I Révision d'Electrostatique

I.1) Grandeurs & unités

- Charge électrique $[Q]$ = Coulomb
  - → 1C représente une charge considérable
  - → 1 particule élémentaire (électron) porte $q = 1,6 \times 10^{-19}\,C$

- Courant (Intensité) : $[I]$ = Ampère $= [Q][t]^{-1}$
  - → $1\,A = 1\,C/s$
  - → $I = \dfrac{\Delta Q}{\Delta t}$ où ΔQ = variat° ~~du nbre~~ de la charge dans un conducteur pendant Δt

- Densité volumique de courant $[j] = A\,m^{-2} = [I][S]^{-2}$

  ⚠ quantité vectorielle $\vec{j} = n\,q\,\vec{v}$ où $\begin{cases} n = \text{dens volumique de particules} \\ q = \text{charge d'une particule} \\ \vec{v} = \text{vitesse moy. des particules} \end{cases}$

- Force électrostatique $[F] = N = [Q]^2[L]^{-2}[\varepsilon_0]^{-1} = [kg][L]^2[t]^{-1}$
  - → Pour 2 charges q_1 ; q_2, séparée d'une distance d_{12}, selon direction $\vec{u}_{21}$

    $\vec{F}_{2\to1} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_1 q_2}{d_{12}^2}\,\vec{u}_{21}$ $\qquad 2 \xrightarrow{\vec{u}_{21}} 1$
  - → ε_0 est la permittivité du vide $\sim 8,85\times10^{-12}\,F.m^{-1}$

    $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \simeq 9\times10^{+9}\,m^3\,kg\,C^{-2}\,s^{-2}$ ⚠ voir Farad plus loin

    $[\varepsilon_0] = kg^{-1}\,m^{-3}\,A^2\,s^4$
  - → expression de $\vec{F}$ donnée par loi de Coulomb (1674)

- Densité volumique de charge $[\rho] = C\,m^{-3}$
  - → $Q = \iiint_{\mathcal{V}} \rho\,d\tau$ intégrale sur volume $\mathcal{V}$

↳ densité surfacique : $[\sigma] = C.m^{-2}$:

- Cas du conducteur (parfait) où les charges s'accumulent sur une (surface) mince épaisseur fine

$d\tau = \varepsilon\,dS$ $\qquad \rho\varepsilon = \sigma$

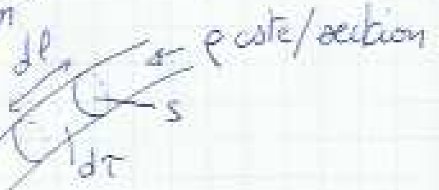
et $Q = \iint_S \sigma\,dS$

$\delta Q = \rho\,d\tau = \rho\,\varepsilon\,dS \Rightarrow \rho\varepsilon = \sigma$

Suite I 1) Grandeurs & unités

↳ ~~densité~~ linéique : $[\lambda] = C.m^{-1}$

- Cas du fil de section s



$$\delta Q = \rho d\tau = \rho s\, dl \Rightarrow \lambda = \rho s$$

- $Q = \int_{\mathcal{C}} \lambda\, dl$

- Champ électrique $[E] = N.C^{-1} = V.m^{-1} = kg\, m^2 s^{-2} C^{-1}$

→ Notion introduite pour décrire les interactions à distance (ex gravité)

→ grandeur vectorielle / $\vec{F} = q_2 \vec{E}$ force exercée par le champ sur q_2

→ champ créé par ~~point~~ charge ponctuelle q_1 : $\vec{E} = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 d_{21}^2} \vec{u_r} = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{A_1A_2}}{\|\vec{A_2A_1}\|^3}$ en q_2 (à d_{21})

