MEMO

VI. Conducteurs → R, C, L

1) Matériaux conducteurs

× Déf : les charges (+ ou -) peuvent être mobiles. $\vec{j} \begin{cases} =0 \\ \neq 0 \end{cases}$ $\rho \begin{cases} =0 \\ \neq 0 \end{cases}$

ex : métaux, liquides, ...

contre-ex : isolants (bois, vide, plastiques, ...)
$\rho \neq 0$ mais $\vec{j} = 0$ tous les cas

- métaux, $\rho \sim 10^{30}\ e^-/m^3$, $v_{e^-} \sim 99$ milliers km/h

× mobilité d'un matériaux : $\vec{E}$ → mouvement des q → $\vec{j}$ (μ)

$\Rightarrow$ $\vec{v} = \mu \vec{E}$

2) Loi d'ohm

× pour n charges q de vitesse $\vec{v}$: $\vec{j} = qn\vec{v}$

× $\vec{v}$ est liée $\vec{E}$: $\vec{v} = \mu \vec{E}$

× $\vec{j} = (nq\mu)\vec{E}$ → $\gamma = nq\mu$: conductivité du matériaux. (parfois noté σ)

× $\Delta V = V_2 - V_1 = \int_1^2 -\vec{E}.d\vec{\ell}$ $\left(\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V\right)$

Recycle

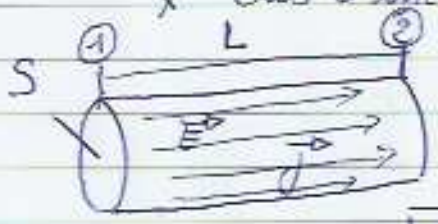
MEMO

Suite VI.2)

× $I = \iint_S \vec{j}.d\vec{S} = \gamma \iint_S \vec{E}.d\vec{S}$

× $\frac{\Delta V}{I} = \left(\gamma \frac{\iint \vec{E}.d\vec{S}}{\int -\vec{E}.d\vec{l}}\right)^{-1}$ relation générale

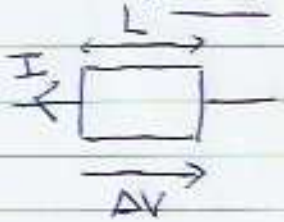
× Cas d'un conducteur filiforme // $\vec{E}$ // bord
$\vec{E}$ est constant.



$\Delta V = -EL$ et $I = \gamma S E$

$$\boxed{\frac{\Delta V}{I} = -\frac{L}{\gamma S} = -R}$$ résistance (Ω)

× Rem en électricité, on a la convention I dans le sens opposé à $\vec{j}$ (électrons)



$\Delta V = RI$

× $\gamma = \frac{L}{RS}$ $[\gamma] = \Omega^{-1}.m^{-1} = S.m^{-1}$

× Energie dissipée dans conducteur par effet Joule

$U_E = \Delta V I = \gamma S L E^2 \leftrightarrow U_E = \frac{\varepsilon_0}{2} \iiint \vec{E}^2 d\tau$ (vide), $S \times L \times E^2$

attention : dans le conducteur
$\gamma \neq \frac{\varepsilon_0}{2}$

MEMO

3) Propiétés de base du champ et du potentiel dans un conduct.

× Propiétés établies à l'équilibre électrostatique

⇔ les charges sont immobiles (macroscopique) $\vec{J} = \vec{0}$

⇔ $\boxed{\vec{E}_{int} = \vec{0} \text{ à l'intérieur du conducteur}}$

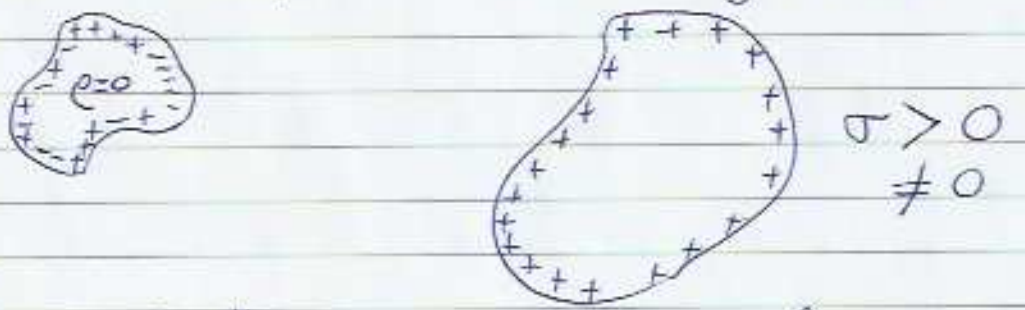
× Or $\vec{E}_{int} = -\overrightarrow{grad}\, V_{int} = \vec{0}$ donc $\boxed{V_{int} = \text{constant}}$

× $\begin{cases} \text{forme locale } \operatorname{div} \vec{E}_{int} = \dfrac{\rho_{int}}{\varepsilon_0} \\ \text{forme intégrale } \displaystyle\iint_{S_{int}} \vec{E}_{int}\, d\vec{S} = \dfrac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\rho_{int} = 0}$

× ⚠ $\rho_{interne} = 0$ n'implique pas que $\sigma_{surface} = 0$

⇒ pour un conducteur à l'équilibre, on peut avoir des charges en surfaces.

