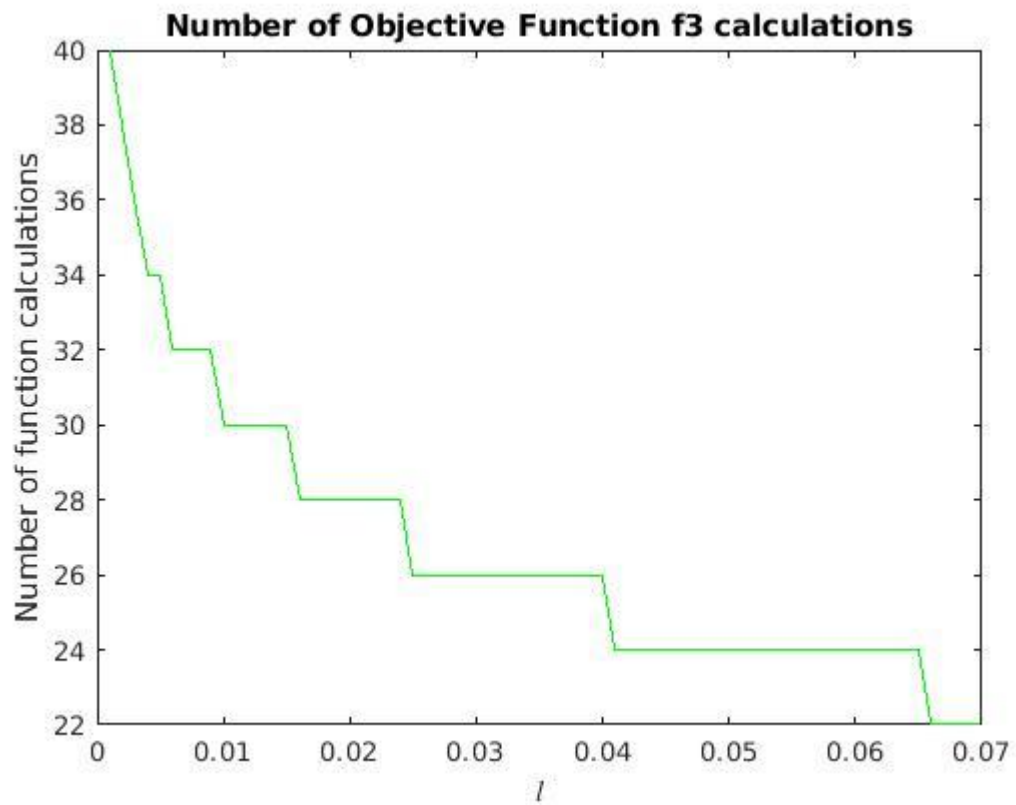
Θέμα 2 - Μέθοδος Χρυσού Τομέα

A) Το αρχείο matlab βρίσκεται στον φάκελο thema2 με τίτλο thema2_A. Για την υλοποίηση του αλγόριθμου ακολουθήθηκαν τα βήματα του βιβλίου. Η μεθοδολογία του προγράμματος είναι αντίστοιχη με τη Μέθοδο της Διχοτόμου. Οι σταθερές είναι $l = 0.01$ και $\gamma = 0.618$. Τα άκρα του διαστήματος $[a_k, b_k]$ στο οποίο εμπεριέχεται η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης υπολογίστηκαν και φαίνονται παρακάτω:

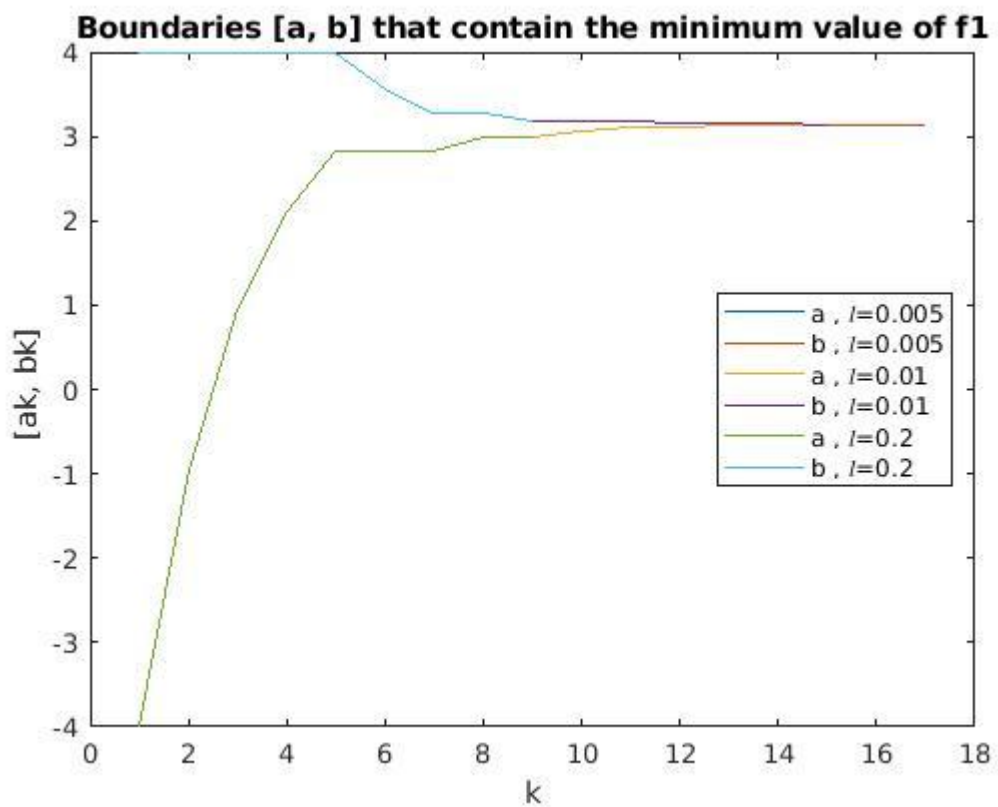
- Για την $f_1(x) \rightarrow [a_k, b_k] = [3.133067, 3.142553]$
- Για την $f_2(x) \rightarrow [a_k, b_k] = [-0.418110, -0.408615]$
- Για την $f_3(x) \rightarrow [a_k, b_k] = [-2.015583, -2.006115]$

