III Magnétostatique

III. 0) Introduction

+ Magnétisme connu depuis l'antiquité : Ville grecque de Magnésie
  ⇒ utilisation des pierres "magnétites" attirant le fer
  puis pour les boussoles

+ Force de Lorentz (1895) : $\vec{F} = q\,\vec{v} \wedge \vec{B}$ (→ règle des doigts !)
  décrit action courant électrique sur charge <u>en mouvement</u>

  ⇒ Champ magnétique $\vec{B}$, unité Tesla (T)
  ex : champ terrestre ~ 50 μT, électroaimant qq T
  bobines supra (IRM) 5-10 T

+ La force magnétique ne travaille pas !
  - déplacement $d\vec{l} \,//\, \vec{v}$ } donc $\delta W = \vec{F}.d\vec{l} = 0$
    $\vec{F} \perp \vec{v}$ (puisque $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$)
  - $\vec{F}_{magnét}$ ne peut pas mettre en mouvement mais dévie uniquement (chgmt direction)

+ L'orientation de $\vec{F}$ dépend ~~du choix~~ de l'orientation du repère (∈ produit vectoriel)
  ⇒ $\vec{B}$ est un pseudo vecteur ou vecteur axial. = orientation espace

+ Mais $\vec{F}$ ne dépend pas du référentiel Galiléen
  . Soit R et R' deux réf. Galiléens / $\vec{v}' = -\vec{v}_{R'/R} + \vec{v}$
  . $\vec{F}_R = \vec{F}_{R'}$ soit $q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) = q(\vec{E}' + \vec{v}' \wedge \vec{B}')$
  . d'où $\forall \vec{v}$, $\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} = \vec{E}' + (-\vec{v}_{R'/R} + \vec{v}) \wedge \vec{B}'$

  soit $\vec{E} = \vec{E}' - \vec{v}_{R'/R} \wedge \vec{B}'$ et $\vec{B} = \vec{B}'$

  On ~~dit~~ q ⇒ lien entre $\vec{E}$ et $\vec{B}$ et plus tard c = cte

III. 1) Sources de champs magnétiques

i) Les aimants permanents

- aimants naturels / ferrites ou néodyme
  $\hookrightarrow$ propriété magnétique découle de la structure du cristal
  $\Rightarrow$ cours phys statistique / matière condensée

ii) Les courants, i.e. charges en mouvement

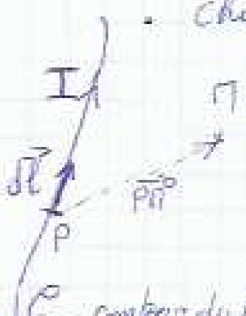
- Expérience d'Oersted en 1819 : changement d'orientation boussole à proximité courant électrique / fil
- Description par <u>J-B Biot & F. Savart</u> (1820) ~~avec~~

$$\boxed{\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 q}{4\pi}\, \vec{v}(P) \wedge \frac{\vec{PM}}{\|\vec{PM}\|^3}}$$
$\Big\{$ champ créé en M par charge q en P avec vitesse $\vec{v}$

<u>Rem</u> $\|\vec{B}(M)\| \propto \frac{v}{PM^2}$; Perméabilité du vide $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$
$[\mu_0] = kg\, m\, A^{-2} s^{-2}$

.. Unité.
$[B] = kg\, A^{-1} s^{-2} = V s\, m^{-2} = T$
$[B] = [\mu_0]\, A\, m^{-1}$

- champ créé par un courant I dans un fil : (courant constant)
$\Downarrow$
magnétoSTATIQUE



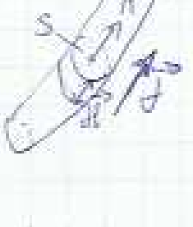
$$\vec{B}(M) = \int_{\mathcal{C}} \frac{\mu_0 I}{4\pi}\, d\vec{l} \wedge \frac{\vec{PM}}{\|\vec{PM}\|^3}$$

où $d\vec{I} = I\, d\vec{l}$
et $[d\vec{I}] = [q][v] = C\, m\, s^{-1}$

$\mathcal{C}$ = contour du fil.

La source discrète $q\vec{v}$ est ici $d\vec{I} = I d\vec{l}$

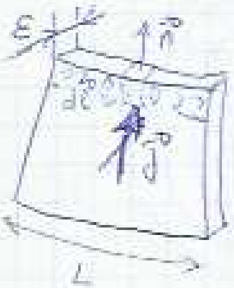
<u>Rem</u> La géométrie est telle que longueur fil (l) >> section (s)
$I = \vec{j} \cdot \vec{n}\, S$ où $\vec{j}$ = dens. volumique de courant
$[j] = A\, m^{-2} = C\, s^{-1} m^{-2}$



ou $dI = \vec{j} \cdot d\vec{l}\, S$
ou $dI = I\, dl$

soit $\vec{B} = \int_{\mathcal{C}} \frac{\mu_0}{4\pi}\, \vec{j}(P) \wedge \frac{\vec{PM}}{\|\vec{PM}\|^3}\, dl$

. champ créé par un courant de surface



× géométrie / $L \gg e$

$$dI = \vec{j} \cdot L e \, d\vec{l} = \underbrace{j_S}_{je} \cdot \underbrace{L d\vec{l}}_{dS} \quad (= I \, dl)$$

× déf. j_S = densité surfacique de courant ($A.m^{-1}$)

× $$\vec{B}(M) = \iint_S \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{j_S}(P) \wedge \frac{\vec{PM}}{\|\vec{PM}\|^3} \, dS$$

. formule "volumique" de loi de Biot & Savart :

$$\boxed{\vec{B}(M) = \iiint_V \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{j}(P) \wedge \frac{\vec{PM}}{\|\vec{PM}\|^3} \, d\tau}$$

et $\underbrace{I d\vec{l}}_{A.m} = \underbrace{\vec{j} \, d\tau}_{A.m^{-2}.m^3} = \underbrace{\vec{j_S} \, dS}_{A.m^{-1}.m^2}$

iv) Lignes de champ magnétique

+ déf. ligne $\mathcal{L}$ qui, en tout point M de l'espace, est tangeante à la dir. du champ magnétique

$\Leftrightarrow$ $\vec{B} \wedge d\vec{l} = 0$ si $d\vec{l}$ est un déplacement élémentaire sur $\mathcal{L}$

. en coord. cartésiennes : $d\vec{l} = dx \, \vec{i} + dy \, \vec{j} + dz \, \vec{k}$

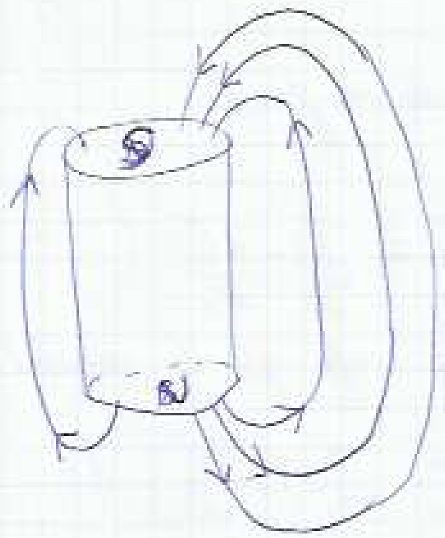
$$\begin{cases} B_y \, dz - B_z \, dy = 0 \\ B_z \, dx - B_x \, dz = 0 \\ B_x \, dy - B_y \, dx = 0 \end{cases}$$

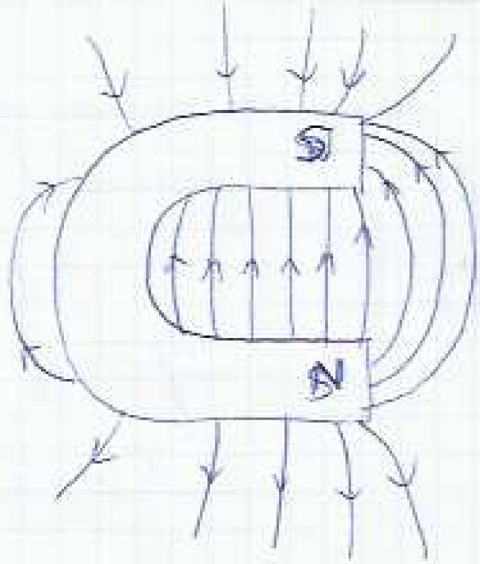
$$\Rightarrow \frac{dx}{B_x} = \frac{dy}{B_y} = \frac{dz}{B_z}$$

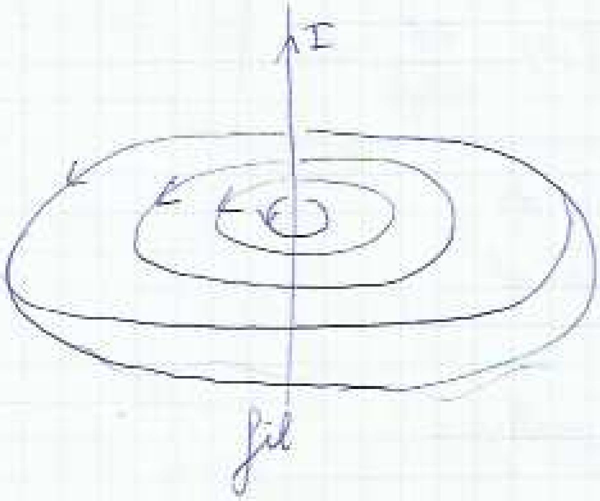
. en coord. polaires : $$\frac{dr}{B_r} = r \frac{d\varphi}{B_\varphi} = \frac{dz}{B_z}$$