Cas neutre $Q = 0$ cas chargé ex $Q > 0$



Rem "en surface" = sur une profondeur ~ longueur de Debye λ_D

$\lambda_D(\text{métal}) \sim 1\,\text{Å} = 10^{-10}\,m$

MEMO

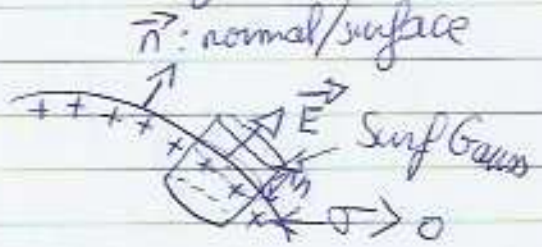
Suite VI.3)

× Pour un cond. équilibre chargé

. le potentiel est constant V, à la surface comme à l'int

. le champ $\vec{E} \perp$ équipotentielles ou la surface en est une.

$\Leftrightarrow \vec{E} \perp$ surface du cond.



Th. Gauss avec un cylindre
hauteur 2h, Surface S

$$\oiint_{S_G} \vec{E}.d\vec{S} = \underbrace{0}_{\text{à l'int } \vec{E}_{int}=\vec{0}} + \underbrace{0}_{\text{au bords car } \vec{E} \perp \vec{n}} + E(h)S$$

$$\iiint_{V_G} \frac{\rho}{\varepsilon_0} d\tau = \iint_{surf} \frac{\sigma}{\varepsilon_0} dS = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} S$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n}}$$

. Rem sur l'orientation : $\begin{cases} \sigma > 0 \Rightarrow \vec{E} \text{ vers l'extérieur.} \\ \sigma < 0 \Rightarrow \vec{E} \text{ vers l'intérieur} \end{cases}$

$\Rightarrow \exists$ une discontinuité du champ entre int / ext.

× Effet de pointe : $\sigma = \frac{Q}{Surf}$ ↯ si surface est petite $\Leftrightarrow$ pointe métallique

$\vec{E}$ est très élevé pour une pointe chargée.

MEMO

Suite VI.3)

× Capacité d'un conducteur.

• $Q = \iint_{S_{cond}} \sigma \, dS$ et $V(\vec{r}_M) = \iint_{S_{cond}} \frac{\sigma(\vec{r}_P) dS_P}{4\pi\varepsilon_0 \|\vec{PM}\|}$

• si $\sigma \to \alpha\sigma$ alors $Q \to \alpha Q$
$V \to \alpha V$

$\Rightarrow$ V et Q sont proportionelles $\boxed{\frac{Q}{V} = C}$

C = capacité du conducteur
$(C.V^{-1})$

× • exemple d'une sphère (centre O, rayon R) chargée σ = cste

$Q = \sigma \, 4\pi R^2$ $\quad V(O) = \iint \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0 R} dS = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0 R} 4\pi R^2$ (constant)

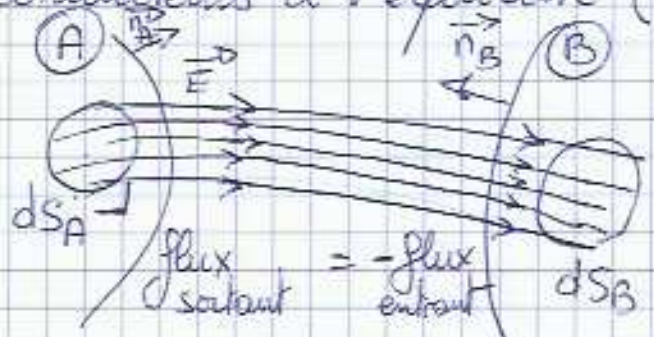
$\Rightarrow \frac{Q}{V} = C_{sphère} = 4\pi\varepsilon_0 R = \varepsilon_0 \frac{S}{R}$

Recycle

VI.4) Conducteurs en influence

i) Théorème des éléments correspondants

* 2 conducteurs à l'équilibre ($\vec{E} \perp$ surf)



dS_B correspond à dS_A

. Th. Gauss sur la surface-tube (dS_A, enveloppe, dS_B)

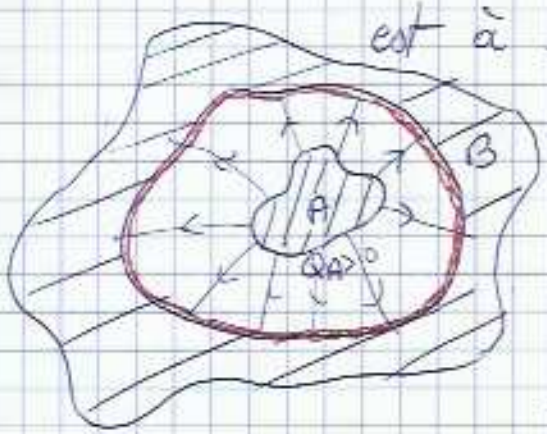
. $\Phi_A + \Phi_B = 0 = \frac{Q_A + Q_B}{\varepsilon_0}$ (flux latéral = 0)

. $Q_A = \sigma_A dS_A = -Q_B = -\sigma_B dS_B$

. Pour les éléments correspondants : $Q_A = -Q_B$

* Conducteurs en <u>influence totale</u>.

. Situation géométrique où 1 conducteur est à l'intérieur d'une cavité dans l'autre cond.



