ACADEMIA DE STUDII ECONOMICE DIN BUCUREŞTI

Facultatea de Cibernetică, Statistică și Informatică Economică

CAIET DE PROBLEME

TEORIA JOCURILOR

Profesor coordonator:

Lector Univ. Dr. Zamfir Ionela Catalina

Student:

Maria-Alexandra IORDAN

București

2025

CUPRINS

JOCURI STATICE IN INFORMATIE COMPLETA

Problema 1 – Problema adaptata din: ***A Primer in Game Theory*** **de Robert Gibbons (1992, p. 11)**

Doi prieteni, Alex și Radu, vor să se joace împreună online în această seară. Sunt la locuri de muncă diferite și nu pot comunica între ei în prealabil, așa că fiecare trebuie să aleagă independent una dintre cele două platforme: PlayStation sau PC.

Ambii preferă să joace împreună pe aceeași platformă, dar:

- Alex preferă PlayStation datorită controller-ului și exclusivităților.
- Radu preferă PC-ul, pentru performanță și tastatură.

Dacă aleg platforme diferite, nu se pot juca deloc împreună.

Matricea castigurilor este urmatoarea:

	Alex – PlayStation (PS)	**Radu - PC**
Radu – PlayStation (PS)	(3, 2)	(0, 0)
Radu - PC	(0, 0)	(2, 3)

- Dacă ambii aleg PlayStation, Alex e mai fericit (3), Radu mai puțin (2).
- Dacă ambii aleg PC, Radu e mai fericit (3), Alex mai puțin (2).
- Dacă aleg platforme diferite, niciunul nu se bucură (0, 0).

Cerinte:

a) Descrieti jocul sub forma normala.
b) Determinati echilibrul jocului atat in strategii pure, cat si in strategii mixte.

Rezolvare:

a) Forma normala a jocului:

(1) Jucatorii – cei doi prieteni, Alex si Radu
(2) Strategiile – fiecare jucator poate alege una dintre cele doua platforme, fie PlayStation, fie PC: $S_1 = \{\text{PS; PC}\}$
$S_2 = \{\text{PS; PC}\}$
(3) Castigurile – matricea castigurilor:

$$\begin{array}{cc} & \text{Jucatorul 2} \\ \text{Jucatorul 1} & \begin{pmatrix} 3,2 & 0,0 \\ 0,0 & 2,3 \end{pmatrix} \end{array}$$

b) Determinarea echilibrului:

STRATEGII PURE:

<u>Eliminarea strategiilor dominate:</u>

Jucatorul 1: „PS” domina „PC”?.

PS: (3, 0) si PC: (0, 2) => Deoarece 3>0 si 0<2, „PS” nu domina si nici nu este dominata de „PC”

Jucatorul 2: „PS” domina „PC”?

PS: (2, 0) si PC: (0, 3) => Deoarece 2>0 si 0<3, „PS” nu domina si nici nu este dominata de „PC”

Asadar, nu putem determina echilibrul, deoarece nu putem reduce dimensionalitatea matricii.

<u>Algoritmul celui mai bun raspuns:</u>

$$\begin{array}{cc} & \text{Jucatorul 2} \\ \text{Jucatorul 1} & \begin{pmatrix} 3,2 & 0,0 \\ 0,0 & 2,3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Jucatorul 1:

Pp. ca J1 crede ca J2 alege PS => max{3, 0} = 3 (PS)

Pp. ca J1 crede ca J2 alege PC => max{0, 2} = 2 (PC)

Jucatorul 2:

Pp. ca J2 crede ca J1 alege PS => max{2, 0} = 2 (PS)

Pp. ca J2 crede ca J1 alege PC => max{0, 3} = 3 (PC)

Deoarece in matrice exista doua casute cu ambele castiguri subliniate, jocul admite 2 puncte de echilibru in strategii pure:

$$\{(PS, PS); (PC, PC)\} \rightarrow \{(3,2); (2,3)\}$$

STRATEGII MIXTE:

Pp. ca J1 crede ca J2 alege PS cu probabilitatea p;

Pp. ca J1 crede ca J2 alege PC cu probabiltatea 1-p;

Pp. ca J2 crede ca J1 alege PS cu probabilitatea q;

Pp. ca J2 crede ca J1 alege PC cu probabilitatea 1-q;

PS si PC formeaza un camp complet de evenimente: p+1-p = 1 => nu exista nicio alta strategie in afara de PS si PC.

Loteria cu care se confrunta J1 daca alege PS este:

$L1: \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ p & 1-p \end{pmatrix}$ => $E(L1) = 3p$

Loteria cu care se confrunta J1 daca alege PC este:

$L2: \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ p & 1-p \end{pmatrix}$ => $E(L2) = 2 * (1-p) = 2 - 2p$

La optim, jucatorul trebuie sa fie indiferent intre cele 2 strategii:

$$E(L1) = E(L2) => 3p = 2 - 2p => 5p = 2 => p = \frac{2}{5} => 1 - p = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

Loteria cu care se confrunta J2 daca alege PS este:

$L3: \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ q & 1-q \end{pmatrix}$ => $E(L3) = 2q$

Loteria cu care se confrunta J2 daca alege PC este:

$L4: \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ q & 1-q \end{pmatrix}$ => $E(L4) = 3 * (1-q) = 3 - 3q$

La optim, jucatorul trebuie sa fie indiferent intre cele 2 strategii:

$$E(L3) = E(L4) => 2q = 3 - 3q => 5q = 3 => q = \frac{3}{5} => 1 - q = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

Rezulta ca echilibrul in strategii mixte este:

$$\{(p, 1-p); (q, 1-q)\} \rightarrow \left\{\left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right); \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right)\right\}$$

<u>Problema 2</u> – Problema adaptata din *Game Theory: An introduction* de Steven Tadelis (2013, p. 76)

Într-un târg de obiecte de colecție, doi colecționari concurează pentru a cumpăra un obiect rar. Pentru primul colectionar valoarea obiectului este de 4 unitati monetare, iar pentru al doilea colectionar este de 6 unitati monetare. Fiecare jucător poate licita discret: 0, 2 sau 3 unități monetare. Cel care oferă licitația mai mare câștigă obiectul și plătește prețul licitat. În caz de egalitate la ofertă, câștigătorul este ales prin tragere la sorți, plătește suma licitată, iar pierzătorul nu plătește nimic. Dacă un jucător pierde, nu plătește nimic.

Cerinte:

a) Descrieti forma normala a jocului
b) Gasiti echilibrul Nash al jocului

Rezolvare:

a) Forma normala a jocului:

(1) Jucatorii – cei doi colectionari

(2) Strategii – sa nu liciteze (0), sa liciteze 2 unitati monetare sau sa liciteze 3 unitati monetare => $S_i = \{0, 2, 3\}, i = \overline{1,2}$
(3) Castigurile – matricea castigurilor:

Se realizeaza dupa conditiile:

- Castigator => valoare – licitatie
- Pierzator => 0
- Egalitate => fiecare câștigă cu probabilitate 0.5 => 0.5*(valoare - licitație)

J1/J2	**0**	**2**	**3**
0	(0, 0)	(0, 4)	(0, 3)
2	(4-2=2, 0)	((4-2)/2=1,(6-2)/2=2)	(0, 6-3=3)
3	(4-3=1, 0)	(4-3=1, 0)	((4-3)/2=0.5, (6-3)/2 =1.5)

Dupa rezolvarea calculelor, matricea devine:

J1/J2	**0**	**2**	**3**
0	(0, 0)	(0, 4)	(0, 3)
2	(2, 0)	(1, 2)	(0, 3)
3	(1, 0)	(1, 0)	(0.5, 1.5)

b) Determinarea echilibrului Nash:

STRATEGII PURE:

<u>Eliminarea strategiilor dominate:</u>

Strategiile jucatorului 1: 0 (0, 0, 0)

2 (2, 1, 0)

3 (1, 1, 0.5)

Comparam licitatia 0 cu 2: 0<2, 0<1, 0=0 => licitatia 0 este dominata de 2

Comparam licitatia 3 cu 2: 1<2, 1=1, 0.5>0 => 3 nu domina si nu este dominata de 2

Comparam licitatia 3 cu 0: 1>0, 1>0, 0.5>0 => licitatia 0 este dominata de 3

<u>Concluzie:</u> Strategia 0 este strict dominata de strategiile 2 si 3, deci o vom elimina. Raman strategiile 2 si 3.

