MEMO

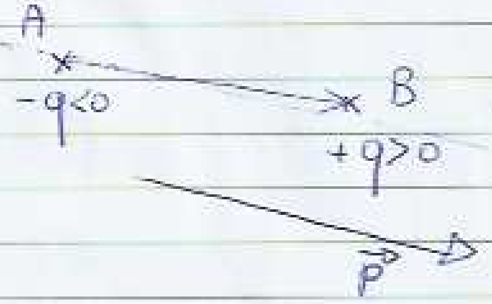
V Dipôles Electriques & Magnétiques

V. 1) Dipôles électriques

$\times M \begin{cases} V(M) \; ? \to \\ \vec{E}(M) \cdot \vec{p} \end{cases}$

i) Définition

× Exemples du doublet $q>0$

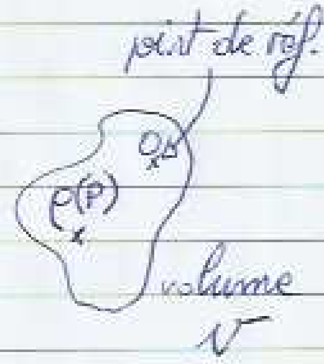


moment dipolaire : $\vec{p} = q\,\vec{AB}$

$\sum q = q_A + q_B = -q + q = 0$

$[\vec{p}] = C.m$

× Distribution de charges dipolaire



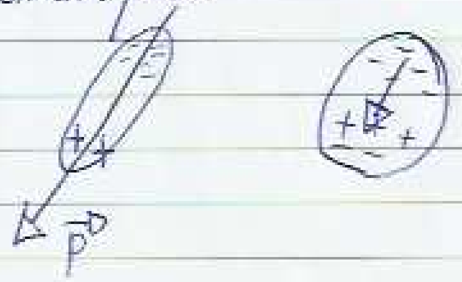
$\iiint_{\mathcal{V}} \rho(P)\, d\tau(P) = 0$: neutre !

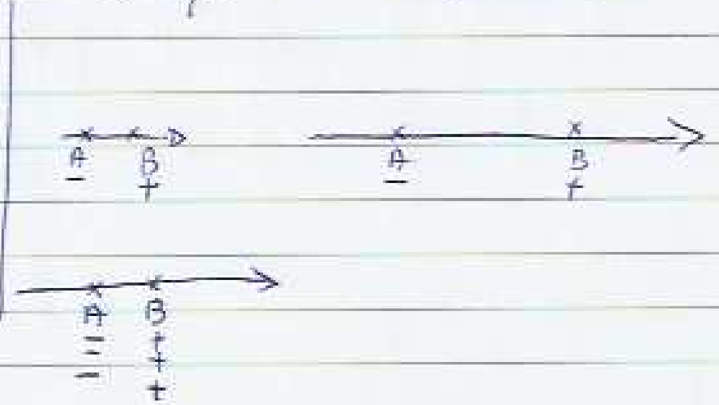
$\iiint_{\mathcal{V}} \rho(P)\, \vec{OP}\, d\tau(P) = \vec{p} \neq \vec{0}$

déf. moment dipolaire élect.

indépendant du choix de O

ex géométriques





ii) Dipôle actif → calcul $V(M)$, $\vec{E}(M)$? $\vec{p}$

× <u>Approximation du dipôle</u>

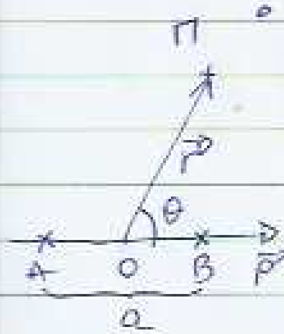
distance de M au dipôle (distr. charges dipolaire) est grande par rapport à l'extension de la distribut°

× <u>Cas doublet</u> $\vec{AB} = \vec{a}$, $q_A = -q_B = -q < 0$

O (le milieu de) AB

M / $\vec{r} = \vec{OM}$ avec $\boxed{r \gg a}$ $\quad 1 \gg \frac{a}{r}$

• potentiel : $V(M) = V_A(M) + V_B(M)$



$$V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{\|\vec{AM}\|} + \frac{1}{\|\vec{BM}\|}\right) \to \|\vec{AM}\|, \|\vec{BM}\| \ ?$$

$$\vec{AM} = \vec{AO} + \vec{OM}$$

$$\|\vec{AM}\|^2 = \frac{a^2}{4} + r^2 \pm a r\cos\theta = r^2\left(\frac{1}{4}\frac{a^2}{r^2} + 1 - \frac{a}{r}\cos\theta\right)$$

$$\frac{1}{\|\vec{AM}\|} = \frac{1}{r\sqrt{1 \pm \frac{a}{r}\cos\theta + \frac{a^2}{4r^2}}} \simeq \frac{1}{r}\left(1 - \frac{a}{2r}\cos\theta\right)$$ à l'ordre 2 (négligé : $\frac{a^2}{r^2}$)