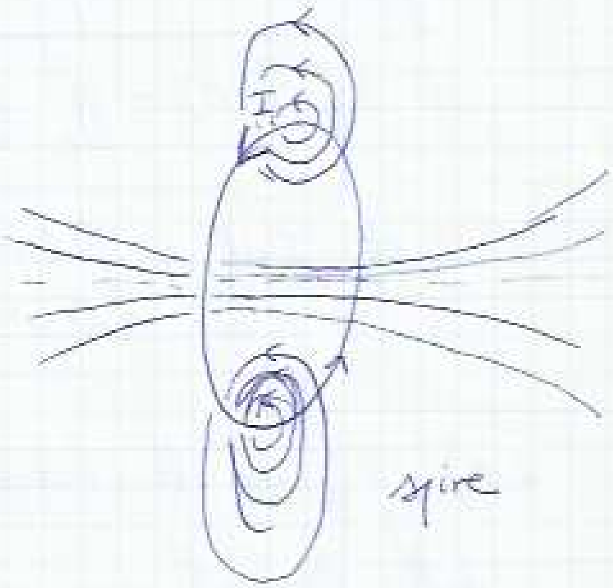
+ déf. pôles Nord et Sud / Nord = lignes "sortantes" ~~rentrantes~~
pour aimants permanents Sud = lignes "~~sortantes~~ rentrantes"

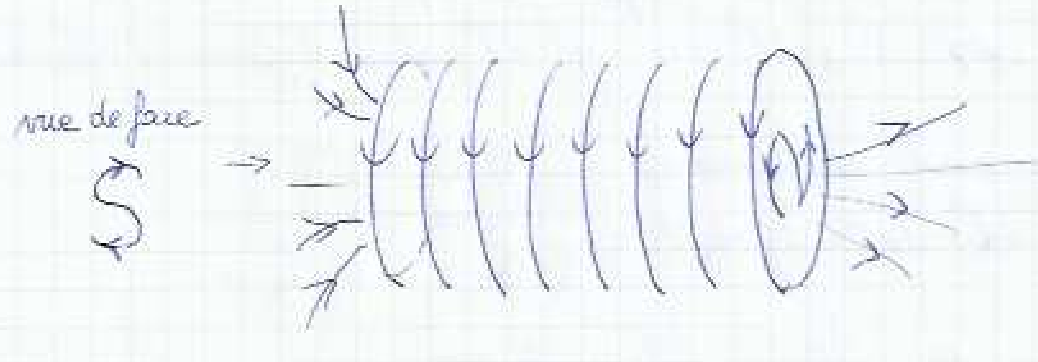
.../...







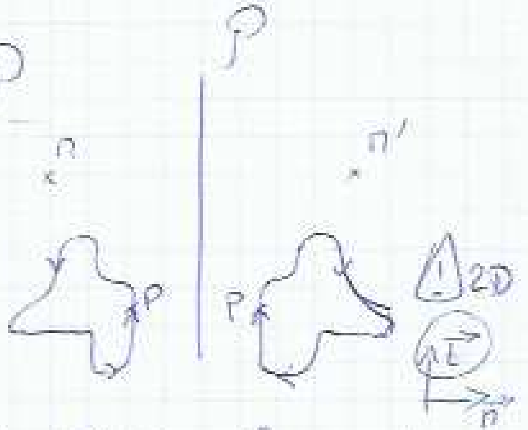




solénoïde

III. 2) Symétries & invariances

1) Symétrie par rapport à plan $\mathcal{P}$



- distribution de courant symétrique / $\mathcal{P}$

$\Leftrightarrow \forall P : \quad I(P')\vec{dl} = Sym_{\mathcal{P}}(I(P)\vec{dl})$

si $P' = Sym_{\mathcal{P}}(P)$

Rem Pour la composante normale de $\vec{dl}$ / $\mathcal{P}$, elle symétrique est orientée à l'opposé / $\vec{dl}$.

$\Rightarrow$ comportement $\neq$ que pour la charge

- Pour $\vec{PM}$: on a aussi $\vec{P'M'} = Sym_{\mathcal{P}}(\vec{PM})$

Rem : m comportement que pour calcul de $\vec{E}$.

- $$\frac{4\pi}{\mu_0} d\vec{B}(M) = I\, \vec{dl}(P) \wedge \frac{\vec{PM}}{\|\vec{PM}\|^3}$$

donc $$\frac{4\pi}{\mu_0} d\vec{B}(M') = I\, \vec{dl}(P') \wedge \frac{\vec{P'M'}}{\|\vec{P'M'}\|^3}$$

où nous avons par symétrie $_{\mathcal{P}}$: $\begin{cases} I\vec{dl}(P) = d\vec{I}_n + d\vec{I}_t \\ I\,\vec{dl}(P') = -d\vec{I}_n + d\vec{I}_t \end{cases}$

Rem $\vec{n} \wedge \vec{n} = \cancel{\ldots} = \vec{0}$

$\vec{t} \wedge \vec{t}' \cancel{\ldots} \parallel \vec{n}$ et $\vec{t} \wedge \vec{n} \in \mathcal{P}$

$\begin{cases} \dfrac{\vec{PM}}{\|\vec{PM}\|^3} = \dfrac{\vec{PM}_n + \vec{PM}_t}{PM^3} \\ \dfrac{\vec{P'M'}}{\|\vec{P'M'}\|^3} = \dfrac{-\vec{PM}_n + \vec{PM}_t}{PM^3} \end{cases}$

- d'où $$\frac{4\pi}{\mu_0} d\vec{B}(M') = \underbrace{\frac{-d\vec{I}_n \wedge \vec{PM}_t}{PM^3} + \frac{-d\vec{I}_t \wedge \vec{PM}_n}{PM^3}}_{-d\vec{B}_t(M)} \cancel{= \frac{4\pi}{\mu_0} d\vec{B}(M)} + \underbrace{\frac{d\vec{I}_t \wedge \vec{PM}_t}{PM^3}}_{+d\vec{B}_n(M)}$$

- Remarquons par symétrie $\mathcal{P}$: $\vec{t} \to \vec{t}$ et $\vec{n} \to -\vec{n}$

c.à.d. : $S_{\mathcal{P}}(d\vec{B}(M)) = d\vec{B}_t(M) - d\vec{B}_n(M)$

$$\Rightarrow \quad \vec{B}(M') = -S_{\mathcal{P}}(\vec{B}(M))$$

(confirmation propriété axiale de $\vec{B}$) Le champ en M est antisymétrique !

Suite III 2) Symétries)

- Si $M \in \mathcal{P}$ ($M' = M$) alors $\vec{B}_t(M) = -\vec{B}_t(M) = \vec{0}$
  le champ $\vec{B}(M) \perp \mathcal{P}$ ~~[illegible]~~ à $\mathcal{P}$
  est orthogonal

- Cas d'une antisymétrie / $\mathcal{P}$
  on montre alors que $\vec{B}(M') = S_{\mathcal{P}}(\vec{B}(M))$

  $\Rightarrow$ si $M \in \mathcal{P}$ alors $\vec{B}_n(M) = -\vec{B}_n(M) = \vec{0}$
  alors le champs appartient à $\mathcal{P}$.

- ex : × cas du fil et $\mathcal{P} \perp$ au fil $\Rightarrow \vec{B} \perp$ fil
  antisymétrie

  × cas du solénoïde infini et $\mathcal{P} \parallel$ à 1 spire
  $\Rightarrow$ plan de symétrie donc champ $\perp \mathcal{P}$ et $\perp$ spire

ii) Invariances

+ Translation selon vecteur $\vec{u} \Leftrightarrow I(\vec{r}) = I(\vec{r} + \vec{u})$
  - changement de coordonnées dans l'intégrale de Biot & Savart
    $d\vec{l} \to d\vec{l} + \vec{u}$ ne changent pas l'intégrale.
  - alors $\vec{B}$ ne dépend pas de la coord. suivant $\vec{u}$.

  - ex : × fil infini suivant z : $\vec{B}(r, \varphi)$

    ×

+ Rotation suivant un axe Δ, définissant l'axe azimutal des coord cylind
  - si $I(r, \theta, z) = I(r, \theta + \alpha, z)$ $\forall \alpha$
    $\Rightarrow I(r, z)$ indépendant de θ
  - alors $\vec{B}$ ne dépend non-plus de θ : $\vec{B}(r, z)$

  - ex du fil suivant z : $\vec{B}(r)$

Suite III 2) Symétries

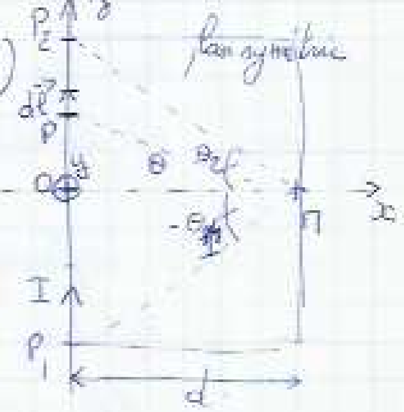
iii) Conclusion sur méthode de calcul du champ.

