VII Forces électromagnétiques

1) Introduction

× Force Lorentz sur une charge q, animée d'une $\vec{v}$ et en présence de champs $\vec{E}$, $\vec{B}$

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\,\vec{v} \wedge \vec{B}$$

× Dans la suite $\begin{cases} \text{• charges libres dans l'espace} \\ \text{• charges dans des conducteurs} \end{cases}$

× Energie & Puissance

- travail fourni par de la force sur un déplacement élémentaire : $d\vec{\ell}$

$$\delta w = \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$$

- $d\vec{\ell} = \vec{v}\,dt$ (en effet $\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d\vec{\ell}}{dt}$)

  $\Rightarrow d\vec{\ell} \,/\!/\, \vec{v}$, donc $d\vec{\ell} \perp (\vec{v} \wedge \vec{B})$

- Conséquence : $\delta w = q\,\vec{E} \cdot d\vec{\ell} + 0$

  $\Rightarrow$ partie magnétique ne travaille pas

  " $\vec{B}$ ne peut pas mettre en mouvement "

(Th. En. cinétique $\Delta E_c = \Delta w$) $\Rightarrow$ $\vec{B}$ ne change pas la norme de $\|\vec{v}\|$

Suite VII. 1)

- Puissance P / $\delta W = P\,dt = q\vec{E}\cdot(\vec{v}\,dt)$

$$\Rightarrow \boxed{P = q\vec{E}\cdot\vec{v} = \vec{F}\cdot\vec{v}}$$

2) Mouvement de charges libres

- une charge ponctuelle q, portée par une masse m
- Relation fondamentale de la dynamique

$$m\,\vec{a} = \vec{F} \quad \text{où} \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \text{ et } \vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt}$$

$\Rightarrow$ trajectoire de $M(m,q)$ dans $\vec{E}$, $\vec{B}$?

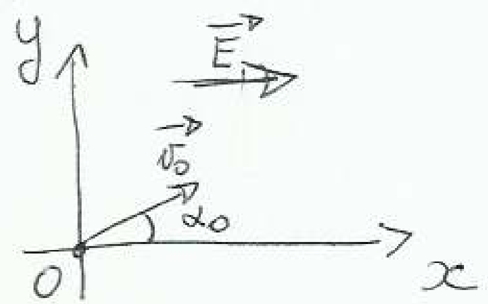
i) Action du champ électrique (constant)

× Etat initial : $\begin{cases} M \text{ est au centre du repère } O \\ \vec{v_0} \end{cases}$

× $\vec{E}$ et $\vec{v_0}$ définissent un plan ← on oriente le repère tel que $(\vec{E}, \vec{v_0}) \in (Ox, Oy)$

et $\vec{E} = E\,\vec{u_x}$

× $\begin{cases} \text{Vitesse initiale : } \vec{v_0} = v_0 \cos\alpha_0\,\vec{u_x} + v_0 \sin\alpha_0\,\vec{u_y} \\ \text{Position initiale : } x_0 = 0,\ y_0 = 0 \end{cases}$



Suite VII.2.i)