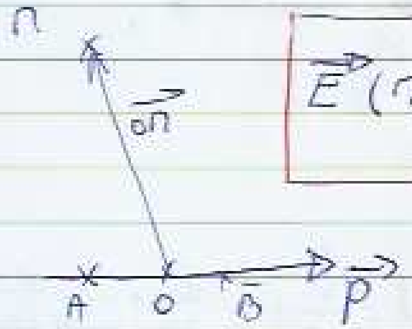
+ pour $\|\vec{BM}\|$

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(\overbrace{\cancel{-1} + \frac{a\cos\theta}{2r}}^{-\frac{1}{\|\vec{AM}\|}} + \overbrace{\cancel{1} + \frac{a\cos\theta}{2r}}^{\frac{1}{\|\vec{BM}\|}}\right) = \frac{q a\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$q a\cos\theta = \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r} = \frac{\|\vec{p}\|\,\cancel{\|\vec{r}\|}\cos\theta}{\cancel{r}} = q a\cos\theta$$

$$\boxed{V(M) = \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon\, r^3}}$$

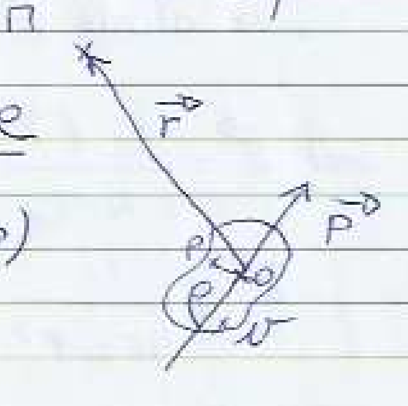
- champ électrique → calcul direct $\vec{E}(M) = \vec{E_A} + \vec{E_B}$
  → $\vec{E} = -\vec{grad}\, V(M)$
  ↳ sur coord. de M



$$\boxed{\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(\underbrace{\frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})}{r^2}\vec{r}}_{\text{orienté suivant } \vec{OM}} - \underbrace{\vec{p}}_{\text{suivant l'orientation du dipôle}}\right)}$$

voir au verso .../...

× <u>Cas de la distribution dipolaire</u>



- approx dipolaire : $r \gg$ distance max (OP)
- potentiel $V(M) = \iiint_V \frac{\rho(P)}{4\pi\varepsilon_0 \|\vec{PM}\|} d\tau(P)$

développement limité de $\frac{\rho(P)}{\|\vec{PM}\|} \Rightarrow \frac{\rho(P)\, \vec{OP}\cdot\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|^3}$

Rem : $\vec{OM}$ ne change ps dans l'intégrale (sur P)

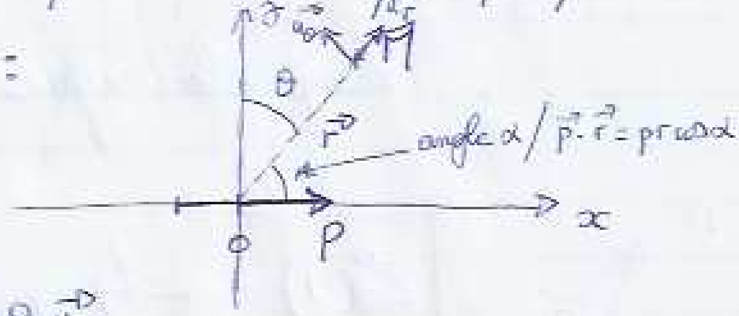
$$V(M) = \underbrace{\iiint_V \frac{\rho(P)\,\vec{OP}}{4\pi\varepsilon_0} d\tau(P)} \cdot \frac{\vec{OM}}{r^3}$$

$$\boxed{V(M) = \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}}$$

- calcul du champ via $\vec{E}(M) = -\vec{grad}\, V(M)$
  ↳ expression générale = expr. pour doublet.