1) analyser les ~~symétries~~ invariances $\Rightarrow$ déduire (réduire) les var. dont dépendent le champ

2) analyser les symétries $\Rightarrow$ déduire l'orientation du champ

3) intégrer $\iiint \frac{\vec{j}(P) \wedge \vec{PM}}{\|PM\|^3} d\tau$

~~III~~ 3) Exemple du segment de courant et du champ sur médiatrice



- Symétries (~~invariances~~) $\Rightarrow \vec{B}(M) \perp$ plan $(OMP_{1/2})$
- comme $M \in$ ~~axe médian du segment~~, sa position ne dépend que de θ_P donc

$$\vec{B}(M) = B(\theta_M)\,\vec{e_y} \quad (\vec{e_y} = \vec{j})$$

- Ici $\iiint \vec{j_1}\, d\tau$ devient $\int I\, \vec{dl_1}$ où $\vec{dl} = dz\, \vec{e_z}$

avec $z = d\tan\theta$ et $dz = \frac{d}{\cos^2\theta} d\theta$

- $\vec{PM} = z\,\vec{e_z} + d\,\vec{e_x}$

$\|\vec{PM}\| = (z^2 + d^2)^{1/2} = \left(\frac{d}{\cos\theta}\right)$

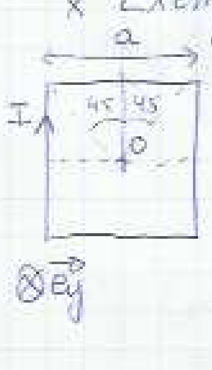
- $\vec{dl_1} \wedge \vec{PM} = \frac{d^2}{\cos^2\theta} d\theta \underbrace{\vec{e_z} \wedge \vec{e_x}}_{=\vec{e_y}}$

- au final $\vec{B}(M) = \int_{-\theta_1}^{+\theta_2} \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d^2}{\cos^2\theta} \frac{1}{\left(\frac{d}{\cos\theta}\right)^3} d\theta\, \vec{e_y} = \int_{-\theta_1}^{+\theta_2} \frac{\mu_0 I}{4\pi d} \cos\theta\, d\theta\, \vec{e_y}$

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi d}\left(\sin\theta_2 - \sin(-\theta_1)\right)\vec{e_y}$$

<u>Rem</u> $\vec{e_y} = \vec{e_\varphi}$ car <u>rotation</u>

× Exemple de la spire carrée, $\vec{B}(O)$



- d'après le calcul sur un segment : $\vec{B}_{1/4}(O) = \frac{\mu_0 I}{4\pi\, a/2}\, 2 \underbrace{\sin\frac{\pi}{4}}_{\frac{\sqrt{2}}{2}} \vec{e_y}$

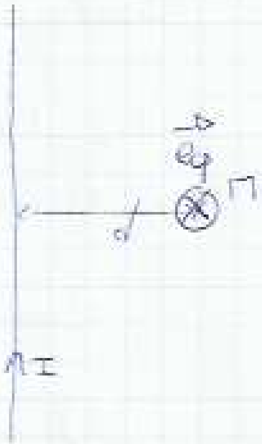
- $\vec{B}(O) = 2\sqrt{2}\, \frac{\mu_0 I}{\pi a}\, \vec{e_y}$

.../...

Exemple du fil rectiligne illimité

- cas limite du segment avec $\theta_1, \theta_2 \to \frac{\pi}{2}$

d'où directement $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}\vec{e_\varphi}$



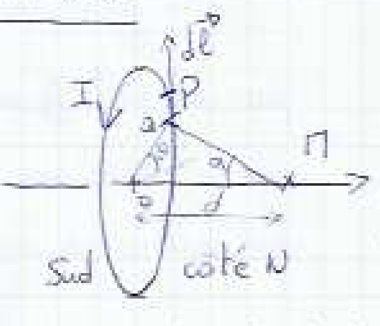
- A.N. $B(M) = 0{,}2 \cdot 10^{-6} \times \frac{I}{d} = \frac{I(A)}{d(cm)} \times 20\,\mu T$

pour $I = 1A$, $B = 20\,\mu T$ à 1cm / $2\,\mu T$ à 10...

Exemple de la spire circulaire, champ sur l'axe

symétries
- tout plan ⊥ spire et contenant Oz est plan d'anti-symétrie ⇒ $\vec{B}$ est inclus dans tous

implique que sur Oz : $\vec{B}(M) = B(M)\,\vec{e_z}$



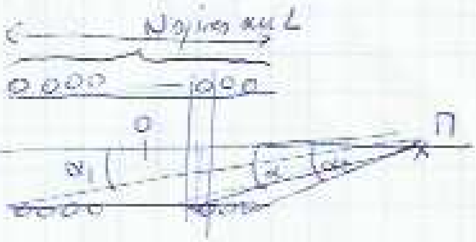
- Rotation autour de Oz = invariance ⇒ $B(M)$ indépendant de θ
- $d\vec{l} = a\,d\theta\,\vec{e_\theta}$ pour $\theta \in [0, 2\pi]$
- $\vec{PM} = -a\,\vec{e_r} + d\,\vec{e_z}$ et $\|\vec{PM}\| = \cancel{\frac{d}{\cos\alpha}}\ \frac{a}{\sin\alpha}$

$d\vec{l} \wedge \frac{\vec{PM}}{\|\vec{PM}\|^3} \cdot \vec{e_z}$ (on laisse tomber $\vec{e_r}$) $= +\frac{a^2\sin^3\alpha}{a^3}\,d\theta$

- $\vec{B}(M) = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\sin^3\alpha}{a}\,d\theta\,\vec{e_z} = \frac{\mu_0 I \sin^3\alpha}{2a}\vec{e_z}$

on remarque que $\vec{B}(O) = \frac{\mu_0 I}{2a}\vec{e_z}$

Exemple du solénoïde à N spires limité



- chaque spire i donne $d\vec{B_i}(M) = \frac{\mu_0 I}{2a}\sin^3\alpha\,\vec{e_z}$
- sur dz on a $\frac{N}{L}dz = dN$ spires

et alors $dB = \frac{\mu_0 I}{2a}\sin^3\alpha\,\frac{N}{L}\,dz$ où

- $\frac{dz}{a} = d\left(\frac{1}{\tan\alpha}\right) = \frac{d\alpha}{\sin^2\alpha}$

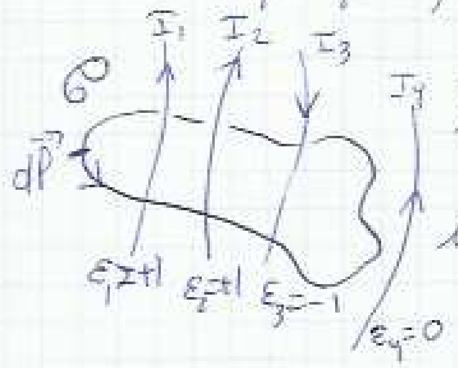
- au total $\vec{B}(M) = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \vec{e_z}\,\frac{\mu_0 I N}{2L}\sin\alpha\,d\alpha = \frac{\mu_0 I N}{2L}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)\,\vec{e_z}$

au centre : $\alpha_1 = \pi - \alpha_2 = \alpha_0 \Rightarrow \frac{\mu_0 I N}{L}\cos\alpha_0$

III . 3 Théorème d'Ampère

i) Enoncé

- La circulation du champ magnétostatique sur un contour fermé $\mathcal{C}$ orienté quelconque est égale à la somme algébrique des intensités des courants enlacés par le contour $\mathcal{C}$ multiplié par μ_0.



$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{k\in\mathcal{C}} \varepsilon_k I_k$$

ici $\mu_0 (I_1 - I_2 - I_3)$

Orientation suivant règle d'Ampère (pouce main droite)

- Comparaison à l'électrostatique : $\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l} = V(B) - V(A)$ car $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$

et donc $\oint_{\mathcal{C}} \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$ pour tout contour fermé $\mathcal{C}$

$\Leftrightarrow \vec{E}$ dérive d'un pot. scalaire.

- $\oint_{\mathcal{C}} \vec{B}\cdot d\vec{l} \neq 0 \Rightarrow \vec{B}$ ne dérive pas d'un pot. scalaire ! (en général)

Mais remarquons que si $\mathcal{C}$ n'enlace pas de courant alors $\exists\, V_B$ pot. scalaire / $\vec{B} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V_B$ sur ce contour.

- Pas de démo mais un exemple, fil infini voir verso p22

$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e}_\varphi$ où r est la distance de M au fil, parcouru par I

$C = \oint_{\mathcal{C}} \vec{B}(M)\cdot d\vec{l}$ où $\vec{B}\cdot d\vec{l} = 0$ sauf si $d\vec{l} \parallel \vec{e}_\varphi$ sur le contour.

