Licence Physique-Chimie - L2S4
Devoir à la maison d'Electromagnétisme mars 2020

Jérôme Baudot, Mohamad Moukaddam

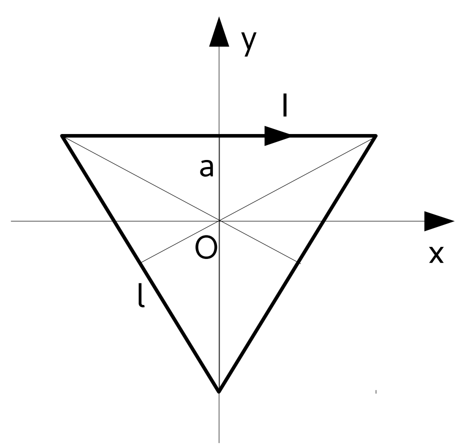
Durée : nous recommandons de résoudre les deux exercices en mode examen, merci de nous indiquer le temps que vous aurez passé sur chaque exercice.
Collaboration : si vous réalisez ce devoir en collaboration avec d'autres étudiants, rendez une copie individuelle mais nous vous demandons d'indiquer les noms des étudiants de votre groupe.

1 Champ magnétique généré par une bobine triangulaire infinie

Nous étudions une bobine dont la section est un triangle isocèle de côté l. L'intersection des médianes d'un tel triangle définit un point O. La bobine est orienté le long d'un axe (Oz) perpendiculaire au triangle.
Le problème est découpé en trois parties. Nous calculons d'abord le champ magnétique créé par une spire seule au centre du triangle. Puis ce résultat sera extrapolé pour le champ sur l'axe de la bobine. Et enfin, le champ dans sur une médiane sera calculé.

1.1 Spire triangulaire

Nous considérons un circuit triangulaire (côté l) parcouru par un courant I. Le courant circule dans le sens trigonométrique pour un observateur dont le regard est dirigé vers les z croissant.
Le point O est le centre du triangle, sa distance minimal à un côté du triangle est $a = \dfrac{l}{2\sqrt{3}}$.
Nous calculons le champ magnétique au point O, $\overrightarrow{B_T}(O)$, en utilisant la loi de Biot et Savart.



i) Utiliser les symétries pour déterminer l'orientation du champ magnétique $\overrightarrow{B_T}(O)$.

ii) Poser l'intégration nécessaire au calcul de $\overrightarrow{B_T}(O)$. On suggère de démarrer par intégrer sur un seul côté du triangle et on impose d'utiliser les coordonnées cartésiennes où $\overrightarrow{u_x}$ est parallèle au côté.
Expliciter les différents éléments qui interviennent dans l'intégrale : $\overrightarrow{\mathrm{d}l}$, $\overrightarrow{PM}$ et $\|\overrightarrow{PM}\|^3$. On fera apparaître uniquement a à la place de l dans les formules.

iii) Calculer l'intégrale pour un côté en utilisant le fait que : $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}$.
Calculer alors le champ total $\overrightarrow{B_T}(O)$.

1.2 Bobine triangulaire infinie, champ sur l'axe

La bobine étudiée est de longueur infinie. Il y a N spires pour un longueur L de bobine, on défini la densité $n = N/L$. Chaque spire est parcourue par le même courant I. Nous calculons le champ $\overrightarrow{B_T}(z)$ uniquement sur l'axe.

i) La formule obtenue dans la partie précédente ressemble (si vous avez juste !) à la formule du champ au centre d'une spire circulaire de rayon R et d'axe (Oz) : $\overrightarrow{B_R}(O) = \dfrac{\mu_0 I}{2R}\overrightarrow{u_z}$.
A partir de votre résultat précédent $\overrightarrow{B_T}(O)$ pour la spire triangulaire, exprimez le rayon équivalent R_{eq} qu'une spire circulaire devrait avoir pour que les deux résultats coïncident : $\overrightarrow{B_T}(O) = \overrightarrow{B_{Req}}(O)$.

ii) Lorsque la spire est circulaire, le champ pour un point M à une distance z du point O est :

$$\overrightarrow{B_R}(z) = \frac{\mu_0 I \sin^3\alpha}{2R}\overrightarrow{u_z}, \text{ où } \tan\alpha = \frac{R}{z}.$$

Utiliser cette formule et l'expression du rayon R_{eq} pour obtenir la formule du champ $\overrightarrow{B_T}(z)$ créé par une spire triangulaire pour un point situé à une distance z.

iii) Pour la bobine de section triangulaire, expliquer pourquoi le champ magnétique sur l'axe ne dépend pas de la position sur l'axe z.
En utilisant la formule du champ généré par une spire triangulaire, calculer alors, par intégration sur l'angle α, le champ sur l'axe de la bobine noté $\overrightarrow{B_n}(y = O)$.