. A est en influence totale avec B

. si Q_A est la charge surf. de A alors (Th. élém. corresp) $Q_{B\,int} = -Q_A$

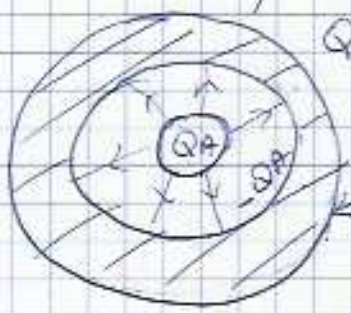
$Q_{B\,int}$: charge à la surf. interne de B

. Rem avec Th. Gauss sur surface à l'int. du cond B

$\vec{E}_{int}(B) = \vec{0} \Rightarrow \iint_{S \text{ int } B} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 = Q_A + Q_{B\,int}$

Suite VI.4)

- Rem sur le blindage électromagnétisme
  → pour les cond. A et B en influence totale
  Q_A est indépendant de $Q_{B\,ext}$



$Q_{B\,ext}$ influence $Q_{B\,tot} = Q_{B\,ext} + Q_{B\,int}$

→ de même le champ dans la cavité n'est pas influencé par $\begin{cases} Q_{B\,ext} \\ \text{champ extérieur} \end{cases}$

→ principe de la cage de Faraday.

ii) Systèmes de conducteurs

× Ensemble de N conducteurs à l'équilibre : $i = 1 \dots N$
sous influences mutuelles
→ ex si $Q_1 \neq 0 \Rightarrow$ modification de $Q_{i \neq 1}$

× Par le th. de Superposition :
Q_i (finale) = superposition de tte les charges générées par $\begin{cases} Q_j \neq 0 \ (j \neq i) \\ Q_k = 0 \ (k \neq i, k \neq j) \end{cases}$

× Relation entre Q et le potentiel : $Q = CV$

→ $$Q_i = C_{i1} V_1 + C_{i2} V_2 + \dots + C_{iN} V_N = \sum_{j=1}^{N} C_{ij} V_j$$

où C_{ij} = capacité mutuelle des conduct i et j

Rem $C_{ij} = C_{ji}$

Suite VI.4)

× relation matricielle : N-vecteur $[Q] = \begin{pmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_N \end{pmatrix}$

N-vecteur $[V] = \begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_N \end{pmatrix}$

$N \times N$ - matrice symétrique $[C]$

$$\Rightarrow [Q] = [C][V]$$

VI.5) Condensateurs

× Condensateur = système de 2 conducteurs en influence totale

× Capacité mutuelle ?

$$\times \begin{cases} Q_1 = C_{11} V_1 + C_{12} V_2 \\ Q_2 = C_{21} V_1 + C_{22} V_2 \end{cases}$$

Rem $C_{12} = C_{21}$

× influence totale $Q_1 = -Q_2$ quelque soit V_1 et V_2

$$\Rightarrow C_{11} = -C_{21} = -C_{12}$$

d'où $Q_1 = C_{11} \underbrace{(V_1 - V_2)}_{\Delta V} = Q$

alors $\boxed{\frac{Q}{\Delta V} = C_{11}}$ capacité du système condensateur

× Unité $[C] = F = C.V^{-1}$ (grosse unité...)

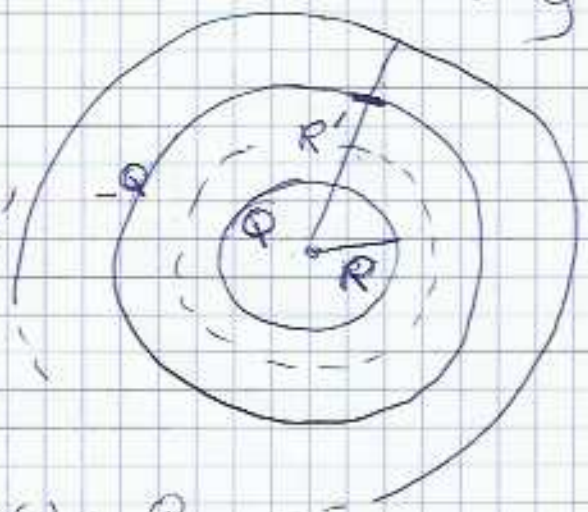
× Calcul de C ?

→ th. de Gauss : $Q \leftrightarrow E$

→ $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V$ ou $\Delta V = -\int \vec{E}.d\vec{\ell}$: $\Delta V \leftrightarrow E$ } $\frac{Q}{\Delta V}$

Suite VI.5)

- ex Condensateur sphérique



+ Th. Gauss / sphère de rayon $R<r<R'$

- sym sphérique $\vec{E} = E(r)\,\vec{u_r}$
- $\Phi = \iint_{Gauss} \vec{E}(r).\underbrace{d\vec{S}}_{dS\,\vec{u_r}} = E(r)\,4\pi r^2$
- $Q_{Gauss} = Q$

$$\Big\} \; E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

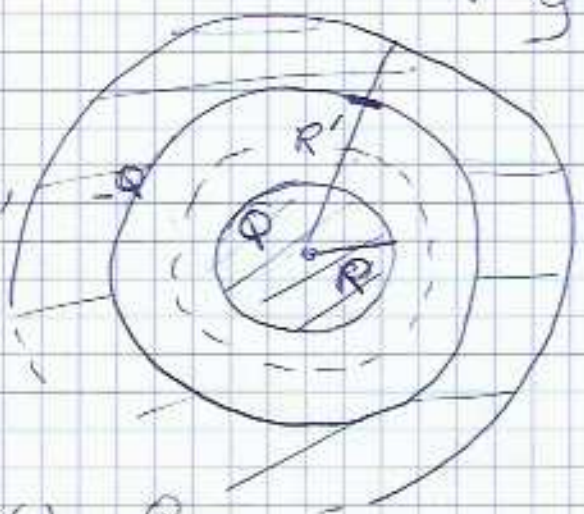
- $\underbrace{V(R') - V(R)}_{} = -\int_R^{R'} \vec{E}(r).d\vec{\ell}$ le long du rayon $d\vec{\ell} = dr\,\vec{u_r}$

$$\Delta V = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_R^{R'}\frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r}\right]_R^{R'} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{Q}{\Delta V} = 4\pi\varepsilon_0\,\frac{R\,R'}{R'-R} = C_{sphère}}$$