Strategiile jucatorului 2: 0 (0, 0, 0)

2 (4, 2, 0)

3 (3, 3, 1.5)

Comparam licitatia 0 cu 2: 0<4, 0<2, 0=0 => strategia 0 este dominata de 2

Comparam licitatia 3 cu 2: 3<4, 3>2, 1.5>0=> 3 nu domina si nu este dominata de 2

Comparam licitatia 3 cu 0: 3>0, 3>0, 1.5>0 => strategia 0 este dominata de 3

Concluzie: Strategia de a nu licita este strict dominata de strategiile de a licita 2 u.m. si 3 u.m., deci o vom elimina.

Noua matrice a castigurilor va fi:

J1/J2	2	3
2	(1, 2)	(0, 3)
3	(1, 0)	(0.5, 1.5)

Eliminam strategiile dominate pentru noua matrice:

Strategiile jucatorului 1: 2 (1, 0) si 3 (1, 0.5)

Cum 1=1 si 0 < 0.5 => strategia 2 este dominata de strategia 3 pentru J1, asadar eliminam strategia 2

Strategiile jucatorului 2: 2 (2, 0) si 3 (3, 1.5)

Cum 2 < 3 si 0 < 1.5 => strategia 2 este dominata de strategia 3 pentru J2, asadar eliminam strategia 2

Matricea finala va fi:

J1/J2	3
3	(0.5, 1.5)

Echilibrul prin eliminarea strategiilor dominate: $\{(3,3)\} \rightarrow \{(0.5, 1.5)\}$

<u>Algoritmul celui mai bun raspuns:</u>

Vom aplica algoritmul pe matricea obtinuta dupa eliminarea strategiilor dominate, deoarece acestea nu pot face parte din echilibru, iar, eliminandu-le, am redus spatiul strategic.

$$\begin{array}{cc} & \text{Jucator 2} \\ \text{Jucator 1} & \begin{pmatrix} (1,2) & (0,3) \\ (1,0) & (0.5,1.5) \end{pmatrix} \end{array}$$

Jucatorul 1:

Pp. ca J1 crede ca J2 alege sa liciteze 2 u.m. => max{1, 1} = 1 (ambele strategii)

Pp. ca J1 crede ca J2 alege sa liciteze 3 u.m. => max{0, 0.5} = 0.5 (liciteaza 3 u.m.)

Jucatorul 2:

Pp. ca J2 crede ca J1 alege sa liciteze 2 u.m. => max{2, 3} = 3 (liciteaza 3 u.m.)

Pp. ca J2 crede ca J1 alege sa liciteze 3 u.m. => max{0, 1.5} = 1.5 (liciteaza 3 u.m.)

Deoarece in matrice exista o casuta cu ambele castiguri subliniate, jocul admite un punct de echilibru in strategii pure:

$$\{(3,3)\} \rightarrow \{(0.5, 1.5)\}$$

Astfel, jucatorul 1 are sanse de 50% sa castige obiectul evaluat la 4 u.m. pentru 3 u.m., obtinand un castig mediu de 0.5 u.m., iar jucatorul 2 are sanse de 50% sa castige obiectul evaluat la 6 u.m. pentru 3 u.m., obtinand un castig mediu de 1.5 u.m.

STRATEGII MIXTE:

(Se aplica pe matricea obtinuta in urma eliminarii strategiilor dominate)

Pp. ca J1 crede ca J2 alege sa liciteze 2 u.m. cu probabilitatea p;

Pp. ca J1 crede ca J2 alege sa liciteze 3 u.m. cu probabiltatea 1-p;

Pp. ca J2 crede ca J1 alege sa liciteze 2 u.m. cu probabilitatea q;

Pp. ca J2 crede ca J1 alege sa liciteze 3 u.m. cu probabilitatea 1-q;

Loteria cu care se confrunta J1 daca alege sa liciteze 2 u.m. este:

$L1: \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & 1-p \end{pmatrix}$ => $E(L1) = p$

Loteria cu care se confrunta J1 daca alege sa liciteze 3 u.m. este:

$L2: \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ p & 1-p \end{pmatrix}$ => $E(L2) = p + 0.5 * (1-p) = p + 0.5 - 0.5p = 0.5p + 0.5$

La optim, jucatorul trebuie sa fie indiferent intre cele 2 strategii:

$$E(L1) = E(L2) => p = 0.5p + 0.5 => 0.5p = 0.5 => p = 1 => 1 - p = 1 - 1 = 0$$

Loteria cu care se confrunta J2 daca alege sa liciteze 2 u.m. este:

$L3: \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ q & 1-q \end{pmatrix}$ => $E(L3) = 2q$

Loteria cu care se confrunta J2 daca alege sa liciteze 3 u.m. este:

$L4: \begin{pmatrix} 3 & 1.5 \\ q & 1-q \end{pmatrix}$ => $E(L4) = 3q + 1.5 * (1-q) = 3q + 1.5 - 1.5q = 1.5q + 1.5$

La optim, jucatorul trebuie sa fie indiferent intre cele 2 strategii:

$E(L3) = E(L4) => 2q = 1.5q + 1.5 => 0.5q = 1.5 => q = 3 > 1 => nu\ este\ valid$

⇨ Nu exista o probabilitate q valida care sa il faca pe J2 sa fie indiferent intre cele doua strategii.

Asadar, pentru J1 echilibrul mixt ar fi cu p=1, adica J1 este sigur ca J2 va licita 2 u.m., insa pentru J2 nu exista echilibru mixt valid in aceste conditii.

<u>Problema 3</u> - Problema adaptata din *Game Theory: An introduction* de Steven Tadelis (2013, p. 77)

Doi studenți participă la o competiție de public speaking. Fiecare are trei opțiuni de prezentare: un discurs motivațional, axat pe idei pozitive (notat cu I, de la Inspirational), un discurs echilibrat, care combină date concrete cu critici moderate la adresa adversarului (notat cu T – Tehnic) și un discurs dur, concentrat pe criticarea ideilor adversarului (notat cu C – Critic). Singurul lucru care contează pentru fiecare concurent este probabilitatea de a câștiga, așadar presupunem că dacă un concurent se așteaptă să câștige cu o probabilitate $\pi \in [0, 1]$, atunci câștigul său este egal cu π. Probabilitatea de câștig depinde atât de strategia aleasă de concurent, cât și de strategia adversarului. Astfel, dacă ambii aleg aceeași strategie de prezentare, fiecare are șansa de câștig egală, de 0,5. Dacă un concurent adoptă discursul motivațional (I), iar adversarul său folosește discursul echilibrat (T), atunci primul pierde sigur. Dacă un concurent alege discursul motivațional (I), iar adversarul său adoptă discursul dur (C), atunci primul câștigă cu probabilitatea 0,4. În schimb, dacă un concurent optează pentru discursul dur (C), iar adversarul său folosește discursul echilibrat (T), atunci primul câștigă cu probabilitatea 0,7.

Cerinte:

a) Descrieti forma normala si scrieti forma matriceala a jocului
b) Determinati echilibrul prin eliminarea strategiilor dominate
c) Determinati echilibrul prin algoritmul celui mai bun raspuns

Rezolvare:

a) Forma normala a jocului:

(1) Jucatorii – cei doi concurenti
(2) Strategii – discurs motivational, discurs echilibrat sau discurs dur
=> $S_i = \{I, T, C\}, i = \overline{1,2}$
(3) Castigurile – matricea castigurilor:

J1/J2	**I**	**T**	**C**
I	(0.5, 0.5)	(0, 1)	(0.4, 0.6)
T	(1, 0)	(0.5, 0.5)	(0.3, 0.7)
C	(0.6, 0.4)	(0.7, 0.3)	(0.5, 0.5)

b) Determinarea echilibrului prin eliminarea strategiilor dominate:

Strategiile jucatorului 1: I (0.5, 0, 0.4)

T (1, 0.5, 0.3)

C (0.6, 0.7, 0.5)

Comparam strategia I cu strategia T: 0.5<1, 0<0.5, 0.4>0.3 => nu exista dominare intre I si T

Comparam strategia I cu strategia C: 0.5<0.6, 0<0.7, 0.4<0.5 => C domina I

Comparam strategia T cu strategia C: 1>0.6, 0.5<0.7, 0.3<0.5 => nu exista dominare intre T si C

<u>Concluzie:</u> C domina pe I pentru Jucatorul 1, deci putem elimina strategia I pentru J1.

