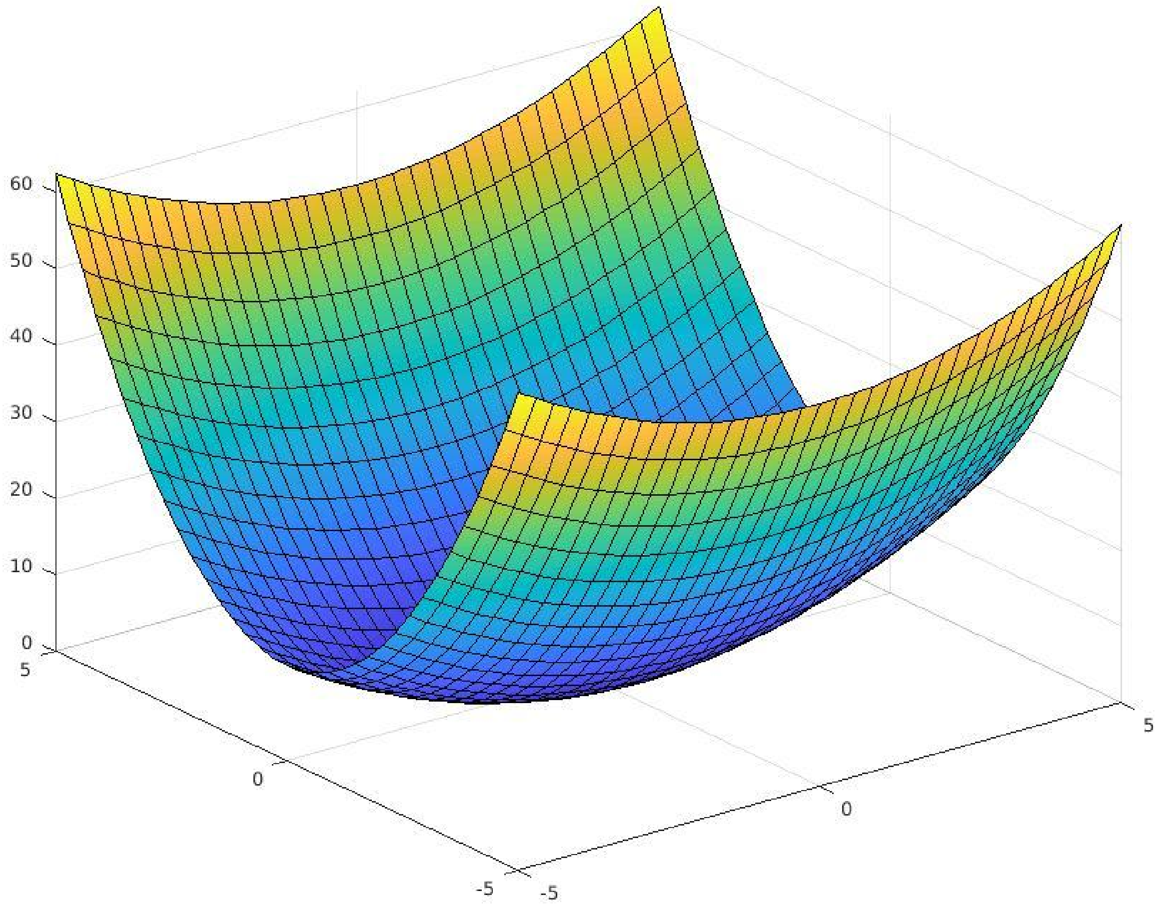
Τεχνικές Βελτιστοποίησης

3η Εργασία

Ιορδάνης Κωνσταντινίδης

ΑΕΜ: 9492

iordaniak@ece.auth.gr



Εισαγωγή

Στα πλαίσια της 3ης εργασίας ασχολούμαστε με το πρόβλημα ελαχιστοποίησης μιας συνάρτησης πολλών μεταβλητών χρησιμοποιώντας την Μέθοδο Μέγιστης Καθόδου με προβολή. Η συνάρτηση μας είναι 2 μεταβλητών και δίνεται από τον τύπο:

$$f\ (x_1, x_2)\ = \frac{1}{2} x_1^2\ + 2\, x_2^2$$

Στο Θέμα 1 ζητείται να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος Μέγιστης Καθόδου χωρίς περιορισμούς με ακρίβεια ε=0.01 , αρχικό σημείο διάφορο του (0,0) και βήμα :
i) $\gamma_k = 0.05$ ii) $\gamma_k = 0.5$ iii) $\gamma_k = 2$ iv) $\gamma_k = 10$

Στην συνέχεια θεωρούμε και τους εξής περιορισμούς:

$$-15 \le x_1 \le 15 \quad \text{και} \quad -20 \le x_2 \le 12$$

Στο Θέμα 2 ζητείται να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος Μέγιστης Καθόδου με προβολή. Συγκεκριμένα με ακρίβεια $\varepsilon = 0.01$, σημείο εκκίνησης το $(10, -5)$, βήμα $\gamma_k = 0.05$ και $s_k = 8$.