× $m\vec{a} = qE\vec{u_x}$ $\Rightarrow$ $a_m = \frac{qE}{m}$ accélération

$\int dt$ ↳ $m\vec{v}(t) = qEt\vec{u_x} + \vec{v_0}$ $\Rightarrow$ $v_z(t) = 0$

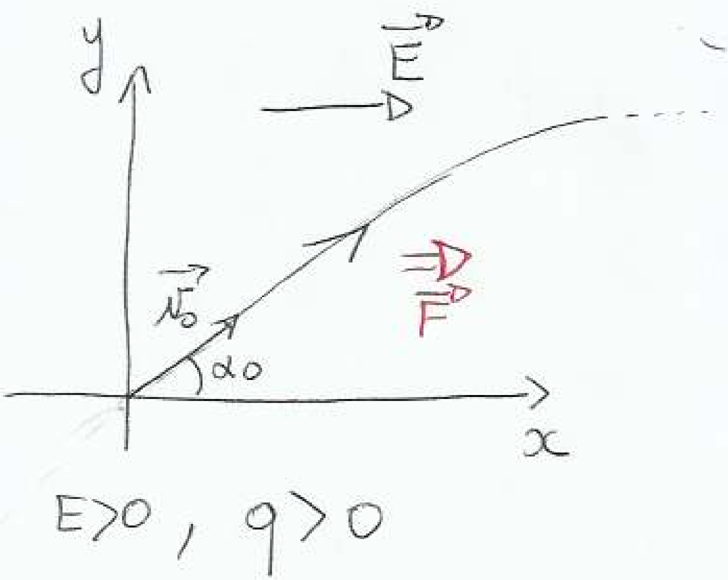
⇓

le mouvement se déroule entièrement dans le plan $(\vec{E}, \vec{v_0})$

$\int dt$ ↳ $\vec{OM} = \Big[\overbrace{a_m \frac{t^2}{2} + (v_0 \cos\alpha_0)t + x_0}^{x(t)}\Big]\vec{u_x} + \Big[\underbrace{(v_0 \sin\alpha_0)t + y_0}_{y(t)}\Big]\vec{u_y}$

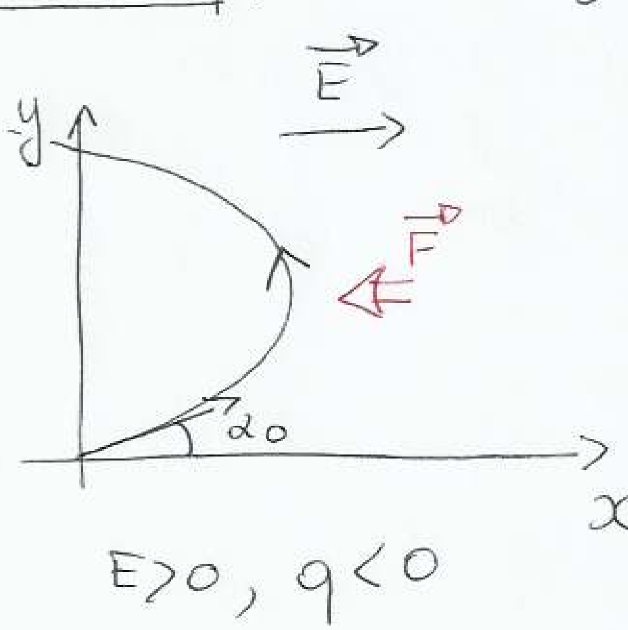
× équation trajectoire $y(x)$ ou $x(y)$?

- $t = \frac{y}{v_0 \sin\alpha_0}$
- $\boxed{x(y) = a_m \frac{y^2}{2 v_0^2 \sin^2\alpha_0} + \frac{y}{\tan\alpha_0}}$ parabole (orientée à l'horizo



$E > 0$, $q > 0$

$\Rightarrow a_m > 0$



$E > 0$, $q < 0$

$\Rightarrow a_m < 0$

× Remarques

- Calcul très similaires au mouvement d'une m dans le champ gravitation.

  Mais la différence : a_m dépend de m en électron

- A.N sur l'électron : $m_e = 9{,}1 \, 10^{-31}$ kg , $q_e = -1{,}6 \, 10^{-19}$ C

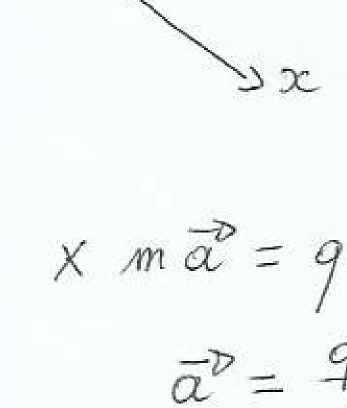
  ○ avec $E = 1 kV/m$ alors $a_m = -1{,}8 \, 10^{14} \, m.s^{-2}$