Suite VI.5)

- ex Condensateur sphérique



+ Th. Gauss / sphère de rayon R<r<R'
  - sym sphérique $\vec{E} = E(r)\,\vec{u_r}$
  - $\Phi = \iint_{Gauss} \vec{E}(r).\underbrace{d\vec{S}}_{dS\,\vec{u_r}} = E(r)\,4\pi r^2$
  - $Q_{Gauss} = Q$

$$\Big\} \; E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

- $\underbrace{V(R') - V(R)} = -\int_R^{R'} \vec{E}(r).d\vec{\ell}$ le long du rayon

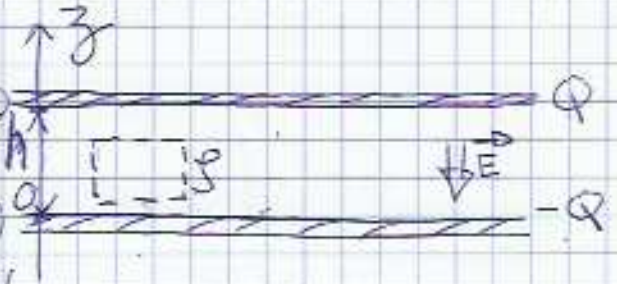
$d\vec{\ell} = dr\,\vec{u_r}$

$$\Delta V = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_R^{R'} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r}\right]_R^{R'} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{Q}{\Delta V} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R R'}{R' - R} = C_{sphère}}$$

A.N. $R = 1$ cm, $R' = 1{,}1$ cm $\Rightarrow C = 10^{-11}$ F

- ex Condensateur plan



× longueur des plaques ≫ épaisseur (h)
↳ ignore les effets de bord

× Th Gauss sur surface fermée à l'intérieur des 2 plaques $\Rightarrow Q_{int} = 0 = \iint_S \vec{E}.d\vec{S}$

- par symétrie : $\vec{E} = E(z)\,\vec{u_z}$
- $E(z_{sup})\,S_{sup} + E(z_{inf})(-S_{inf}) = 0 \Rightarrow E(z_{sup}) = E(z_{inf})$

× formulation locale : $\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

. entre les plaques : $\rho = 0$

. symétrie $\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\partial E}{\partial z}(z)$ $\Big\}$ $\frac{\partial E}{\partial z}(z) = 0$

$\Rightarrow$ E ne dépend pas de z, E = cste entre les cond.

× Les plaques sont des conduct. à l'équilibre

$\hookrightarrow$ à leur surface : $\vec{E}(z_i) = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_0}\vec{n_i}$

$i = 1$ ou 2

. où $\vec{n_1} = \vec{u_z}$ et $\vec{n_2} = -\vec{u_z}$

. où pour une surface de conducteur $S = S_1 = S_2$

- $Q = \sigma_1 \times S$ et $Q = \sigma_2 \times S$ $\Rightarrow$ $\sigma_1 = -\sigma_2 = -\sigma$

× A l'intérieur des plaques

$\vec{E} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u_z}$ et $V_2(z_2 = h) - V_1(z_1 = 0) = -\int_{z_1}^{z_2} \vec{E}.d\vec{\ell}$

$d\vec{\ell} = dz\,\vec{u_z}$

soit $\Delta V = V_2 - V_1 = -\left(-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\right)\int_0^h dz = \frac{\sigma h}{\varepsilon_0}$

× Capacité $\frac{Q}{\Delta V} = \frac{\sigma S \varepsilon_0}{\sigma h}$ $\Rightarrow$ $\boxed{C = \frac{S\varepsilon_0}{h}}$

Suite VI.5)

× Condensateurs où le milieu inter-conducteur n'est pas le vide → matériau diélectrique

- vide : $C \propto \varepsilon_0$ capa proportionelle à ε_0
- hors du vide $\varepsilon_0 \rightarrow \varepsilon_r \varepsilon_0 = \varepsilon$

où ε_r est la permitivité relative ≥ 1

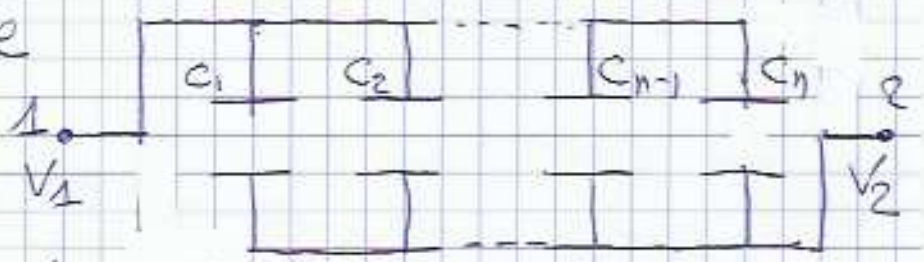
caractérise l'isolation

- ex air $\varepsilon_r = 1,006$

oxyde de Barym $BaTiO_3$: $\varepsilon_r = 1000$

× Association des condensateurs (n capa C_i, i=1..n)

- en parallèle



Chaque condensateur voit la même différence $V_2 - V_1 = \Delta V$

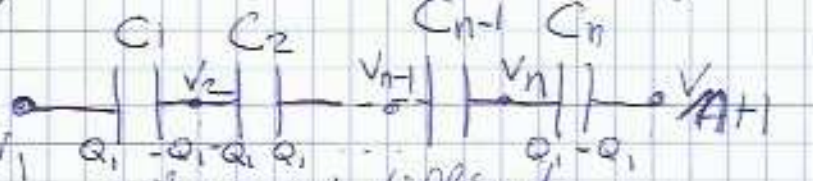
$$Q_i = C_i \Delta V$$

$$Q_{Tot} = \sum_i Q_i = \left(\sum_i C_i\right) \Delta V = C_{Tot} \Delta V$$

d'où $C_{Tot} = \sum_i C_i$ en parallèle.

