Διακριτά Μαθηματικά

Διακριτά Μαθηματικά - Στεφανίδης   Εύδοξος

Κατεβάζω PDF βιβλίου

Modulo

Συμβολισμός $\mathbb{Z}$, mod

mod, ακέραιο υπόλοιπο διαίρεσης

Απλή πρόταση: ο αριθμός 2 είναι άρτιος

Σύνθετη πρόταση: ο αριθμός 5 δεν είναι άρτιος

τελεστής

Όταν λέμε ότι ένα επιχείρημα είναι **έγκυρο** εννοούμε ότι ο τύπος επιχειρήματος (Τ.Ε) είναι **έγκυρος**

Ο τ.Ε

$$\frac{\begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ P_k \end{array}}{q}$$

είναι έγκυρος, όταν και μόνο όταν η συνεπαγωγή $P_1 \wedge P_2 \wedge P_k \rightarrow q$ είναι ταυτολογία. Δηλαδή όταν μόνο και μόνο όταν ισχύει η λογική συνεπαγωγή:

$$P_1 \wedge P_2 \wedge P_k \Rightarrow q$$

Τα παραπάνω δείχνουν την στενή σχέση των εννοιών επιχείρημα, λογική συνεπαγωγή, ταυτολογία.

Για να ελέγξουμε αν ένας Τ.Ε είναι έγκυρος:

1. Αναγνωρίζω τις προκείμενες και το συμπέρασμα του ΤΕ.
2. Γράφουμε τον πίνακα αλήθειας που εμφανίζει τις τιμές αλήθειας, όλων των υποθέσεων και του συμπεράσματος.
3. Αν ο πίνακας αλήθειας περιέχει μία γραμμή στην οποία όλες οι προκείμενες είναι αληθείς και το συμπέρασμα είναι ψευδές τότε ο τύπος επιχειρήματος δεν είναι έγκυρος, διαφορετικά σε κάθε γραμμή όπου όλες οι προκείμενες είναι αληθείς, το συμπέρασμα είναι επίσης αληθές, τότε ο Τ.Ε είναι έγκυρος

Κάθε μια απο τις λογικές συνεπαγωγες γινεται ταυτολογία αν αντικαταστησουμε το $\rightarrow$ με $\Rightarrow$

Δηλ $p \rightarrow q$

1) Επαληθεύστε με χρήση πίνακα αληθείας την λογική συνεπαγωγή $((p \to q) \land \neg q) \Rightarrow \neg p$

p	q	$p \to q$	$\neg q$	$\neg p$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	1	1	0	0

Άρα είναι έγκυρος κ επαληθεύεται η λογική συνεπαγωγή

Πληθικός αριθμός δυναμοσυνόλου

Έστω $A: \{a, b, c\}$ $|A| = k + 1 = 3$ (P_{k+1})

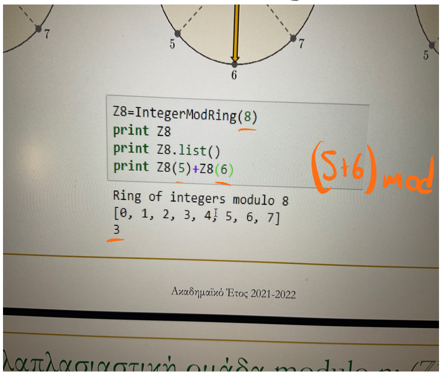
$A_1: \{b, c\}$ $|A_1| = k = 2$ $P(k)$

Σχέση Ισοτιμίας

$a = b \pmod{n} \iff a-b = k \cdot n$, διαβάζεται a ισότιμο με b modulo n

πχ.

$$3 = 42 \pmod{13} \iff 3-42 = k \cdot 13 \iff -39 = k \cdot 13 \iff k = -3$$



$(5+6) \bmod 8 = 3$

not : $\neg$ xor : $\oplus$

and : $\wedge$ αν... τότε (implies) : $\rightarrow$

or : $\vee$ αν και μόνο αν (iff) : $\leftrightarrow$

$\forall x P(x)$: Για κάθε x, x είναι P

$\exists x P(x)$: Για τουλάχιστον ένα x, x είναι P

πχ

Για κάθε πραγματικό αριθμό n, υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός m, όπου $m^2=n$

$\forall n\in\mathbb{R}\ \exists m\in\mathbb{R} : m^2=n$ ή $\forall n\in\mathbb{R}\ \exists m\in\mathbb{R} : P(n,m) : m^2=n$