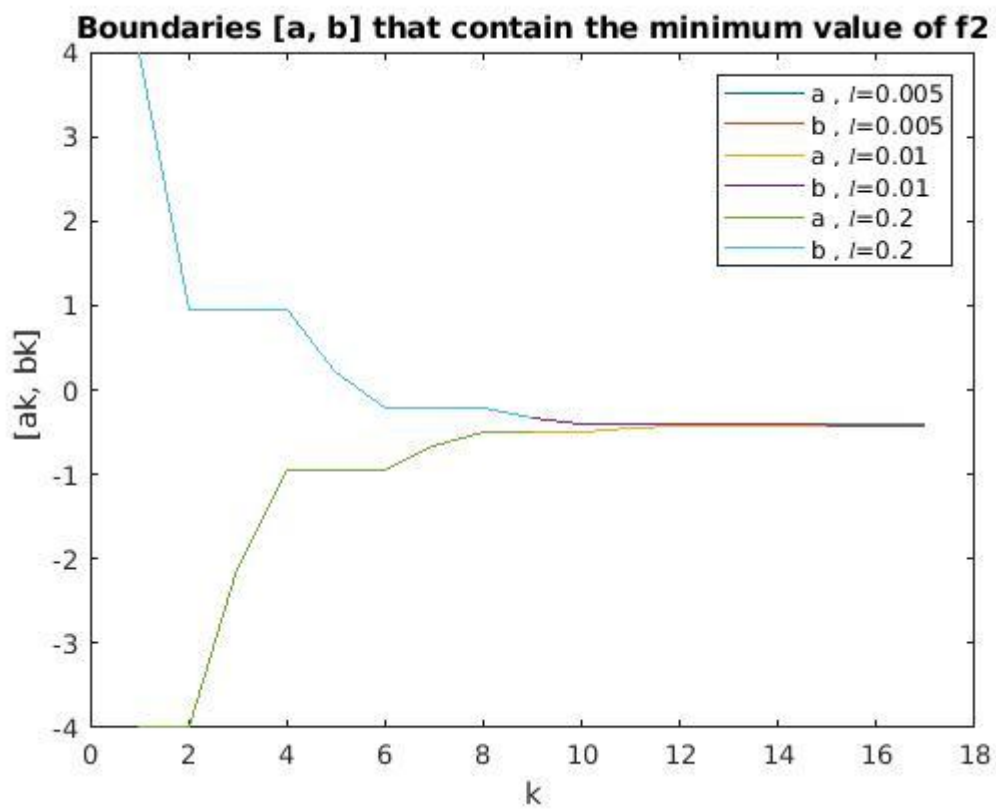
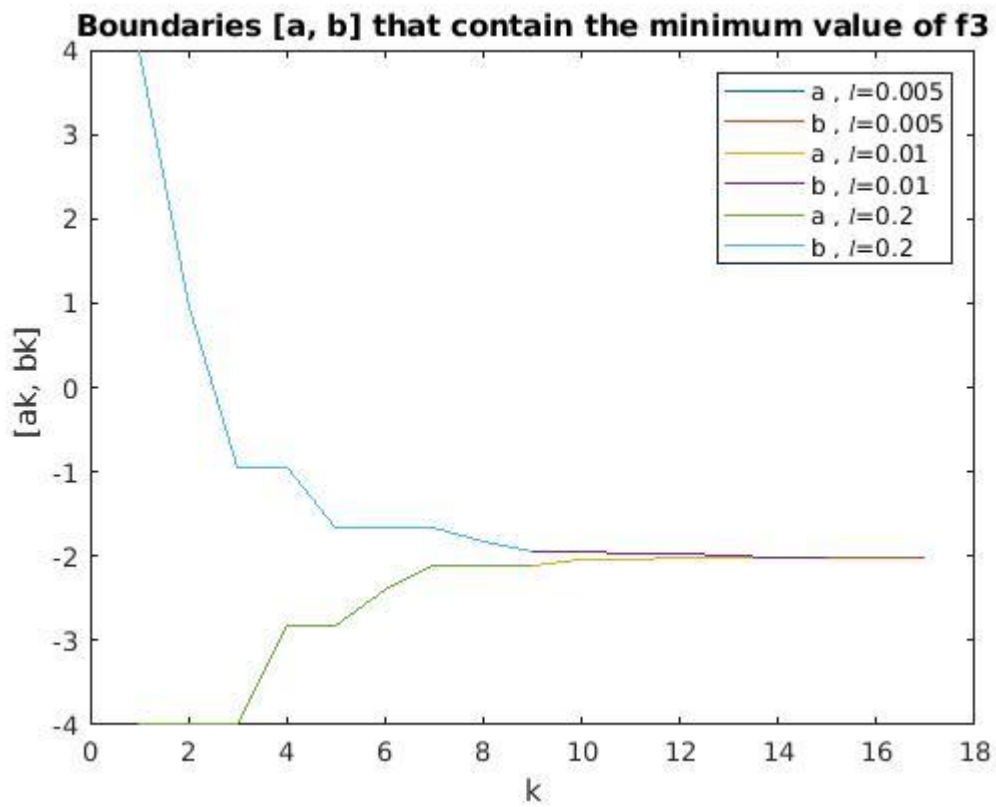
B) Το αρχείο matlab βρίσκεται στον φάκελο thema2 με τίτλο thema2_B. Ισχύει ότι **calculations = 2 * k**





C) Το αρχείο matlab βρίσκεται στον φάκελο thema2 με τίτλο thema2_C.