Strategiile jucatorului 2: I (0.5, 0, 0.4)

T (1, 0.5, 0.3)

C (0.6, 0.7, 0.5)

Observam ca strategiile jucatorului 2 sunt aceleasi ca ale jucatorului 1, deci jocul este simetric => C domina I => eliminam strategia I pentru J2.

Noua matrice a castigurilor este:

J1/J2	**T**	**C**
T	(0.5, 0.5)	(0.3, 0.7)
C	(0.7, 0.3)	(0.5, 0.5)

Eliminam strategiile dominate pentru noua matrice:

Strategiile jucatorului 1: T (0.5, 0.3) si C (0.7, 0.5)

Cum 0.5 < 0.7 si 0.3 < 0.5 => C domina T, asadar eliminam T pentru J1.

Strategiile jucatorului 2: T (0.5, 0.3) si C (0.7, 0.5)

Cum 0.5 < 0.7 si 0.3 < 0.5 => C domina T, asadar eliminam T pentru J2.

Matricea finala va fi:

J1/J2	**C**
C	(0.5, 0.5)

Echilibrul prin eliminarea strategiilor dominate: $\{(C, C)\} \rightarrow \{(0.5, 0.5)\}$

Ambii jucatori aleg strategia C (discurs critic), cu sanse egale de castig (50%).

c) Algoritmul celui mai bun raspuns:

(Se aplica pe matricea obtinuta in urma eliminarii strategiilor dominate)

$$\begin{array}{cc} & \text{Jucator 2} \\ \text{Jucator 1} & \begin{pmatrix} (0.5, 0.5) & (0.3, \underline{0.7}) \\ (\underline{0.7}, 0.3) & (\underline{0.5}, \underline{0.5}) \end{pmatrix} \end{array}$$

Jucatorul 1:

Pp. ca J1 crede ca J2 alege discursul tehnic (T) => max{0.5, 0.7} = 0.7 (C – discurs critic)

Pp. ca J1 crede ca J2 alege discursul critic (C) => max{0.3, 0.5} = 0.5 (C – discurs critic)

Jucatorul 2:

Pp. ca J2 crede ca J1 alege discursul tehnic (T) => max{0.5, 0.7} = 0.7 (C – discurs critic)

Pp. ca J2 crede ca J1 alege discursul critic (C) => max{0.3, 0.5} = 0.5 (C – discurs critic)

Deoarece in matrice exista o casuta cu ambele castiguri subliniate, jocul admite un punct de echilibru in strategii pure:

$$\{(C, C)\} \rightarrow \{(0.5, 0.5)\}$$

Echilibrul determinat prin algoritmul celui mai bun răspuns este ca ambii studenți să adopte discursul dur, concentrat pe critica adversarului (strategia C). Aceast lucru inseamna ca niciunul dintre cei doi nu are motivația să-și schimbe strategia, deoarece, pentru fiecare, alegerea discursului critic maximizează probabilitatea de câștig în raport cu strategia adversarului.

JOCURI DINAMICE IN INFORMATIE COMPLETA

<u>Problema 4</u> – Problema adaptata din *Game Theory: An introduction* de Steven Tadelis (2013, p. 148)

Fie un joc între doi parteneri de afaceri care investesc într-un startup. La început, valoarea investiției comune este de 10.000 de dolari. Jocul are patru etape: la fiecare etapă, pe rând, fiecare partener poate decide fie să retragă (R) o parte din investiție pentru el însuși, fie să reinvestească (I) pentru a crește valoarea totală a fondului. Dacă un jucător alege Retragere (R), el primește 70% din valoarea curentă a fondului, iar celălalt partener primește 30%, iar jocul se încheie imediat. Dacă alege Reinvestire (I), fondul crește cu 40% (se multiplică cu 1.4), iar celălalt jucător are rândul să ia decizia. La ultima rundă, dacă jucătorul 2 alege Reinvestire (I), fondul se multiplică în continuare cu 1.4, dar apoi este împărțit egal între cei doi jucători.

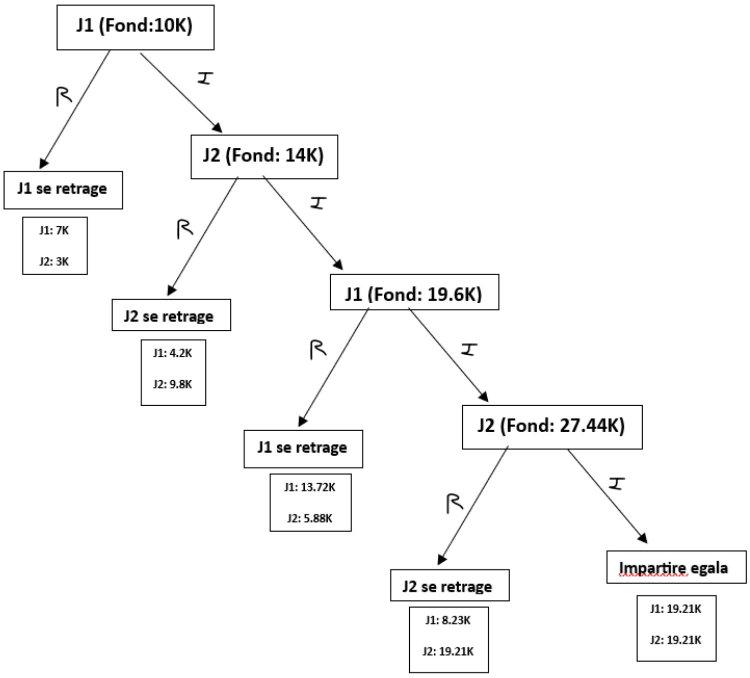
Cerinte:

a) Descrieti jocul dinamic.
b) Determinati echilibrul prin algoritmul inductiei recursive.

Rezolvare:

a) Descrierea jocului dinamic sub forma normala:

(1) Jucatorii – cei doi parteneri de afaceri
(2) Deciziile jucatorilor - alegerea de a se retrage (R) sau de a reinvesti (I)
(3) Ordinea in care se iau deciziile - primul partener alege daca se retrage sau reinvesteste, iar apoi alege celalalt partener
(4) Castigurile - se regăsesc în dreptul nodurilor terminale vectorii cu câștigurile ambilor jucători



b) <u>Algoritmul inductiei recursive:</u>

Pentru determinarea strategiei de echilibru a jocului, aplicăm algoritmul inducţiei recursive (backward induction), adică analizăm jocul începând cu ultima etapă.

Jucătorii fiind raţionali ei vor alege acele decizii ce le asigură maximizarea câştigului.

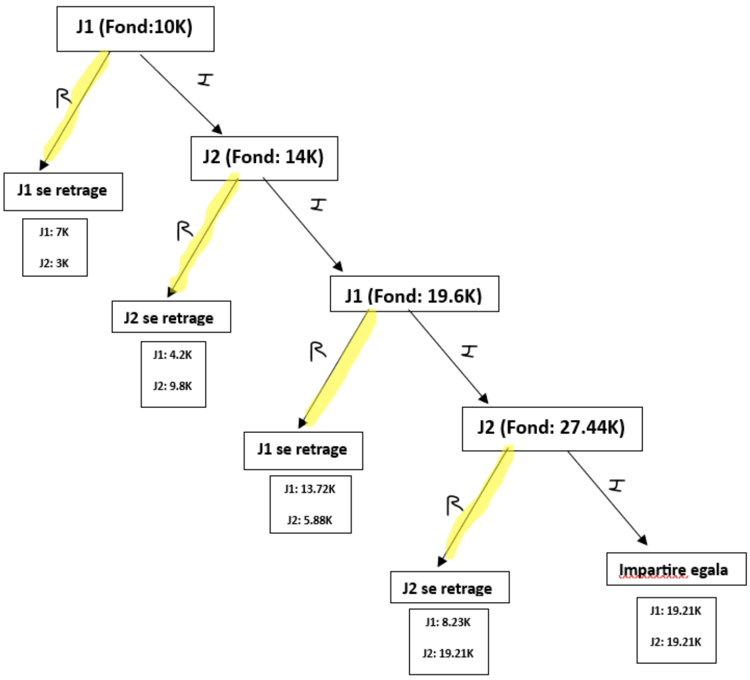
Presupunand ca fondul a fost reinvestit de fiecare data pana in ultima mutare, jucatorul 2 poate alege fie sa se retraga (sa primeasca 70% din 27.44K = 19.21K), fie sa reinvesteasca (fondul devine 27.44K * 1.4 = 38.42K => se imparte egal: 19.21K): max{19.21K, 19.21K} => indiferent ce va alege, va primi 19.21K, asadar jucatorul 2 este indiferent in aceasta etapa. Dar daca presupunem ca jucatorul 2 prefera sa nu riste (sa decida mai devreme), va prefera sa se retraga (R).