$\forall x\ P(x) \Leftrightarrow P(1)\wedge P(2) \dots \wedge P(n)$

$\exists x\ P(x) \Leftrightarrow P(1)\vee P(2) \dots \vee P(n)$

Απόδειξε ότι $\neg\forall x[P(x)] \Leftrightarrow \exists x[\neg P(x)]$:

$$\begin{aligned}
\neg\forall x[P(x)] &\Leftrightarrow \neg(P(1)\wedge P(2)\wedge \dots \wedge P(n)) \\
&\Leftrightarrow \neg P(1)\vee\neg P(2)\vee \dots \vee\neg P(n) \\
&\Leftrightarrow \exists x[\neg P(x)]
\end{aligned}$$

$\forall x P(x) \Leftrightarrow \neg\exists x[\neg P(x)]$

$\exists x P(x) \Leftrightarrow \neg\forall x[\neg P(x)]$

$\neg\forall x P(x) \Leftrightarrow \exists x[\neg P(x)]$

$\neg\exists x P(x) \Leftrightarrow \forall x[\neg P(x)]$

Υποθετικός Συλλογισμός

$$\begin{array}{l} P \to Q \\ Q \to R \\ \hline \therefore P \to P \end{array} \qquad \begin{array}{l} P_1 \to P_2 \\ P_2 \to P_3 \\ \dots \\ P_{n-1} \to P_n \\ \hline P_1 \to P_n \end{array}$$

Μέθοδοι απόδειξης

1. Ευθεία μέθοδος απόδειξης / Ευθύ επιχείρημα
   Θέλω να αποδείξω $P \to Q$
   Υποθέτω P αληθές και δείχνω Q

2. Αντιθετοαντιστροφή απόδειξη
   Υποθέτω $\neg Q$ και δείχνω $\neg P$

3. Με αντίφαση / άτοπο
   Θέλουμε να αποδείξουμε Q
   Υποθέτω $\neg Q$
   προσπαθώ να φτια $Q \vee \neg Q$ και $\neg\neg Q$ ώστε να προκύψει Q

4. Με περιπτώσεις
   Θέλουμε να αποδείξουμε $p \vee q \to Q$

υποθέτω p	υποθέτω q
βρίσκω Q	βρίσκω Q

5. Μαθηματική Επαγωγή
   Το πρώτο στοιχείο ισχύει
   Υποθέτω ότι $P(i)$ ισχύει για κάθε $i < n$
   δείχνω για $n+1$

Χαρακτηριστικό διάνυσμα Παράδειγμα

$A = \{1, 3, 4, 5\}$ $\quad$ $A = \{1, 0, 1, 1, 1\}$

$A^c = \{2\}$ $\quad$ $A^c = \{0, 1, 0, 0, 0\}$

Πληθικός Αριθμός

λέγεται ο αριθμός των στοιχείων του συνόλου και συμβολίζεται ως $|a|$ ή $\#a$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Πληθικός Αριθμός Δυναμοσυνόλων

$$|P(A)| = 2^{|A|}$$

πληθικος αριθμος καρτεσιανού γινομένου = γινόμενο πληθικων αριθμων των συνόλων αυτών

Ισότητες

$\vee = \cup = +$ $\quad$ $A - B = x \in A \wedge x \notin B$

$\wedge = \cap = \times$

$\neg = {}^c$

Αρχή του Περιστερώνα

Σε k κουτιά, θα υπάρχει ένα κουτί που θα περιέχει περισσότερα από 1 αντικείμενα, αν αυτά συνολικά είναι $k+1$

Έστω m αντικείμενα σε n κουτιά, όπου $m>n$.
τότε θα υπάρχει τουλάχιστον 1 κουτί με $\lceil m/n \rceil$ αντικείμενα, δηλ $\lceil m/n \rceil > 1$

Αμφιμονοσήμαντη Αντιστοιχία

Έστω $f: A \to B$, τότε $|A| = |B|$

Κανόνας Αθροίσματος

Μη κενά σύνολα $A_1, A_2 \ldots A_k$ αποτελούν διαμέρισμα A τότε
$|A| = |A_1| + |A_2| + \ldots |A_k|$

Αν $A_1, A_2, \ldots, A_k$ δεν είναι αν δυο ξένα υποσύνολα τότε
$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

Συνδιαστική

n^m Διατεταγμένη Επιλογή με επανάληψη

$n^{\underline{m}} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)$ Διατεταγμένη επιλογή χωρίς επανάληψη

αν $m=n$, $=n!$

$$\binom{n}{m} = C(n,m) = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$ Μη διαζεταγμένη επιλογή χωρίς επανάληψη

$$\binom{n+m-1}{m} = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}$$ Μη διαζεταγμένη με επανάληψη

