ΟΡΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

1. Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι ***<u>παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0</u>*** του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι πραγματικός αριθμός.

Το όριο αυτό λέγεται παράγωγος της f στο x_0 και συμβολίζεται με $f'(x_0)$.

Αν θέσουμε όπου $x-x_0=h$ τότε $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

Αν το x_0 είναι εσωτερικό σημείο ενός διαστήματος του πεδίου ορισμού της f, τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, αν και μόνο αν υπάρχουν στο R τα όρια: $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

και είναι ίσα.

ΟΡΙΣΜΟΣ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ

1. Αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε ορίζουμε ως ***<u>εφαπτομένη</u>*** της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(x_0,f(x_0))$ την ευθεία που διέρχεται από το A και έχει κλίση την παράγωγο της f στο x_0, δηλ. την: $\psi-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(x-x_0)$

2. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο x_0 και ισχύει: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=+\infty$ ή $-\infty$

τότε ορίζουμε ως ***<u>εφαπτομένη της C_f</u>*** στο σημείο $A(x_0,f(x_0))$ την κατακόρυφη ευθεία: $x=x_0$.

3. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο x_0 και τα παρακάτω όρια $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ είναι διαφορετικά και ανήκουν στό , τότε το σημείο $A(x_0,f(x_0))$ λέγεται γωνιακό σημείο της f.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u>: Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0, τότε σύμφωνα με τη προηγούμενη πρόταση δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u>: Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x και η g είναι παραγωγίσιμη στο u=f(x), τότε η συνάρτηση gof είναι παραγωγίσιμη στο x και ισχύει: $\left(g(f(x))\right)' = g'(f(x))\cdot f'(x)$

Θέτοντας: u=f(x) και y=g(u) έχουμε:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΕΩΣ

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$
$$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),\quad (c\cdot f(x))' = c\cdot f'(x)$$
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$
$$(g\circ f)'(x) = g'(f(x))\cdot f'(x)$$

ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

$$(c)' = 0$$
$$(x)' = 1$$
$$(x^{\ddagger})' = \ddagger\cdot x^{\ddagger-1}, \ddagger \neq 1$$
$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$(\eta\mu\; x)' = \sigma\upsilon\nu\chi$$
$$(\sigma\upsilon\nu\chi)' = -\eta\mu\; x$$
$$(\varepsilon\varphi\; x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}, x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in Z$$
$$(\sigma\varphi\chi)' = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}, x \neq \kappa\pi,\ \mu\varepsilon\ \ \kappa \in Z$$
$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x} \qquad (e^x)' = e^x \qquad (\alpha^x)' = \alpha^x \ln\alpha$$

ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

$$\left([f(x)]^{\nu}\right)' = \nu\,[f(x)]^{\nu-1}\cdot f'(x) \qquad (\varepsilon\varphi f(x))' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 f(x)}\cdot f'(x)$$

$$\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}},\ f(x)>0 \qquad (\sigma\varphi f(x))' = \frac{-1}{\eta\mu^2 f(x)}\cdot f'(x)$$

$$(\eta\mu\ f(x))' = \sigma\upsilon\nu\ f(x)\cdot f'(x) \qquad \left(e^{f(x)}\right)' = e^{f(x)}\cdot f'(x)$$

$$(\sigma\upsilon\nu\ f(x))' = -\eta\mu\ f(x)\cdot f'(x) \qquad \left(\alpha^{f(x)}\right)' = \alpha^{f(x)}\cdot \ln\alpha\cdot f'(x)$$

$$(\ln f(x))' = \frac{1}{f(x)}\cdot f'(x),\ f(x)>0 \qquad \left([f(x)]^{\tau}\right)' = \tau\cdot[f(x)]^{\tau-1}\cdot f'(x)$$

$$(\ln|f(x)|)' = \frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)$$

ΘΕΩΡΗΜΑ ROLLE

Αν μια συνάρτηση f είναι:

α) συνεχής στο διάστημα [α,β]

β) παραγωγίσιμη στο (α,β) και ισχύει:

γ) f(α)=f(β)

τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα ξ (α,β) τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi) = 0$$

ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

Αν μια συνάρτηση f είναι:

α) συνεχής στο διάστημα [α,β]

β) παραγωγίσιμη στο (α,β)

τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα ξ (α,β) τέτοιο ώστε: $f'(\xi) = \dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$

Δηλ. υπάρχει τουλάχιστον ένα ξ (α,β) τέτοιο ώστε η γραφική παράσταση της f στο Μ(ξ,f(ξ)) να είναι παράλληλη της ευθείας ΑΒ, όπου Α(α,f(α)) και Β(β,f(β)).

ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

1. Αν μια συνάρτηση f είναι:

α) συνεχής σε ένα διάστημα Δ

β) ισχύει $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ.

τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

2. Αν δύο συναρτήσεις f και g,

α) είναι συνεχείς σε ένα διάστημα Δ και

β) $f'(x)=g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ,

τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε για κάθε x Δ να ισχύει:

$$f(x)=g(x)+c$$

ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ.

α) Αν $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα (αύξουσα) σε όλο το Δ.

β) Αν $f'(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα (φθίνουσα) σε όλο το Δ.

ΧΡΗΣΙΜΗ ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω $f: A \to \Re$. Αν $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in A$ και η ισότητα $f'(x) = 0$ ισχύει για πεπερασμένο πλήθος τιμών του x, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Α και όχι απλώς αύξουσα.

Απόδειξη: Έστω για κάθε . Τότε σύμφωνα με γνωστό προηγούμενο θεώρημα η f είναι αύξουσα στο Α δηλ. για κάθε:

$$x_1, x_2 \in A \text{ με } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

.

Θα δείξουμε τώρα ότι η ισότητα δέν ισχύει ποτέ. Έστω ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in A$

με $x_1 < x_2$ κκαι f($_1$) $= f(x_2) = \kappa$. Όμως ηf σστο $[x_1, x_2]$ εείναι αύ ουσα άρα

$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \Rightarrow \kappa \leq f(x) \leq \kappa \Rightarrow f(x) = \kappa$ για κάθε $x \in [x_1, x_2]$. Ε Ετ

$f'(x) = 0$ γγια κάθε $x \in [x_1, x_2]$ ττοπο γατ η ισότητα $f'(x) = 0$ ιισχ.υει όνο για

πππεπερας ε νο πλήθ ος τιμών του από υπόθεσ η .

ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

1. Αν μια συνάρτηση f είναι:

α) συνεχής σε ένα διάστημα

β) $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ.

τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

2. Αν δυο συναρτήσεις f και g

α) είναι συνεχείς σε ένα διάστημα Δ και

β) $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ,

τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε για κάθε x Δ να ισχύει:

$$f(x) = g(x) + c$$

ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ.

α) Αν $f'(x) > 0$ $(f'(x) \geq 0)$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα (αύξουσα) σε όλο το Δ.

β) Αν $f'(x) < 0$ $(f'(x) \leq 0)$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα (φθίνουσα) σε όλο το Δ.

ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

1) Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο x_0 Α ***τοπικό μέγιστο***, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε:

$$f(x) \leq f(x_0) \text{για} \quad \text{κάθε} \quad x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Το x_0 λέγεται ***θέση*** ή ***σημείο τοπικού μεγίστου***, ενώ το $f(x_0)$ ***τοπικό μέγιστο της f***.

2) Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λεμε ότι παρουσιάζει στο x_0 A ***τοπικό ελάχιστο***, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε:

$$f(x) \geq f(x_0) \text{για} \quad \text{κάθε} x \quad \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Το x_0 λέγεται ***θέση*** ή ***σημείο τοπικού ελαχίστου***, ενώ το $f(x_0)$ ***τοπικό ελάχιστο της f***.

ΘΕΩΡΗΜΑ FERMAT

Αν μια συνάρτηση $f : \Delta \to \Re$ παρουσιάζει στο εσωτερικό σημείο x_0 του διαστήματος Δ τοπικό ακρότατο και είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε: $f'(x_0) = 0$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Οι πιθανές θέσεις (κρίσιμα σημεία) των τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ είναι:

α) Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η παράγωγος της f μηδενίζεται.

β) Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται.

γ) Τα άκρα του Δ (αν υπάρχουν στο πεδίο ορισμού της).

ΘΕΩΡΗΜΑ (1ης παραγώγου): Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα (α,β) και x_0 (α,β) ένα κρίσιμο σημείο της f, στο οποίο αυτή είναι συνεχής.

α) Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

β) Αν $f'(x) < 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) > 0$ στο (x_0, β) τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f.

γ) Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στα (α, x_0) και (x_0, β), τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α,β).

ΘΕΩΡΗΜΑ (2ης παραγώγου): Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του διαστήματος αυτού ώστε $f'(x_0) = 0$ και να υπάρχει η $f''(x_0)$ τότε:

1) Αν $f''(x_0) < 0$, το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο.

2) Αν $f''(x_0) > 0$, το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο.

ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Θα λέμε ότι:

α) η συνάρτηση στρέφει τα ***κοίλα προς τα άνω*** ή είναι ***κυρτή*** στο Δ, αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ.

β) η συνάρτηση στρέφει τα ***κοίλα προς τα κάτω*** ή είναι ***κοίλη*** στο Δ, αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ.

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη.

α) Αν $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω στο Δ.

β) Αν $f''(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο Δ.