Στο Θέμα 3 ζητείται να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος Μέγιστης Καθόδου με προβολή. Συγκεκριμένα με ακρίβεια $\varepsilon = 0.02$, σημείο εκκίνησης το $(-7, 5)$, βήμα $\gamma_k = 0.3$ και $s_k = 10$.

Στο Θέμα 4 ζητείται να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος Μέγιστης Καθόδου με προβολή. Συγκεκριμένα με ακρίβεια $\varepsilon = 0.01$, σημείο εκκίνησης το $(17, -5)$, βήμα $\gamma_k = 0.1$ και $s_k = 0.5$.

Μέθοδος Μέγιστης Καθόδου χωρίς περιορισμούς

Για ευκολότερη ανάγνωση θα χρησιμοποιήσουμε τα σύμβολα (x, y) αντί για (x_1, x_2) . Έτσι έχουμε:

$$f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + 2y^2$$

με: $$\nabla f(x, y) = [x,\ 4y]^T$$

Σύμφωνα με την Μέθοδο της μέγιστης καθόδου, το σημείο $\bar{x}_{k+1} = (x_{k+1}\, ,\ y_{k+1})$ θα ισούται με:

$$\bar{x}_{k+1} = \bar{x}_k - \gamma_k \nabla f(\bar{x}_k)$$

$$(x_{k+1}\, ,\ y_{k+1}) = (x_k\, ,\ y_k) - \gamma_k(x_k\, ,\ 4y_k)$$

$$(x_{k+1}\, ,\ y_{k+1}) = (x_k - \gamma_k x_k\, ,\ y_k - 4\gamma_k y_k)$$

Έτσι έχουμε:

$x_{k+1} = (1- \gamma_k)\, x_k$ και $y_{k+1} = (1- 4\gamma_k)\, y_k$

$$\left|x_{k+1}\right| = \left|(1- \gamma_k)\, x_k\right| \qquad \left|y_{k+1}\right| = \left|(1- 4\gamma_k)\, y_k\right|$$

$$\left|x_{k+1}\right| = \left|1- \gamma_k\right| \left|x_k\right| \qquad \left|y_{k+1}\right| = \left|1- 4\gamma_k\right| \left|y_k\right|$$

$$\frac{\left|x_{k+1}\right|}{\left|x_k\right|} = \left|1- \gamma_k\right| \qquad \frac{\left|y_{k+1}\right|}{\left|y_k\right|} = \left|1- 4\gamma_k\right|$$

Γνωρίζουμε ότι το ελάχιστο της f βρίσκεται στο (0,0) επομένως για $k \to \infty$ θα πρέπει $x_k \to 0$ και $y_k \to 0$. Έτσι έχουμε:

$$\frac{|x_{k+1}|}{|x_k|} < 1$$
$$|1 - \gamma_k| < 1$$
$$-1 < 1 - \gamma_k < 1$$
$$-2 < -\gamma_k < 0$$
$$\gamma_k < 2$$

$$\frac{|y_{k+1}|}{|y_k|} < 1$$
$$|1 - 4\gamma_k| < 1$$
$$-1 < 1 - 4\gamma_k < 1$$
$$-2 < -4\gamma_k < 0$$
$$\gamma_k < 0.5$$