$[\varepsilon] = kg^{-1} m^{-3} s^4 A^{-1} = A.V^{-1} s^{+1} m^{-1}$

- Potentiel électrique $[V] = [\phi] = V = N.m\, C^{-1} = kg.m^3 s^{-2} C^{-1}$

→ En partant du travail de la force $\vec{F}$ créée par champ $\vec{E} = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{u_r}}{r^2}$ lors du déplacement $d\vec{r} = dr\,\vec{u_r}$ de la charge q_2

$$\delta W = \vec{F_{21}} . d\vec{r} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dr}{r^2} = -q_2\, d\underbrace{\left(\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r}\right)}_{V(r)} = -d E_{potentielle}$$

potentiel généré par q_1 en r avec $V(\infty) = 0$

→ $\int_\infty^r dE_p$ = énergie nécessaire pour amener charge q_2 de l'∞ à r ds chp de q_1

→ On verra que $\vec{E} = -\vec{grad}\, V$, soit à 1D $E = \frac{dV}{dx} \Rightarrow [E] = [V][L]^{-1}$

- Energie électrostatique $[\mathcal{E}] = J = C \times V = [Q][V]$

$J = [F][L] =$

- Capacité d'un condensateur : $[C] = F = [Q][V]^{-1}$

→ $Q = C U$ quantité de charges accumulées sous la ~~potentiel~~ (tension) U (diff. de potentiel)

typiquement 1V, 1µF ⇒ $Q = 10^{-6} C$

I.2) Champ et potentiel

- Hypothèse ElectroSTATIQUE :

- Charge ponctuelle q en O (origine repère), M / $\vec{r} = \vec{OM}$

⇒ chp $\vec{E}(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{u_r}}{r^2}$ ou $\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|^3}$ (chp vectoriel)

⇒ potentiel $V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ (chp scalaire)

⇒ lignes de champ ≡ lignes tangeantes à $\vec{E}$ en chaque pt M

. déf implicite pour $\vec{dr}$, vect. direct. en M de la ligne :

$$\vec{E} \wedge \vec{dr} = \vec{0}$$

. en coord. cartésiennes $\vec{E} \begin{vmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{vmatrix} \vec{dr} = \begin{vmatrix} 0 = E_y dz - E_z dy \\ 0 = E_z dx - E_x dz \\ 0 = E_x dy - E_y dx \end{vmatrix}$

soit $\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}$

. en coord. polaires $\vec{E} \begin{vmatrix} E_r \\ E_\varphi \\ E_z \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} dr \\ r d\varphi \\ dz \end{vmatrix} \vec{dr} \Rightarrow \frac{dr}{E_r} = \frac{r d\varphi}{E_\varphi} = \frac{dz}{E_z}$

. ici (chg ponctuelle) $E_\varphi = E_z = 0$ d'où $d\varphi = dz = 0$ et $\vec{dr} = dr\vec{u_r}$

c. à. d lignes droites issues de O

⇒ ~~lignes~~ surfaces (volume) équipotentielles ≡ ensemble des points de m potentiel

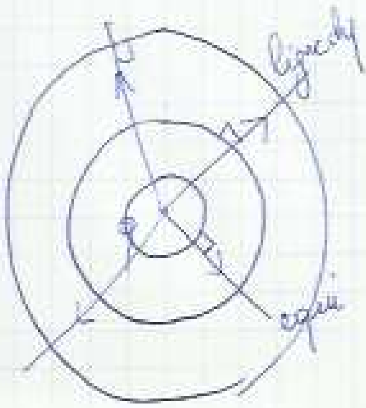
⚠ nécessite relation $\vec{E} = -\vec{grad}\, V$

. déf implicite $dV = 0$ sur un déplacement $\vec{dr}$

$dV = \vec{grad}\, V \cdot \vec{dr} = \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\vec{u_x} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{u_y} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{u_z}\right) \cdot (dx\,\vec{u_x} + \dots)\right]$

$dV = -\vec{E} \cdot \vec{dr}$

$\Rightarrow \vec{dr} \perp \vec{E}$ ou $\boxed{\text{équipotentielles} \perp \text{lignes de chps}}$