  ○ sur $t = 1 \mu s = 10^{-6} s$ avec $v_0 = 0$

  $v(1\mu s) \sim 10^{8} \, m.s^{-1}$ proche vitesse lumière

ii) Action du champ magnétique (constant)

× Etat initial : $\begin{cases} M \text{ en } O \text{ à } t=0 , (x_0, y_0) = 0,0 \\ \vec{B} = B \vec{u_z} \leftarrow \text{choix d'orientation du repère} \\ \vec{v_0} = v_0 \sin\alpha_0 \vec{u_x} + v_0 \cos\alpha_0 \vec{u_z} \end{cases}$



On remarque qu'initialement

$\vec{F}(t=0) = q \vec{v_0} \wedge \vec{B} = -q v_0 \sin\alpha_0 \vec{u_y}$

orientée suivant $\vec{u_y}$.

× $m \vec{a} = q \vec{v} \wedge \vec{B} = q \left(\dot{x} \vec{u_x} + \dot{y} \vec{u_y} + \dot{z} \vec{u_z} \right) \wedge B \vec{u_z}$

$$\vec{a} = \frac{qB}{m} \left(- \dot{x} \vec{u_y} + \dot{y} \vec{u_x} \right)$$

$\Rightarrow \omega_m = \frac{qB}{m}$ pulsation ciclotron ; $a_z = 0$

$[\omega] = s^{-1}$

× Équations différentielles

$$\begin{cases} \ddot{x} = \omega_m \dot{y} \\ \ddot{y} = -\omega_m \dot{x} \\ \ddot{z} = 0 \end{cases} \xRightarrow{\int dt} \begin{cases} \dots \\ \dot{y} = -\omega_m x(t) + \underbrace{\dot{y}(t=0)}_{=0} \\ \dot{z} = \dot{z}(t=0) = v_0 \cos\alpha_0 \end{cases}$$

× d'où $\ddot{x} = -\omega_m^2 x$ eqᵒ différentielle avec solution générale $x(t) = A\cos(\omega_m t + \varphi)$

$$\ddot{x}(t) = -\omega_m^2 A \cos(\omega t + \varphi)$$

Conditions initiales : $\begin{cases} \dot{x}(t=0) = -\omega_m A \sin\varphi = v_0 \sin\alpha_0 \\ x(t=0) = 0 = A\cos\varphi \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

soit $A = -\dfrac{v_0 \sin\alpha_0}{\omega_m}$

× $\dot{y} = -\omega_m \left(-\dfrac{v_0 \sin\alpha_0}{\omega_m}\right) \cos\left(\omega_m t + \frac{\pi}{2}\right)$

$\dot{y} = v_0 \sin\alpha_0 \sin\omega_m t$

$\int dt \Rightarrow y(t) = -\dfrac{v_0 \sin\alpha_0}{\omega_m} \cos\omega_m t + c$

et $\boxed{x(t) = -\dfrac{v_0 \sin\alpha_0}{\omega_m} \sin\omega_m t}$

$\boxed{z(t) = v_0 \cos\alpha_0 \, t}$

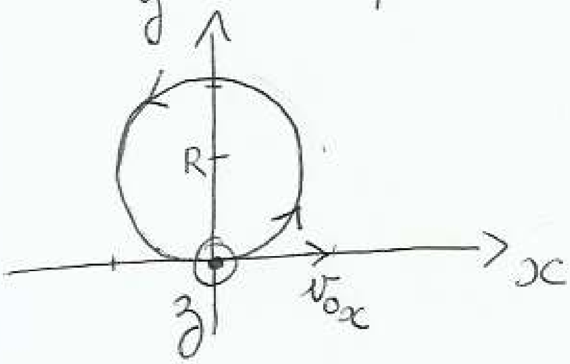
$\boxed{y(t) = \dfrac{v_0 \sin\alpha_0}{\omega_m}(1 - \cos\omega_m t)}$

mouvement en 3D = hélice

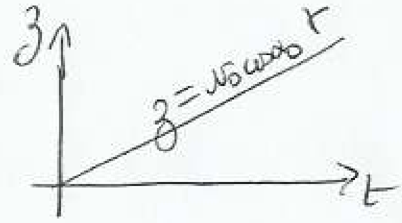
× Remarquons, avec $R = \dfrac{v_0 \sin\alpha_0}{\omega_m}$