Επομένως καταλήγουμε:

$$\boxed{\gamma_k < 0.5}$$

Θέμα 1

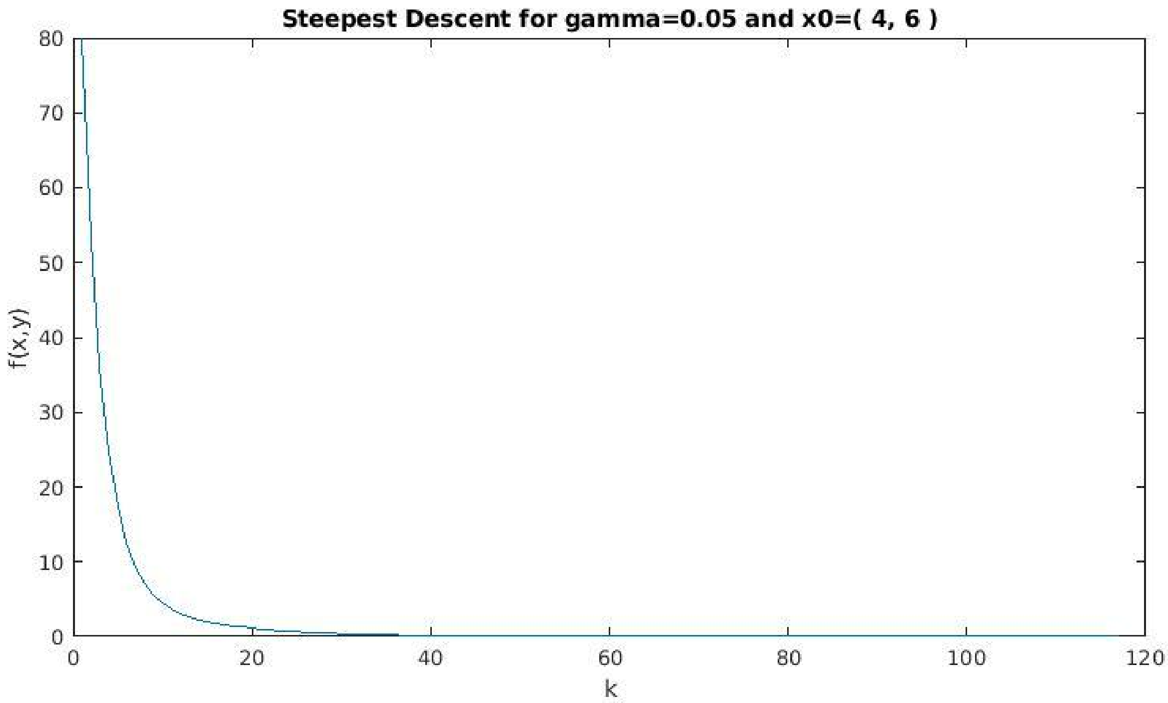
Το αρχείο matlab ονομάζεται thema1.m. Για γ=0.05 η συνθήκη ικανοποιείται και ο αλγόριθμος λειτουργεί με επιτυχία για τα διάφορα αρχικά σημεία.

- i) Για $\gamma_k = 0.05$

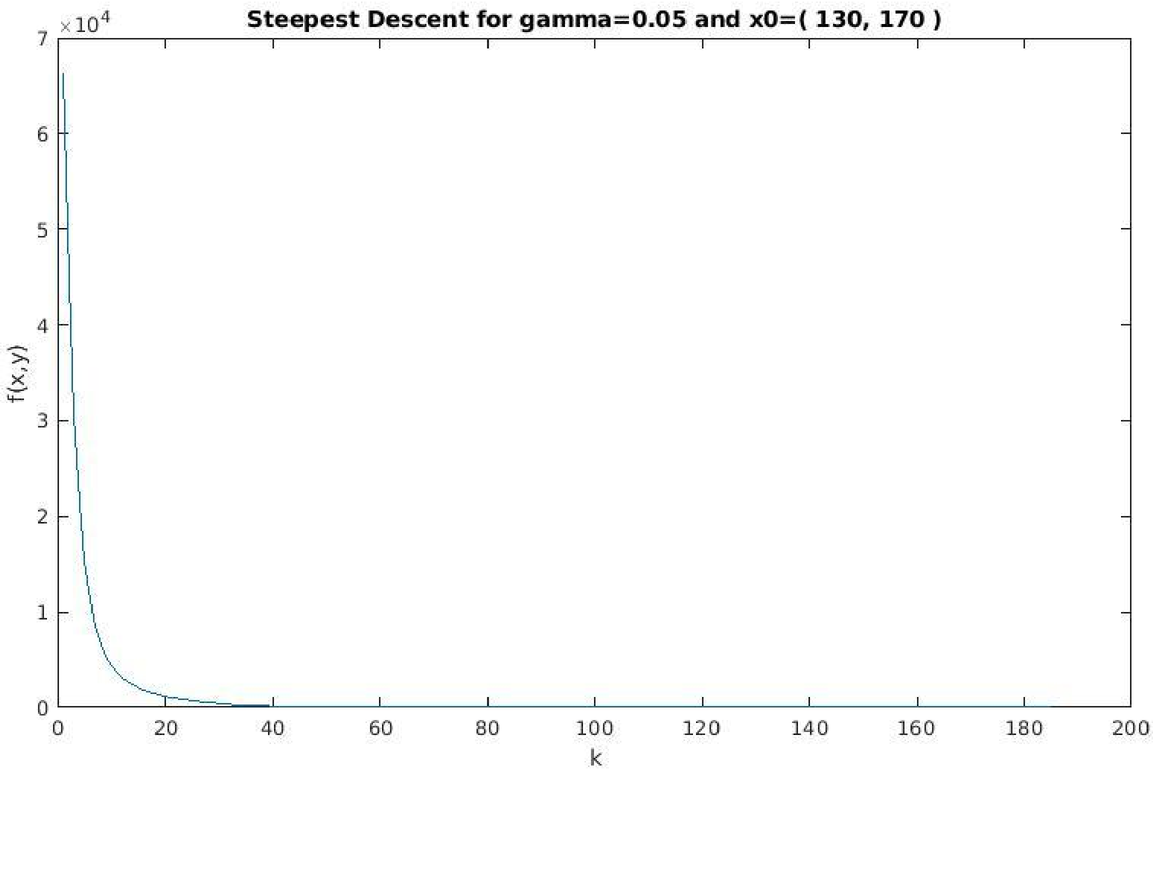
x0 = (1,1) ----> xk = (0.009888, 0.000000) , k=91

