Γραμμική Άλγεβρα

12/10/2021

Θεμελιώδεις Εισαγωγικές Έννοιες

Πίνακες

Μήτρα: $A = (a_{ij}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{bmatrix} \in M_{m \times n}(F)$

Πίνακας δύο διαστάσεων

Matrix

- (i,j) ← στοιχείο της μήτρας a_{ij}
- γραμμές m
- στήλες n
- μέγεθος $m \times n$

πλήθος γραμμών × πλήθος στηλών

tensor ← Τανυστής: n-διάστατος πίνακας / διάταξη αριθμών (array)

Διάνυσμα: μονοδιάστατος πίνακας (vectors)

τανυστής 1ης τάξεως

Ίσοι Πίνακες:

Έστω $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{ij}]_{m \times n}$

Τότε $A = B \iff \forall (i,j),\ a_{ij} = b_{ij}$

Παράδειγμα:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ αν $A = B$, Τότε $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $d = 4$

Μηδενικός Πίνακας: ($0_{m,n}$ ή 0)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ανάστροφος Πίνακας: στήλες ⇄ γραμμές

$A = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix} \Rightarrow A^t = [2, 8]$ (Transpose)

$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow B^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$

$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \Gamma^t = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{bmatrix}$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

$(A^t)^t = A$

$(A+B)^t = A^t + B^t$

$(cA)^t = c(A)^t$

$(AB)^t = B^t \cdot A^t$

προσοχη στην αναστροφη

περιέχει σημαντικα στοιχεία (μη μηδενικα) στο πάνω μέρος του πίνακα

Τραπεζοειδής Άνω Πίνακας

όταν $a_{ij} = 0 \ \forall \ i > j$

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

τετραγωνικος πινακας

μη σημαντικα στοιχεία (μηδενικα) στο πάνω μέρος του πίνακα

Τραπεζοειδής Κάτω Πίνακας

όταν $a_{ij} = 0 \ \forall \ i < j$

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 7 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

Τριγωνικός Άνω ή Κάτω Πίνακας

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ένας τετραγωνικός πίνακας A ονομάζεται τριγωνικός άνω ή κάτω, όταν είναι τραπεζοειδής άνω ή κάτω, αντίστοιχα.

Συμμετρικός Πίνακας

λέγεται ένας πίνακας όταν,

$a_{ij} = a_{ji}$, δηλαδή $A = A^t$

πίνακας ίσος με ανάστροφο

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 7 \\ 4 & 0 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

Αντισυμμετρικός Πίνακας

λέγεται ένας πίνακας όταν,

$a_{ij} = -a_{ji}$ δηλαδή $A = -A^t$

τα στοιχεία της κυρίας διαγωνίου

$(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}) = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 7 \\ -4 & -3 & -7 & 0 \end{bmatrix}$$

Διαγώνιος Πίνακας

λέγεται ο πίνακας $a_{ij} = 0 \; \forall \; i \neq j$ συνήθως γράφουμε $\mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{ij})$

Πχ

$\mathrm{diag}(2,4) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ $\quad \mathrm{diag}(1,0,3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Ο διαγώνιος πίνακας είναι πάντα συμμετρικός.

Μοναδιαίος Πίνακας

ή αλλιώς ταυτοτητικός

λέγεται ο n-τετραγωνικός πίνακας $\boxed{I_n} = \mathrm{diag}(1,1,1,\dots,1)$

Συμβολισμός

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Διαγώνιος Ζώνης

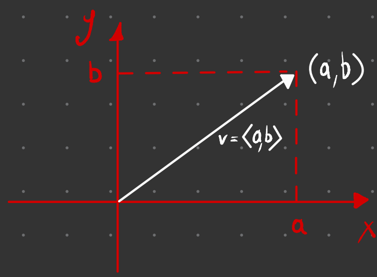
banded matrix

λέγεται ένας τετραγωνικός πίνακας όταν τα στοιχεία a_{ij} είναι μηδέν εκτός απ' αυτά που βρίσκονται στην κύρια διαγώνιο και ορισμένα που βρίσκονται κοντά και παράλληλα προς αυτήν.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

i-οστό διάνυσμα γραμμή

$r_i = [a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{in}]$ πίνακας γραμμή $(1 \times n)$