Θέμα 3 - Μέθοδος Fibonacci

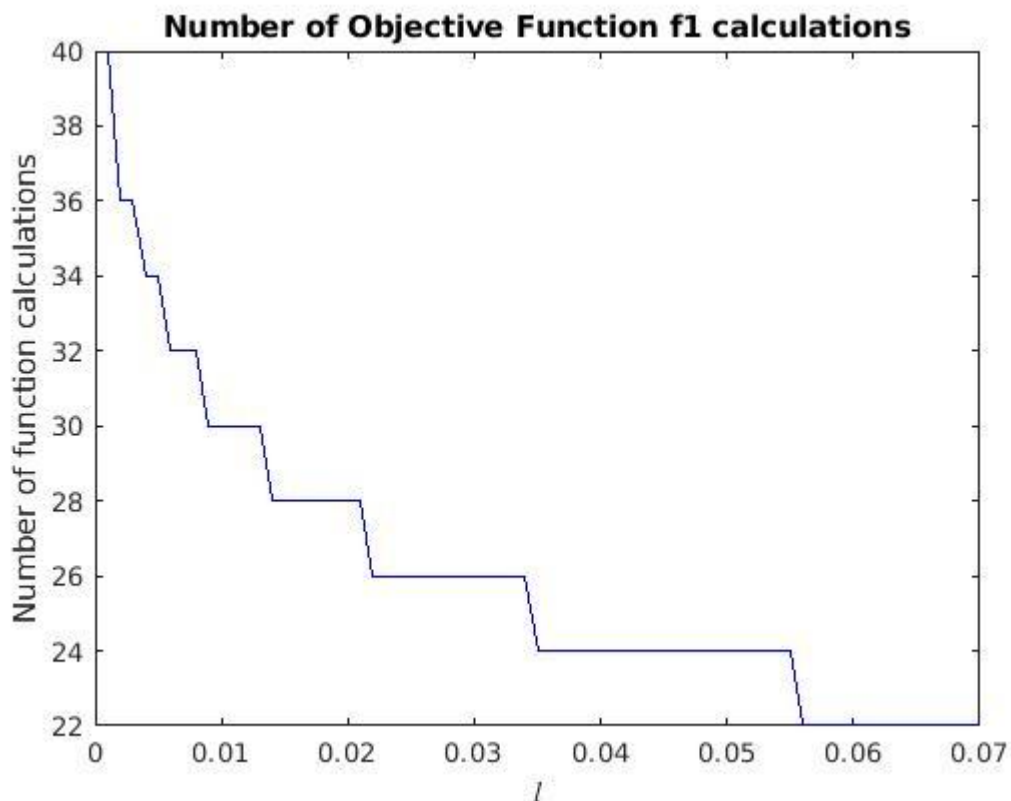
A) Το αρχείο matlab βρίσκεται στον φάκελο thema3 με τίτλο thema3_A.

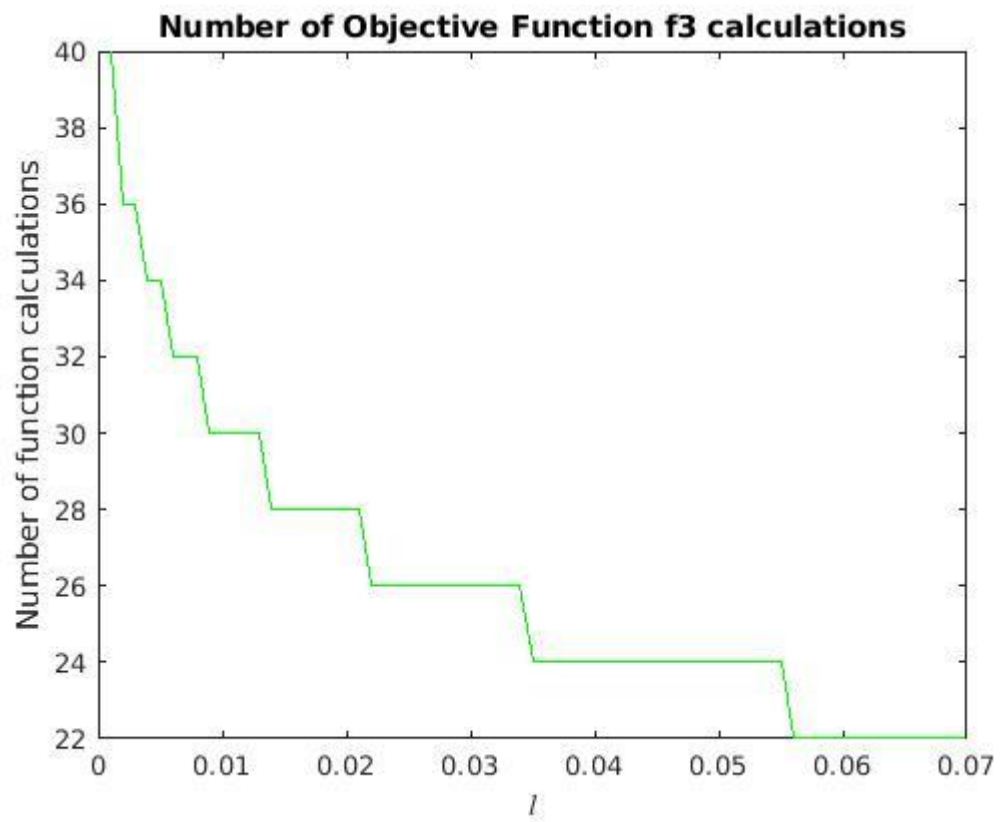
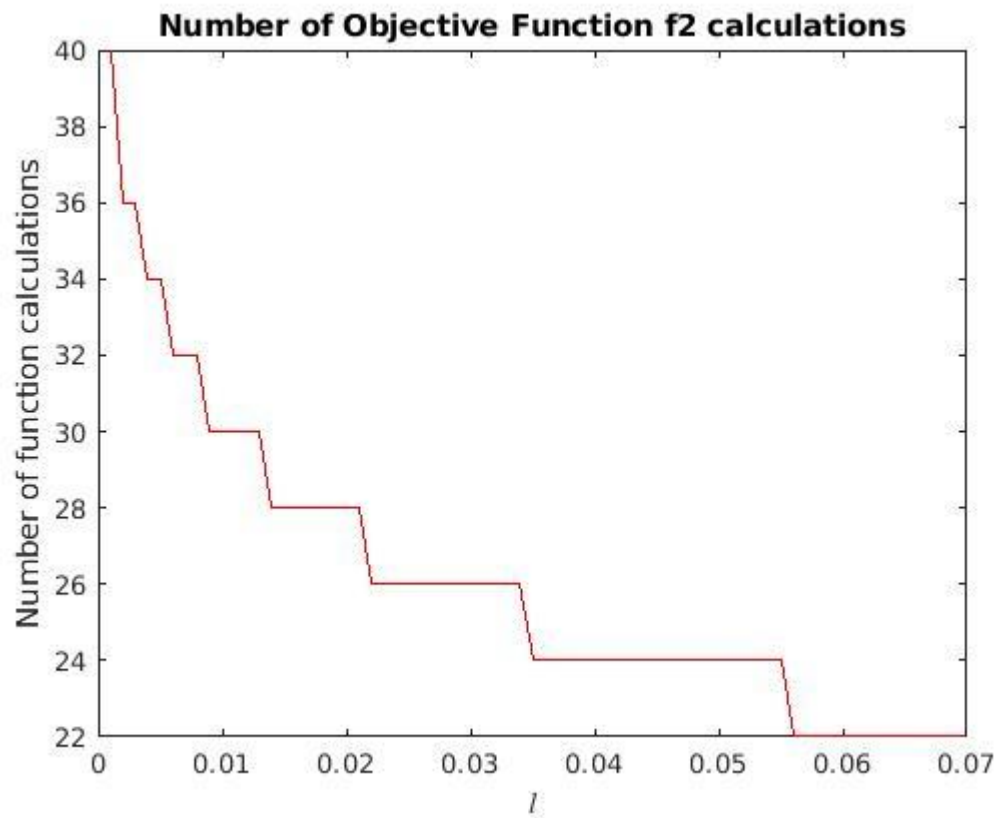
Οι σταθερές είναι $l = 0.01$ και $\gamma = 0.618$. Τα άκρα του διαστήματος $[a_k, b_k]$ στο οποίο εμπεριέχεται η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης υπολογίστηκαν και φαίνονται παρακάτω:

- Για την $f_1(x) \rightarrow [a_k, b_k] = [3.132725, 3.148936]$
- Για την $f_2(x) \rightarrow [a_k, b_k] = [-0.425532, -0.409321]$
- Για την $f_3(x) \rightarrow [a_k, b_k] = [-2.022290, -2.006079]$

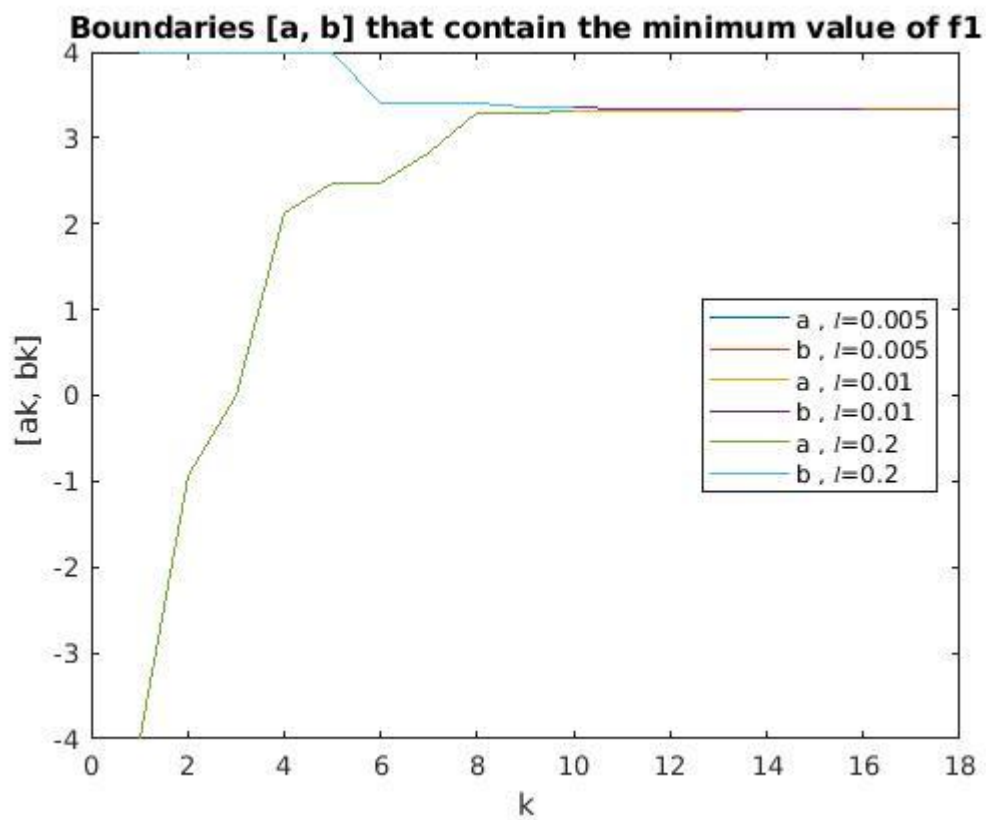
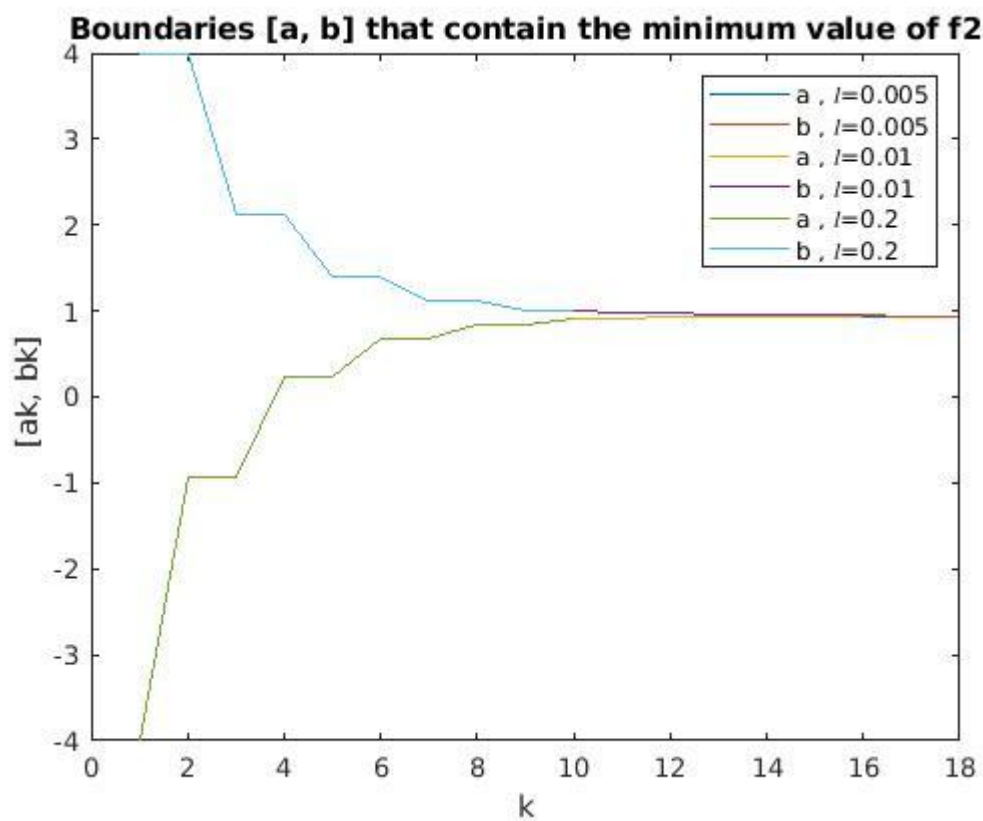
B) Το αρχείο matlab βρίσκεται στον φάκελο thema3 με τίτλο thema3_B.