x0 = (4,6) ----> xk = (0.009902, 0.000000) , k=117

x0 = (130,170) ----> xk = (0.009836, 0.000000) , k=186



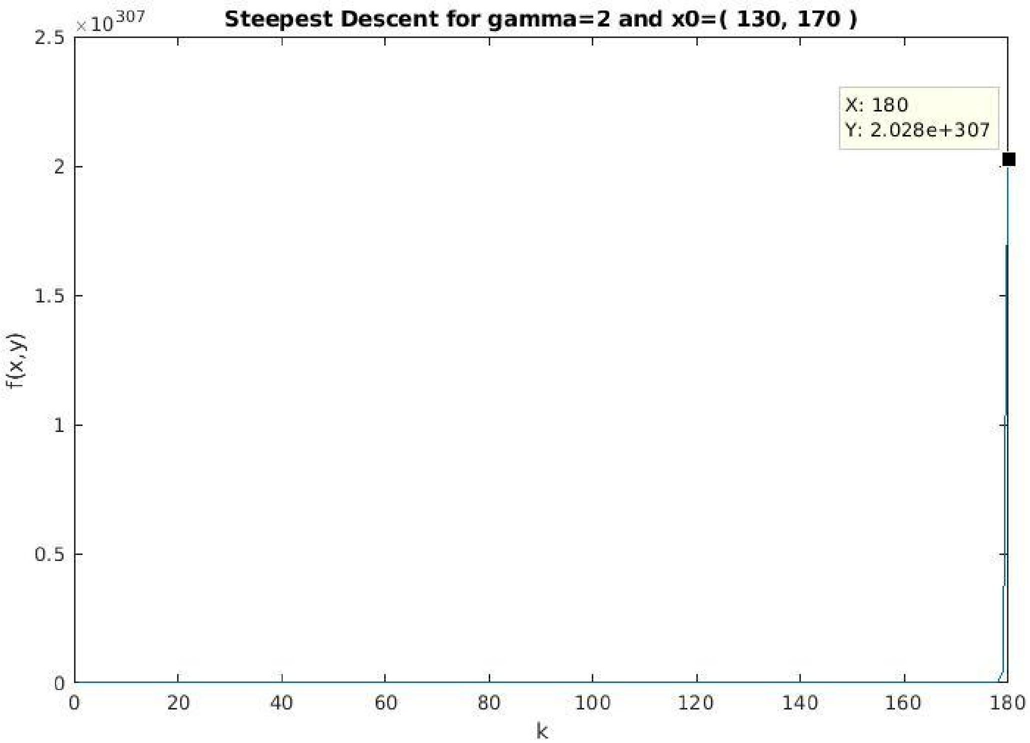
Steepest Descent for gamma=0.05 and x0=(4, 6)
f(x,y)
k

