ΘΕΩΡΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

1. Τι ονομάζεται συνάρτηση

Συνάρτηση (function) είναι μια διαδικασία με την οποία κάθε στοιχείο ενός συνόλου Α αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο κάποιου άλλου συνόλου Β.

2. Έστω η συνάρτηση f από το Α στο Β.
a. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της f
b. Πότε η f λέγεται πραγματική συνάρτηση πραγματικής τιμής;

a. Το σύνολο Α, που λέγεται πεδίο ορισμού της συνάρτησης,
b. Αν το Α είναι υποσύνολο του συνόλου R των πραγματικών αριθμών, ενώ το Β συμπίπτει με το R οι συναρτήσεις αυτές λέγονται πραγματικές συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής και τις οποίες στο εξής θα τις λέμε απλώς συναρτήσεις.

3. Τι ονομάζουμε γραφική παράσταση ή καμπύλη της f

Ονομάζουμε γραφική παράσταση ή καμπύλη της f σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων O_{xy} το σύνολο των σημείων Μ (x , f(x)) για όλα τα $x \in A$.

4. Τι λέγεται εξίσωση της γραφικής παράστασης της f.

Η εξίσωση y = f(x) επαληθεύεται μόνο από τα ζεύγη (x,y) που είναι συντεταγμένες σημείων της γραφικής παράστασης της f και λέγεται εξίσωση της γραφικής παράστασης της f.

5. Αν f, g δυο συναρτήσεις πως ορίζονται οι πράξεις μεταξύ αυτών του αθροίσματος της διαφοράς του γινομένου και του πηλίκου;

Αν δύο συναρτήσεις f, g ορίζονται και οι δύο σε ένα σύνολο Α, τότε ορίζονται και οι συναρτήσεις:

- Το άθροισμα S = f + g με S(x) = f(x) + g(x) , $x \in A$
- Η διαφορά D = f - g με D(x) = f(x) + g(x) , $x \in A$
- Το γινόμενο P = f * g με P(x) = f(x) * g(x) , $x \in A$
- Το πηλίκο R=f/g με R(x) = f(x)/g(x) , όπου $x \in A$ και $g(x) \neq 0$.

ΟΡΙΑ

Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν στο x_0 όρια πραγματικούς αριθμούς, δηλαδή αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = l_1$ και $\lim_{x\to x_0} g(x) = l_2$, όπου l_1 και l_2 πραγματικοί αριθμοί, τότε αποδεικνύονται οι ακόλουθες ιδιότητες:

1. $\lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = l_1 + l_2$
2. $\lim_{x\to x_0} (k \cdot f(x)) = k \cdot l_1$
3. $\lim_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = l_1 \cdot l_2$
4. $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2}$
5. $\lim_{x\to x_0} (f(x))^n = l_1^n$
6. $\lim_{x\to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{l_1}$
7. $\lim_{x\to x_0} (x) = x_0$

8. $\lim_{x \to x_0} (c) = c$

9. $\lim_{x \to x_0} (\eta\mu x) = \eta\mu x_0$

10. $\lim_{x \to x_0} (\sigma\upsilon\nu x) = \sigma\upsilon\nu x_0$

11. $\lim_{x \to x_0} (\varepsilon\varphi x) = \varepsilon\varphi x_0$

Εναλλακτικά, αν στις ιδιότητες (1) έως (6) αντικαταστήσουμε $l_1 = \lim_{x \to x_0} f(x)$ και $l_2 = \lim_{x \to x_0} g(x)$, τότε θα πάρουν την μορφή:

1. $\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x)$
2. $\lim_{x \to x_0} (k \cdot f(x)) = k \cdot \lim_{x \to x_0} f(x)$
3. $\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x)$
4. $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)}$
5. $\lim_{x \to x_0} (f(x))^n = \left(\lim_{x \to x_0} f(x)\right)^n$
6. $\lim_{x \to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to x_0} f(x)}$

8. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α λέγεται συνεχής

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α λέγεται **συνεχής**, αν για κάθε $x_0 \in A$ ισχύει

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Χαρακτηριστικό γνώρισμα μιας συνεχούς συνάρτησης σε ένα κλειστό διάστημα είναι ότι η γραφική της παράσταση είναι μια συνεχής καμπύλη, δηλαδή για το σχεδιασμό της δε χρειάζεται να σηκώσουμε το μολύβι από το χαρτί.

9. Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της

Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι **παραγωγίσιμη** σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

και είναι πραγματικός αριθμός. Το όριο αυτό ονομάζεται **παράγωγος της f στο x_0** και συμβολίζεται με $f'(x_0)$. Δηλαδή:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

11. Τι ονομάζεται πρώτη παράγωγος της f

Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A, και B το σύνολο των x ∈ A στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη. Τότε ορίζεται μια νέα συνάρτηση, με την οποία κάθε x ∈ B αντιστοιχίζεται στο

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Η συνάρτηση αυτή λέγεται (πρώτη) **παράγωγος** (derivative) **της f και συμβολίζεται με f'** .