1.3 Bobine triangulaire infinie, champ sur une médiane.

Il s'agit maintenant d'appliquer le théorème d'Ampère et d'exploiter la formule du champ sur l'axe, $\overrightarrow{B_n}(y = O)$, pour calculer le champ sur une médiane de la section triangulaire.
Dans cette partie, on choisit une des trois médianes possibles et elle définit alors l'axe (Oy).

i) Appliquer les symétries et invariances du problème pour montrer que sur la médiane $\overrightarrow{B_n}(\vec{r}) = B_n(y)\overrightarrow{u_z}$.

ii) Choisissez un contour et appliquer le théorème d'Ampère pour calculer le champ lorsque $y > a$, c'est à dire que le point M est en-dehors de la bobine.

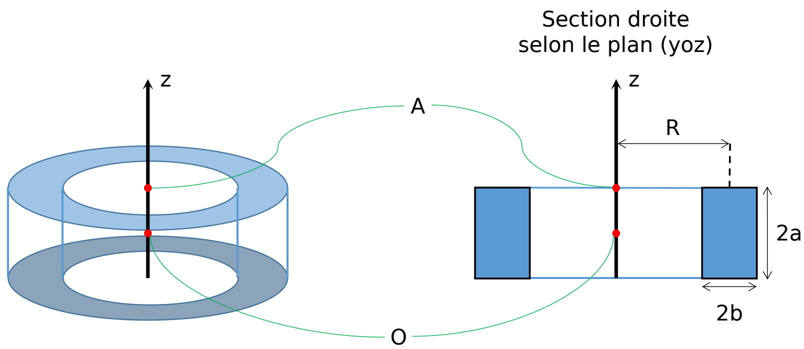
iii) Choisissez un contour et appliquer le théorème d'Ampère pour calculer le champ lorsque $y < a$, c'est à dire que le point M est à l'intérieur de la bobine.

2 Champ créer par un anneau de section rectangulaire.

Un anneau conducteur est parcouru par un courant I supposée réparti uniformément sur la section droite de l'anneau, les connexions assurant le passage du courant sont effectuées au niveau d'une coupure de largeur négligeable.

2.1 Étude sur une bague élémentaire.

Considérez, dans l'anneau, une "spire" élémentaire de rayon ρ et de hauteur z, avec des épaisseurs $\mathrm{d}\rho$ et $\mathrm{d}z$ négligeables. Cette spire est parcourue par un courant élémentaire $\mathrm{d}i$.



i) Utiliser les symétries et les invariances pour établir l'orientation du champ magnétique pour un point M situé sur l'axe (OZ).

ii) A l'aide de l'expression du champ magnétique crée par une spire (voir en haut partie 1.2.(ii)), établir le champ magnétique $\overrightarrow{B}(O)$ au point $\mathrm{O}(0,0,0)$ créer par une bague élémentaire de rayon ρ et de hauteur $2a$.

iii) Même question pour le champ magnétique $\overrightarrow{B}(A)$ au point $\mathrm{A}(0,0,a)$.

2.2 Étude sur l'anneau.

i) Quelle est la relation entre le courant i traversant une bague d'épaisseur $\mathrm{d}\rho$ et de hauteur $2a$ et le courant totale I de l'anneau ?

ii) Utilisez le résultat de la partie précédente et calculez l'expression du champ magnétique créé par l'anneau aux points O(0,0,0) et A(0,0,a).

$$\text{On donne : } \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+k^2}} = \ln(x+\sqrt{x^2+k^2}) + C \text{ si } k > 0.$$

2.3 Application Numérique.

On donne $R = 16$ mm, $2a = 2b = 6$ mm, quel devrait être le courant total I pour avoir $B(A) = 1$ Tesla[1]. Sachant que la densité de courant dans le cuivre **ne doit pas** dépassé 10 A/mm^2, commentez sur la faisabilité d'un champ magnétique $B \sim 1$ T avec cet appareil.

1. C'est l'ordre de grandeur du champ magnétique qui peut exister en surface d'un aimant permanent