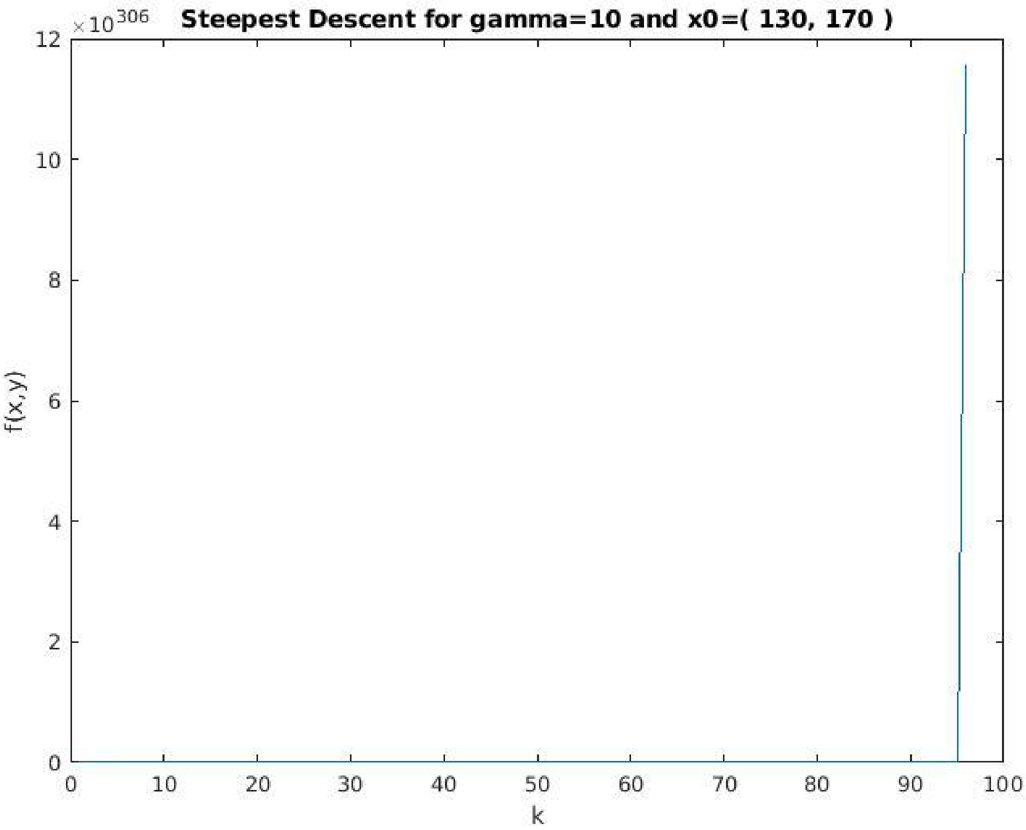


Steepest Descent for gamma=0.05 and x0=(130, 170)
×10^4
f(x,y)
k

Για $\gamma_k = 0.5$ δεν ικανοποιείται η συνθήκη και ο αλγόριθμος δεν σταματάει ποτέ να τρέχει. Αυτό συμβαίνει διότι πέφτει σε οριακό κύκλο και ταλαντώνεται επ άπειρον.

Για $\gamma_k = 2$ και $\gamma_k = 10$ πάλι δεν ικανοποιείται η συνθήκη και από τα αποτελέσματα φαίνεται ότι ο αλγόριθμος είναι ασταθής





Μέθοδος Μέγιστης Καθόδου με προβολή

Εισάγουμε τους εξής περιορισμούς:

$$-15 \leq x \leq 15 \quad \text{και} \quad -20 \leq y \leq 12$$

Θα ερευνήσουμε την συνθήκη που πρέπει να ικανοποιούν τα γ_k και s_k. Σύμφωνα με την μέθοδο της μέγιστης καθόδου με προβολή:

$$x_{k+1} = x_k + \gamma_k (\overline{x_k} - x_k)$$

όπου

$$\overline{x_k} = Pr_X\left\{x_k - s_k \nabla f(x_k)\right\}$$

Αν όμως το $x_k - s_k \nabla f(x_k)$ είναι εφικτό, τότε η μέθοδος της μέγιστης καθόδου με προβολή μετατρέπεται στη μέθοδο της μέγιστης καθόδου χωρίς περιορισμούς. Έτσι έχουμε:

$$\overline{x_k} = Pr_X\left\{x_k - s_k \nabla f(x_k)\right\} = x_k - s_k \nabla f(x_k)$$