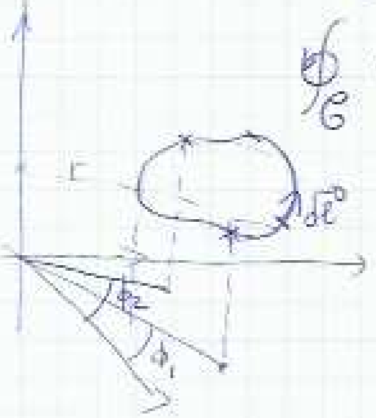
or $d\vec{l} = dr\,\vec{e}_r + r\,d\varphi\,\vec{e}_\varphi + dz\,\vec{e}_z$

donc $C = \oint_{\mathcal{C}} \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{r}{r}\,d\varphi$ comme le contour est fermé $\varphi : 0 \to 2\pi$

au final $C = \oint_{\mathcal{C}}^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{2\pi}\,d\varphi = \mu_0 I$

- Pour plusieurs fil on somme les $\vec{B}$
- Si le fil est en dehors

- si plusieurs fils sont inclus dans le contour $\mathcal{C}$ chacun génère $\vec{B_i} = \frac{\mu_0 I_i}{2\pi r_i}\vec{e}_{\varphi_i}$ où I_i est orienté !
  donc chaque circulation aboutit à $\varepsilon_0 I_i$ (algébrique).
- si un fil est en dehors du contour $\mathcal{C}$



$$\oint_{\mathcal{C}} d\varphi = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\varphi + \int_{\phi_2}^{\phi_1} \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\varphi = 0$$

ii) Méthode de calcul du champ magnétique.

1) analyse des $\begin{cases} \text{symétries} \rightarrow \text{orientation de } \vec{B} \\ \text{invariances} \rightarrow \text{dépendences de } \vec{B} \text{ dans les coord.} \end{cases}$

2) définition d'un contour simple $\begin{cases} \text{passant par } M \\ B \text{ constant sur contour.} \\ \vec{B} \parallel \vec{d\ell} \end{cases}$

3) application th. Ampère $\Rightarrow \vec{B}(M)$

+ Exemple du solénoïde infini droit

- Courant I, rayon a, nombre de spire par unité longueur n, axe Oz
- Sur l'axe de sym. Oz on a montré p22-recto :
  $\vec{B}(M) = \mu_0 I n \, \vec{e}_z$
- Comment calculer $\vec{B}(M)$ en dehors de l'axe ?
  × symétrie / plan $\perp Oz$ et passant par $M \Rightarrow \vec{B} \perp$ plan $\Rightarrow \parallel Oz$
  × invariance / translation suivant $z \Rightarrow \vec{B}$ indépendant de z
  / rotation d'axe $Oz \Rightarrow \vec{B}$ indépendant de φ
  $\Rightarrow \vec{B}(M) = B(r)\,\vec{e}_z$
- Choix d'un contour avec soit $\underbrace{d\vec{l} \parallel \vec{e}_z}_{\text{ligne } \parallel Oz}$ soit $\underbrace{d\vec{l} \perp \vec{e}_z}_{\text{ligne } \perp Oz}$
  $\Rightarrow$ Rectangle
  avec au moins une côté sur Oz (où $B(0) = \mu_0 I n$)

- sur BC, DA, FG, HE : $d\vec{l} \perp \vec{e}_z \Rightarrow \vec{B}\cdot d\vec{l} = 0$
  sur AB et EF : $d\vec{l} = dl\,\vec{e}_z \Rightarrow \vec{B}\cdot d\vec{l} = B(0)\,dl$
  sur CD et GH : $d\vec{l} = -dl\,\vec{e}_z \Rightarrow \vec{B}\cdot d\vec{l} = -B(r)\,dl$

$$\oint_{\mathcal{C}_e} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_A^B B(0)\,dl - \int_C^D B(r)\,dl = \mu_0 I n L - B(r) L$$

idem sur $\oint_{\mathcal{C}_i} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I n L - B(r) L$

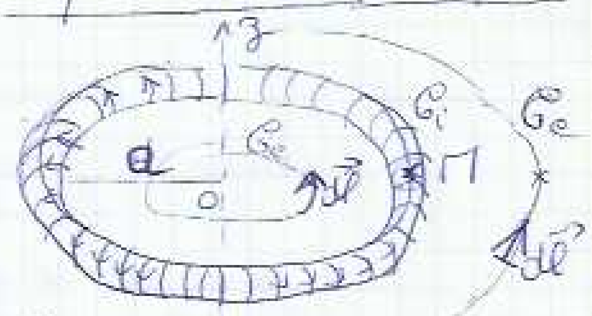
- $\sum_{k \in \mathcal{C}_e} I_k = L n I$ et $\sum_{k \in \mathcal{C}_i} I_k = 0$

…/…

- d'où $\mu_0 I n L - B(r>a) L = \mu_0 L n I \Rightarrow \boxed{B(r>a) = 0}$ et $\boxed{B(r<a) = \mu_0 I n}$

+ Exemple du Solénoïde torique, champ à ~~l'intérieur~~ dans le plan

- N spires enroulées sur un tore
  de rayon a



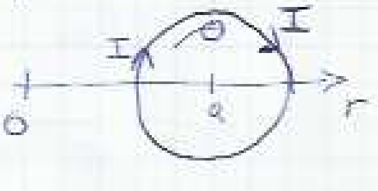
- symétrie / tout plan ⊥ tore contenant OM
  $\Rightarrow \vec{B}(M) = B(M)\,\vec{e_\varphi}$ ($\vec{B} \perp$ plan)
- invariance par rotation $/Oz \Rightarrow \vec{B}$ indépendant de φ

  $\Big\}\ \vec{B}(M) = B(r)\,\vec{e_\varphi}$

- Contour fermé = cercle de centre O ⊥ Oz $\Rightarrow \vec{dl} = r\,d\varphi\,\vec{e_\varphi}$

- Pour M à l'extérieur du tore : $r<a$ ou $a<r$: $\mathcal{C}_e$
  $\sum_{k\mathcal{C}_e} I_k = 0$ car soit pas de courant : $r<a$
  soit les 2 courant opsés : $a<r$

- ~~Pour~~ M dans le tore $r \sim a$
  $\sum_{k\mathcal{C}_i} I_k = NI$

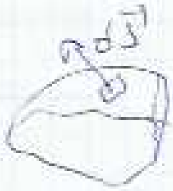


- Circulation : $\oint_{\mathcal{C}} \vec{B}\cdot\vec{dl} = B(r)\,2\pi r$

- Au final à l'extérieur $\vec{B}(r<a \text{ ou } r>a) = \vec{0}$

  à l'intérieur $\vec{B}(r\sim a) = \dfrac{\mu_0 N I}{2\pi a}\,\vec{e_\varphi}$

III 4) Potentiel vecteur



i) Le flux magnétique - conservation

+ Déf : $\phi = \iint_{S} \vec{B}\, d\vec{S}$ flux de B à travers surface S orientée

$[\phi] = Wb$, weber ($1 Wb = 1 T.m^2$) $= kg\, A^{-1} s^{-2}\, m^{2} = J.A^{-1}$
$= V\, s\, m^{-2} . m^2 = V.s = \frac{VC}{C s^{-1}}$

+ ~~Exploitons Biot-Savart~~ $\cancel{\vec{B}(M) = \iint_{C_P} \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{l} \wedge \vec{PM}}{\|\vec{PM}\|^3}}$

~~on a alors~~ $\cancel{\phi = \iint_{S} \iint_{C_P} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \wedge \vec{PM}}{\|\vec{PM}\|^3} . d\vec{S} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}}$

+ D'après th. Green-Ostrogradsky : $\phi = \iiint_{V_S} \operatorname{div} \vec{B}\, d\tau$
où V_S un volume qui s'appui sur $\underline{\underline{S \text{ fermée}}}$
$\Rightarrow \operatorname{div} \vec{B}$? bien noter que maintenant S est fermée

+ Reprenons Biot-Savart : $\vec{B}(M) = \iiint_{V_P} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j}(P) \wedge \vec{PM}}{\|\vec{PM}\|^3} d\tau(P)$
où V_P volume où courant $\vec{j}(P) \neq \vec{0}$

. Calcul de $\operatorname{div} \vec{B}(M)$ où opérateur agit sur coord. de M et pas de P,
c'est à dire : $\operatorname{div} \iiint_{V_P} \vec{C}\, d\tau(P) = \iiint_{V_P} \operatorname{div} \vec{C}\, d\tau(P)$

. Or $\underset{\text{sur } M}{\operatorname{div}} \left(\vec{j}(P) \wedge \frac{\vec{PM}}{\|\vec{PM}\|^3} \right) = \frac{\vec{PM}}{\|\vec{PM}\|^3} . \underbrace{\underset{M}{\vec{rot}}\, \vec{j}(P)}_{\vec{0} \text{ puisque rot agit sur M et pas sur P}} - \vec{j}(P)\, \underset{M}{\vec{rot}} \frac{\vec{PM}}{\|\vec{PM}\|^3}$

. Nous avons également $\boxed{\underset{M}{\vec{grad}} \frac{-1}{\|\vec{PM}\|} = \frac{\vec{PM}}{\|\vec{PM}\|^3}}$ (cal. $\frac{\partial \sqrt{x^2+y^2+z^2}^{-1}}{\partial x} = \frac{-x}{r^3}$)

. d'où $\operatorname{div} \vec{B}(M) = \iiint_{V_P} - \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{j}\, \vec{rot} \left(\vec{grad} \frac{1}{\|\vec{PM}\|} \right) d\tau$

$\boxed{\operatorname{div} \vec{B}(M) = 0}$ car $\vec{rot}\, \vec{grad} V = 0 \quad \forall V$

+ $\hookrightarrow$ version locale de l'intégral^{e} : $\phi = \oiint_S \vec{B} . d\vec{S} = 0$ .../...