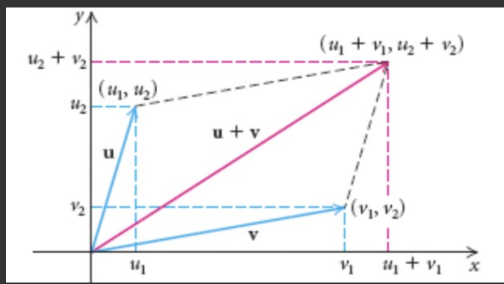


j-οστό διάνυσμα στήλη:

$$C_j = \begin{bmatrix} C_{1j} \\ C_{2j} \\ \vdots \\ C_{mj} \end{bmatrix}$$

συνιστώσες ή συντεταγμένες διανύσματος

πίνακας στήλη $(m \times 1)$



Τετραγωνικός Πίνακας

$m = n$

Στάθμη ή Νόρμα ή Μέτρο

norm

μήκος

Συμβολισμός Νόρμας

$$\boxed{\|v\|} = \sqrt{v \cdot v} = \sqrt{v^t \cdot v} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}$$

Διάνυσμα e_k είναι το διάνυσμα του οποίου όλες οι συνιστώσες είναι 0 πλην της k συνιστώσας που είναι 1, δηλαδή:

$$e_k = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1_k \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ισχύει $\|e^k\| = 1$

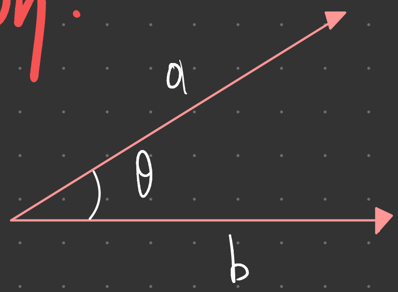
ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Αλγεβρική Περιγραφή:

Έστω u και v είναι δύο n-διάστατα. Τότε το εσωτερικό τους γινόμενο ορίζεται ως ο αριθμός:

$$u \cdot v = u^t v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

Γεωμετρική Περιγραφή:



$$a.b = |a|\,|b|\,\cos\theta$$

Παράδειγμα υπολογισμού εσωτερικού γινομένου

Έστω τα δύο διανύσματα: $A = [1\ 3\ {-5}]$ και $B = [4\ {-2}\ {-1}]$

Να βρεθεί το εσωτερικό γινόμενο $A \cdot B$

$$A \cdot B = [1\ 3\ {-5}]\,[4\ {-2}\ {-1}] = 4 - 6 + 5 = 3$$

Παραδειγμα Υπολογισμος Μέτρου Διανύσματος

Έστω διαννυσμα [1,3,-5]

$$\|v\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2} = \sqrt{1^2+3^2+(-5)^2} = \sqrt{35} = 5.9161$$

Συμβολα Σ και Π

αθροισμα

γινόμενο

Πρόσθεση Πινακων

- Ιδιες διαστάσεις

Πολλαπλασιασμος Πινάκων

- Α πρεπει τον ιδιο αριθμό στηλών με τον αριθμο γραμμων του Β

Αθροισμα όλων των ενός πινακα 2×3

Μπορεί να γραφτει ως: $\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} a_{ij}$

Το γινόμενο των στοιχείων της κύριας διαγωνίου ενός $n \times n$ πίνακα $A=[a_{ij}]$

Μπορεί να γραφτεί ως $\prod_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$

Χρήσιμοι Τύποι

- $\sum_{i=1}^{n} c a_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i$
- $\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$

Πρόσθεση Πινάκων

Άθροισμα (sum) των $m \times n$ πινάκων $A=[a_{ij}]$, $B=[b_{ij}]$, λέγεται ο $m \times n$ πίνακας $\Gamma=[c_{ij}]$ του οποίου κάθε στοιχείο c_{ij} είναι το άθροισμα των αντίστοιχων στοιχείων των A και B, δηλαδή:

$$A+B=\Gamma \iff \forall (i,j),\ a_{ij}+b_{ij}=c_{ij}$$

Παράδειγμα:

$A=\begin{bmatrix} -3 & x & 2 \\ z+3 & 5 & y \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 2 & 5-x & -2 \\ -3 & 4+x & 3-y \end{bmatrix}$ και $C=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

Τότε:

$$A+B=\begin{bmatrix} -3+2 & x+(5-x) & 2+(-2) \\ (z+3)-3 & 5+(4+x) & y+(3-y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 0 \\ z & 9+x & 3 \end{bmatrix}$$

Στο σύνολο $M_{m,n}(\mathbb{R})$ ορίζεται η πρόσθεση πινάκων, και οι ιδιότητές της είναι:

- Προσεταιριστική, $\forall A,B,\Gamma \in M_{m,n}$, $(A+B)+\Gamma = A+(B+\Gamma)$
- Αντιμεταθετική, $\forall A,B \in M_{m,n}$, $A+B=B+A$
- Ουδέτερο Στοιχείο, $\forall A \in M_{m,n}$, $A+O_{m,n} = O_{m,n}+A = A$
- Αντιθετικός Πίνακας, $\forall A \in M_{m,n}$, $A+(-A) = (-A)+A = O_{m,n}$

Ισχύει ότι, $\forall A,B \in M_{m,n}$, $(A+B)^T = A^T+B^T$

Πολλαπλασιασμός Αριθμού με Πίνακα

Γινόμενο του αριθμού λ με τον $m\times n$ πίνακα $A=[a_{ij}]$ λέγεται ο $m\times n$ πίνακας $\Gamma=[c_{ij}]$ το οποίου κάθε στοιχείο c_{ij} είναι το γινόμενο του αντίστοιχου στοιχείο του A με τον λ, δηλαδή: $\lambda A = \Gamma \ \forall (i,j), \lambda a_{ij} = c_{ij}$

scalar product

Το γινόμενο αριθμού με πίνακα ονομάζεται βαθμωτό γινόμενο. Ισχύει ότι:

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall A \in M_{m,n}, (\lambda A)^T = \lambda A^T$$

Πολλαπλασιασμός Πινάκων

Γινόμενο του $m \times n$ πίνακα $A=[a_{ij}]$ με τον $B=[b_{jk}]$ λέγεται ο $m \times s$ πίνακας $C=[c_{ij}]$ του οποίου κάθε στοιχείο c_{ij} είναι το εσωτερικό γινόμενο της i-γραμμής του A και της j-στήλης του B, ή με άλλα λόγια το άθροισμα των γινομένων των n στοιχείων της i-γραμμής του A με τα αντίστοιχα n στοιχεία της j-στήλης του B, δηλαδή:

$$AB = \begin{bmatrix} A_1 B^1 & A_1 B^2 & \cdots & A_1 B^s \\ A_2 B^1 & A_2 B^2 & \cdots & A_2 B^s \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_m B^1 & A_m B^2 & \cdots & A_m B^s \end{bmatrix} = C$$

Έτσι:

$$AB = C \iff \forall (i,j), c_{ij} = (a_{i1}\, a_{i2} \dots a_{in})(b_{1j}\, b_{2j} \cdots b_{nj})^T = A_i B^j$$

$$\iff \forall (i,j), c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{in} b_{nj}$$

$$\iff \forall (i,j), c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Παραδείγματα

1) $A=[2\ 3\ -4]$ και $B=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ $\quad AB=[2\cdot1+3\cdot2-(4\cdot3)] = 2+6-12=-4$

2) $A=[2\ \ 3\ -4]$ και $B=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ $\quad AB=[(2\cdot1+3\cdot2+(-4\cdot3))\ (2\cdot4+3\cdot5+(-4\cdot6))] \iff$

$\iff [-4\ \ -1]$

$$A = \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ 2 & b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ 3 & b_{31} & b_{32} & b_{3} & b_{34} \end{array}$$

A 2×3 $\quad$ B 3×4

Ίδια άρα υφίσταται AB

Διαστάσεις AB

Έστω $AB = C$

$$\underset{2\times4}{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \end{bmatrix}$$

$$c_{12} = (a_{11} \times b_{12}) + (a_{12} \times b_{22}) + (a_{13} \times b_{32})$$

Δυνάμεις Πίνακα

Επειδή στον πολλαπλασιασμό πινάκων δεν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα, επίσης δεν ισχύουν διάφορες ταυτότητες από την άλγεβρα στο σώμα των πραγματικών.