La a treia mutare, stiind ce alegere va face partenerul sau, jucatorul 1 poate alege fie sa se retraga, fie sa reinvesteasca, astfel incat sa isi maximizeze castigul: max{13.72K, 8.23K} = 13.72K => J1 se retrage.

La a doua mutare, stiind ca J1 va alege sa se retraga, jucatorul 2 poate alege fie sa se retraga, fie sa reinvesteasca: max{9.8K, 5.88K} = 9.8K => J2 se retrage.

La prima mutare, jucatorul poate alege intre R si I: max{7K, 4.2K} = 7K => J1 se retrage.

Prin urmare, echilibrul jocului dinamic indică faptul că ambii jucători vor opta pentru retragere (R) imediat ce le vine rândul, chiar dacă reinvestirea ar putea conduce la un fond final mai mare și la o împărțire egală (19.208€ fiecare). Totuși, din cauza lipsei de încredere și a anticipării faptului că celălalt jucător va prefera să se retragă mai devreme, alegerea de a se retrage devine singura opțiune rațională.



<u>Problema 5</u> – Problema adaptata din *Game Theory: An introduction* de Steven Tadelis (2013, p. 149)

Două surori (J1 si J2) merg la un festival de muzică. Sora mai mare (J2) a primit un voucher în valoare de 40€, pe care îl poate împărți cu sora mai mică (J1), într-un mod prestabilit. În prima etapă, sora mai mare poate alege: să ofere 30€ surorii mai mici și să păstreze 10€ pentru ea (Optiunea A) sau să împartă voucherul în mod egal - 20€ fiecare (Optiunea B). Banii vor fi folosiți pentru achiziționarea de bilete la unul dintre cele două concerte principale: Rock (R) sau Jazz (J). Surorile obțin satisfacție (utilitate) atât din bani (care pot fi folosiți pentru mâncare și suveniruri), cât și din participarea la concertul dorit. În etapa a doua, surorile aleg simultan la ce concert să meargă. Dacă aleg același concert, se bucură de eveniment împreună, iar fiecare primeşte un bonus de utilitate. Dacă aleg concerte diferite, fiecare merge singură şi nu primesc bonus.

Utilitatile obtinute sunt urmatoarele:

Daca sora mai mica primeste 30€ si sora mai mare 10€ (Optiunea A):

J1/J2	**R**	**J**
R	(36, 16)	(0, 0)
J	(0, 0)	(28, 20)

Daca au primit cate 20€ fiecare (Optiunea B):

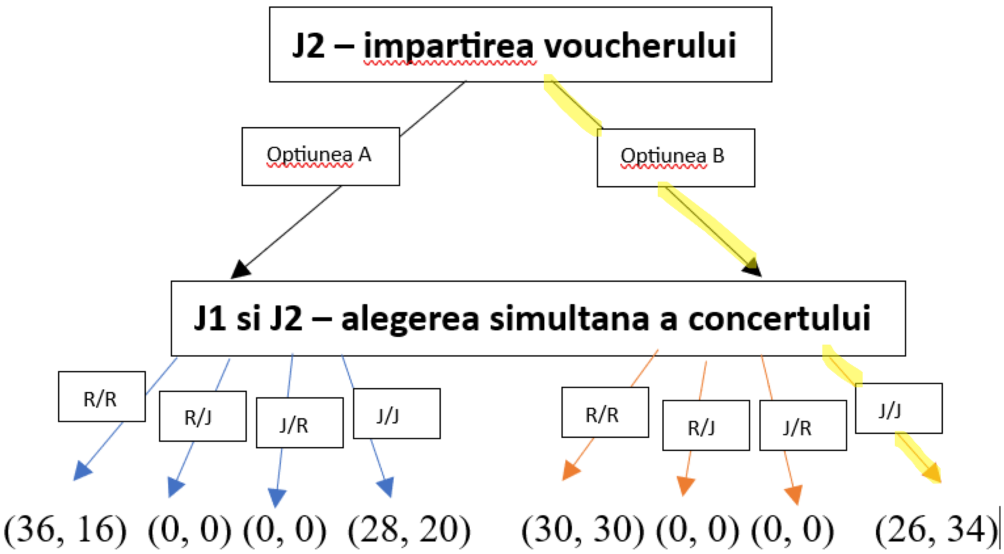
J1/J2	**R**	**J**
R	(30, 30)	(0, 0)
J	(0, 0)	(26, 34)

Cerinte:

a) Descrieti jocul in forma extinsa.
b) Determinaţi echilibrul jocului aplicând algoritmul inducţiei recursive.
c) Reprezentati jocul sub forma normala si determinati echilibrul.

Rezolvare:

a) **Descrierea jocului sub formă extinsă** presupune reprezentarea sa sub formă arborescentă, existând un nod inițial și mai multe noduri terminale. Pe arce sunt reprezentate strategiile posibile, iar câștigurile sunt prezentate sub formă vectorială în dreptul nodurilor terminale.



b) Echilibrul jocului prin algoritmul inductiei recursive:

Etapa a doua – gasirea echilibrelor pentru fiecare sub-joc:

Presupunand ca J2 alege optiunea A (30€, 10€), cele doua echilibre posibile sunt (R,R) si (J,J). Vom alege echilibrul cu utilitate mai mare pentru J2 (deoarece J2 face alegerea în prima etapă): 20 > 16 => echilibrul este (J, J) = (28, 20).

Presupunand ca J2 alege optiunea B (20€, 20€), cele doua echilibre posibile sunt (R,R) si (J,J). Vom alege echilibrul cu utilitate mai mare pentru J2: 34 > 30 => echilibrul este (J, J) = (26, 34).

Prima etapa – decizia lui J2:

Daca alege A, castigurile vor fi (28, 20), iar daca alege B, castigurile vor fi (26, 34). Comparand utilizatile pentru J2, observam ca 34 > 20, asadar va alege optiunea B.

In concluzie, echilibrul sub forma extinsa este sa primeasca 20€ fiecare si sa mearga la concertul de Jazz => Echilibrul este (26, 34)

c) Forma normala a jocului este reprezentata prin matricea jocului:

J1/J2	**(A, R)**	**(A, J)**	**(B, R)**	**(B, J)**
R	(36, 16)	(0, 0)	(30, 30)	(0, 0)
J	(0, 0)	(28, 20)	(0, 0)	(26, 34)

Eliminam strategiile dominate:

Comparam strategiile pentru J2:

- Comparam (A,R) cu (B,R):

J1 = R => 16 < 30 => (B,R)

J1 = J => 0 = 0

Deci (A,R) este dominata de (B,R)

- Comparam (A,J) cu (B,J):

J1 = R => 0 = 0

J1 = J => 20 < 34 => (A,J) dominata de (B,J)

Deci putem elimina (A,R) si (A,J).

Noua matrice va fi:

J1/J2	(B, R)	(B, J)
R	(30, 30)	(0, 0)
J	(0, 0)	(26, 34)

Algoritmul celui mai bun raspuns:

Pp. ca J1 crede ca J2 alege (B,R) => max{30, 0} = 30 => R

Pp. ca J1 crede ca J2 alege (B,J) => max{0, 26} = 26 => J

Pp. ca J2 crede ca J1 alege R => max{30, 0} = 30 => (B,R)

Pp. ca J2 crede ca J1 alege J => max{0, 34} = 34 => (B,J)

Exista doua echilibre Nash => {(R, (B,R)), (J, (B,J))} = {(30, 30), (26, 34)}

Asadar, sora mai mare va alege sa imparta suma in mod egal si fie vor alege concertul de Jazz, care ofera o satisfactie mai mare surorii mai mari, fie concertul de Rock, care este mai echitabil din punct de vedere al satisfatiei obtinute.