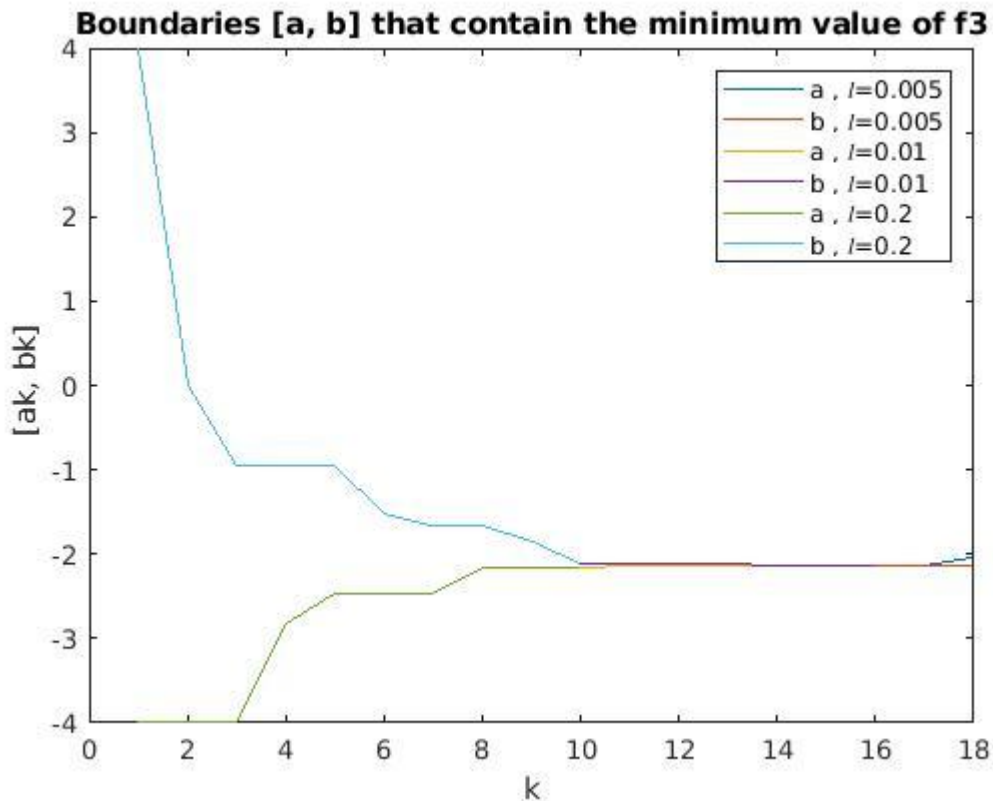
Ισχύει ότι **calculations = 2 * (n-2)+2**





C) Το αρχείο matlab βρίσκεται στον φάκελο thema3 με τίτλο thema3_C.