και άρα:

$$x_{k+1} = x_k + \gamma_k (\overline{x_k} - x_k)$$

$$x_{k+1} = x_k + \gamma_k (x_k - s_k \nabla f(x_k) - x_k)$$

$$x_{k+1} = x_k - \gamma_k s_k \nabla f(x_k)$$

όπου:

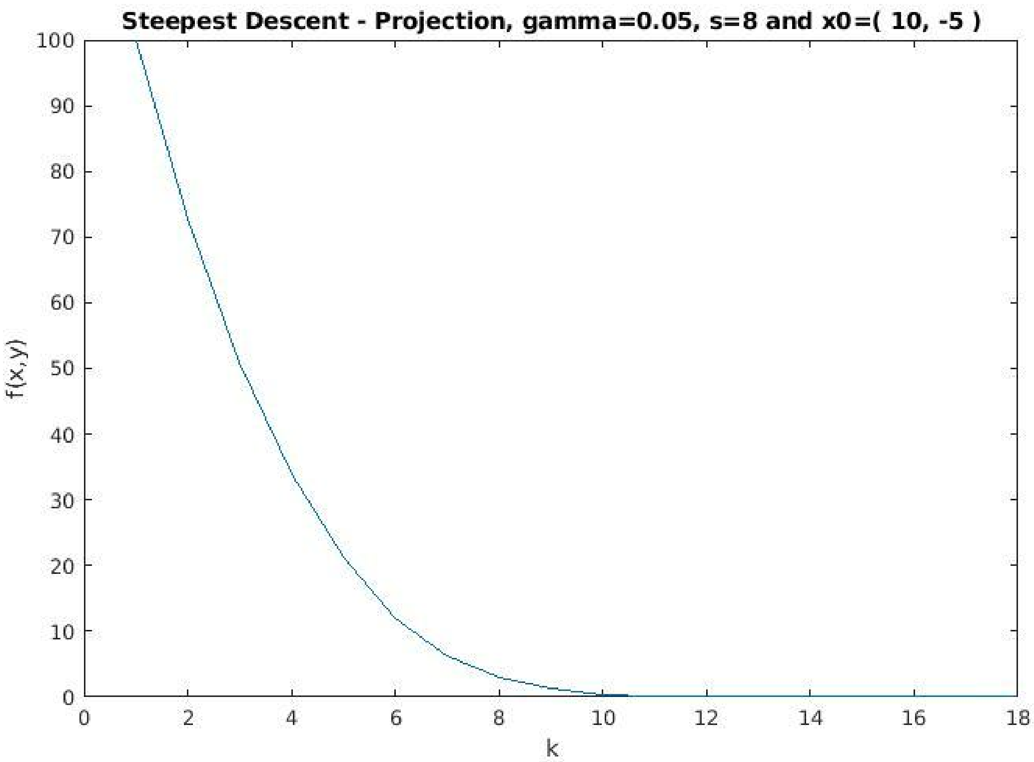
$$\gamma' = \gamma_k s_k$$

και απο την 1η συνθήκη $\gamma' < 0.5$ προκύπτει ότι:

$$\boxed{\gamma_k s_k < 0.5}$$

Θέμα 2

Το αρχείο matlab ονομάζεται thema2.m
Έχουμε $\gamma_k = 0.05$ και $s_k = 8$ επομένως $\gamma_k s_k = 0.4 < 0.5$ άρα τηρείται η συνθήκη και όπως φαίνεται παρακάτω ο αλγόριθμος συγκλίνει με επιτυχία.



- Παρατηρούμε ότι χρειάζονται μόλις k=18 βήματα για να καταλήξει ο αλγόριθμος στο σωστό αποτέλεσμα σε σύγκριση με το Θέμα 1, i) όπου χρειάζονται k=135 βήματα παρόλο που και στις 2 περιπτώσεις έχουμε ίδιο $\gamma_k = 0.05$. Η βελτίωση είναι εμφανής.

- Στο Θέμα 1, iv) είχαμε $\gamma_k = 10$ με αποτέλεσμα να μην ικανοποιείται η συνθήκη $\gamma_k < 0.5$ και ο αλγόριθμος να είναι ασταθής σε αντίθεση με τώρα όπου οι μεταβλητές μας είναι καλώς ορισμένες και ο αλγόριθμος συγκλίνει.