Problema 6 – Problema adaptata din *Game Theory: An introduction* de Steven Tadelis (2013, p. 170)

O companie de cosmetice este pe punctul de a lansa un nou produs. Directorul de marketing poate alege între două tipuri de campanii de promovare: campanie premium (P) - costisitoare dar cu potențial mare de impact sau campanie standard (S) - mai accesibilă, dar cu impact limitat. În același timp, managerul de vânzări alege dacă echipa de vânzări va fi antrenată prin: training intens (I) sau training minimal (M).

Câștigurile fiecărui jucător (Director/Manager) pentru fiecare combinație de decizii sunt date de matricea urmatoare:

Jucator 2 (Managerul)

Jucator 1 (Directorul) $\begin{pmatrix} 6,5 & -3,1 \\ 3,0 & 1,1 \end{pmatrix}$

Cerinte:

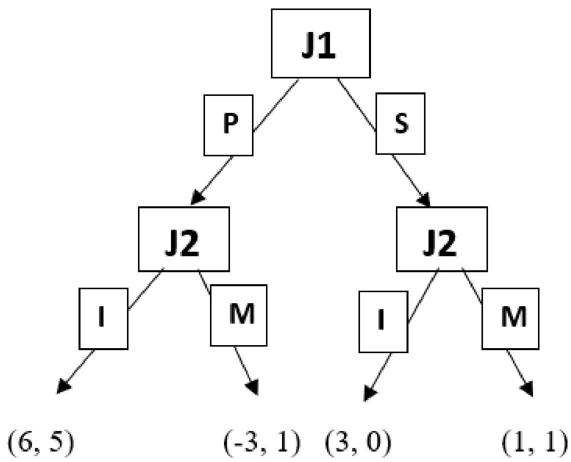
a) Prezentați jocul în formă extinsa (arbore).
b) Determinati punctele de echilibru ale jocului in strategii pure.
c) Presupunem că, înainte ca jocul să fie jucat, directorul de marketing poate alege să nu lanseze produsul, caz în care compania rămâne pe poziții stabile, cu câștiguri (2, 2),

sau să lanseze produsul, caz în care jocul este jucat conform tabelului de mai sus. Prezentați întregul joc în formă extinsa. Câte subjocuri proprii are?

d) Determinati echilibrul Nash pentru jocul descris la punctul b).

Rezolvare:

a) **Forma extinsa a jocului** este reprezentata de arborele decizional, in cadrul caruia exista un nod inițial și mai multe noduri terminale. Pe arce sunt reprezentate strategiile posibile, iar câștigurile sunt prezentate sub formă vectorială în dreptul nodurilor terminale.



b) **Determinarea echilibrului in strategii pure:**

$$\begin{array}{cc} & \text{Jucator 2 (Managerul)} \\ \text{Jucator 1 (Directorul)} & \begin{pmatrix} 6, 5 & -3, 1 \\ 3, 0 & 1, 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

<u>Eliminarea strategiilor dominate:</u>

Strategiile jucatorului 1: P (6, -3) si S (3, 1)

Cum 6 > 3 si -3 < 1 => nu exista dominanta clara intre strategiile jucatorului 1.

Strategiile jucatorului 2: I (5, 0) si M (1, 1)

Cum 5 > 1 si 0 < 1 => nu exista dominanta clara intre strategiile jucatorului 2.

Asadar, nu putem determina echilibrul utilizand aceasta metoda, deoarece nu am reusit sa reducem dimensionalitatea matricii.

<u>Algoritmul celui mai bun raspuns:</u>

Pp. ca J1 crede ca J2 alege I => max{6, 3} = 6 => P

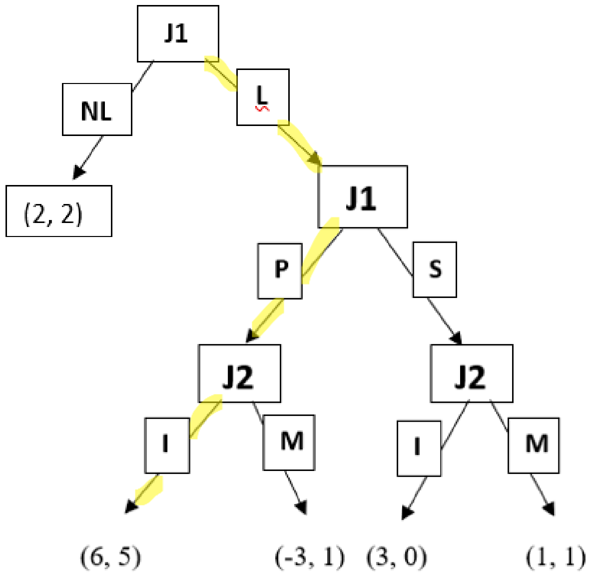
Pp. ca J1 crede ca J2 alege M => max{-3, 1} = 1 => S

Pp. ca J2 crede ca J1 alege P => max{5, 1} = 5 => I

Pp. ca J2 crede ca J1 alege S => max{0, 1} = 1 => M

Prin algoritmul celui mai bun răspuns am obținut două puncte de echilibru: {(P, I), (S, M)} cu castigurile {(6, 5), (1, 1)}.

c) Inainte ca jocul sa fie jucat, jucatorul 1 are o noua alegere de facut: daca sa lanseze (L) sau nu produsul (NL). In acest caz, forma extinsa a jocului va fi urmatoarea:



Jocul complet are un subjoc propriu, care incepe dupa alegerea optiunii de a lansa produsul (L), adica va avea loc jocul initial, din matrice.

d) Pentru a determina echilibrul jocului descris la b), se va aplica algoritmul inductiei recursive:

<u>Etapa 2:</u> Deoarece am observat anterior că jocul are două echilibre Nash: (P, I) cu câștigurile (6, 5) și (S, M) cu câștigurile (1, 1), dacă jucătorul 1 decide să lanseze produsul, el anticipează că poate obține un câștig maxim de max{6, 1} = 6. Astfel, va alege campania premium (P), iar managerul va opta pentru trainingul intens (I).

<u>Etapa 1:</u> Având în vedere că, dacă lansează produsul, jucătorul 1 poate obține un câștig de 6, acesta trebuie să aleagă între a nu lansa, cu un câștig de 2, și a lansa produsul, urmărind maximizarea câștigului său: max{2, 6} = 6. Prin urmare, optează pentru lansarea produsului.

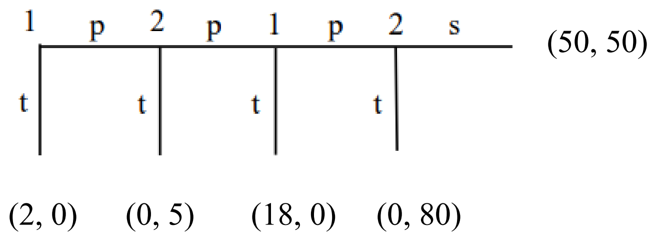
Echilibrul Nash pentru jocul în formă extinsă este dat de alegerea de a lansa produsul (L), urmată de opțiunea campaniei premium (P) și a trainingului intens (I), ceea ce conduce la câștigurile (6, 5).

Problema 7 – Problema adaptata din: *"Exercises on dynamic games", Universidad Carlos III de Madrid (exercise 1)*

Se considera jocul ilustrat mai jos, care este o versiune a jocului centiped în patru etape:

Jucătorii 1 și 2 se confruntă într-un joc în care, pe rând, pot alege fie să: oprească jocul (t) și să încaseze o plată imediată, sau sa continue jocul (p), oferind celuilalt o oportunitate de a lua o recompensă mai mare.

Structura jocului este urmatoarea:



Cerinte:

a) Câte strategii are fiecare jucător?
b) Câte subjocuri există? Identifică-le.
c) Determină mulțimea tuturor strategiilor pentru fiecare jucător.
d) Ce profil de strategii duce la rezultatul (18, 0)?
e) Calculează echilibrul prin inducție inversă (backward induction).