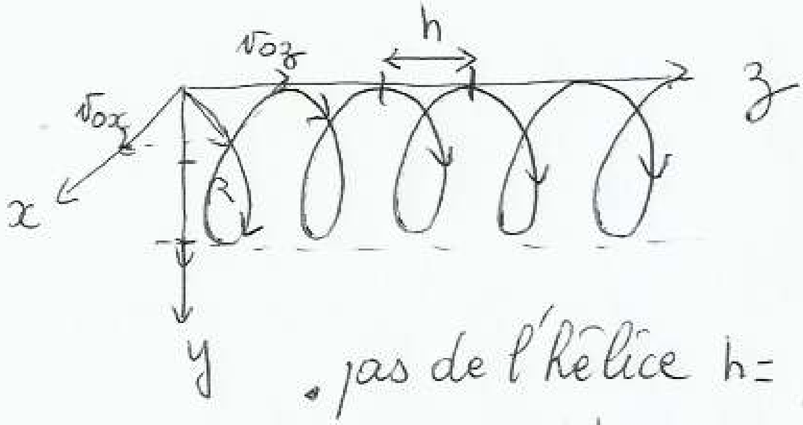
$$x^2 + (y-R)^2 = R^2 \sin^2 \omega_m t + R^2 \cos^2 \omega_m t = R^2$$

$\Leftrightarrow$ équation du cercle de $\begin{cases} \text{centre } (0, R) \\ \text{rayon } R \\ \text{dans le plan } (xOy) \end{cases}$



× Suivant z : $z(t)$ = fct affine





. si $v_{0z} = 0$ alors mouvement dans (xOy)

. pas de l'hélice $h = z(t + T_c) - z(t)$

où T_c = temps pour parcourir le cercle dans (xOy)

$\Rightarrow T_c = \dfrac{2\pi}{|\omega_m|}$ et $h = \dfrac{2\pi v_0 \cos\alpha_0}{|\omega_m|}$

× A.N pour l'électron ($m_e = 9\, 10^{-31}$ kg, $q = -1{,}6\, 10^{-19}$ C)

et $B = 0{,}1$ T $\Rightarrow \omega_m = -1{,}8\, 10^{10}$ rad s^{-1} $\left(= \dfrac{qB}{m}\right)$

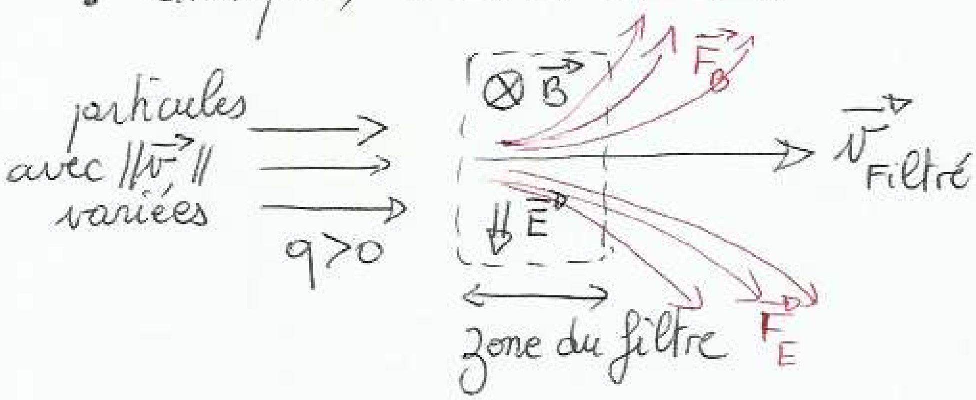
. avec $v_0 = 10^6$ m.s^{-1}, on a $R \sim 60\ \mu$m. $\left(= \dfrac{v_0 m}{qB}\right)$