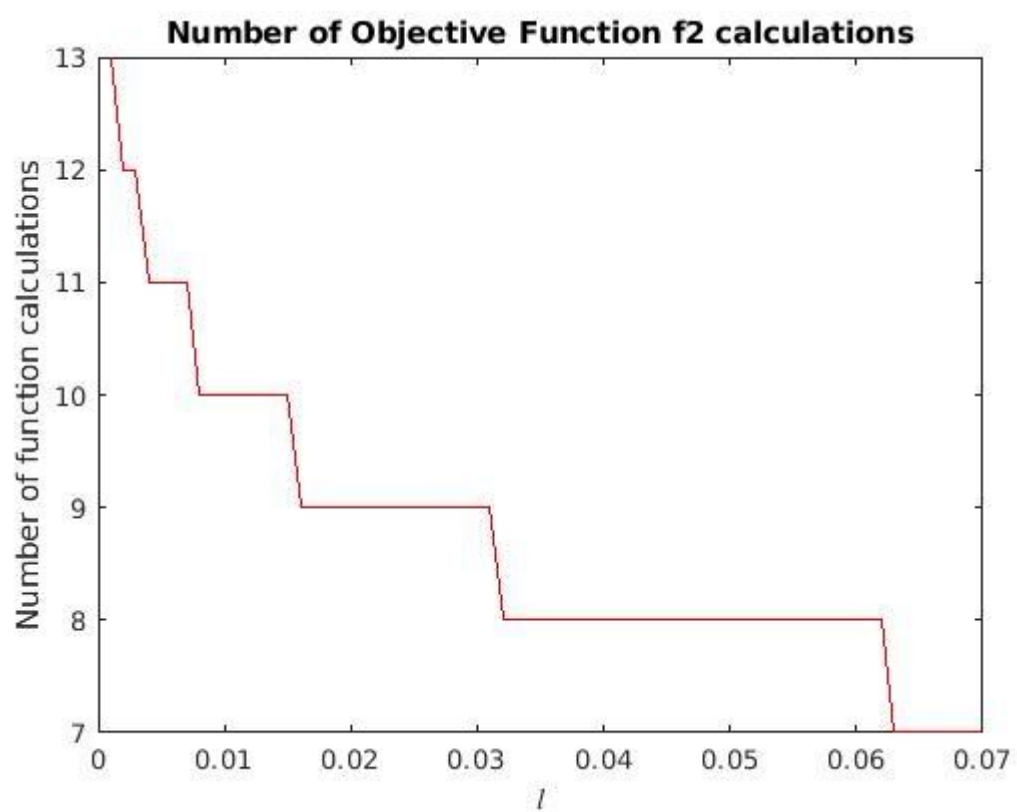
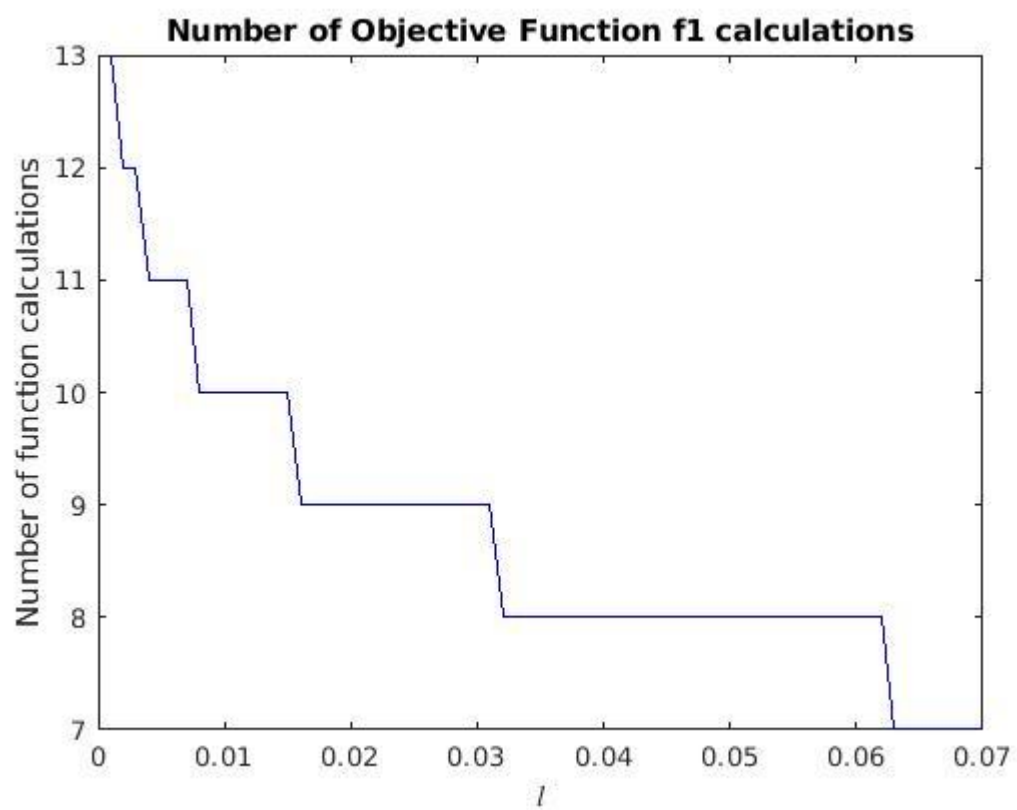