Rezolvare:

a) Strategiile fiecarui jucator:

Jucatorul 1 are doua decizii de luat: la primul nod si, daca continua jocul, la al treilea nod. Pentru fiecare decizie are 2 optiuni: fie termina jocul (t), fie il paseaza (p).

$$Total\ strategii\ J1: 2^2 = 4\ strategii$$

Jucatorul 2 are doua decizii: la al doilea si la al patrulea nod, fiecare cu 2 optiuni: t sau p.

$$Total\ strategii\ J2: 2^2 = 4\ strategii$$

b) Un subjoc este o parte a jocului care poate fi considerata un joc in sine, incepand dintr-un nod decizional si incluzand toate deciziile ulterioare posibile.
Subjocurile sunt: jocul complet (de la inceput la sfarsit), subjocul care incepe de la nodul 2 (decizia lui J2), subjocul care incepe de la nodul 3 (decizia lui J1) si subjocul care incepe de la nodul 4 (decizia lui J2). In total sunt 4 subjocuri.

c) Multimea strategiilor pentru fiecare jucator:

Strategiile jucatorului 1 (nodurile 1 si 3):

- TT – opreste imediat, iar daca nu, opreste la pasul 3
- TP – oprește imediat, dar dacă nu, pasează la pasul 3

- PT – pasează prima dată, dar oprește la pasul 3
- PP – pasează ambele dăți

$$s_1 = \{TT, TP, PT, PP\}$$

Strategiile jucatorului 2 (nodurile 2 si 4):

- TT – oprește la prima ocazie și, dacă nu, oprește și la a doua
- TP – oprește la prima, dar pasează la a doua
- PT – pasează la prima, oprește la a doua
- PP – pasează ambele dăți

$$S_2 = \{TT, TP, PT, PP\}$$

d) Se ajunge la rezultatul (18, 0) daca J1 paseaza la prima decizie (p), J2 paseaza la a doua (p) si apoi J1 opreste la a treia decizie (t). Asadar strategiile urmate vor fi:pentru J1 – PT, iar pentru J2 – PP sau PT (nu conteaza ce face jucatorul 2 la pasul 4, deoarece jocul se termina la pasul 3).

e) Determinarea echilibrului prin inductie inversa:

La pasul 4, jucatorul 2 poate alege fie sa se opreasca, fie sa continue. Daca opreste (t) va primi 80 de unitati, iar daca continua va primi 50 de unitati. Comparand cele doua optiuni, jucatorul va alege optiunea care maximizeaza castigurile, asadar va alege sa se opreasca (t), deoarece 80 > 50.

La pasul 3, J1 decide dacă oprește sau continuă la pasul 3, știind decizia optimă a lui J2 la pasul 4. Daca opreste (t) primeste 18 unitati, iar daca continua, stiind ca J2 va alege sa opreasca jocul, va primi 0 unitati. Cum 18 > 0, jucatorul 1 va alege sa se opreasca la pasul 3 (t).

La pasul 2, jucatorul 2 daca opreste va primi 5 unitati, iar daca va continua la pasul urmator va primi 0, deoarece jucatorul 1 va opri jocul. Cum 5 > 0, J2 va opri jocul (t).

La pasul 1, jucatorul 1 fie primeste 2 unitati daca opreste, fie primeste 0 daca continua, asadar va opri jocul la pasul 1 (t).

In concluzie, prin inductie inversa, fiecare jucător oprește jocul la primul moment când are ocazia, pentru că plata imediată este mai mare decât ce ar putea obține dacă continuă.

Deci, echilibrul este ca jucatorul 1 sa opreasca la pasul 1, obtinandu-se castigurile (2,0).

JOCURI STATICE IN INFORMATIE INCOMPLETA

<u>Problema 8</u> – Problema adaptata după Exercițiul 1, secțiunea 15.6, p. 301 din *MIT OpenCourseWare* (2012)

Într-un oraș există n jucători. Fiecare jucător i contribuie simultan cu o sumă x_i la un proiect public, rezultând un bun public în cantitatea: $y = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$, unde x_i poate fi orice număr real. Funcția de utilitate a fiecărui jucător i este: $u_i = y^2 - c_i x_i^\gamma$, unde $\gamma > 2$ este un parametru cunoscut, iar costul individual $c_i \in \{1,2\}$ este informație privată a jucătorului i. Costurile $(c_1, \dots, c_n)$ sunt distribuite independent și identic, iar probabilitatea ca $c_i = 1$ este ½ pentru fiecare jucator i.

Cerinte:

a) Scrieti formal acest joc ca un joc Bayesian (joc cu informatie incompleta).
b) Determinati echilibrul Nash Bayesian al acestui joc, pentru n = 2 si $\gamma = 3$.

Rezolvare:

a) Descrierea jocului Bayesian:

(1) Jucatorii: {1,..., n};
(2) Tipul jucatorilor: fiecare jucător are tip $c_i \in \{1,2\}$ cu probabilitate ½;
(3) Actiuni: fiecare jucător alege $x_i \in R$;
(4) Strategii: o strategie pentru jucătorul i este o funcție $s_i : \{1,2\} \to R$, adica $x_i = s_i(c_i)$;
(5) Castigurile:

$$u_i(x_i, x_{-i}, c_i) = \left(x_i + \sum_{j \neq i} x_i \right)^2 - c_i x_i^\gamma$$

b) Determinarea echilibrului Nash Bayesian:

Pp. un echilibru simetric in strategii pure, unde jucatorii cu acelasi tip aleg aceeasi contributie:

$$x(1) = contributia\ jucatorilor\ cu\ cost\ 1$$

$$x(2) = contributia\ jucatorilor\ cu\ cost\ 2$$

Numarul jucatorilor este n, iar fiecare jucător știe doar distribuția tipurilor celorlalți (independenți, cu probabilitate 1/2 pentru fiecare tip).

Contribuția medie a unui alt jucător este:

$$E(x_j) = \frac{1}{2}x(1) + \frac{1}{2}x(2) = \frac{x(1) + x(2)}{2}$$

Contribuția totală a celorlalți jucători:

$$S = (n-1) * \frac{x(1) + x(2)}{2}$$

Jucătorul cu tip c alege x(c) pentru a maximiza:

$$U\big(x(c)\big) = (x(c) + S)^2 - c * x(c)^\gamma$$

Derivam in raport cu x(c):

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2(x(c) + S) - c\gamma x(c)^{\gamma-1} = 0$$

Astfel,

$$2(x(c) + S) = \ c\gamma x(c)^{\gamma-1}$$

$$2\left(x(c) + (n-1) * \frac{\big(x(1) + x(2)\big)}{2}\right) = c\gamma x(c)^{\gamma-1}$$

Formam un sistem de ecuatii:

Pentru c = 1:

$$2\left(x(1) + (n-1) * \frac{\big(x(1) + x(2)\big)}{2}\right) = \gamma x(1)^{\gamma-1}$$

Pentru c = 2:

$$2\left(x(2) + (n-1) * \frac{\big(x(1) + x(2)\big)}{2}\right) = 2\gamma x(2)^{\gamma-1}$$

Notam: $S = (n-1) * \frac{x(1)+x(2)}{2}$

Atunci rezulta:

$$\begin{cases} 2(x(1) + S) = \gamma x(1)^{\gamma-1} \ \ (1) \\ 2(x(2) + S) = \ 2\gamma x(2)^{\gamma-1} (2) \end{cases}$$

Inlocuim cu n = 2 si γ = 3:

$$S = (n-1) * \frac{x(1) + x(2)}{2} = (2-1) * \frac{x(1) + x(2)}{2} = \frac{x(1) + x(2)}{2}$$

Ecuatiile echilibrului sunt:

$$\begin{cases} 2(x(1) + S) = 3x(1)^2 \\ 2(x(2) + S) = \ 6x(2)^2 \end{cases}$$

Inlocuind S, obtinem:

$$\begin{cases} 2\left(x(1) + \dfrac{x(1) + x(2)}{2}\right) = 3x(1)^2 \\ 2\left(x(2) + \dfrac{x(1) + x(2)}{2}\right) = \ 6x(2)^2 \end{cases}$$