$\alpha_0 = \dfrac{\pi}{2}$

× <u>Remarque</u> : filtre de Wien : idée $\vec{F}_{Lorentz} = \vec{0}$

$\vec{0} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B} \iff$ pour $\vec{E}$ et $\vec{B}$ fixés, alors $\vec{v}$ uniq

• exemple, $\vec{E} \perp \vec{B}$ et $\vec{v} \perp \vec{E}$



correspond à $q\vec{E} + \vec{v}_F \wedge \vec{B} = \vec{0}$

3) <u>Mouvement des charges dans un conducteur.</u>

× Dans un conducteur $\begin{cases} \rho : \text{densité de charges } (+ \text{ et } -) \\ \vec{J} = \rho \vec{v} : \text{densité volumique de coura} \end{cases}$

<u>Rem</u>. habituellement $\rho = 0$ et seules les charges (−) contribuen au courant (électrons)

• $\vec{v}$: vitesse moyenne des charges

× Dans un volume $d\tau$; on a $\rho\, d\tau$ charges sur lesquelles s'applique la résultante des forces pour un conducteur plongé dans $\vec{E}$, $\vec{B}$

$$d\vec{F} = \rho\, d\tau\, \vec{E} + \rho\, d\tau\, \vec{v} \wedge \vec{B}$$

$\Rightarrow$ densité volumique de force : $\boxed{\dfrac{d\vec{F}}{d\tau} = \rho\vec{E} + \vec{J} \wedge \vec{B}}$

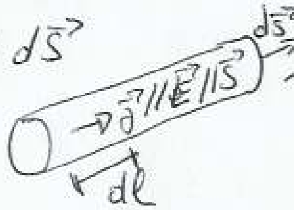
i) Effet du champ $\vec{E}$: loi d'ohm, effet Joule

× Rappel (p 45) : $\vec{j} = \rho\mu\vec{E} = \gamma\vec{E}$ (γ = conductivité

× relation courant $\vec{j}$ et l'intensité I : $I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$

à $\vec{j}$ et section S constants : $I = \|\vec{j}\| S$

× $I = \iint_S \gamma \vec{E} \cdot d\vec{S} = \gamma E S$ (toutes grandeurs constantes et $\vec{E} \parallel d\vec{S}$)



$$\Delta V_{AB} = \int_A^B \overrightarrow{grad}\, V \cdot d\vec{l} = \int_A^B -\vec{E} \cdot d\vec{l} = -E\, l_{AB}$$

⇒ Loi d'ohm avec convention $U = -(\Delta V_{AB})$

$$\frac{U}{I} = \frac{l_{AB}}{\gamma S} = R \text{ : résistance.}$$

× Pour un volume $d\tau = S\,dl$ (donc $dR = \frac{dl}{\gamma S}$)

. la puissance est $dP = \rho\, d\tau\, \vec{E} \cdot \vec{v} = \vec{E} \cdot \vec{j}\, d\tau$

. avec $E = \frac{I}{\gamma S}$ et $j = \frac{I}{S}$

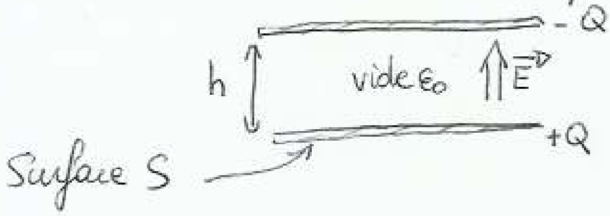
. on obtient $dP = \frac{I^2 S\, dl}{\gamma S^2} = I^2 dR$

⇒ effet Joule sur la puissance dissipée dans un conducteur de résistance R : $\boxed{P = RI^2 = UI = \frac{U^2}{R}}$

⇒ effet Joule

ii) Effet du champ $\vec{E}$: Force sur les armatures d'un condensateur

× Pour un condensateur plan de capacité $C = \frac{S\varepsilon_0}{h}$ (p 54)



• La présence du champ $\vec{E}$ généré par la différence de potentiel entre les plaques crée une force sur ces plaques chargées.