ΣΗΜΕΙΟ ΚΑΜΠΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Ένα σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f όταν ισχύουν:

α) f συνεχής στο x_0

β) η C_f έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$,

γ) η f στρέφει τα κοίλα άνω αριστερά του x_0 και κάτω δεξιά του x_0 ή αντίστροφα.

ΘΕΩΡΗΜΑ: Αν το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f τότε $f''(x_0) = 0$ ή δεν υπάρχει η $f''(x_0)$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

α) Οι πιθανές θέσεις σημείων καμπής μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ είναι:

α) Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f'' μηδενίζεται.

β) Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία δεν υπάρχει η f''.

β) Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα (α,β) και x_0 (α,β) είναι μια πιθανή θέση σημείου καμπής. Αν:

α) η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 και

β) ορίζεται η εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$,

τότε το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής.

ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ

1) Αν ένα τουλάχιστο από τα όρια $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$ τότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται ***κατακόρυφη ασύμπτωτη*** της γραφικής παράστασης της f.

2) Αν $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \beta$ ή $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \beta$, τότε η ευθεία ψ=β λέγεται ***οριζόντια ασύμπτωτη*** της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$).

3) Η ευθεία ψ=λx+β λέγεται ***ασύμπτωτη*** της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ ή στο $-\infty$, αν $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$ ή $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$

4) Η ασύμπτωτη ψ=λx+β είναι ***οριζόντια*** αν λ=0, ενώ αν λ διάφορο του 0 λέγεται ***πλάγια*** ασύμπτωτη.

5) Η ευθεία ψ=λx+β είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ ή στο $-\infty$, αν και μόνο αν

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \Re \quad \text{και} \quad \lim_{x \to +\infty} [f(x) - \lambda\chi] = \beta \in \Re$$

$$\text{ή} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \Re \quad \text{και} \quad \lim_{x \to -\infty} [f(x) - \lambda\chi] = \beta \in \Re$$

Παρατηρήσεις.

Δίνεται η ρητή συνάρτηση: $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}, h(x)\neq 0$

1. Αν ο βαθμός του αριθμητή $g(x)$ είναι μικρότερος από το βαθμό του παρανομαστή $h(x)$, τότε η ευθεία ψ=0 δηλ. ο άξονας xx' είναι οριζόντια ασύμπτωτη.

2. Αν ο βαθμός του αριθμητή $g(x)$ είναι ίσος από το βαθμό του παρανομαστή $h(x)$, τότε η ευθεία ψ=α είναι οριζόντια ασύμπτωτη, όπου α ο λόγος του συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου του αριθμητή προς το συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου του παρανομαστή.

3. Αν ο βαθμός του αριθμητή $g(x)$ είναι κατά μια μονάδα μεγαλύτερος από το βαθμό του παρανομαστή $h(x)$, τότε η ευθεία ψ=αx+β είναι πλάγια ασύμπτωτη, όπου αx+β το πηλίκο της διαίρεσης $g(x):h(x)$

4. Αν ο βαθμός του αριθμητή $g(x)$ είναι κατά δυο ή περισσότερες μονάδες μεγαλύτερος από το βαθμότου παρανομαστή, τότε δεν υπάρχει ούτε πλάγια ούτε οριζόντια ασύμπτωτη.

ΚΑΝΟΝΕΣ DE L' HOSPITAL

Αν $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$ (ή $\pm\infty$), $\lim_{x\to x_0} g(x)=0$ (ή $\pm\infty$), $x_0\in\overline{\Re}$ και υπάρχει το $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ πεπερασμένο ή άπειρο τότε

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

ΜΕΛΕΤΗ ΚΑΙ ΧΑΡΑΞΗ ΓΡΑΦΙΚΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

α) Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της f.
β) Εξετάζουμε αν η f είναι άρτια, περιττή ή περιοδική.
γ) Εξετάζουμε τη συνέχεια της f στο πεδίο ορισμού της.
δ) Βρίσκουμε τις παραγώγους f' και f'' και κατασκευάζουμε τους πίνακες προσήμων τους. Με τη βοήθεια του προσήμου της f' προσδιορίζουμε τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα της f, ενώ με τη βοήθεια του προσήμου της f'' καθορίζουμε τα διαστήματα στα οποία η f στρέφει τα κοίλα άνω ή κάτω και τα σημεία καμπής.
ε) Μελετούμε τη συμπεριφορά της συνάρτησης στα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού της (οριακές τιμές, ασύμπτωτες).
στ) Βρίσκουμε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες.
ζ) Συγκεντρώνουμε τα παραπάνω συμπεράσματα σε ένα συνοπτικό πίνακα που λέγεται ***πίνακας μεταβολών της f*** (που εμπεριέχει και τον πίνακα τιμών της f) και με τη βοήθεια του σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της f.