Simplificam:

$$\begin{cases} 2\left(\frac{2x(1)+x(2)}{2}\right) = 3x(1)^2 \\ 2\left(\frac{x(1)+2x(2)}{2}\right) = \ 6x(2)^2 \end{cases} \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x(1) + x(2) = 3x(1)^2 \\ x(1) + 2x(2) = \ 6x(2)^2 \end{cases}$$

Sistemul final este:

$$\begin{cases} 2x(1) + x(2) = 3x(1)^2 \ (1) \\ x(1) + 2x(2) = \ 6x(2)^2 \ (2) \end{cases}$$

$$Din\ (1) => x(2) = 3x(1)^2 - 2x(1) \quad (3)$$

$$Inlocuim\ in\ (2) => x(1) + 2\big(3x(1)^2 - 2x(1)\big) = 6\big(3x(1)^2 - 2x(1)\big)^2$$

$$x(1) + 6x(1)^2 - 4x(1) = 6\big(3x(1)^2 - 2x(1)\big)^2$$

$$\big(-3x(1)\big) + 6x(1)^2 = 6\big(3x(1)^2 - 2x(1)\big)^2$$

$$6x(1)^2 - 3x(1) = 6\big(3x(1)^2 - 2x(1)\big)^2$$

$$\big(3x(1)^2 - 2x(1)\big)^2 = 9x(1)^4 - 12x(1)^3 + 4x(1)^2$$

$$6x(1)^2 - 3x(1) = 6(9x(1)^4 - 12x(1)^3 + 4x(1)^2)$$

$$6x(1)^2 - 3x(1) = 54x(1)^4 - 72x(1)^3 + 24x(1)^2$$

Mutam totul in stanga:

$$6x(1)^2 - 3x(1) - 54x(1)^4 + 72x(1)^3 - 24x(1)^2 = 0$$

$$-54x(1)^4 + 72x(1)^3 - 18x(1)^2 - 3x(1) = 0$$

Impartim la -3 pentru a simplifica:

$$18x(1)^4 - 24x(1)^3 + 6x(1)^2 + x(1) = 0$$

Extragem x(1):

$$x(1) * (18x(1)^3 - 24x(1)^2 + 6x(1) + 1) = 0$$

Solutiile posibile vor fi:

$$x(1) = 0\ sau\ se\ rezolva\ ecuatia\ 18x(1)^3 - 24x(1)^2 + 6x(1) + 1 = 0$$

Pentru x(1) = 0 => Din (3): $3 * 0^2 - 2 * 0 = 0$ => Deci x(1) = x(2) = 0 reprezinta o solutie de echilibru (nimeni nu contribuie).

Pentru $18x(1)^3 - 24x(1)^2 + 6x(1) + 1 = 0$:

Incercam valori:

$$x = 0.1 => 0.0018 - 0.24 + 0.6 + 1 = 1.378 > 0$$

$$x = 0.5 => 2.25 - 6 + 3 + 1 = 0.25 > 0$$
$$x = 1 => 18 - 24 + 6 + 1 = 1 > 0$$
$$x = -0.1 => \ -0.018 - 0.24 - 0.6 + 1 = 0.142 > 0$$

Observam ca pentru toate valorile testate functia este pozitiva, deci nu găsim rădăcini reale pozitive, în afara soluției zero.

In concluzie, singura solutie reala si valida pentru x(1) este 0, deci x(1) = x(2) = 0.

Echilibrul Nash Bayesian în acest caz este ca nimeni să nu contribuie deloc, pentru că costul cu $\gamma = 3$ determina o penalizare prea mare asupra contributiei.

<u>Problema 9</u> - Problema adaptata după Exercițiul 6, secțiunea 15.6, p. 301 din *MIT OpenCourseWare* (2012)

Se considera un joc de furnizare a unui bun public în care doi jucători aleg simultan dacă contribuie sau nu, cu următoarea matrice a câștigurilor:

J1/J2	**Contribuie (C)**	**Nu contribuie (N)**
Contribuie (C)	$(2 - 2c_1, 2 - 2c_2)$	$(2 - 2c_1, 2)$
Nu contribuie (N)	$(2, 2 - 2c_2)$	$(0, 0)$

Costurile $c_1 \ si \ c_2$ sunt cunoscute doar jucătorilor 1 și 2, sunt independente și identic distribuite uniform pe [0, 2]. Determinati echilibrul Nash Bayesian al acestui joc.

Rezolvare:

Structura jocului Bayesian:

- Jucatorii: cei doi jucatori (J1 si J2);
- Strategii: Fiecare alege simultan dacă contribuie (C) sau nu contribuie (N) la un bun public => $s_i = \{C, N\}, unde \ i = \overline{1,2}$;
- Tipul jucatorilor: fiecare jucător își cunoaște propriul cost $c_i \ \in [0, 2], uniform \ distribuit$;
- Castigurile depind de alegerile reciproce și de propriul cost, fiind redate in matricea castigurilor:

J1/J2	**Contribuie (C)**	**Nu contribuie (N)**
Contribuie (C)	$(2 - 2c_1, 2 - 2c_2)$	$(2 - 2c_1, 2)$
Nu contribuie (N)	$(2, 2 - 2c_2)$	$(0, 0)$

Fiecare jucător contribuie dacă și numai dacă costul său este sub un anumit prag $\hat{c}$:

$$s_i(c_i) = \begin{cases} Contribuie\ (C), daca\ c_i \le \hat{c} \\ Nu\ contribuie\ (N), daca\ c_i > \hat{c} \end{cases}$$

- Determinarea pragului de indiferenta:

Fie jucătorul 1, având costul $c_1 = \hat{c}$.

El va fi indiferent între a contribui și a nu contribui dacă așteptările sale din cele două opțiuni sunt egale.

Probabilitatea ca J2 sa contribuie:

$c_2 \sim U[0,2], deci: P(c_2 \le \hat{c}) = \frac{\hat{c}}{2}$

Utilitatea asteptata a lui J1:

- Daca contribuie: $U_C = \left(\frac{\hat{c}}{2}\right) * (2 - 2\hat{c}) + \left(1 - \frac{\hat{c}}{2}\right) * (2 - 2\hat{c}) = 2 - 2\hat{c}$

Indiferent ce face J2, utilitatea lui J1 cand contribuie este $2 - 2c_1$.

- Daca nu contribuie: $U_N = \left(\frac{\hat{c}}{2}\right) * 2 + \left(1 - \frac{\hat{c}}{2}\right) * 0 = \hat{c}$

Vom egala utilitatile asteptate pentru a determina pragul de indiferenta:

$$2 - 2\hat{c} = \hat{c} => 2 = 3\hat{c} => \hat{c} = \frac{2}{3}$$

Asadar, fiecare jucător contribuie dacă și numai dacă: $\hat{c}_i \le \frac{2}{3}$

Adica, strategia de echilibru este:

$$s_i(c_i) = \begin{cases} Contribuie\ (C), daca\ c_i \le \frac{2}{3} \\ Nu\ contribuie\ (N), altfel \end{cases}$$

<u>Problema 10</u> - Problema adaptata după Exercițiul 13, secțiunea 15.6, p. 301 din *MIT OpenCourseWare* (2012)

În acest joc, participă doi jucători: unul care execută lovitura (Shooter, S) și celălalt care încearcă să o oprească (Defender, D). Ambii iau decizia simultan — Shooter alege dacă să trimită mingea în partea superioară a porții (Up) sau în partea inferioară (Down), iar Defender decide dacă să blocheze sus (Up) sau jos (Down). Câștigurile fiecărui jucător, în funcție de alegerile făcute și informațiile private, sunt prezentate în următoarea matrice:

S/D	**Up**	**Down**
Up	$a - 1, b + 1$	$a + 1, -1$
Down	$2, b - 1$	$0, 2$

Unde valorile a si b sunt variabile aleatoare uniform distribuite pe intervalul [-2, 2].

Shooter-ul (S) cunoaste valoarea lui a, iar Defender-ul (D) cunoaste valoarea lui y.

Sa se determine echilibrul Nash Bayesian al jocului.