Suite VI.5)

- en série



→ chaque Cap voit un ΔV différent

→ tous les cond portent la même charge Q

$$Q = Q_i = C_i \, \Delta V_i$$

$$Q = C_1 (V_2 - V_1) \qquad \frac{Q}{C_1} = V_2 - V_1$$

$$Q = C_2 (V_3 - V_2) \rightarrow \frac{Q}{C_2} = V_3 - V_2$$

$$Q = C_{n-1} (V_n - V_n)$$

$$Q = C_n (V_{n+1} - V_n) \qquad \frac{Q}{C_n} = V_{n+1} - V_n$$

Somme ~~$\sum Q = Q$~~ Somme $Q\left(\sum_i \frac{1}{C_i}\right) = \underbrace{V_{n+1} - V_1}_{\Delta V}$

d'où $C_{Tot} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}\right)^{-1}$ en série

× Energie emmagasinée dans un condensateur

- pour un ensemble de conducteurs ($i = 1 \ldots n$)

$$U_E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} Q_i \, V_i$$

- pour un condensateur $n = 2$ et $\begin{cases} Q_1 = -Q_2 = Q \\ -\Delta V = V_2 - V_1 = \dfrac{Q}{C} \end{cases}$

$$U_E = \frac{1}{2}\left(Q_1 V_1 + Q_2 V_2\right) = \frac{1}{2} Q \left(V_1 - V_2\right) = \frac{1}{2C} Q^2$$

$$\boxed{U_E = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}} > 0$$

VI.6) Inductance

i) Définition de l'auto-inductance

× Pour circuits filiformes parcouru par courant I
→ création d'un champ magnétique $\vec{B}_p$ propre

× Pour une surface qui s'appuie sur $\mathcal{C}$: $\mathcal{S}_\mathcal{C}$
→ flux propre de $\vec{B}_p$ à travers $\mathcal{S}_\mathcal{C}$: ϕ_p

$$\phi_p = \iint_{\mathcal{S}_\mathcal{C}} \vec{B}_p \cdot d\vec{S}$$ indépendant de $\mathcal{S}$

× Définition de l'auto-inductance L

$$\boxed{L \equiv \frac{\phi_p}{I}}$$ unité Henry (H)

$[L] = [B]\, m^2 [I]^{-1}$
$[L] = H = [\mu_0]\, A\, m^{-1} m^2 A^{-1}$
$H = [\mu_0].m$

$L > 0$
car signes de ϕ_p et I liés

× Exemple du solénoïde de N spire (rayon R) longueur ℓ.
parcouru par I $\quad n = \frac{N}{\ell}$

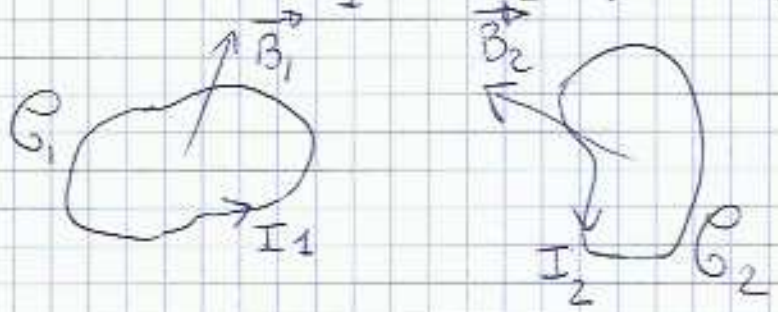
• à l'intérieur du solénoïde : $B_p = \mu_0 \frac{N}{\ell} I$ constant (voir p25)

• flux : $\phi_{tot} = N \phi_{spire} = N \mu_0 \frac{N}{\ell} I \pi R^2$

$$\Rightarrow L = \frac{\phi_{tot}}{I} = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} \pi R^2 = \mu_0 \pi (nR)^2 \ell$$

ii) Inductance mutuelle de plusieurs circuits

* 2 circuits $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ (I_1, I_2)



* Flux dans $\mathcal{C}_1$: $\vec{B}_1/\mathcal{C}_1 \Rightarrow \phi_{11} \propto I_1$

$\vec{B}_2/\mathcal{C}_1 \Rightarrow \phi_{12} \propto I_2$

$\Rightarrow$ idem $\mathcal{C}_2$

* 4 coefficients de proportionalité $\begin{cases} \phi_{11} = L_{11} I_1 \\ \phi_{12} = \Pi_{12} I_2 \end{cases}$

$\phi_{11} + \phi_{12} = \phi_1$

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & \Pi_{12} \\ \Pi_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

Définition de l'inductance mutuelle : $\boxed{\Pi_{12} = \Pi_{21} = \Pi}$

⚠ la mutuelle Π peut être >0 ou <0 !