Par comparaison avec l'électrostatique :

où $\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

l'eq^o $\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$ indique $\nexists$ de "charge" magnétique (monopôle)

SVT BREVET

La parenté des êtres vivants

- l'apparition de la vie sur Terre

depuis 140 mio d'années
des formes de vies les ⊖ primitives (bactéries) aux ⊕ évoluées

→ photosynthèse = les végétaux verts inspirent le CO_2 et rejeter le O_2 + transformer le carbone en glucose pour sa nutrition

l'oxygène libéré de l'océan a permis à la vie de se créer sur Terre

→ les invertébrés (les cnidaires et les méduses sont les pères formes de vie, elles n'ont pas évoluées / contrairement aux vertébrés qui eux ont évolués

population = ensemble d'individus de la m̂ espèce qui occupent un m̂ territoire géographique

ii) le potentiel vecteur et l'invariance de jauge

+ Si $\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$ alors $\exists\,\vec{A} \,/\, \vec{B} = \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{A}$

en effet $\forall \vec{A}$, $\mathrm{div}(\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{A}) = 0$

+ $\vec{A}$ est le potentiel vecteur $[A] = T \cdot m^{1}$

⇒ joue rôle "similaire" à V(scalaire) pour $\vec{E} = -\vec{\mathrm{grad}}\,V$

+ Remarquons que si $\vec{A'} = \vec{A} + \vec{\mathrm{grad}}\,\psi$ où ψ pt. scalaire

comme $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{\mathrm{grad}} = \vec{0}$

alors on a aussi $\vec{B} = \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{A'}$!

⇒ $\exists$ une infinité de pt. vecteur possibles pour un champ $\vec{B}$

⟺ invariance de jauge

+ Ex du chp uniforme $\vec{B} = B\vec{u_z}$

alors
$$\begin{cases} \dfrac{\partial A_z}{\partial y} - \dfrac{\partial A_y}{\partial z} = 0 \\[2mm] \dfrac{\partial A_x}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial x} = 0 \\[2mm] \dfrac{\partial A_y}{\partial x} - \dfrac{\partial A_x}{\partial y} = B \end{cases}$$
vérifiées par
$$\vec{A_1} = \begin{pmatrix} -yB \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{A_2} \begin{pmatrix} 0 \\ -xB \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{A_3} \begin{pmatrix} -\frac{y}{2}B \\ -\frac{x}{2}B \\ 0 \end{pmatrix}$$

+ 2nd exemple au dos .../...

+ Jauges usuelles

. Coulomb $\mathrm{div}\,\vec{A} = 0$

. Lorentz $\mathrm{div}\,\vec{A} + \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial V}{\partial t} = 0$ où V potentiel scalaire

On remarque qu'on sort de la statique

27 verso

~~+ Revenons sur le flux de $\vec{B}$ à travers surf fermée $\mathcal{S}$~~

$$\cancel{\phi = \oiint_{\mathcal{S}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oiint_{\mathcal{S}} \vec{rot}\,\vec{A} \cdot d\vec{S}}$$

~~avec th. de Stokes :~~ $\cancel{\oiint_{\mathcal{S}} \vec{rot}\,\vec{A} \cdot d\vec{S} = \oint_{\mathcal{C}} \vec{A} \cdot d\vec{l}}$

+ Revenons sur le flux de $\vec{B}$ à travers surface $\mathcal{S}$ (pas fermée)

$$\phi = \iint_{\mathcal{S}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_{\mathcal{S}} \vec{rot}\,\vec{A} \cdot d\vec{S} = \oint_{\mathcal{C}} \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

d'après Th. Stokes

. c. à. d. ϕ = circulat° de $\vec{A}$ sur $\mathcal{C}$ sur lequel s'appuye $\mathcal{S}$

. cohérent avec $\phi_{\mathcal{S}\,fermé} = \oint_{\mathcal{C}} \vec{A} \cdot d\vec{l} = 0$

+ <u>Exple</u> de calculs de $\vec{B}$ à partir de $\vec{A}$:

- $\vec{A} = A_0 \vec{u_r}$, $\vec{B} = \vec{rot}(A_0 \vec{u_r}) = \vec{0}$ car A_0 est une cste indépendante de r
- $\vec{A} = A_0 \vec{u_\varphi}$, $\vec{B} = \frac{1}{r} A_0 \vec{u_z}$
- $\vec{A} = \vec{A_0} \vec{u_z}$, $\vec{B} = \vec{0}$
- $\vec{A} = A_0 \frac{r_0}{r} \vec{u_z}$, $\vec{B} = \frac{A_0 r_0}{r^2} \vec{u_\varphi}$

Rappel en Cylindrique :

$$\vec{\nabla} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_z \end{vmatrix} \vec{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\vec{u_r} + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{u_\theta} + \left(\frac{\partial A_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{u_z}$$

~~Avec Tétrotel, brillez au naturel !~~

~~Conçu avec des ingrédients entièrement naturels ! Cet Highlighter vous fera ressembler à une Top model !~~

~~à seulement 11€99, en vente exclusivement~~

iii) déf potentiel vecteur avec les courants

+ d'après Biot-Savart pour une densité de courant $\vec{j}$ / $\vec{j}\,d\tau \Leftrightarrow I\,\vec{dl}$

$$\vec{B}(M) = \iiint_V \frac{\mu_0}{4\pi}\, \vec{j}(P) \wedge \frac{\vec{PM}}{\|\vec{PM}\|^3}\, d\tau$$

. En utilisant $\vec{\mathrm{grad}}\left(-\frac{1}{\|\vec{PM}\|}\right) = \frac{\vec{PM}}{\|\vec{PM}\|^3}$ ⚠ grad agit sur M (pas sur P)

c.a.d. $\vec{j}(P) \wedge \vec{\mathrm{grad}}\left(-\frac{1}{\|\vec{PM}\|}\right) = \vec{\mathrm{grad}}\left(\frac{1}{\|\vec{PM}\|}\right) \wedge \vec{j}(P)$

. On utilise aussi $\vec{\mathrm{rot}}\left(f(M)\,\vec{j}(P)\right) = f(M)\,\underbrace{\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{j}(P)}_{=0} + \vec{\mathrm{grad}}\,f(M) \wedge \vec{j}(P)$

. ainsi : $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \vec{\mathrm{rot}}\left(\frac{\vec{j}(P)}{\|\vec{PM}\|}\right) d\tau = \vec{\mathrm{rot}}\left(\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{j}(P)}{\|\vec{PM}\|}\, d\tau\right)$

intégrale sur P (pas sur M)

+ Par identification avec la relat° $\vec{B} = \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{A}$ on obtient :

$$\boxed{\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{j}(P)}{\|\vec{PM}\|}\, d\tau}$$

<u>Conséquence</u> importante/calcul $\vec{A}(M)$ partage les mêmes symétries que $\vec{j}(P)$. voir au dos .../...

+ Pour un circuit (filaire) $\mathcal{C}$ parcouru par une intensité I

$$\iiint \vec{j}\, d\tau \Longleftrightarrow \oint_{\mathcal{C}} I\,\vec{dl}$$ où $\vec{dl}$ est le déplacement élémentaire sur $\mathcal{C}$ en P

soit $\vec{A} = \oint_{\mathcal{C}} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\vec{dl}(P)}{\|\vec{PM}\|}$

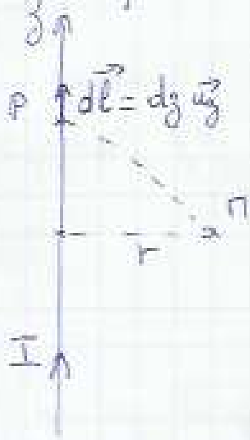
+ <u>Remarque</u> : l'expression de $\vec{A}$ est très similaire à celle du potentiel électrostatique (p 4) $V(M) = \iiint_V \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\rho(P)}{\|\vec{PM}\|}\, d\tau$

où $\rho(P) \Leftrightarrow \vec{j}(P)$!

et $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \Leftrightarrow \frac{\mu_0}{4\pi}$

$\boxed{\text{cycles}}$ --- /...