→ Relation champ & potentiel

· Via travail de $\vec{F}$ créée par $\vec{E}$ pour déplacer q de $d\vec{r}$

$$\delta W = \vec{F}\,d\vec{r} = q\vec{E}.d\vec{r} = -d\,E_{potentiel}$$

× cas d'une force dérivant d'un potentiel $\vec{F} = -\vec{grad}\,E_{pot}$

× avec déf. $qV = E_{pot}$ on a $\vec{E}.d\vec{r} = -\vec{grad}\,V$

⟺ formulation locale

× formulat° intégrale : $W_{A\to B} = \int_A^B -dE_{pot} = +q\int \vec{E}\,d\vec{r}$
$= -q\int_A^B dV$

soit $\underbrace{V_B - V_A}$ $= -\int_A^B \vec{E}.d\vec{r}$ = circulat° de $\vec{E}$ sur segment A-B

constant qq soit chemin A vers B ⇒ vrai pour circulat° de $\vec{E}$

⇒ sur contour fermé $A\to B\to A$: $\oint \vec{E}.d\vec{r} = 0$

· Ensemble de charges q_i en P_i Pour Π

→ champ : $\vec{E}(\Pi) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{P_i\Pi}}{\|\vec{P_i\Pi}\|^3}$ (découle addition des forces)

→ potentiel : $V(\Pi) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\|\vec{P_i\Pi}\|}$

· Distribution de charges

→ champ $\vec{E}(\Pi) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_V \rho(P)\frac{\vec{P\Pi}}{\|\vec{P\Pi}\|^3}\,d\tau$

indépendant de P !! P intégrale somme sur ttes les charges de l'espace : Π est fixe.

Cas surfacique : $\iint_S \sigma(P)\,dS$ linéique $\int_C \lambda(P)\,dl$

→ potentiel $V(\Pi) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_V \frac{\rho(P)}{\|\vec{P\Pi}\|}\,d\tau$

Rem : formules similaires pour les distr. linéiques et surfaciques $\int \lambda\,dl$ et $\iint \sigma\,dS$

I 3) Symétries & Invariances

- Principe de (Pierre) Curie (1894)

  Les symétries d'un système se retrouvent dans ses propriétés.

i) • Principe de symétrie de la distr. de charge

. Une distr. de charge $\rho(\Pi)$ admet une symetrie $\mathcal{S}$ de charge

ssi : $\forall P \quad \rho(\mathcal{S}(P)) = \rho(P)$

. Alors $\forall \Pi$: $\begin{cases} V(\mathcal{S}(\Pi)) = V(\Pi) \\ \vec{E}(\mathcal{S}(\Pi)) = \mathcal{S}(\vec{E}(\Pi)) \end{cases}$ ⚠ notez la diff.

ex sym planaire pris cylindrique

$\Rightarrow$ m principe pour une anti-symétrie.

$\Rightarrow$ cette propriété indique que $\vec{E}$ est un champ de vecteur plaire

$\Rightarrow$ Cas particuliers des points Π ~~sur les axes d~~ / $\mathcal{S}(\Pi) = \Pi$

$\hookrightarrow$ défini les composantes non-nulles de $\vec{E}$ en Π.

…/…

ii) • Principe d'invariance

× invariance par translation (sur axe $\vec{u}$) $\Leftrightarrow$ $\rho(\vec{r} + a\vec{u}) = \rho(\vec{r})$ $\forall a$

$\Rightarrow$ ρ ne dépend pas de la coord. suivant $\vec{u}$

et par conséquent (démo avec chgm^t de var. ds intégrale)