* $\phi_{12} = \Pi I_2 = \Pi \dfrac{\phi_{22}}{L_{22}} \Rightarrow \dfrac{\phi_{12}}{\phi_{22}} = \dfrac{\Pi}{L_{22}} = k_1$

de même $\dfrac{\phi_{21}}{\phi_{11}} = \dfrac{\Pi}{L_{11}} = k_2$

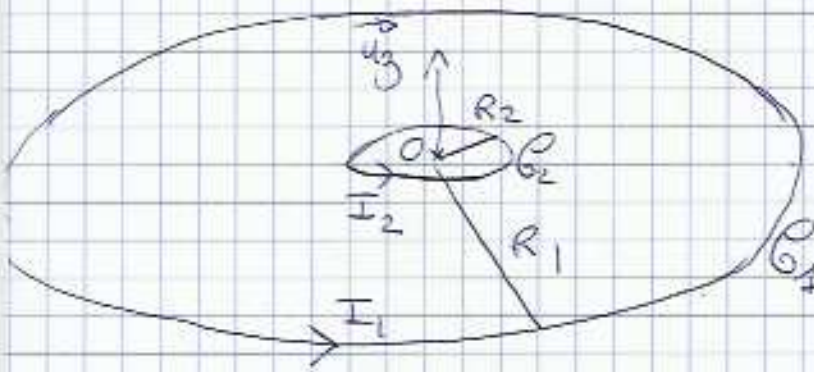
soit $\Pi^2 = k_1 k_2 L_{11} L_{22} = \boxed{K L_1 L_2}$ $\begin{cases} L_{11} = L_1 \\ L_{22} = L_2 \\ k_1 k_2 = K \end{cases}$

coeff de couplage $\in [0, 1]$ ← dépend uniquement géométrie

Suite VI.6)

× ex de calcul de Mutuelle M

2 spires coplanaires avec $R_2 \ll R_1$



• $\vec{B}_1$ voir p 22 verso

$$\vec{B}_1(O) = \frac{\mu_0 I_1}{2R_1}\vec{u}_3$$

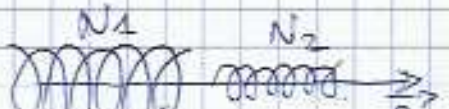
• $d\vec{S}_2 = dS_2\,\vec{u}_3$

• Considérant que $R_2 \ll R_1$, $\vec{B}_1 \sim$ constant $= \vec{B}_1(O)$ sur la spire 2

d'où $\Phi_{21} = \iint_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2 = \frac{\mu_0 I_1}{2R_1}\pi R_2^2$

$\Phi_{21} = M I_1$ d'où $M = \frac{\mu_0 \pi R_2^2}{2R_1}$

• Cas de 2 solénoïdes de dimension R_2, R_1, jointifs.

× "jointifs" $\Leftrightarrow$ 

× flux total dans solénoïde 2 = $N_2 \times N_1 \times \Phi_{21}$ généré par solénoïde 1

$$\Rightarrow M = N_1 N_2 \frac{\mu_0 \pi R_2^2}{2R_1}$$

Suite III.6)

× Cas général du calcul de M entre 2 circuits

- $\Phi_{12} = \iint_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2 = \iint_{S_2} \vec{\text{rot}}\, \vec{A}_1 \cdot d\vec{S}_2$

$$\Phi_{12} = \oint_{C_2} \vec{A}_1(P_2) \cdot d\vec{\ell}_2(P_2)$$

- $\vec{A}_1(P) = \oint_{C_1} \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \frac{d\vec{\ell}_1(P_1)}{\|\vec{P_1P}\|}$ (voir p 28)

- $$\boxed{\Phi_{12} = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{d\vec{\ell}_1(P_1) \cdot d\vec{\ell}_2(P_2)}{\|\vec{P_1P_2}\|}}$$

⇒ formule de Neumann

- $M_{21} = \frac{\Phi_{12}}{I_1}$ expression où $d\vec{\ell}_1$ et $d\vec{\ell}_2$ sont interchangeables

$$\boxed{M_{12} = M_{21}}$$

iii) Induction

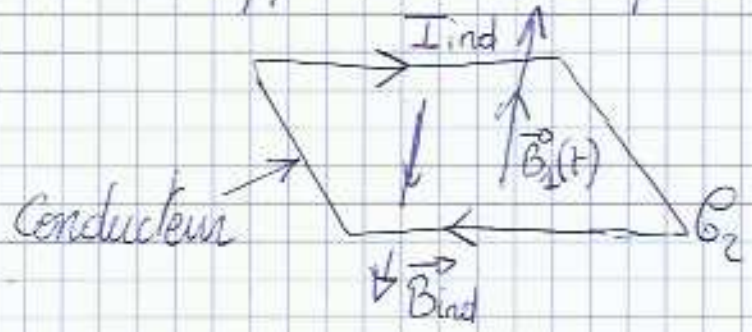
× Rappel sur phénomène de l'expérience de Faraday (p30 verso)

• variation temporelle de $I_1(t)$ ⇒ force électromotrice ΔV_2 dans circuit 2 / dans circuit 1

$$\Rightarrow \Delta V_2 = -\frac{d\Phi_{21}}{dt}$$ Loi de Faraday

→ Loi de Lenz

• le sens du courant induit (ΔV_2) s'oppose au champ inducteur (B_1)



× Rappel formulation locale (voir p35)

• $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ où $\begin{cases} V \text{ potentiel appliqué au circuit} \\ \vec{A} \text{ potentiel induit par } \vec{B}_1 \end{cases}$

$\vec{E} \Leftrightarrow V$: champ vu par les charges dans le conducteur

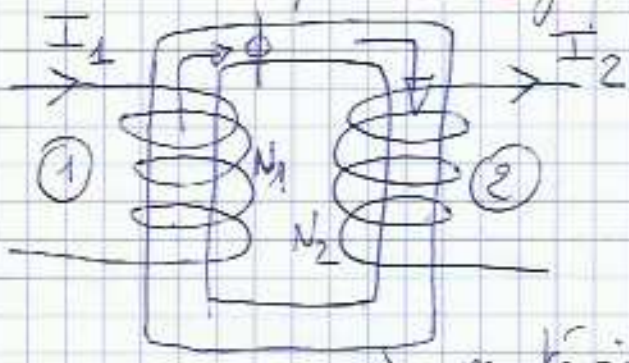
× Conséquence sur le courant $\vec{j} = \gamma \vec{E}$

$$\vec{j} = \underbrace{-\gamma \overrightarrow{grad}\, V}_{I_V} \underbrace{- \gamma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}_{I_{ind}}$$