Exple du fil rectiligne parcouru par I uniforme



- On passe en coord. cylindriques. Par symétrie de $\vec{J}$: $\vec{A} = A(r)\,\vec{u_z}$
- le calcul explicite est :

$$\vec{A} = \int \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dz}{\sqrt{r^2+z^2}}\,\vec{u_z} \quad \text{un peu compliqué}$$

- On utilise la similitude avec l'électrostatique pour un fil uniformément chargé avec $\lambda = cste \Rightarrow \vec{E} = E(r)\,\vec{u_r}$, $V = V(r)$

Alors avec th. Gauss on a $E(r)\,2\pi r = \frac{\lambda}{\varepsilon_0}$

soit $\frac{\partial V}{\partial r}(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \Rightarrow V(r) = \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln r + cste$

- on a $\vec{A}(M) = \left(-\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln r + cste\right)\vec{u_z}$

Rem on peut utiliser th. Ampère $\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,\vec{u_\theta}$ sur un carré radial
puis $\vec{B}(r) = \vec{rot}\,\vec{A}(r) = -\frac{\partial A_z}{\partial r}\vec{u_\theta}$
ou $\oint \vec{A}(M)\,\vec{dl} = \iint \vec{B}\,\vec{dS}$

- On retrouve le champ magnétique avec

$$\vec{rot}\,\vec{A}(M) = +\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,\vec{u_\varphi} \quad (\text{cf p 22 verso})$$

- 2nd Exple sur feuilles 28bis/

Symétrie & Invariance de $\vec{A}$ et $\vec{J}$

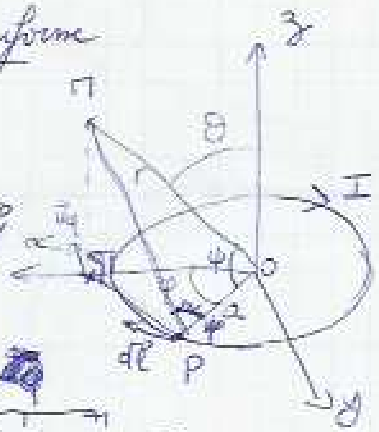
- si $\vec{J}$ symétrique / plan $\mathcal{P}$, alors pour $M \in \mathcal{P}$: $\vec{A}(M) \in \mathcal{P}$
- si $\vec{J}$ antisymétrique / plan $\mathcal{P}$, alors pour $M \in \mathcal{P}$: $\vec{A}(M) \perp \mathcal{P}$
- si $\vec{J}$ indépendant d'une coordonnées alors $\vec{A}$ aussi { invariance par : translation, rotation

Investissement
- Antoine → 20 %
- Suzie → 25 %
- Luc → 30 %
- Christoph → 25 %
Christoph

(~~Anne & Paulo → 10 %~~)

Suite III 3 Potentiel vecteur /

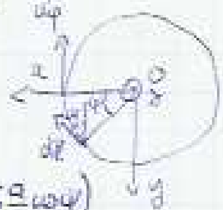
Exple de la spire parcourue par un courant I uniforme



× Analyse symétrie de $\vec{j}$: | Invariance par rotation Oz | Antisymétrique par plan OzM
⇒ A ne dépend pas de φ et est orienté suivant $\vec{u}_\varphi$

× Coord. sphériques :

$$\vec{A}(M) = \int_{C_{spire}} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\vec{dl}}{\|\vec{PM}\|} \quad \text{où} \begin{cases} \|\vec{dl}\| = a\,d\varphi \\ \|\vec{PM}\| = \sqrt{r^2 + a^2 - 2ar\cos\psi} \end{cases}$$



× On calcul uniquem^t la composante $/\vec{u}_\varphi$: $\vec{dl} \to a\,d\varphi \cos\varphi\, \vec{u}_\varphi$

× On suppose que $r \gg a$: $\|\vec{PM}\| = r\sqrt{1 + \frac{a^2}{r^2} - 2\frac{a}{r}\cos\psi} \simeq r\left(1 - \frac{a}{r}\cos\psi\right)$

Remarquons que $\cos\psi = \sin\theta\cos\varphi$ (voir au dos ---/---)

× Alors : $\vec{A}(M) \simeq \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{a}{r}\int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi\, d\varphi\ \vec{u}_\varphi}{1 - \frac{a}{r}\cos\varphi\sin\theta} \simeq \frac{\mu_0 I a}{4\pi r}\int_0^{2\pi} \cos\varphi\left(1 + \frac{a}{r}\sin\theta\cos\varphi\right)d\varphi\,\vec{u}_\varphi$

$\int_0^{2\pi}\cos\varphi = 0$

⚠ $\vec{u}_\varphi$ associé à P (xOy) ≠ $\vec{u}_\varphi$ associé à M

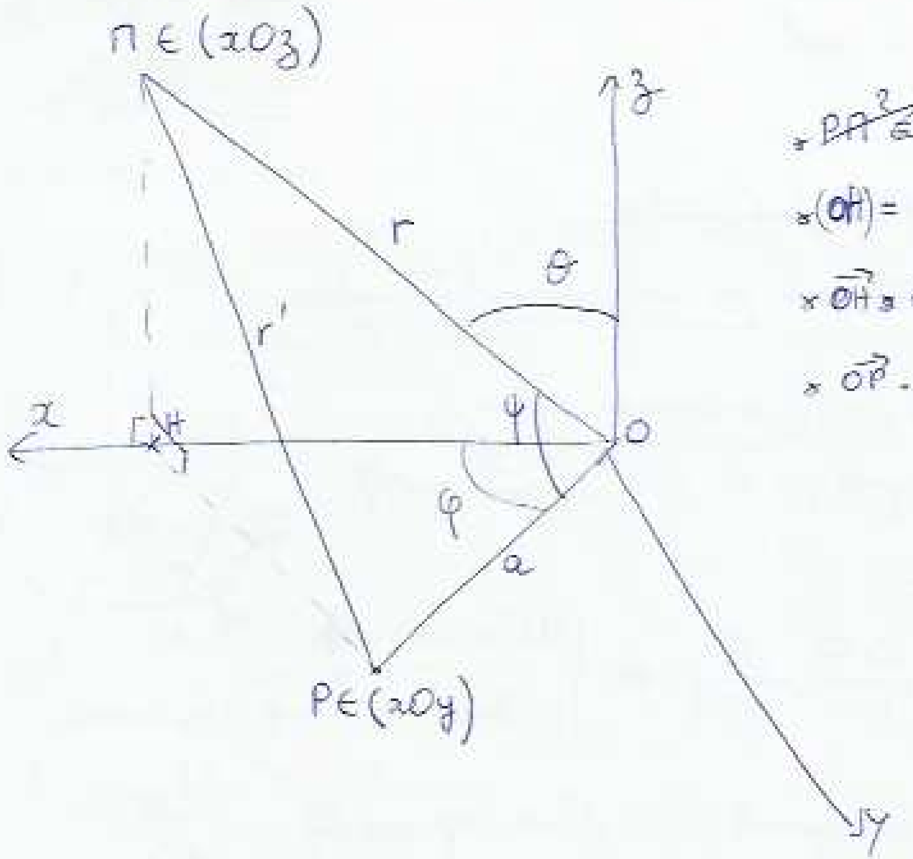
$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0 I a^2 \sin\theta}{4\pi r^2}\underbrace{\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\, d\varphi}_{\pi}\ \vec{u}_\varphi = \frac{\mu_0 I a^2}{4 r^2}\sin\theta\, \vec{u}_\varphi$$

× Remarquons que $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & & 0 & \vec{u}_r \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} & \wedge & 0 & \vec{u}_\theta \\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} & & \frac{\mu_0 I a^2 \sin\theta}{4r^2} & \vec{u}_\varphi \end{vmatrix}$

× Calcul de $\vec{B}$ avec $\vec{rot}\,\vec{A} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\, r\sin\theta A_\varphi}{\partial\theta}\vec{u}_r - \frac{\partial\, r A_\varphi}{\partial r}\vec{u}_\theta$

où $\frac{\partial\, r\sin\theta A_\varphi}{\partial\theta} = \frac{\mu_0 I a^2}{4r}2\sin\theta\cos\theta$ et $\frac{\partial\, r A_\varphi}{\partial r} = -\frac{\mu_0 I a^2}{4r^2}\sin\theta$

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I a^2}{4r^3}\left(2\cos\theta\,\vec{u}_r + \sin\theta\,\vec{u}_\theta\right)$$



- ~~$PM^2 = a^2 + r^2 - 2ar\cos\varphi = r'^2$~~
- $(OH) = r\sin\theta$
- $\vec{OH}\cdot\vec{OP} = (OH)(OP)\cos\varphi = ra\,\underbrace{\sin\theta\cos\varphi}$
- $\vec{OP}\cdot\vec{OM} = (OM)(OP)\cos\psi = ra\cos\psi$

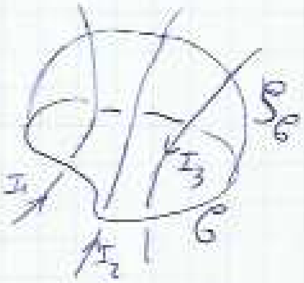
III 5) Formulation locale de la magnétostatique

+ Revenons sur le th. d'Ampère pour un contour fermé $\mathcal{C}$

∘ $$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{k\mathcal{C}} \varepsilon_k I_k$$

× nous introduisons une nouvelle façon de calculer la somme de l'ensemble des courants avec la densité de courant traversant la surface $\mathcal{S}_{\mathcal{C}}$ qui s'appuie sur $\mathcal{C}$: $\vec{j}$

c.à.d. $$\sum_{k\mathcal{C}} \varepsilon_k I_k = \underbrace{\iint_{\mathcal{S}_{\mathcal{C}}} \vec{j} \cdot d\vec{S}}_{\text{flux de } \vec{j} \text{ à travers } \mathcal{S}_{\mathcal{C}}}$$



<u>Rem</u> rappeler que $[j] = A.m^{-2}$

× Avec le th. de Stokes : $\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint_{\mathcal{S}_{\mathcal{C}}} \vec{rot}\,\vec{B} \cdot d\vec{S}$

× Au final : $\iint_{\mathcal{S}_{\mathcal{C}}} \vec{rot}\,\vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \iint_{\mathcal{S}_{\mathcal{C}}} \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad \forall\, \mathcal{S}_{\mathcal{C}}$

soit $\boxed{\vec{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j}}$ expression locale équivalente à $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

Équation d'Ampère

+ En utilisant le potentiel vecteur : $\vec{B} = \vec{rot}\,\vec{A}$

et aussi le fait que $\vec{rot}(\vec{rot}\,\vec{A}) = \vec{grad}(\operatorname{div}\vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A}$

où $\vec{\nabla}^2 \vec{A}$ est le Laplacien vectoriel (⚠ déf pas triviale)

et la jauge de Coulomb $\operatorname{div}\vec{A} = 0$

on a

$$\boxed{\vec{\nabla}^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}}$$

correspond à 3 équations (1 par coord) équivalente à eq^o Poisson, pour cartésien : $\nabla^2 A_{xi} = -\mu_0 j_{xi}$

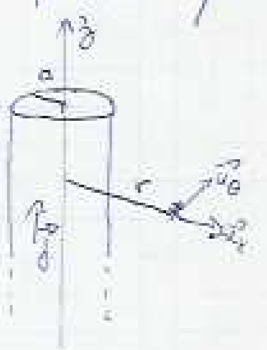
<u>Rem</u> en coord cartésiennes :

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} \Leftrightarrow \begin{cases} \nabla^2 A_x \ \vec{u_x} \\ \nabla^2 A_y \ \vec{u_y} \\ \nabla^2 A_z \ \vec{u_z} \end{cases}$$

Suite III.5 Magnéto Statique /

+ Exemple d'un fil d'extension non nulle avec courant const.