$\vec{E}$ et V non-plus

Rem inv. par translat^o implique une distribut^o infinie

donc non-physique : mais utile localement

Ex : condensateur plan ou le fil

× Si (xOy) plan de symétrie infini

E, V ne dépendent que de z

$\vec{E}(z) = E(z)\,\vec{u_z}$

× Si fil (Oz) axe de sym de rotation

E, V ne dépendent que de r ~~z~~

$\vec{E}(r,z) = E_r(z)\,\vec{u_r} + E_z(r,z)\,\vec{u_z}$

si infini pas de z

…/…

Suite I 3) Symétrie

- invariance par rotation $\Leftrightarrow$ $\rho(\vec{r})$ invariante par rotation autour d'un axe $\Delta_z \to$ choisi comme axe z d'un syst. cyl

$\to$ ρ ne dépend pas de la coord orthoradiale φ : $\rho(r, z)$

$\to$ tout plan incluant Δ_z est plan de symétrie $\to \vec{E}$
c'est à dire $\exists$ un tel plan $\forall M$ donc $E_\varphi(M) = 0$

ainsi $\frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0$ (d'après $\vec{E} = -\vec{grad}\, V$) et donc $\boxed{V(r,z) \text{ indépendant } \varphi}$

$\to$ Via $\vec{E} = -\vec{grad}\, V$ alors $\vec{E}(r, z)$ indépendant φ

iii) Récap & exemples

- Symétries (essentiellement planaires) définissent quelles coord de $\vec{E} \neq 0$
- Invariances (translat°, rotation) définissent de quelles coord. dépend $\vec{E}$.

- Ex de symétrie cylindrique par cylindre infini $\to$ $\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\,\vec{u}_r$
$V(M) = V(r)$

Rem dépend aussi de z (axe) si non-infini avec $E_z \neq 0$

- Ex de la sphère

I 4) Théorème de Gauss

• Enoncé du th. de Gauss

i) Flux du champ électrique ψ

• Surface élémentaire dS orientée suivant $\vec{n}$

• Champ $\vec{E}$ à travers dS : $d\psi = \vec{E} \cdot \underbrace{(dS\,\vec{n})}_{= d\vec{S}}$

▷ Géométriquem^t si $\theta = (\widehat{\vec{E}, \vec{n}})$ alors : $d\psi = E \cos\theta \, dS$

pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\underset{\text{minimal}}{\text{flux} = 0}$; $\theta = 0$, flux $= E\,dS$ max

• flux total à travers surface S : $\boxed{\psi = \underset{S}{\oint\!\!\oint} \vec{E} \cdot d\vec{S}}$ → si surf fermée

$[\psi] = [V][L]^{-1}[L]^2 = V \cdot m$

ii) Enoncé

Le flux du champ électrique à travers une surf. fermée est égale à la charge élec totale à l'intérieur de la surface divisée par la permittivité du vide :

$$\underset{S}{\oint\!\!\oint} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

⚠ $\oint_S$, $d\vec{S}$ et int

$$\text{où } Q_{int} = \iiint_{V_S} \rho(\vec{r})\, d\tau$$

iii) Démonstration en 4 étapes

1) Th vérifié pour source ponctuelle avec S = sphère centrée/source
2) Equivalence du flux pour q ponctuelle à travers $S_{\text{sphère}}$ et S_{qcq}
   (⇒ usage de l'angle solide $d\Omega = \frac{\vec{u} \cdot d\vec{S}}{r^2}$)
3) Flux à travers surface fermée n'incluant pas de charge est nulle
4) Utilisat$^{\circ}$ du th. de superposition pour ~~démo~~ validité du th. pour distribut$^{\circ}$ qcq et surface qcq

IV) Méthode générale de calcul du champ et du potentiel

1) Analyse des | symétries $\to$ orientation de $\vec{E}$
| invariances $\to$ dépendences de $\vec{E}$

2) Choix d'une surface simple | passant par M
| E constant sur la surface
| $\vec{E}$ et $d\vec{S}$ colinéaires