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Διώνυμο Newton

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}a^n = \sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}a^{n-m}b^m$$

$$(a+b)^2 = \frac{2!}{0!2!}a^2b^0 + \frac{2!}{1!1!}a^1b^1 + \frac{2!}{0!2!}a^0b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Πχ. $(2a-b)^4$

$$
\begin{aligned}
&= \binom{4}{0}(2a)^4(-b)^0 && = (2a)^4 \\
&+ \binom{4}{1}(2a)^3(-b)^1 && - 4(2a)^3b \\
&+ \binom{4}{2}(2a)^2(-b)^2 && + 6(2a)^2b^2 \\
&+ \binom{4}{3}(2a)(-b)^3 && - 4(2a)b^3 \\
&+ \binom{4}{4}(2a)^0(-b)^4 && + b^4
\end{aligned}
$$

$$\frac{4!}{2!2!} = \frac{4\cdot 3\, 2!}{2!}$$

Ιδιότητες Σχέσεων

- Ανακλαστική: $\forall x \in A$, xRx
- Συμμετρική: $\forall x, y \in A$, για xRy ισχύει yRx
- Αντισυμμετρική: $\forall x, y \in A$, για xRy και yRx, ισχύει $x = y$
- Μεταβατική: $\forall x, y, z \in A$, για xRy και yRz, ισχύει xRz

<u>Απόδειξε</u> ότι αν R_1 και R_2 είναι ανακλαστικά, τότε είναι και το $R_1 \cap R_2$.

$x \in R_1, R_2$

$x \in R_1 \cap R_2$

$-$ $R_1 \cap R_2$ είναι ανακλαστικά

$$p \leftrightarrow q \iff (p \to q) \land (q \to p)$$

$$p \to q \iff \neg p \lor q$$

Παλαία Θέματα

Σήτημα 1

a)

p	q	r	p v q	p v q -> r	p -> r	q -> r	p -> r ∧ q -> r
0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1	0
1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1

ισοδύναμα

B/

Έστω $n=4$

$2^4 < 4! \iff 16 < 24$, που ισχύει

Θεωρώ πως ισχύει και για n

$2^n < n!$

Άρα για $n=n+1$

$2^{n+1} < n+1! \iff 2^n \cdot n < n+1 \cdot n!$, που ισχύει

καθώς το το $2^n < n!$ και τα πολ/ζω με ένα αριθμό $n < n+1$

Ζητημα 2

$|A| = 5$

$|\Gamma| = 7$

$|\Theta| = |A| + |\Gamma| = 12$

i) $\binom{5}{3} \cdot \binom{7}{2} = \frac{5!}{3!2!} \cdot \frac{7!}{2!5!} = \frac{5 \cdot 4}{2!} \cdot \frac{7 \cdot 6}{2!} = 10 \cdot 7 \cdot 3 = 210$

ii) $\binom{5}{1}\binom{7}{4} + \binom{5}{2}\binom{7}{3} + \binom{5}{3}\binom{7}{2} + \binom{5}{4}\binom{7}{1} + 1$

iii) $\binom{5}{1}\binom{7}{4} + 1$

Επαναληπτικές Ασκήσεις

Ασκηση 6

p	q	r	$q \wedge \neg r$	$p \to (q \wedge \neg r)$	$q \leftrightarrow r$
0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	0
1	1	1	0	0	1

Οποτε το $A \wedge B$ ειναι TRUE το p ειναι FALSE

7/

$$\neg(p \vee q) \vee (\neg p \wedge q) \equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$$
$$\equiv \neg p \wedge (\neg q \wedge q)$$
$$\equiv \neg p \wedge t$$
$$\equiv \neg p$$

8/

$$y = 3 * x + 12 \pmod{11}$$

i) Για $x = 2$:
$$y = 18 \bmod 11 = 7$$

Για $x = 7$
$$y = 33 \bmod 11 = 0$$

Για $x = 12$
$$y = 48 \bmod 11 = 4$$

9/

$$\left.\begin{aligned} b &= ak,\ k \in \mathbb{Z} \\ c &= al,\ l \in \mathbb{Z} \end{aligned}\right\} * \quad \begin{aligned} bc &= akal \\ bc &= a(akal) \\ bc &= a \cdot m \\ m &= a \mid bc \end{aligned}$$

10/

Αν x αρτιος τοτε $x^2 + x + 1$ περιττος

$x = 2k$
$$4k^2 + 2k + 1 = 2(2k + k) + 1 = 2l + 1$$, περιττος

11/

$a = \frac{x}{y}$

$$a \times b = \frac{m}{n} \Leftrightarrow \frac{x}{y} \times b = \frac{m}{n}$$

$$\Leftrightarrow b = \frac{m}{n} \cdot \frac{y}{x}, \text{ azono}$$