× Démo de $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon r^3}\left(\frac{3\,\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^2}\,\vec{r} - \vec{p}\right)$ à partir de $V = \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon r^3}$

- Sans perdre en généralité, on peut orienter le repère sphérique telle que $\vec{p} \parallel Ox$ selon :



- On a alors :

$$\begin{cases} \vec{r} = r\,\vec{u_r} \\ \vec{p} = p\sin\theta\,\vec{u_r} + p\cos\theta\,\vec{u_\theta} \\ \vec{p}\cdot\vec{r} = pr\sin\theta \end{cases}$$

- on calcule $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\right)$ où $\overrightarrow{\text{grad}} = \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}$

soit $\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(p\sin\theta\,\frac{\partial \frac{1}{r^2}}{\partial r}\,\vec{u_r} + \frac{pr}{r^3\cdot r}\,\frac{\partial \sin\theta}{\partial\theta}\,\vec{u_\theta}\right)$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon r^3}\left(+2p\sin\theta\,\vec{u_r} - p\cos\theta\,\vec{u_\theta}\right)$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon r^3}\left(\underbrace{3p\frac{r}{r}\sin\theta\,\frac{r\vec{u_r}}{r}}_{} - \underbrace{p\sin\theta\,\vec{u_r} - p\cos\theta\,\vec{u_\theta}}_{}\right)$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon r^3}\left(\frac{3\,\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^2}\,\vec{r} - \vec{p}\right)}$$

MEMO

× Equipotentielles et lignes de champ ?

. equipotentielle : $V(\vec{r}) = \text{cte} \Rightarrow dV(\vec{r}) = 0 = \underbrace{\overrightarrow{\text{grad}}V}_{-\vec{E}(\vec{r})} \cdot d\vec{r}$

. ligne de champ :
$d\vec{\ell} \parallel \vec{E} \Rightarrow d\vec{\ell} \wedge \vec{E}(\vec{r}) = 0$

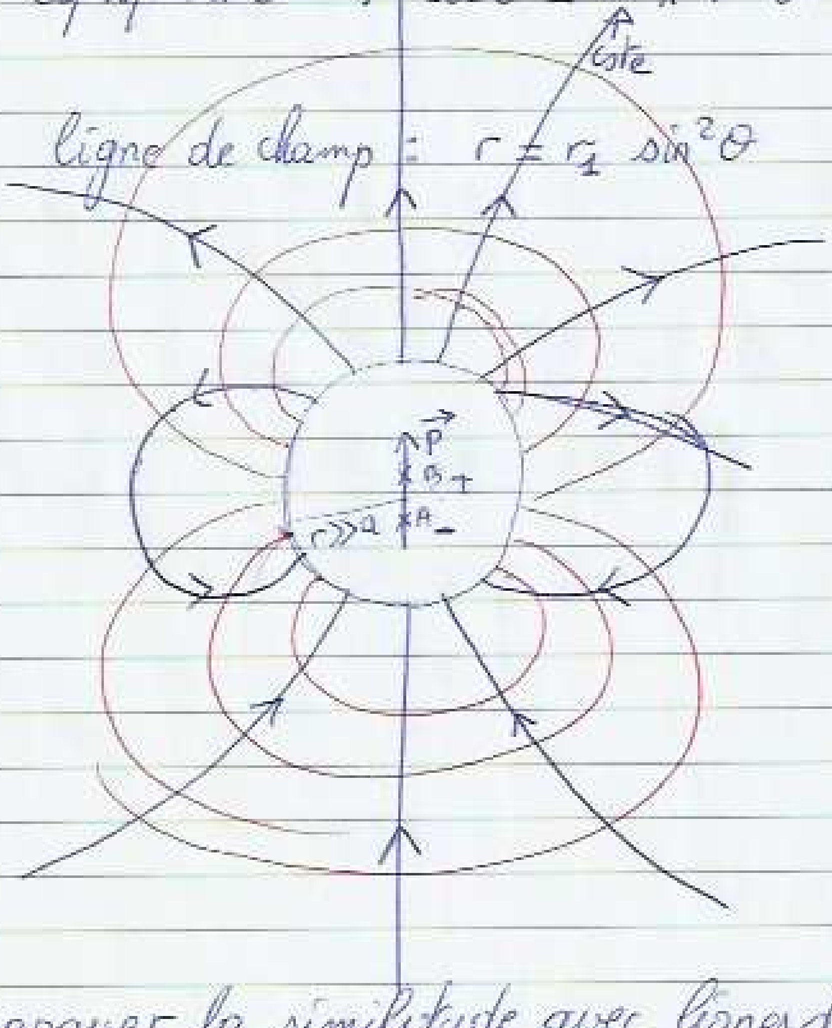
. cas du doublet $V(\vec{r}) = \dfrac{qa\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \text{cte}$

cte

equipotentielle : $\cos\theta = c \times r^2$ ou $r = r_0\sqrt{\cos\theta}$

cte

ligne de champ : $r = r_1 \sin^2\theta$

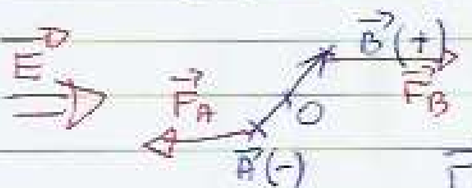


⇒ Remarquer la similitude avec lignes d'un champ <u>magnétique</u> par un aimant simple avec un pôle N et un pôle S !