× L'énergie accumulée dans le condensateur chargé est (p 56)

$$U_e = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

× Pour estimer la force $\vec{F}$ (naturellement $/\!/ \vec{E}$), nous calculons le travail nécessaire δw pour augmenter la distance entre les plaques : $h \to h + dh$.

• Nous avons alors $\delta w = -F\,dh$ (énergie cédée au condensateur)

• $\delta w = dU_e$: le travail est cédé à U_e avec $Q = cste$

• or $dU_e = \frac{\partial U_e}{\partial h} dh$ où $U_e = \frac{1}{2}\frac{Q^2 h}{S\varepsilon_0}$

soit $-F\,dh = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{S\varepsilon_0} dh$ et $\boxed{F = -\frac{1}{2}\frac{Q^2}{S\varepsilon_0}}$

la force est <0, tend à rapprocher les armatures.

× Définition de la pression électrostatique : $F = -P_e S$

• réécrivons F avec $E = \frac{V}{h}$ et $V = \frac{Q}{C} = \frac{Qh}{S\varepsilon_0}$

soit $Q^2 = V^2 \frac{S^2\varepsilon_0^2}{h^2} = E^2 S^2 \varepsilon_0^2$ et $F = -\frac{1}{2}\varepsilon_0 S E^2$

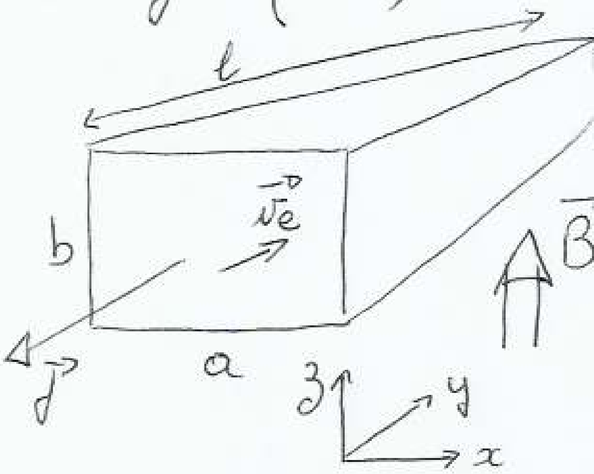
• on obtient $\boxed{P_e = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}}$

ou en utilisant le champ à la surface d'une plaque : $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ $\Big\}$ $P_e = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$

iii) Effet du champ $\vec{B}$: effet Hall

× Dans un conducteur de section rectangulaire $(a \times b)$, parcouru par un courant constant $\vec{j} = \rho \vec{v}$, généré par les électrons : $\rho < 0$.

× On plonge le conducteur dans un champ $\vec{B}$ constant.



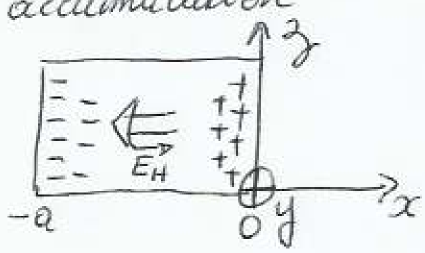
× Orientation : $\begin{cases} \vec{v_e} = v_e \vec{u_y} \\ \vec{j} = \rho v_e \vec{u_y} \quad (\rho < 0) \\ \vec{B} = B \vec{u_z} \end{cases}$

× Force vue par les électrons sur une longueur l : $\vec{F} = \rho l a b \, \vec{v_e} \wedge \vec{B}$

$$\boxed{\vec{F} = -|\rho| l a b v_e B \, \vec{u_x}}$$

⇒ les électrons sont "poussés" vers les x négatifs, ils s'accumulent vers $x = -a$.