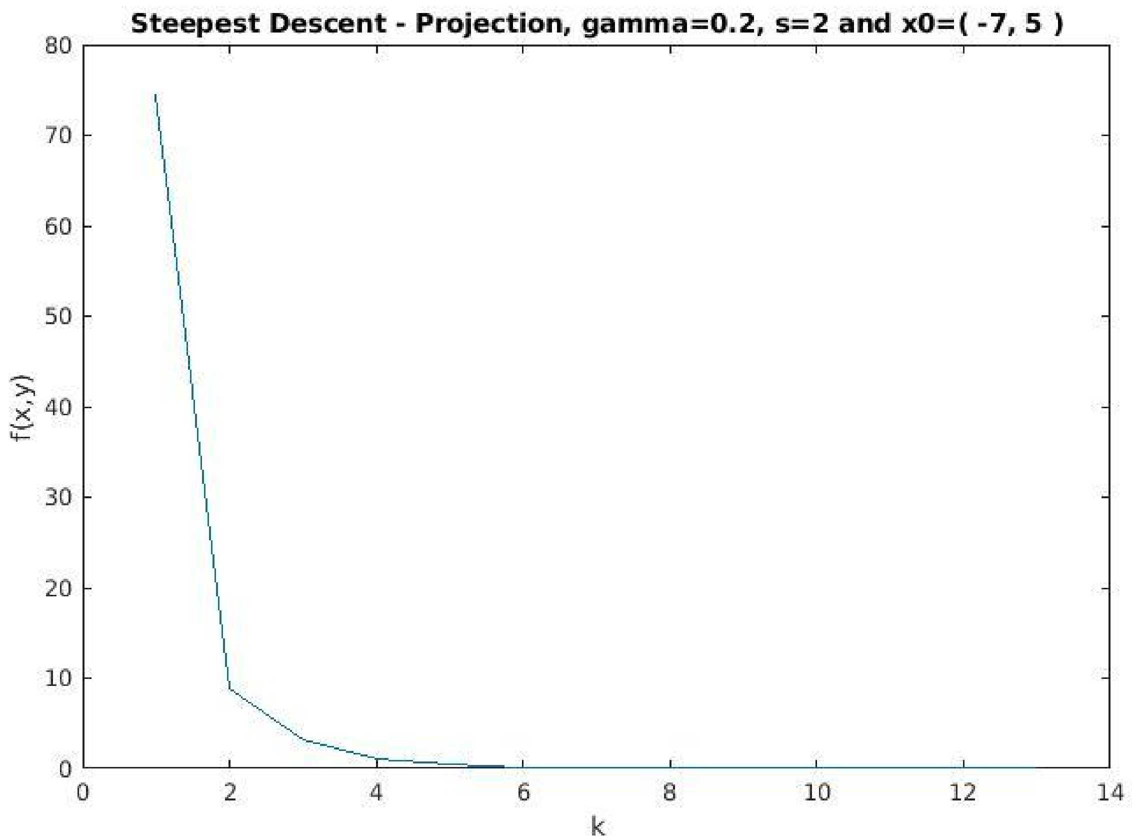
Θέμα 3

Το αρχείο matlab ονομάζεται thema3.m
Έχουμε $\gamma_k = 0.3$ και $s_k = 10 \Rightarrow \gamma_k s_k = 3 > 0.5$ επομένως δεν τηρείται η συνθήκη και ο αλγόριθμος δεν σταματάει να τρέχει αφού ταλαντώνεται.

- Σε αντίθεση, στο Θέμα 1, i) τηρούνται οι αναγκαίες συνθήκες και ο αλγόριθμος συγκλίνει με επιτυχία.