iii) Dipôle passif → force exercée sur le dipôle ? lorsqu'il est immergé dans $\vec{E}_{ext}$

× champ uniforme $\vec{E}$ indépendant de $M(\vec{r})$

. doublet : $\vec{F}_E = \vec{F}(A) + \vec{F}(B) = -q\vec{E} + q\vec{E} = \vec{0}$



moment des forces / O $\left(\vec{\Gamma}_O(n) = \vec{On} \wedge \vec{F}(n)\right)$

$$\vec{\Gamma}_O = \vec{\Gamma}_O(A) + \vec{\Gamma}_O(B) = \vec{OA} \wedge (-q\vec{E}) + \vec{OB} \wedge (q\vec{E})$$

$$\vec{\Gamma}_O = q\underbrace{(\vec{AO} + \vec{OB})}_{\vec{p}} \wedge \vec{E} = \boxed{\vec{p} \wedge \vec{E}}$$

→ le champ fait tourner le dipôle jusqu'à l'équilibre ($\Leftrightarrow \vec{\Gamma}_O = \vec{0}$), $\vec{p} \parallel \vec{E}$

. distribution dipolaire de charges $\left(\iiint_V \rho\, d\tau = 0, \vec{p} \neq \vec{0}\right)$

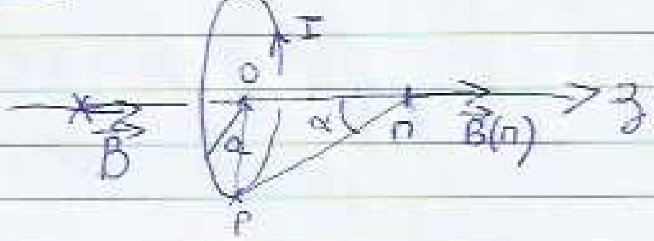
$$\vec{F} = \iiint_V \rho \vec{E}\, d\tau = \vec{E} \iiint \rho\, d\tau = 0$$

$$\vec{\Gamma}_O = \iiint_V \vec{OP} \wedge \rho \vec{E}\, d\tau = \iiint_V \rho \vec{OP}\, d\tau \wedge \vec{E} = \boxed{\vec{p} \wedge \vec{E}}$$

à l'équilibre

V.2) Dipôles magnétiques

i) Définition



× Ex de la spire

. sur l'axe : $\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I}{2a} \sin^3\alpha \ \vec{u}_z$

. approximation dipolaire : $z \gg a \Rightarrow \alpha \ll 1$, $\sin\alpha \simeq \frac{a}{PM} \simeq \frac{a}{z}$

$\Rightarrow \vec{B}(z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I 2\pi a^3}{a \ z^3} \vec{u}_z$ où $\pi a^2 = S$, surf. spire

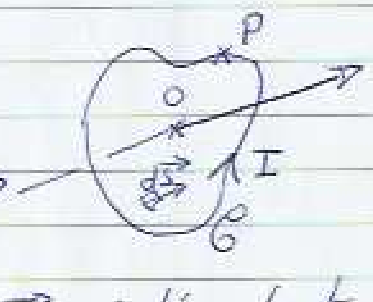
$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2 \, I S \vec{u}_z}{z^3}$; $I S \vec{u}_z \equiv \vec{m}$ moment dipolaire magnétique

on définit $\vec{S} = \pi a^2 \vec{u}_z$, surface orienté suivant Ampère

$\vec{m} = I\vec{S}$

et $\vec{B}(z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\vec{m}}{z^3}$

× Cas des circuits filiformes



× circuit fermé avec surface orienté $\vec{S}$

$\vec{S} = \iint_{\mathcal{S}_\mathcal{C}} d\vec{S} = \frac{1}{2} \oint_{\mathcal{C}} \vec{OP} \times d\vec{OP}$ indépendant du choix de O.

× Par définition : $\boxed{\vec{m} = I\vec{S}}$

MEMO

× Cas général d'une densité volumique de courant $\vec{j}$

$$\boxed{\vec{m} = \frac{1}{2}\iiint_{\mathcal{V}(P)} \vec{OP} \wedge \vec{j}(P)\, d\tau} \quad \left(\int I\, d\vec{OP} \leftrightarrow \iiint \vec{j}\, d\tau\right)$$

toutes les distributions $\vec{j}$ ne conduisent pas à un dipôle!