- I_V : courant issu d'une différence de potentiel appliqué au circuit
- I_{ind} : courant induit par var. $\vec{B}_1$ (externe)

× Application : Transformateur

- 2 bobines (solénoïdes)
- bobine 1 inductrice : génère un flux ϕ
- bobine 2 réceptrice du flux : restitue un courant



matériaux qui transmet le flux ϕ

chaque spire de ① et ② ⟺ voit le même flux ϕ

Rem il s'agit d'un transfo idéal → il n'y a pas de pertes de ϕ

- facteur de transformation $m = \frac{I_2}{I_1}$?

$$\left.\begin{array}{l} (1 \text{ spire}) \times \phi = \mu_0 \frac{N_1}{\ell} I_1 \pi R_1^2 \\ N_1 \text{ spires} \times \phi_{tot} = N_1 \phi = L_1 I_1 \end{array}\right\} \phi = L_1 \frac{I_1}{N_1}$$

× bobine 2 : $\phi = -L_2 \frac{I_2}{N_2}$ (1 spire)

× Avec $L_1 = L_2$ ($N_1 \neq N_2$, $\ell_1 \neq \ell_2$, $R_1 \neq R_2$)

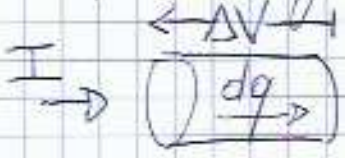
alors : $\phi = L_1 \frac{I_1}{N_1} = -L_2 \frac{I_2}{N_2}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\frac{I_2}{I_1} = \frac{-N_2}{N_1}}$ ⚠ signes

iv) Energie accumulé par une inductance L

× Circuit avec inductance L
- parcouru par I
- avec différence de potentiel ΔV (f.e.m.)

× Charges se déplacent dans $\Delta V \Rightarrow$ travail



• sur une durée dt

variation de charge $dq = I\,dt$

• travail élémentaire $\delta W = dq\,\Delta V$

• ΔV force électromotrice : $\Delta V = -\frac{d\phi}{dt}$

• $\delta W = -I \frac{d\phi}{dt} dt$

où $\frac{d\phi}{dt} dt = d\phi(t)$

$\Big\} \delta W = -I\,d\phi$

- On a $\phi = LI$, soit $d\phi = L\,dI$
- $\delta W = -LI\,dI$
- $-\int$ (énergie accumulée) $= -\int \delta W$

$$U_B = L\int I\,dI = \boxed{\frac{1}{2}LI^2 = U_B}$$

× Exemple du solenoïde (N spires, longueur ℓ, rayon R)

- $L = \mu_0 \pi \frac{N}{\ell} R^2$
- où $B = \mu_0 \frac{N}{\ell} I \left(= \frac{L}{\pi R^2} I \Rightarrow L = \frac{\pi R^2}{I} B\right)$
- $U_B = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{\pi R^2}{2} \underbrace{\mu_0 \frac{N}{\ell}}\, I^2$

$$B^2 = \mu_0^2 \frac{N^2}{\ell^2} I^2 \text{ soit } \frac{\mu_0 N}{\ell} I^2 = \frac{\ell B^2}{\mu_0 N}$$

- $U_B = \frac{1}{2\mu_0} \underbrace{\frac{\ell \pi R^2}{N}} B^2$

volume d'une spire : $\mathcal{V}$

- Rappel du cas général : $U_B = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{B^2}{2\mu_0} d\tau$

× Energie de 2 circuits en inductance mutuelle.

. Rappel $\begin{cases} \Phi_1 = L_1 I_1 + M I_2 \\ \Phi_2 = L_2 I_2 + M I_1 \end{cases}$

. $W_{B(1+2)} = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2$

. Condition $W_B > 0$ soit

$$f(I_2) = I_2^2 + 2\frac{M I_1}{L_2} I_2 + \frac{L_1 I_1^2}{L_2} > 0$$

vérifiée s'il n'y a pas de solution $f(I_2) = 0$

$$\Rightarrow \Delta' = \left(\frac{M I_1}{L_2}\right)^2 - \frac{L_1 I_1^2}{L_2} < 0$$

$$M^2 - L_2^2 \frac{L_1}{L_2} < 0$$

$$\boxed{M^2 < L_1 L_2} \quad \text{avec } M^2 = K L_1 L_2$$

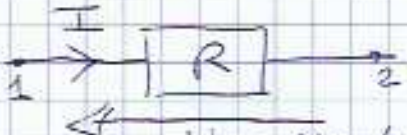
$$\Leftrightarrow K < 1$$

ou $M < \sqrt{L_1 L_2}$

7.) Introduction à l'électrocinétique

× objectif: comportement des composants R, L, C

i) Résistance R



× Loi d'ohm : $U = RI$

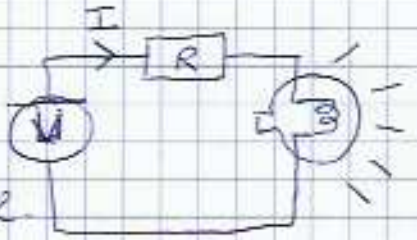
⇕ conductivité des conducteurs.