× La neutralité électrique engendre une accumulation de charges positives en $x = 0$



⇒ une différence de potentiel se crée : $V(-a) - V(0) < 0$

Un champ électrique est généré : $\vec{E_H} = \dfrac{V(-a) - V(0)}{a} \vec{u_x}$ champ de Hall

qui tend à s'opposer au ΔV.

× A l'équilibre $\sum \vec{F} = \vec{0} = \rho(\vec{E_H} + \vec{v} \wedge \vec{B})$ soit $\boxed{\vec{E_H} = -\dfrac{\vec{j} \wedge \vec{B}}{\rho}}$

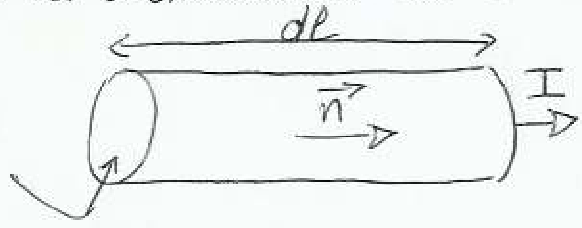
iv) Effet du champ $\vec{B}$: Force de Laplace

× Dans un conducteur neutre $\rho = 0$, même si les électrons restent mobiles ; $\vec{j} \neq \vec{0}$.

× La force (p 75) devient : $\frac{d\vec{F}}{d\tau} = \vec{j} \wedge \vec{B}$

× Pour un tel conducteur sous la forme d'un fil.

$d\tau = S\,dl$ Section S



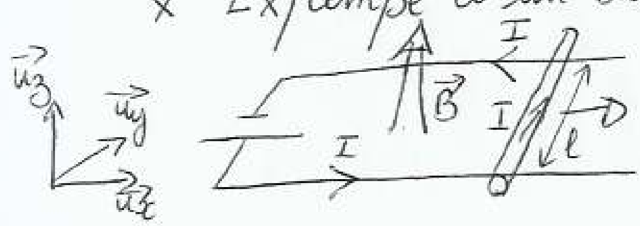
$\vec{n}$: vecteur unitaire dans le sens du fil
$\vec{dl} = dl\,\vec{n}$

• $I = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S} = jS$ et $\vec{j} = \frac{I}{S}\vec{n} = \frac{I}{\underbrace{S\,dl}_{d\tau}}\vec{dl}$

• soit $d\vec{F} = \vec{j}\,d\tau \wedge \vec{B} = I\,\vec{dl} \wedge \vec{B}$

⇒ Force de Laplace sur $\vec{dl}$ générée par effet de $\vec{B}$: $\boxed{d\vec{F} = I\,\vec{dl} \wedge \vec{B}}$

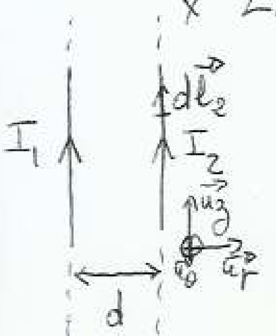
× Exemple d'un barreau mobile sur un circuit



$\vec{F_L} = I l B\,\vec{u_x}$ le barreau se déplace vers la droite

Rem : les e^- se déplacent dans le sens opposé à l'intensité I

× Exemple de la force mutuelle exercée entre 2 fils.



• champ $\vec{B}_{1\to2}$ généré par I_1 et s'appliquant à toute charge en I_2 est $\vec{B}_{12} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}\vec{u_\theta}$ ($\vec{dl_2} = dl\,\vec{u_z}$)

• F. Laplace sur fil 2 : $d\vec{F_2} = I_2\,\vec{dl_2} \wedge \vec{B}_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}\,dl\,\vec{u_r}$ ⇒ les fils se repoussent ! (si $I_1 I_2 > 0$)