Παράδειγμα με δυνάμεις πίνακα:

$\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ν.δο: $A^2 = 4A - 3I_2$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16-3 & -12 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & -12 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$4A - 3I_2 = 4\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & -12 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & -12 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

Γινόμενο Kronecker

Αν A είναι ένας ένας $m\times n$ και B ένας $p\times q$ τότε ο $mp\times nq$ πίνακας:

Προκύπτει πίνακας μεγαλύτερων διαστάσεων σε αντίθεση με το απλό γινόμενο

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}$$

Σύμβολο γινομένου Kronecker

λέγεται τανυστικό γινόμενο ή ευθύ γινόμενο ή γινόμενο Kronecker

tensor product

direct product

Kronecker Product

Έστω

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$$

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B \\ a_{21}B & a_{22}B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} & a_{12}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} \\ a_{21}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} & a_{22}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Δεν ισχύει $A \otimes B = B \otimes A$

Ιδιότητες γινομένου Kronecker

- Έστω λ σταθερά ισχύει: $\lambda(A\otimes B) = (\lambda A)\otimes B = A\otimes(\lambda B)$
- $(A+B)\otimes\Gamma = A\otimes\Gamma + B\otimes\Gamma$

  $\Gamma\otimes(A+B) = \Gamma\otimes A + \Gamma\otimes B$
- $(A\otimes B)^{+} = A^{+}\otimes B^{+}$
- $(A\otimes B)\otimes\Gamma = A\otimes(B\otimes\Gamma)$
- $I_m\otimes I_n = I_{mn}$
- $(A\otimes B)(\Gamma\otimes\Delta) = A\Gamma\otimes B\Delta$, ισχύει μόνο όταν ορίζονται τα γινόμενα $A\Gamma$, $B\Delta$
- $(A\otimes B)^{-1} = A^{-1}\otimes B^{-1}$
- Η δύναμη Kroenecker με $A^{[n]}$ ή $A^{\otimes n}$

Ευθύ Άθροισμα Πινάκων

Αν $A_1, A_2, A_3, \dots, A_s$ τετραγωνικοί πίνακες διαστάσεων $n_1, n_2, n_3, \dots, n_s$ αντίστοιχα, τότε ~~προκύπτει~~ προκύπτει τετραγωνικός πίνακας ← direct sum διαστάσεων $(n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_s)$ και λέγεται ευθύ άθροισμα των $A_1, A_2, \dots, A_s$ και συμβολίζεται με:

$$A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_s \quad \acute{\eta} \quad \sum_{i=1}^{s} \oplus A_i \quad \acute{\eta} \quad \operatorname{diag}(A_1, A_2, \dots, A_s)$$

Έστω

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

$A \oplus B$:

$$A \oplus B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & 0 & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

Ορίζουσα (determinant) του 2×2 πίνακα $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ συμβολίζεται με:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad |A|, \quad \det(A)$$

υπολογίζεται από $a_{11}\times a_{22} - a_{21}a_{12}$

Ίχνος (trace) ενός τετραγωνικού $n\times n$ πίνακα A ονομάζουμε το άθροισμα της διαγωνίου $tr(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

- $tr(A) = tr(A^T)$
- Αν $A_{m\times n}$ κ $B_{n\times m}$ τότε: $tr(AB) = tr(BA)$

Εύρεση Αντιστρόφου Πίνακα

~ Για να υπάρχει t θα πρέπει $det(A) \neq 0$

λείπει γραμμή i και στήλη j

~ Βρίσκω προσαρτημένο πίνακα $A_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} x & y \\ 2 & \theta \end{vmatrix}$

~ Πολλαπλασιάζω με $\frac{1}{det(A)}$

Άρα προκύπτει ο τύπος: $(-1)^2 1 + (-1)^3 2 + (-1)^4 3$

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \times \text{προσαρτημένο } A$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$rref(A) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Τριγωνική Παραγοντοποίηση

Έστω $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

L = κάτω τριγωνικός πίνακας

U = άνω τριγωνικός πίνακας

1. $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ Μοναδιαίος πίνακας

1. $U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ Παίρνουμε τον πίνακα A

2. $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ αντίθετος

2. $R_1 * -3$ $U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ Θα δημιουργήσουμε rref πίνακα

3. $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. $R_1 * -1$ $U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Κανονας Cramer D, D_{x_1}, D_{x_2}

Gauss - Jordan = rref

Python $A[i, :]$ = i-η γραμμή πινακα

Jordan -> παιρνω πινακα rref,

διαιρω τελευταια γραμμη με τον εαυτο της

μηδενιζω απο κατω προς τα πανω

μεχρι ολοι οι οδηγοι να χουν μηδενικα από πανω

Ανεξάρτητα διανύσματα -> πλήθος γραμμών = rank = rref καμία 0 γραμμ

-> $\lambda = 0$

Εξαρτημένα -> $\lambda \neq 0$

Αν δυο διανύσματα δεν είναι πολλαπλάσια, είναι γραμμικά ανεξάρτητα