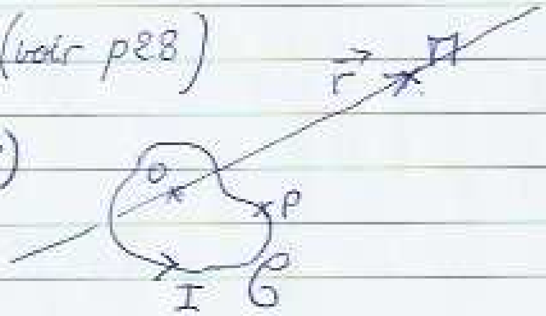
avec $\iiint_{\mathcal{V}} \vec{j}(P)\, d\tau = \vec{0}$ (équivalente à $\iiint \rho\, d\tau = 0$)

alors $\vec{m}$ est indépendant du choix de O.

ii) Dipôles actifs → calcul $\vec{B}, \vec{A}$? $\vec{m}$

× Potentiel vecteur $\vec{A}(M)$ (voir p28)

approx dipolaire : $OM \gg$ dist max (OP)



$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{d\vec{OP}}{\|\vec{PM}\|}$$

dev. limité de $\dfrac{1}{\|\vec{PM}\|} = \dfrac{1}{r}\left(1 + \dfrac{\vec{OP}\cdot\vec{r}}{r^2}\right)$

$$\boxed{\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \wedge \vec{r}}{r^3}} \quad \left(\text{à comparer à } V(M) = \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\right)$$

× Champ magnétique (par analogie avec dipôle électrique

$$\boxed{\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\left(\frac{3(\vec{m}\cdot\vec{r})}{r^2}\vec{r} - \vec{m}\right)}$$

Suite IV . 2 . ii)

× Lignes de champ engendrées par un dipôle magnétique.

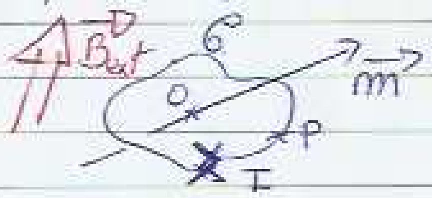
↳ similaire à celui p40 (aimant avec 2 pôles N & S).

iii) Dipôles passifs → forces exercées sur le dipôle quand il est immergé dans $\vec{B}_{ext}$.

× <u>champ uniforme</u> $\vec{B}$ indépendant de $M(\vec{r})$

• Force de Lorentz pour circuit filiforme $\mathcal{C}$ parcouru par I

$q\vec{v} \wedge \vec{B} \rightarrow I\,\vec{dl} \wedge \vec{B}$ avec $\vec{dl} = \vec{dOP}$



d'où $\vec{F}_{\mathcal{C}} = \oint_{\mathcal{C}} I\,\vec{dOP} \wedge \vec{B}_{ext}$

$$\vec{F}_{\mathcal{C}} = I\left(\oint_{\mathcal{C}} \vec{dOP}\right) \wedge \vec{B}_{ext} = \vec{0} \text{ car } \oint \vec{dl} = \vec{0} \,!$$

…/…

× moment de la force : $\vec{\Gamma}_O = \oint_{OP} \underbrace{\vec{OP} \wedge (I\,\vec{dOP} \wedge \vec{B}_{ext})}_{I\left[(\vec{OP}\cdot\vec{B}_{ext})\,\vec{dOP} - \underbrace{(\vec{OP}\cdot\vec{dOP})\,\vec{B}_{ext}}_{=0\,!}\right]}$
par rapport à O

on montre que $\boxed{\vec{\Gamma}_O = \vec{m} \wedge \vec{B}_{ext}}$

⇒ le moment s'annule à l'équilibre ⇒ $\vec{m} \parallel \vec{B}_{ext}$

le champ ext. fait tourner le dipôle pour l'aligner dans sa direction (principe de la boussole)

× On montre que dans le cas général d'une distribution de courant ; la résultante des forces est :

$$\vec{F} = \underbrace{(\vec{m} \cdot \overrightarrow{grad})}_{\text{nouvel opérateur différentiel :}} \overrightarrow{B_{ext}}$$

$$m_x \frac{\partial}{\partial x} \vec{u_x} \cdot + m_y \frac{\partial}{\partial y} \vec{u_y} \cdot + m_z \frac{\partial}{\partial z} \vec{u_z} \cdot$$