Rezolvare:

Fiecare jucător știe doar valoarea sa privată (tipul său):

- Shooter (S) stie $a \in [-2, 2]$
- Defender (D) stie $b \in [-2, 2]$

Jucătorii aleg simultan o strategie care poate depinde de tipul lor:

- $s(a) \in \{U, D\} - strategia\ lui\ Shooter\ in\ functie\ de\ a$
- $d(b) \in \{U, D\} - strategia\ lui\ Defender\ in\ functie\ de\ b$

Pentru fiecare jucator exista un prag (strategii de tip prag, utilizate in astfel de jocuri), astfel incat:

$$s(a) = \begin{cases} U, daca\ a \geq a^* \\ D, daca\ a < a^* \end{cases}$$

$$d(b) = \begin{cases} U, daca\ b \geq b^* \\ D, daca\ b < b^* \end{cases}$$

Scopul este de a identifca a* si b* astfel incat sa formeze un echilibru.

- Determinarea castigurilor asteptate pentru fiecare jucator:

Pentru Shooter (S):

Pentru un a fix, Shooter poate alege fie Up, fie Down, stiind probabilitatea cu care Defender va alege Up sau Down (in functie de b*).

Pentru ca $b \sim Uniform\ [-2, 2]$, densitatea de probabilitate este:

$$f(b) = \frac{1}{2 - (-2)} = \frac{1}{4}, pentru\ b \in [-2,2]$$

Probabilitatea ca Defender sa aleaga Up este: $P_D(U) = P(b \geq b^*) = \int_{b^*}^{2} \frac{1}{4} db = \frac{2-b^*}{4}$

Probabilitatea ca Defender sa aleaga Down este: $P_D(D) = 1 - P_D(U) = \frac{2+b^*}{4}$

<u>Interpretare:</u> Cu cât b* este mai mare, cu atât mai rar se va întâmpla ca $b \geq b^*$, deci probabilitatea ca Defenderul să aleagă Up scade. Invers, probabilitatea sa aleaga Down creste.

Castigul asteptat daca S alege Up:

$$EU_S(U|a) = P_D(U) * (a - 1) + P_D(D) * (a + 1) = \frac{2-b^*}{4}(a - 1) + \frac{2+b^*}{4}(a + 1)$$

$$= \frac{(2-b^*)}{4}a - \frac{2-b^*}{4} + \frac{2+b^*}{4}a + \frac{2+b^*}{4}$$
$$= \left(\frac{(2-b^*)}{4} + \frac{2+b^*}{4}\right)a + \left(-\frac{2-b^*}{4} + \frac{2+b^*}{4}\right) = \frac{4}{4}a + \frac{b^*}{2}$$
$$= a + \frac{b^*}{2}$$

Castigul asteptat daca S alege Down:

$$EU_S(D|a) = P_D(U) * 2 + P_D(D) * 0 = \frac{2-b^*}{4} * 2 + \frac{(2+b^*)}{4} * 0 = \frac{(2-b^*)}{2}$$

Shooter va alege Up daca:

$$EU_S(U|a) \geq EU_S(D|a) => a + \frac{b^*}{2} \geq \frac{2-b^*}{2} => a \geq \frac{2-b^*}{2} - \frac{b^*}{2} = \frac{2-2b^*}{2} = 1 - b^*$$
$$=> a^* = 1 - b^*$$

Pentru Defender (D):

Pentru un b fix, Defender poate alege fie Up, fie Down, stiind probabilitatea cu care Shooter va alege Up sau Down (in functie de a*).

Pentru ca $a \sim \ Uniform\ [-2, 2]$, densitatea de probabilitate este:

$$f(a) = \frac{1}{2-(-2)} = \frac{1}{4}, pentru\ a \in [-2,2]$$

Probabilitatea ca Shooter sa aleaga Up: $P_S(U) = P(a \geq a^*) = \frac{2-a^*}{4}$

Probabilitatea ca Shooter sa aleaga Down: $P_S(D) = 1 - P_S(U) = \frac{(2+a^*)}{4}$

<u>Interpretare:</u> Cu cât a* este mai mare, cu atât mai rar se va întâmpla ca $a \geq a^*$, deci probabilitatea ca Shooterul să aleagă Up scade. Invers, probabilitatea sa aleaga Down creste.

Castigul asteptat daca Defender alege Up:

$$EU_D(U|b) = P_S(U) * (b+1) + P_S(D) * (b-1) = \frac{2-a^*}{4}(b+1) + \frac{2+a^*}{4}(b-1)$$
$$= \left(\frac{2-a^*}{4} + \frac{2+a^*}{4}\right)b + \left(\frac{2-a^*}{4} + \frac{2+a^*}{4}\right) = \frac{4}{4}b - \frac{a^*}{2} = b - \frac{a^*}{2}$$

Castigul asteptat daca Defender alege Down:

$$EU_D(D|b) = P_S(U) * (-1) + P_S(D) * 2 = \frac{2-a^*}{4} * (-1) + \frac{2+a^*}{4} * 2 = -\frac{2-a^*}{4} + \frac{2+a^*}{4}$$
$$= -\frac{2}{4} + \frac{a^*}{4} + \frac{4}{4} + \frac{2a^*}{4} = \frac{1}{2} + \frac{3a^*}{4}$$

Defender alege Up daca:

$$EU_D(U|b) \geq EU_D(D|b) => b - \frac{a^*}{2} \geq \frac{1}{2} + \frac{3a^*}{4} => b \geq \frac{1}{2} + \frac{3a^*}{4} + \frac{a^*}{2} = \frac{1}{2} + \frac{5a^*}{4}$$

$$=> b* = \frac{1}{2} + \frac{5a^*}{4}$$

Avem sistemul urmator:

$$\begin{cases} a^* = 1 - b^* \\ b* = \frac{1}{2} + \frac{5a^*}{4} \end{cases}$$

Substituim b* in prima ecuatie:

$$a^* = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{5a^*}{4}\right) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{5a^*}{4} = \frac{1}{2} - \frac{5a^*}{4}$$

Mutam termenii cu a* intr-o parte:

$$a^* + \frac{5a^*}{4} = \frac{1}{2} => \frac{4a^*}{4} + \frac{5a^*}{4} = \frac{1}{2} => \frac{9a^*}{4} = \frac{1}{2} => a^* = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{9}{4}} = \frac{1}{2} * \frac{4}{9} = 2/9$$

Pe baza lui a* determinam b*:

$$b^* = \frac{1}{2} + \frac{5}{4} * \frac{2}{9} = \frac{1}{2} + \frac{10}{36} = \frac{1}{2} + \frac{5}{18} = \frac{9}{18} + \frac{5}{18} = \frac{14}{18} = \frac{7}{9}$$

Asadar, Shooter va alege Up daca $a > a^* = \frac{2}{9} \cong 0.222, altfel\ Down$;

Iar Defender va alege Up daca $b > b^* = \frac{7}{9} \cong 0.778, altfel\ Down$

Echilibrul Nash Bayesian consta in urmatoarele strategii prag:

$$s(a) = \begin{cases} U, daca\ a \geq \frac{2}{9} \\ D, daca\ a < \frac{2}{9} \end{cases}$$

$$d(b) = \begin{cases} U, daca\ b \geq \frac{7}{9} \\ D, daca\ b < \frac{7}{9} \end{cases}$$

BIBLIOGRAFIE

Gibbons, R. (1992). *A Primer in Game Theory* (p. 11). London: Harvester Wheatsheaf.

Tadelis, S. (2013). *Game Theory: An Introduction* (pp. 76–77, 148–149, 170). Princeton University Press. Retrieved from https://students.aiu.edu/submissions/profiles/resources/onlineBook/Y5z2A2_Game_Theory_An_Introduction.pdf

MIT OpenCourseWare. (2012). *Static Applications with Incomplete Information* (Section 15.6, p. 301, Exercises 1, 6, and 13). In *Economic Applications of Game Theory (Course 14.12)*. Retrieved from https://ocw.mit.edu/courses/14-12-economic-applications-of-game-theory-fall-2012/777164baec3d203bc6da462488d371e0_MIT14_12F12_chapter15.pdf

Universidad Carlos III de Madrid. *Exercises on Dynamic Games* (Exercise 1). Retrieved from https://www.eco.uc3m.es/docencia/new_juegos/en_doc/Problems%20Dynamic.pdf, accessed on May 23, 2025.