× rayon a, courant $\vec{j}(r<a) = \frac{I}{\pi a^2}\vec{u}_z$



× Pour $r<a$: $\vec{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j} = \frac{\mu_0 I}{\pi a^2}\vec{u}_z$

× par symétrie $\Rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = B_\theta(r)\,\vec{u}_\theta$

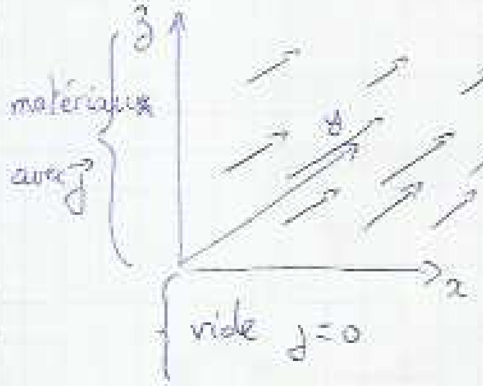
× d'où $\vec{rot}\,\vec{B} = \frac{\partial B_\theta}{\partial r}\vec{u}_z$

et $\frac{\partial B_\theta}{\partial r} = \frac{\mu_0 I}{\pi a^2} \Rightarrow \vec{B}(r<a) = \frac{\mu_0 I}{\pi a^2}\, r\, \vec{u}_\theta$

× on a aussi $\vec{B} = \vec{rot}\,\vec{A} = \frac{\partial A_\theta}{\partial r}\vec{u}_\theta$ par symétrie de $\vec{A}(\parallel \vec{j})$

soit $\frac{\partial A_\theta}{\partial r} = \frac{\mu_0 I}{\pi a^2} r$ et $\vec{A}_c = -\frac{\mu_0 I}{\pi 2}\frac{r^2}{a^2}\vec{u}_z$

× Exemple d'une nappe de courant dans un plan :



$\vec{j} = j_s\, e^{-\lambda z}\vec{u}_y$ $[\lambda] = m^{-1}$ constante / $\frac{1}{\lambda}$ = longueur [illegible]

. Symétrie / plan // (yOz) $\Rightarrow \vec{B} \perp (yOz) \Rightarrow$ suivant $\vec{u}_x$

. Invariance / translat° par x, y $\Rightarrow \vec{B}$ indépendant de x et y

$\Rightarrow \vec{B}(z>0) = B_x(z)\,\vec{u}_x$

. $\vec{rot}\,\vec{B} = \begin{vmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} B_x(z) \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ \partial_z B_x(z) \\ 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \frac{\partial B_x}{\partial z}(z) = \mu_0 j_s\, e^{-\lambda z}$

. soit $\vec{B}(z>0) = -\frac{\mu_0 j_s}{\lambda} e^{-\lambda s}\,\vec{u}_x$

III. 5) Energie magnétique

+ Revenons sur le flux magnétique et son unité :

$$[\phi] = W = J \cdot A^{-1} \Rightarrow [\phi] \cdot [I] = J \text{ une énergie}$$

+ Nous montrerons que l'énergie magnétique U_m est :
(après introduct° de l'inductance)

$$U_m = \frac{1}{2} \phi I$$

Pour un champ magnétique traversant un circuit avec un courant I

+ Interprétation (rappelons que $F_{Laplace}$ ne travaille pas !) .../...
↳ ou une charge "externe" à $\vec{j}$

U_m est l'énergie emmagasinée "stockée" dans le circuit.
Si le champ est annulé, il y aura une déformation mécanique brutale ou échauffement du circuit pour libérer cette énergie.

+ Rappelons que $\phi = \iint_{S_{circuit}} \vec{B} \, d\vec{S} = \oint_{\mathcal{C}} \vec{A} \cdot d\vec{l}$
pour le circuit fermé $\mathcal{C}$

d'où $U_m = \frac{1}{2} \oint_{\mathcal{C}} \vec{A} \cdot I \, d\vec{l}$ avec $\int I \cdot d\vec{l} \Leftrightarrow \iiint \vec{j} \cdot d\tau$

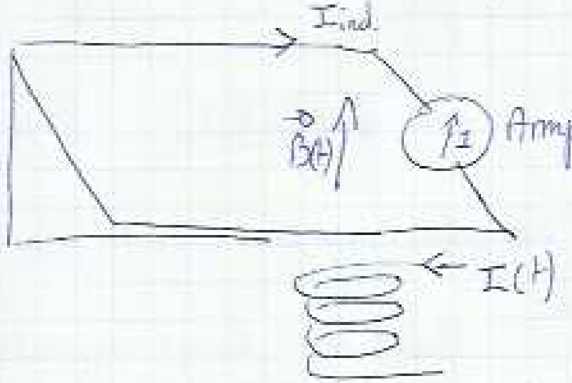
soit $$\boxed{U_m = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{A} \cdot \vec{j} \, d\tau}$$

+ Avec l'eq° d'Ampère : $\vec{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ et le fait que
$\vec{A} \cdot \vec{rot} \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{rot} \vec{A} = \vec{B}^2$

on a $$\boxed{U_m = \frac{1}{2\mu_0} \iiint_V \vec{B}^2 \, d\tau}$$

.../...

× Expérience de Faraday pour $\begin{cases} \text{circuit fermé indéformable} \\ \text{champ magnétique variable} \end{cases}$



si $I, \vec{B}$ constants $\Rightarrow I_{ind} = 0$

si $I, \vec{B}$ varient avec $t \Rightarrow I_{ind} \neq 0$

× On remarque que le sens du courant induit s'oppose au champ inducteur $\vec{B}$

loi de Lenz (dans le sens où $\vec{B}_{ind}$ créé par I_{ind} est de sens opposé à $\vec{B}$)

× On remarque que l'amplitude de I_{ind} dépend de la surface.

× le circuit étant résistif (R) $\Rightarrow$ création d'une différence de potentiel

$\Delta V = R\, I_{ind}$ que Faraday a appelé (bizarrement) force électromotrice

× Comment relier la variation de $\vec{B}$ avec le temps à ΔV ?

$$\left.\begin{aligned} [\Delta V] &= V \\ \left[\frac{\partial B}{\partial t}\right] &= T\, s^{-1} = V s\, m^{-2} . s^{-1} \\ [S] &= m^2 \end{aligned}\right\} \quad \Delta V = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} . d\vec{S} = - \frac{d\phi}{dt}$$

× Remarque pour chap IV (Maxwell

- Une différence de potentiel (la f.e.m.) est équivalente à la circulation du champ sur le circuit

$\vec{E} = - \vec{\nabla} V \Rightarrow \Delta V = \oint_C \vec{E} . d\vec{l}$

IV Formulation locale des lois de l'électromagnétisme

1) Conservation de la charge électrique

+ Postulat physique imposé par les observations
  $\Rightarrow$ de fait, aujourd'hui, aucune remise en cause de ce principe
  (même avec les interactions fondamentales)
+ Mais un courant est un déplacement de charges dans l'espace et le temps.
  $\Rightarrow$ la densité de charge ρ peut dépendre de $\begin{cases}\text{la position} \\ \text{le temps}\end{cases}$: $\rho(\vec{r}, t)$

d'où question : quel est le lien entre $\vec{j}$ et ρ ?

+ Prenons un volume $\mathcal{V}_S$ défini par une surface fermée S qcq.
  × charge totale : $q = \iiint_{\mathcal{V}_S} \rho(\vec{r}, t)\, d\tau$

  × variation sur dt ?
  - $dq = \dfrac{\partial q}{\partial t} dt$ avec $\dfrac{\partial q}{\partial t} = \iiint_{\mathcal{V}_S} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} d\tau$ (Noter indépendance $d\tau$ et dt)
  - par définition de la densité volumique de courant $\vec{j}$ ($A.m^{-2}$)
    $-dq = \left(\oiint_S \vec{j}\cdot d\vec{S}\right) dt$ où $\begin{cases}\oiint \vec{j}\cdot d\vec{S} \text{ est le flux de charges à travers } S \\ \text{il s'agit d'une perte} \Rightarrow \text{signe } \ominus\end{cases}$

  × Par égalité on a

$$0 = \iiint_{\mathcal{V}_S} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau + \oiint_S \vec{j}\cdot d\vec{S} = \iiint_{\mathcal{V}_S} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j}\right) d\tau \quad \forall \mathcal{V}_S, S$$

  C'est la conservation de la charge, d'un point de vue intégral.