× I constant ⇔ tension U constante

× Puissance : $P = UI = RI^2$

× Circuit avec ampoule

I est ⇔ ampoule est allumée en permanence.



ii) Capacité C

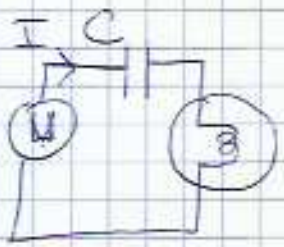
× $C = \frac{Q}{U}$

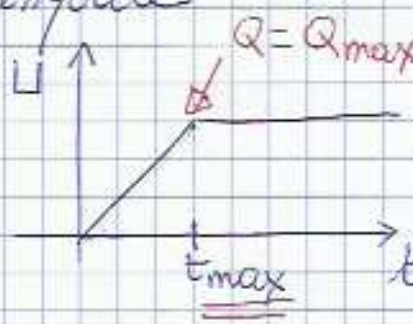
× $I = \frac{dQ}{dt} = C\frac{dU}{dt}$

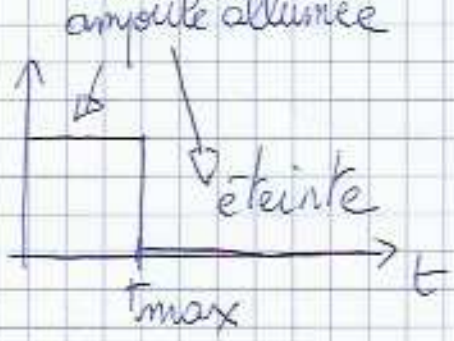
× Capacité conduit un courant variable avec temps.

ou: à tension constante alors courant nul.

× Avec ampoule





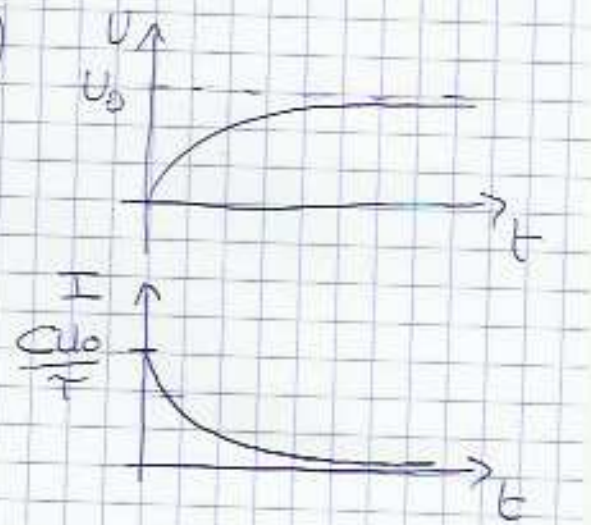


Suite VI.7)

× exemple de transition vers U = cste.

• $U(t) = U_0 \left(1 - e^{-t/\tau}\right)$

• $I = C\frac{dU}{dt} = + \frac{CU_0}{\tau} e^{-t/\tau}$

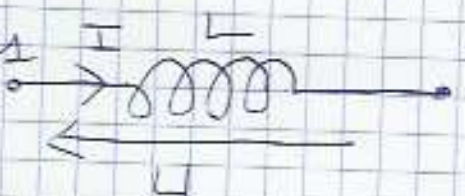


× Autre exemple, I constant

• $\frac{dU}{dt} = \frac{I}{C} \Rightarrow U(t) = \frac{I}{C} t$ croissance "infinie" ?

• saturation lorsque le condensateur atteint { Q maximale supportée par les conduct. ou tension (champ E) maximale.

iii) Inductance

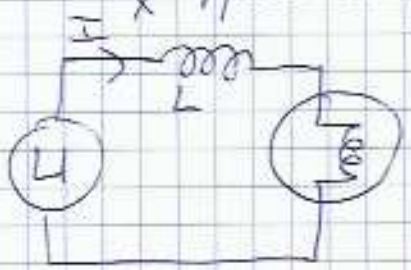


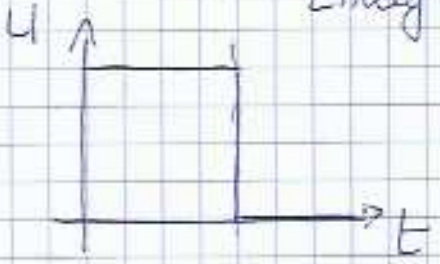
× $\begin{cases} \phi = LI \\ U\,(= -\Delta V) = \frac{d\phi}{dt} \end{cases} \Rightarrow U = L\frac{dI}{dt}$

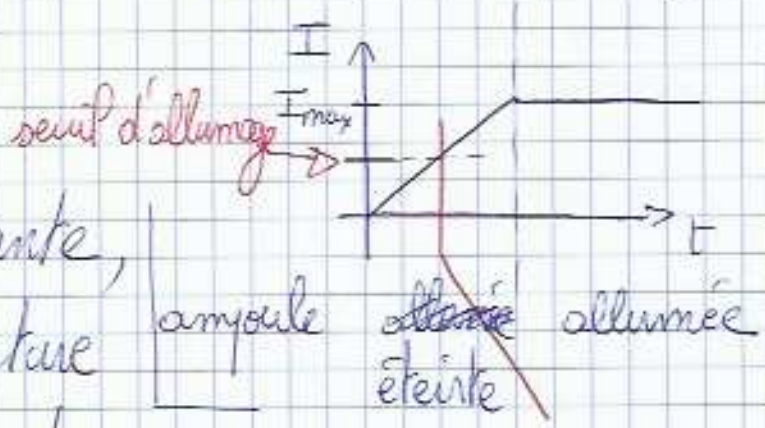
× Inductance génère une tension constante

Suite VI.7)

x Avec ampoule







A tension constante, la bobine sature pour $\begin{cases} \phi = \phi_{max} \\ I = I_{max} \end{cases}$