3) Applicat° th Gauss $\Rightarrow$ $\vec{E}$ connu

4) "Intégration" de E pour obtenir V
⚠ peut être délicat si plusieurs variables

Ex. (e uniforme)

la sphère (R) σ_e : $\vec{E}(M)_{r>R} = \dfrac{\sigma_e R^2}{\varepsilon_0 r^2} \vec{u}_r$, $V(M) = \begin{cases} 0 & r<R \\ -\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} & r>R \end{cases}$

le fil (λ) infini : $\vec{E}(M) = \dfrac{\lambda_e}{2\pi\varepsilon_0 r} \vec{u}_r$, $V(M) = -\dfrac{\lambda_e}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\dfrac{r}{r_0}\right) + V(r_0)$

le plan (σ) $\vec{E}(M) = \pm \dfrac{\sigma_e}{2\varepsilon_0} \vec{u}_z$ suivant position M/plan $\begin{cases} z>0 \\ z<0 \end{cases}$

$V(M) = \mp \dfrac{\sigma_e}{2\varepsilon_0} z$

le condensateur ($Q = \pm \sigma S$), distce e : $\vec{E} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{u}_z$ à l'int (0 à l'ext)

$V(z) = -\dfrac{\sigma_e}{\varepsilon_0} z$ int ($-\dfrac{e\sigma_e}{2\varepsilon_0}$ à l'ext)

$\Rightarrow$ capacité $U = V(+\frac{e}{2}) - V(-\frac{e}{2}) = \dfrac{e\sigma_e}{\varepsilon_0} = \dfrac{eQ}{S\varepsilon_0}$

$C = \varepsilon_0 \dfrac{S}{e}$

I. 5) Energie électrostatique

+ Rappel sur la construction d'un ensemble de n charges

- étape 1 : 1 seule charge q_1 en $\vec{r_1}$ ⇒ pas d'énergie car ∄ champ
  extérieur
- étape 2 : 1 charge q_2 en $\vec{r_2}$: $w_2 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 \|\vec{r_1}-\vec{r_2}\|} = w_{12}$
- étape 3 : 1 charge q_3 en $\vec{r_3}$: $w_3 = \underbrace{\frac{q_1 q_3}{4\pi\varepsilon_0 \|\vec{r_1}-\vec{r_3}\|}}_{w_{13}} + \underbrace{\frac{q_2 q_3}{4\pi\varepsilon_0 \|\vec{r_2}-\vec{r_3}\|}}_{w_{23}}$

  ⋮

  étape i : 1 charge q_i en $\vec{r_i}$: $w_i = \sum_{j=1}^{i-1} q_i \underbrace{\frac{q_j}{4\pi\varepsilon_0 \|\vec{r_j}-\vec{r_i}\|}}_{w_{ji}}$

⇒ $\underset{(n\,\text{charges})}{U_e = w_{tot}} = \sum_{i=1}^{n} w_i = \sum_{i,j<i} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}}$ où $r_{ij} = \|\vec{r_j}-\vec{r_i}\|$

on peut simplifier la cdt° $j<i$ en prenant $\forall j = 1..n$ mais
il y a alors du double comptage w_{ji} et w_{ij} d'où

$$\boxed{U_e = \frac{1}{2}\sum_{i,j\neq i} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}}}$$

+ Remarquons que le potentiel créé en $\vec{r_i}$ par tous les autres q_j ($j\neq i$)
  est $V_i = V(\vec{r_i}) = \sum_{j\neq i} \frac{q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}}$

  soit : $\boxed{U_e = \frac{1}{2}\sum_i q_i V_i}$

+ Dans le vide, on peut généraliser cette expression :

$$U_e = \frac{1}{2}\iiint_V \rho(\vec{r})\, V(\vec{r})\, d\tau$$

et aussi $U_e = \frac{\varepsilon_0}{2}\iiint \vec{E}^2\, d\tau$

Suite I. 3)

→ Démonstration de la expression de l'énergie électrostat (difficile)