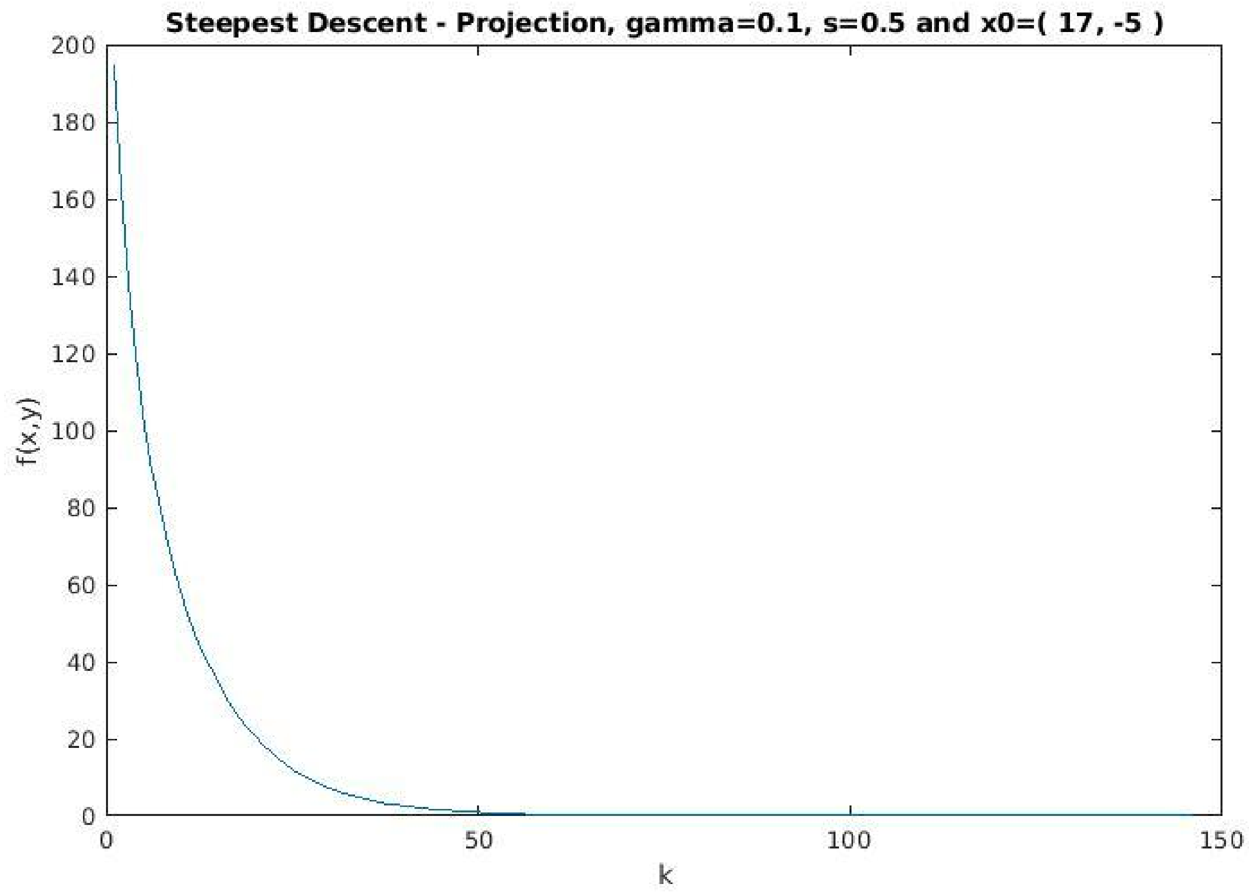
- Στο Θέμα 1, iv) είχαμε $\gamma_k = 10$ με αποτέλεσμα ούτε και εκεί να ικανοποιείται η αναγκαία συνθήκη ($\gamma_k < 0.5$) και ο αλγόριθμος να είναι ασταθής.

- Ένας πρακτικός τρόπος ώστε η μέθοδος να συγκλίνει στο ελάχιστο, είναι να τροποποιήσουμε τις μεταβλητές γ_k και s_k ώστε να τηρείται η συνθήκη $\gamma_k s_k < 0.5$. Έτσι με για $\gamma_k = 0.2$ και $s_k = 2$ έχουμε:



Θέμα 4

Το αρχείο matlab ονομάζεται thema4.m
Έχουμε $\gamma_k = 0.1$ και $s_k = 0.5$ επομένως $\gamma_k s_k = 0.05 < 0.5$ άρα τηρείται η συνθήκη και όπως φαίνεται παρακάτω ο αλγόριθμος συγκλίνει με επιτυχία.



- Παρατηρούμε ότι ο αλγόριθμος χρειάζεται k=147 βήματα για να καταλήξει στο σωστό αποτέλεσμα, δηλαδή υπάρχει μεγάλη αύξηση στον αριθμό βημάτων. Αυτό είναι λογικό καθώς όταν βρεθούμε σε μία περιοχή όπου το $x_k - s_k \nabla f(x_k)$ είναι εφικτό, τότε το γ γίνεται $\gamma_k s_k = 0.05$