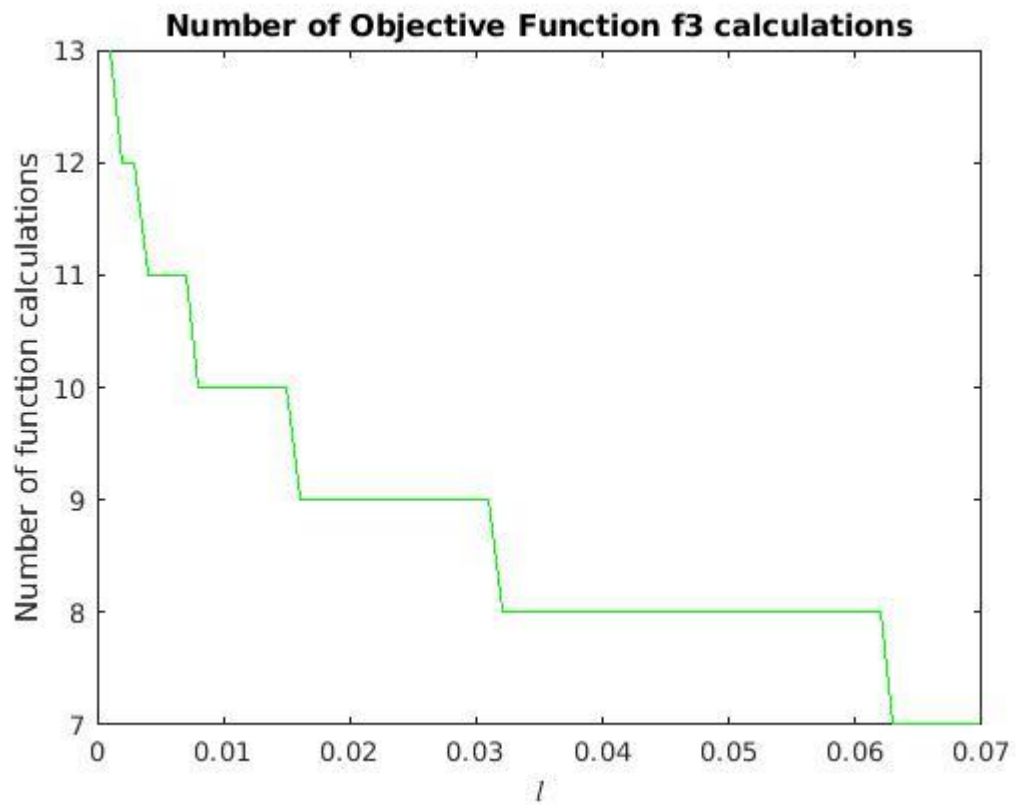
Θέμα 4 - Μέθοδος της Διχοτόμου με χρήση παραγώγου

A) Το αρχείο matlab βρίσκεται στον φάκελο thema4 με τίτλο thema4_A. Η μέθοδος της Διχοτόμου με χρήση Παραγώγου είναι εμφανώς πιο γρήγορη από τις υπόλοιπες, καθώς χρειαζόμαστε μόνο έναν υπολογισμό σε κάθε βήμα, ενώ απαιτούνται και λιγότερα βήματα για να φτάσουμε στο διάστημα ακρίβειας. Οι σταθερές είναι $l = 0.01$. Τα άκρα του διαστήματος $[a_k, b_k]$ στο οποίο εμπεριέχεται η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης υπολογίστηκαν και φαίνονται παρακάτω:

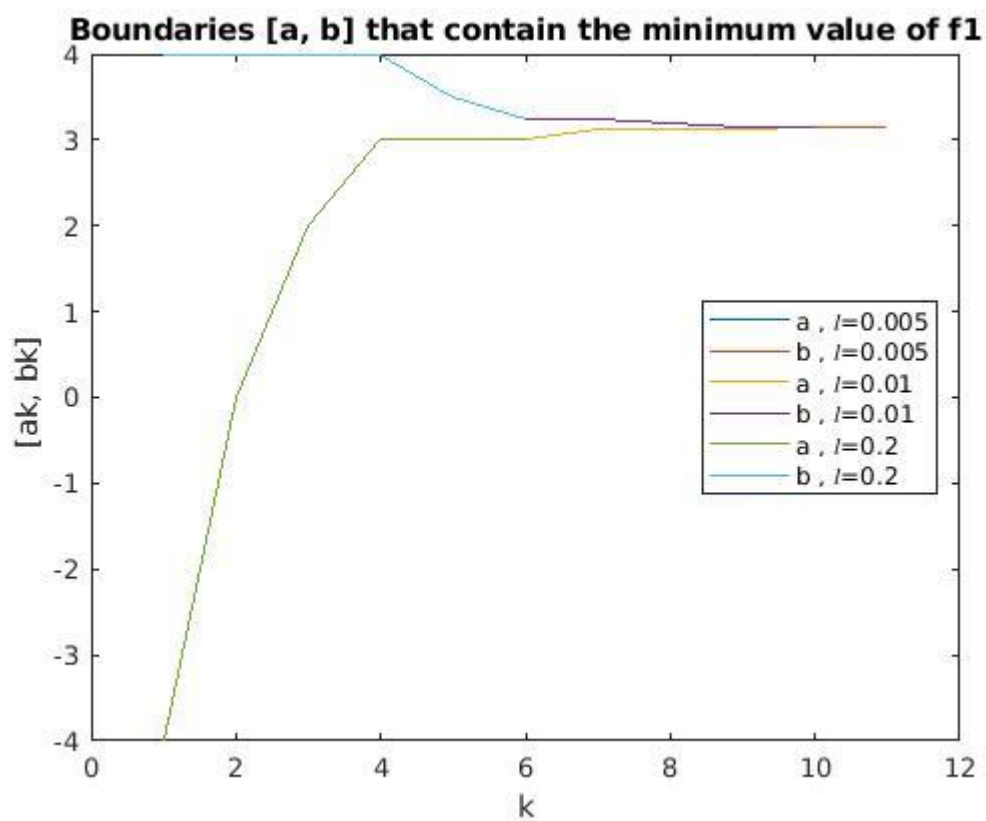
- Για την $f_1(x) \rightarrow [a_k, b_k] = [3.140625, 3.156250]$
- Για την $f_2(x) \rightarrow [a_k, b_k] = [-0.421875, -0.406250]$
- Για την $f_3(x) \rightarrow [a_k, b_k] = [-2.015625, -2.000000]$