- On cherche à construire $\rho(\vec{r})$ à partir de $\rho=0$ et par addition continue de $d\rho(\vec{r})$ dans le potentiel $V(\vec{r})$ [qui change avec ρ]

$$dU_e = \iiint_{\mathcal{V}} d\rho \, V(\vec{r}) \, d\tau$$

Rem on ajoute pas une charge en 1 point on augmente ρ de tt l'espace

$\mathcal{V}$ = vol où $\rho \neq 0$

- On anticipe l'eq° de Poisson :

$$\operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}} V) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \text{soit} \quad \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Pour des grandeurs infinitésimal $\operatorname{div}(d\vec{E}) = \frac{d\rho}{\varepsilon_0}$

- Or $\operatorname{div}(V . d\vec{E}) = \operatorname{div}(d\vec{E}) V + \underbrace{\overrightarrow{\operatorname{grad}} V}_{-\vec{E}} . d\vec{E}$

d'où $\frac{d\rho}{\varepsilon_0} V = \operatorname{div}(\vec{E}) V = \operatorname{div}(V d\vec{E}) + \vec{E} . d\vec{E}$

- $dU_e = \varepsilon_0 \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div}(V d\vec{E}) \, d\tau + \varepsilon_0 \iiint_{\mathcal{V}} \vec{E} . d\vec{E} \, d\tau$

- En intégrant sur une sphère fermé contenant $\mathcal{V}$ et quasiment infinie

le 1er terme : $\iiint \operatorname{div}(V d\vec{E}) \, d\tau = \oiint_{S} V . d\vec{E} . d\vec{S}$

c'est le flux de $(V d\vec{E})$ qui devient arbitrairement petit pour la sphère de rayon $\to \infty$ $\Rightarrow$ flux $\xrightarrow[R \to \infty]{} \frac{1}{R} = 0$

$\left(\frac{1}{R} \times \frac{1}{R^2}\right)$ (surface R^2)

- Au final $dU_e = \varepsilon_0 \iiint_{\mathcal{V}} \vec{E} . d\vec{E} \, d\tau$

où $d\rho$ est "caché" dans "$d\vec{E}$" et $\int_0^\rho d\rho \Leftrightarrow \int_0^\rho E \, dE = \frac{E^2}{2}$!

$$U_e = \int_0^\rho dU_e = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\varepsilon_0 \vec{E}^2}{2} \, d\tau$$

II Formulation locale de l'électrostatique

+ Chap I correspond à une formulation intégrale
  $\Leftrightarrow$ bien adaptée à des dist. charges uniformes & symétriques
  (soit calcul intégral soit th. de Gauss)

+ Une seule loi locale : $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V \quad \forall \vec{r}$

$\Rightarrow$ Possibilité de lier $V(\vec{r})$ à $\rho(\vec{r})$?

II. 1) L'équation de Poisson

+ Rappel du th. de Gauss $\displaystyle\iint_{S} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_{\mathcal{V}_S} \rho(\vec{r})\, d\tau$

avec S surface fermée définissant volume $\mathcal{V}$

+ Th de Green - Ostrogradsky

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\mathcal{V}} \text{div}\,\vec{E}\, d\tau$$

$$\text{d'où} \iiint_{\mathcal{V}} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}\, d\tau - \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} d\tau = \iiint_{\mathcal{V}} \left(\text{div}\,\vec{E} - \frac{\rho}{\varepsilon_0}\right) d\tau = 0 \quad \forall \mathcal{V}$$

on en déduit $\boxed{\text{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \forall \vec{r}}$ équation de Gauss

+ En utilisant $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$ et $\text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}\, V) = \nabla^2 V$

on a $\boxed{\nabla^2 V(\vec{r}) = \frac{-\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}}$ eq^{n} de Poisson dans le vide (ε_0)

+ En l'absence de charges locales : $\boxed{\nabla^2 V = 0}$ est l'eq^{n} de Laplace

+ Pas de solut^{n} générales à ces eq^{ns}, mais nécessité d'utiliser les symétries et les conditions limites du pb.