  × Localement :

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$$

Suite IV.1)

+ Définition du <u>régime permanent</u> $\Leftrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t}(P,t) = 0$

c.à.d. la densité de charges n'évolue pas dans le temps

Mais les charges peuvent être en mouvement $\Rightarrow I, \vec{j}$ non nuls !

× localement on a $\mathrm{div}\,\vec{j} = 0$

× Point de vue intégral :

. prenons une distribution $\vec{j}$ et une surface fermée $S = S_i + S_l + S_f$ où $d\vec{S}(S_l) \perp \vec{j}$

. la conservation de la charge impose : $\frac{\partial q_1}{\partial t} = -\frac{\partial q_2}{\partial t} = \oiint_S \vec{j}\cdot d\vec{S}$

soit : ce qui entre, sort !

$$\iint_{S_i+S_l+S_f} \vec{j}\cdot d\vec{S} = \iint_{S_f} \vec{j}\cdot d\vec{S} + \underbrace{\iint_{S_l} \vec{j}\cdot d\vec{S}}_{=0 \text{ car } \vec{j}\perp d\vec{S}} + \iint_{S_i} \vec{j}(-d\vec{S}) = 0$$

orientation de S_i vers <u>l'extérieur</u>

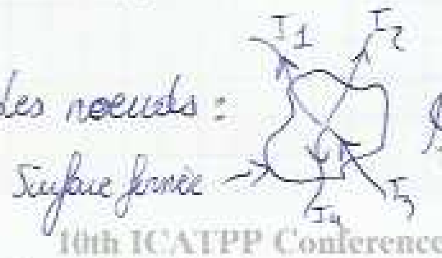
par déf. $\iint_{S_f} \vec{j}\cdot d\vec{S} = I_f$ et $\iint_{S_i} \vec{j}\cdot d\vec{S} = I_i$

. $\mathrm{div}\,\vec{j} = 0 \Leftrightarrow I_i = I_f$

× <u>2 conséquences</u>

. ~~loi des~~ $\mathrm{div}\,\vec{j} = 0$ indique que le flux de $\vec{j}$ est conservé d'une surface à l'autre : indépendant du contour sur lequel s'appuie S !

. loi des noeuds : $\oiint_S \vec{j}\cdot d\vec{S} = 0 = I_1 + I_2 - I_3 + I_4$



IV. 2) Retour sur (l'électrostatique) les propriétés locales du chp électrique

+ Le lien entre les sources (charges ρ) et le champ ($\vec{E}$) est donné par.

$$\begin{cases} \text{Th. Gauss : } \oiint_{S} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q_{S}}{\varepsilon_0} \\ \text{ou} \\ \text{Loi Gauss: } \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \end{cases} \Rightarrow \text{eq}^{\circ} \text{ Poisson } \vec{\nabla}^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

+ Propriété intrinsèque : le champ dérive d'un potentiel scalaire

or si $\vec{E} = -\vec{\text{grad}}\, V$, comme $\vec{\text{rot}}\,(\vec{\text{grad}}\,\phi) = \vec{0}$ $\forall \phi$ scalaire

alors
$$\begin{cases} \vec{\text{rot}}\, \vec{E} = \vec{0} \quad \text{loi} \\ \text{ou} \\ \oint_{\mathcal{C}} \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = 0 \end{cases} \quad \left(\text{via } \iint \vec{\text{rot}}\, \vec{E}\, d\vec{S} = 0 \atop \text{ou } \int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = V_A - V_A \right)$$

IV. 3) Retour sur les propriétés locales du chp magnétique

+ Le lien entre les sources (courants $\vec{j}$) et le champ ($\vec{B}$) est donné par :

$$\begin{cases} \text{Th Ampère: } \oint_{\mathcal{C}} \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \iint_{S_{\mathcal{C}}} \vec{j}\cdot d\vec{S} \\ \text{ou} \\ \text{Loi Ampère: } \vec{\text{rot}}\, \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \end{cases} \Rightarrow \text{eq}^{\circ} \text{ de "Poisson" } \nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$$

+ Propriété intrinsèque : le champ dérive d'un pot. vecteur
(div $\vec{\text{rot}}\, \vec{A} = 0$, $\forall \vec{A}$ vectoriel)

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \text{ou} \\ \oiint_{S} \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0 \end{cases}$$

IV.4) Rôle du temps

+ En régime permanent (§2 & §3) $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont totalement découplés.
+ Mais la conservation de la charge relie $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ (lié à $\vec{E}$) à $\vec{j}$ (lié à $\vec{B}$)

× en permanent $\vec{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ impose $\mathrm{div}\,\vec{rot}\,\vec{B} = 0 = \mathrm{div}\,\vec{j}$

• donc en dehors du régime permanent il faut

$$\vec{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \vec{X} \text{ tel que } \mathrm{div}\,\vec{rot}\,\vec{B} = 0 \text{ donne :}$$

très vrai !

$$\mu_0\, \mathrm{div}\,\vec{j} + \mathrm{div}\,\vec{X} = 0$$

$$-\mu_0 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,\vec{X} = 0 \text{ soit } \mathrm{div}\,\vec{X} = +\mu_0 \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

• Or nous avons $\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ soit $\mathrm{div}\left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\partial \rho}{\partial t}$

$$\Rightarrow \vec{X} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

× Nouvelle équation de Maxwell-Ampère

$$\boxed{\vec{rot}\,\vec{B} = \mu_0\left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)}$$

• interprétation : $\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ est un courant de déplacement !

$$\left[\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right] = A\, V^{-1} m\, s \cdot V\, m^{-1} s^{-1}$$

les charges sont mises en mouvement par la variation de $\vec{E}$ et ce courant génère un $\vec{B}$.

(Suite IV.4) rôle du temps)

+ Que se passe-t-il lorsque $\vec{B}$ varie avec le temps?

× Rappel sur l'expérience de Faraday → voir verso p30
la variation du flux du champ magnétique avec le temps
crée un courant induit qui "s'oppose" au champ inducteur.
Ce courant génère une variation de tension, appelée force électromotrice (f.e.m)

× on a alors quelque soit S

$$f.e.m = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\iint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = \iint_S -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

$$f.e.m = \oint_{C_S} \vec{E}\cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{rot}\,\vec{E}\cdot d\vec{S}$$

· par égalité, nous obtenons $\forall S$: $\iint_S \left(\vec{rot}\,\vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{S} = 0$

× Nouvelle équation de Maxwell-Faraday

$$\boxed{\vec{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

× En reprenant $\vec{E} = -\vec{grad}\,V$ et $\vec{B} = \vec{rot}\,\vec{A}$ on a:

$$\Rightarrow \vec{E} = -\vec{grad}\,V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$: la variation temporelle du potentiel vecteur est une source de ch. élec.

IV. 5) Equations de Maxwell et propagation

i) Récapitulation des 4 équations dans le cas général

$$
\begin{cases}
\text{Maxwell-Gauss} & \operatorname{div} \vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \\
\text{Maxwell-Faraday} & \vec{\operatorname{rot}}\, \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
\text{Maxwell-Thomson} & \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\
\text{Maxwell-Ampère} & \vec{\operatorname{rot}}\, \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)
\end{cases}
$$

+ Remarquons que les 2 équations Max-Faraday & Max-Ampère relient les dérivées partielles temporelle et spatiale des champs
  $\Rightarrow$ caractéristique de la propagation d'une onde

+ Rappel sur eq$^{\circ}$ d'Alembert pour onde progressive $\phi(x,t)$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$ où v est la vitesse de propagation (phase)

$\hookrightarrow \phi(x,t) = f(x+vt) + g(x-vt)$

ii) Propagation dans le vide <u>sans sources</u> $\begin{cases} \rho = 0 \\ \vec{J} = \vec{0} \end{cases}$

$$
\left.
\begin{aligned}
&\vec{\operatorname{rot}}\left(\vec{\operatorname{rot}}\, \vec{E}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\operatorname{rot}}\, \vec{B}\right) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \\
&\text{or } \vec{\operatorname{rot}}\left(\vec{\operatorname{rot}}\, \vec{E}\right) = \vec{\operatorname{grad}}\big(\underbrace{\operatorname{div} \vec{E}}_{=0!}\big) - \nabla^2 \vec{E}
\end{aligned}
\right\}
\boxed{\nabla^2 \vec{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0}
$$

$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}, t)$ est une onde qui se propage à $v = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = c$ vitesse lumière !

<u>Rem</u> : même démo avec $\vec{B}$

.../...

- Unités : $[\varepsilon_0] = kg^{-1}.m^{-3}.A^2.s^4$

  $[\mu_0] = kg.m.A^{-2}.s^{-2}$

  $\Rightarrow \left[\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}\right] = m^2.s^{-2} = [v^2]$

- définition de l'opérateur d'Alembertien : $\square = \nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$

l'équation de propagation des ondes électromagnétiques :

$$\begin{cases} \square \vec{E} = \vec{0} \\ \square \vec{B} = \vec{0} \end{cases}$$

- $\square \vec{E} = \vec{0}$ vraie quelque soit le référentiel

  $\Rightarrow$ c (vitesse lumière) constante est une implication de l'électromagnétisme !