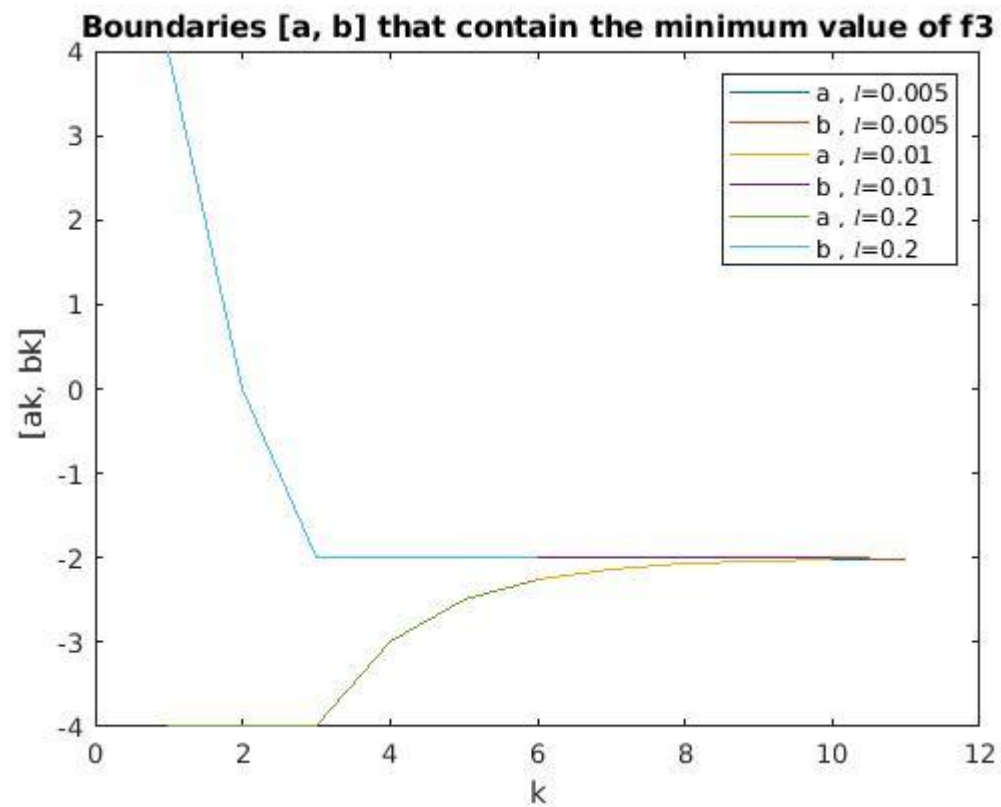
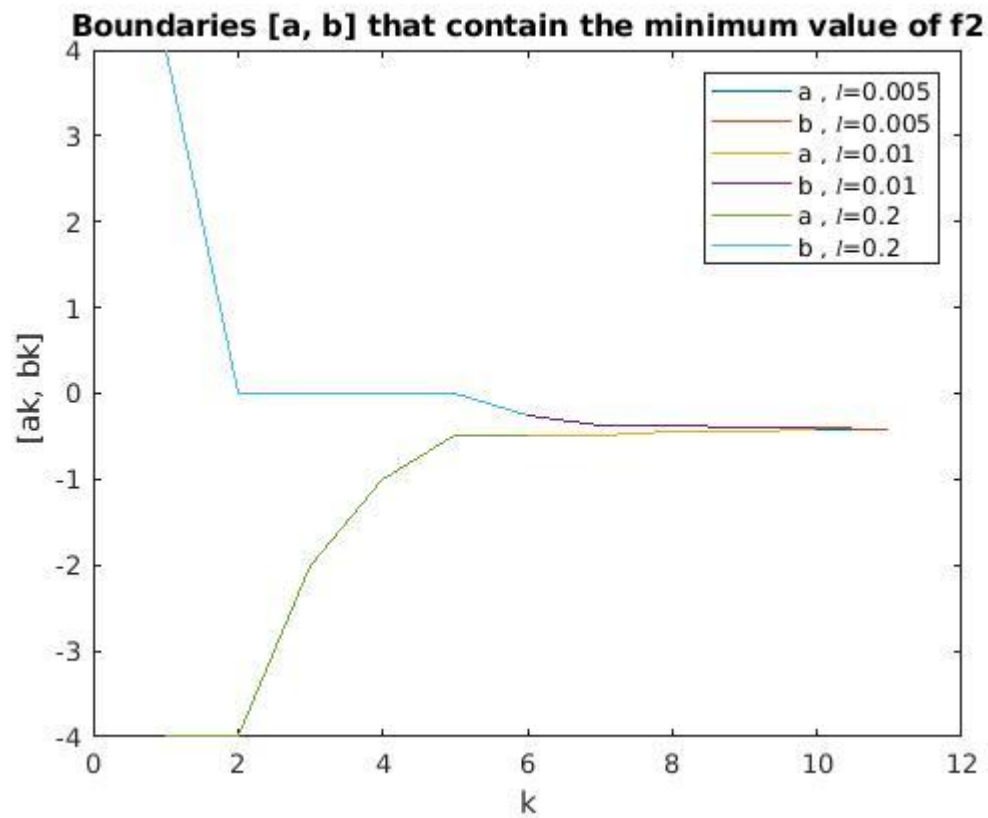
B) Το αρχείο matlab βρίσκεται στον φάκελο thema4 με τίτλο thema4_B. Ισχύει ότι **calculations = n**





C) Το αρχείο matlab βρίσκεται στον φάκελο thema4 με τίτλο thema4_C.





Συμπεράσματα

Είναι φανερό πως η πιο γρήγορη μέθοδος είναι αυτή της Διχοτόμου με χρήση Παραγώγου. Συγκεκριμένα, ισχύει πως $\text{calculations} = n$, ενώ και τα βήματα επανάληψης που χρειάζονται είναι σαφώς λιγότερα. Η συγκεκριμένη μέθοδος ωστόσο έχει ένα θέμα. Απαιτεί τη γνώση και τον υπολογισμό της παραγώγου της συνάρτησής μας, κάτι που δεν είναι πάντα εύκολο. Η πιο αργή μέθοδος από την άλλη, όπως φάνηκε ξεκάθαρα και από τα διαγράμματα που παρουσιάστηκαν, είναι η απλή μέθοδος της Διχοτόμου. Η σχέση $\text{calculations} = 2^k$ αυξάνει σημαντικά την πολυπλοκότητα του αλγορίθμου.