Suite II 1)

+ Il est possible de démontrer mathématiquement que
  - pour un ensemble de cdt$^{\text{os}}$ limites fixées
  - il existe tjrs une solution ET elle est unique !

II 2) Potentiel créé par une sphère chargée

- Sphère de rayon $R = a$, chargée uniformément $\rho(\vec{r}) = \begin{cases} 0 \text{ si } r \geqslant a \\ \rho_0 \text{ si } r \leqslant a \end{cases}$
- La sphère est isolante (sinon $\rho = 0$ à l'intérieur)

- Calcul du Laplacien en coord sphérique (r, ϕ, θ)

$$\nabla^2 V = \frac{2}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{\cotan\theta}{r^2}\frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}$$

+ Analyse des symétries (et invariances)
  - sym. axiale de centre O $\Rightarrow \vec{E}$ et V indépendant de θ, φ
  - invariance par ∀ rotations d'axe passant par O $\Rightarrow E_\theta$ ~~ne dépend~~ et $E_\varphi = 0$

+ Conditions limites: $V(\infty) = 0$, $V(a^+) = V(a^-)$

+ Extérieur $r \geqslant a$, $\rho(r) = 0 \Rightarrow$ Laplace

$$\nabla^2 V = \frac{2}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{1}{r^2}\frac{\partial\, r^2 \frac{\partial V}{\partial r}(r)}{\partial r} = 0$$

donc (par intégrat°) $r^2 \frac{\partial V}{\partial r}(r) = \text{cste} = K_1$ ou $\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{K_1}{r^2}$

puis (intégrat°) $\cancel{\frac{\partial V}{\partial r}}$ $V(r) = -\frac{K_1}{r} + K_2$

- condition $V(\infty) = 0$ impose $K_2 = 0$

- utilisation $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V = -\frac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r = -\frac{K_1}{r^2}\vec{u}_r$

Rem on peut obtenir K_1 avec Th. Gauss pour $r > a$, Rem $\|\vec{E}(\infty)\| = 0$

Suite II 2)

+ Intérieur $r \le a$ $\rho(r) = \rho_a \Rightarrow$ Poisson

$$\frac{\partial r^2 \frac{\partial V}{\partial r}}{\partial r} = -\frac{\rho_a}{\varepsilon_0} r^2 \text{ , par intégral° : } r^2 \frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{\rho_a}{3\varepsilon_0} r^3 + K_3$$

soit $\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{\rho_a}{3\varepsilon_0} r + \frac{K_3}{r^2}$

et encore par intégral° : $V(r) = -\frac{\rho_a}{6\varepsilon_0} r^2 - \frac{K_3}{r} + K_4$

- Interdiction de divergence : $V(0)$ doit être fini

$\Rightarrow K_3 = 0$ et $V(r) = -\frac{\rho_a}{6\varepsilon_0} r^2 + K_4$

- Condition $r = a$: $V(a^-) = -\frac{\rho_a}{6\varepsilon_0} a^2 + K_4 = V(a^+) = +\frac{K_1}{a}$ (1)

$\left(\text{d'où } K_1 = \frac{\rho_a a^3}{6\varepsilon_0} \quad \text{Rem } [K_1] = \frac{C}{[\varepsilon]} \right)$

- avec $\vec{E} = -\vec{\text{grad}}\, V = +\left(\frac{\rho_a}{3\varepsilon_0} r \right) \vec{u}_r$

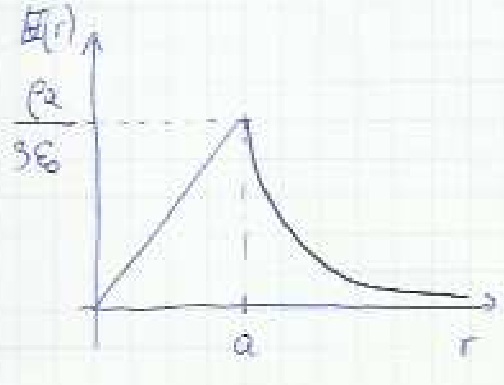
$\Rightarrow$ • condition $\|\vec{E}(a^+)\| = \frac{K_1}{a^2} = \frac{\rho_a a}{3\varepsilon_0}$ $\cancel{K_4}$ (2) $= \|\vec{E}(a^-)\|$

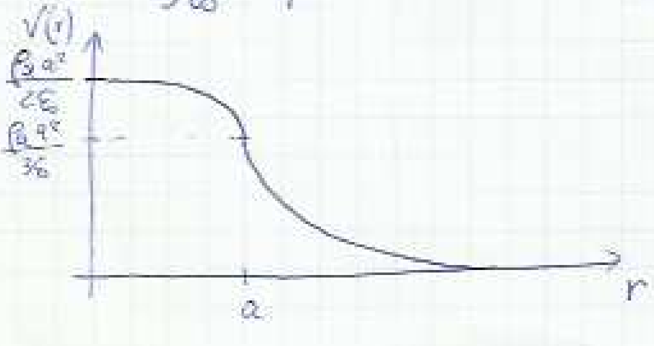
$$\cancel{\begin{cases} (1) & K_1 \mp a K_4 = -\frac{\rho_a a^3}{6\varepsilon_0} \\ (2) & K_1 \mp a^2 K_4 = -\frac{\rho_a a^3}{3\varepsilon_0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_1 = \frac{\rho_a a^3}{3\varepsilon_0}\left(\frac{a-1}{a+1}\right) \\ K_4 = \frac{\rho_a a^3}{3\varepsilon_0} \frac{1-\frac{1}{2}}{a^2-a} \end{cases}}$$

$K_1 = \frac{\rho_a a^3}{3\varepsilon_0}$ et avec (1) $K_4 = \frac{\rho_a a^2}{2\varepsilon_0}$

Au final :

$$V(r) = \begin{cases} -\frac{\rho_a}{6\varepsilon_0} r^2 + \frac{\rho_a a^2}{2\varepsilon_0} & r \le a \\ +\frac{\rho_a a^3}{3\varepsilon_0} \frac{1}{r} & r \ge a \end{cases} \qquad \vec{E}(r) = \begin{cases} \frac{\rho_a}{3\varepsilon_0} r \, \vec{u}_r \\ \frac{\rho_a a^3}{3\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \vec{u}_r \end{cases}$$





II. 3) Potentiel créé par un disque

- Disque (fini) de rayon $R = a$, uniformément chargé $\sigma(r)$
  (l'épaisseur du disque n'est pas importante)

- Laplacien en coord cylindrique :

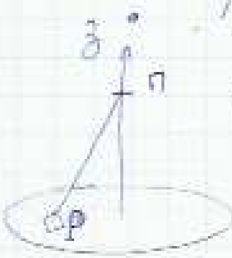
$$\Delta V = \nabla^2 V = \underbrace{\frac{1}{r}\frac{\partial \left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right)}{\partial r}}_{\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

- Symétrie de rotation $\Rightarrow V, E$ indépendant de θ
- Condition limite : $V(\infty) = 0$

- $\Delta V = 0 \Rightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) = -\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$

  $\Rightarrow$ difficile

- Prenons les points de l'axe z : $\vec{r} = z\,\vec{u_z}$



  - par symétrie $V, \vec{E}$ indépendants de θ et $\vec{E} \parallel \vec{u_z}$

$$V(z) = \iint_S \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dS}{\|PM\|} \quad \text{où} \quad \|PM\| = \sqrt{z^2 + r^2}$$

$$dS = dr\, r\, d\theta$$

$$V(z) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a dr \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r}{\sqrt{z^2+r^2}} = \frac{2\pi\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\left[\sqrt{z^2+r^2}\right]_0^a$$

$$V(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{z^2+a^2} - \sqrt{z^2}\right) \qquad (\text{Rem } z > 0)$$

et $\vec{E}(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}}\right)\vec{u_z}$