ΠΡΟΣΟΧΗ: Η παράγωγος της f στο x_0 είναι αριθμός (το όριο) ενώ η παράγωγος της f είναι συνάρτηση που αντιστοιχεί σε κάθε x_0 αυτό το όριο.

10. Τι εκφράζει η παράγωγος της της f στο x_0

Η παράγωγος της f στο x_0 εκφράζει το **ρυθμό μεταβολής (rate of change)** του y=f(x) ως προς το x, όταν $x=x_0$.

- Ο **<u>συντελεστής διεύθυνσης</u>** της εφαπτομένης της καμπύλης που είναι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f στο σημείο (x_0 , $f(x_0)$) θα είναι $f'(x_0)$, δηλαδή ο ρυθμός μεταβολής της f(x) ως προς x όταν $x=x_0$.
- Η **<u>ταχύτητα ενός κινητού</u>** που κινείται ευθύγραμμα και η θέση του στον άξονα κίνησής του εκφράζεται από τη συνάρτηση x=f(t) θα είναι τη χρονική στιγμή t_0 $\upsilon(t_0)=f'(t_0)$ δηλαδή ο ρυθμός μεταβολής της f(t) ως προς t όταν $t=t_0$
-η **επιτάχυνση του κινητού** είναι $\alpha(t_0)=\upsilon'(t_0)=f''(t)$

Παραγώγιση Βασικών Συναρτήσεων

- Η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης f (x) = c

Έχουμε f(x+h) – f(x) = c – c = 0

$$\textit{και για } h\neq 0,\ \frac{f(x+h)-f(x)}{h}=0$$

$$\textit{οπότε} \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=0$$

$$\textit{άρα } (\boldsymbol{c})'=0$$

- Η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης f (x) = x

Έχουμε f(x+h) – f(x) = (x+h) - x = h και για $h\neq 0,\ \frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{h}{h}=1$

Επομένως $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}1=1$

Άρα **(x)΄=1**

- Η παράγωγος της συνάρτησης $f(x)=x^\rho$

Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^2$

Έχουμε $f(x+h)-f(x)=(x+h)^2-x^2=x^2+2xh+h^2-x^2=(2x+h)h$

και για $h\neq 0,\ \frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{(2x+h)h}{h}=2x+h$

Επομένως $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(2x+h)h}{h}=2x$

Άρα $(x^2)'=2x$

Αποδεικνύεται ότι $(x^\nu)'=\nu x^{\nu-1}$, όπου ν φυσικός

Κανόνες Παραγώγισης
- Η παράγωγος της συνάρτησης cf(x)

Έστω η συνάρτηση **F(x) = cf(x)** . Έχουμε
F(x+h) – F(x) = cf(x+h) - cf(x) = c(f(x+h) - f(x)) , και για $h \neq 0$

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{c(f(x+h)-f(h))}{h}=c\frac{f(x+h)-f(h)}{h}$$

Επομένως
$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0}c\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=cf'(x)$$

Άρα (cf(x))΄ = cf(x)

- Η παράγωγος της συνάρτησης f(x) + g(x)

Έστω η συνάρτηση F(x) = f(x) + g(x) . Έχουμε
F(x + h) - F(x) = (f(x + h) + g(x + h)) - (f(x) + g(x)) = (f(x+h)-f(x)) + (g(x+h) – g(x)),

και για $h \neq 0, \frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$

Επομένως
$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=f'(x)+g'(x)$$

ΟΡΙΣΜΟΣ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ (πότε μια συνάρτηση λέγεται γνησίως αύξουσα-φθίνουσα):
- Μια συνάρτηση f λέγεται **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1,\ x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.
- Μια συνάρτηση f λέγεται **γνησίως φθίνουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1,\ x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$.

ΟΡΙΣΜΟΣ ΑΚΡΟΤΑΤΑ (πότε μια συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστο-ελάχιστο):
ΜΕΓΙΣΤΟ
- Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέμε ότι παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο** στο $x_0 \in A$, όταν υπάρχει περιοχή Δ γύρω από το x_0 για την οποία για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει $f(x) \leqslant f(x_0)$.
- Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέμε ότι παρουσιάζει **ολικό μέγιστο** στο $x_0 \in A$, όταν για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) \leqslant f(x_0)$.

ΕΛΑΧΙΣΤΟ
- Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέμε ότι παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο** στο $x_0 \in A$, όταν υπάρχει περιοχή Δ γύρω από το x_0 για την οποία για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει $f(x) \geqslant f(x_0)$.
- Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέμε ότι παρουσιάζει **ολικό ελάχιστο** στο $x_0 \in A$, όταν για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) \geqslant f(x_0)$.

- Αν επιπλέον το x_0 είναι η μοναδική ρίζα της f′, τότε το f (x_0) είναι ολικό ακρότατο στο (α,β).

12. Να διατυπώσετε το κριτήριο της πρώτης παραγώγου για την μονοτονία
- Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x)>0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο Δ.
- Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x)<0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο Δ.

13. Να διατυπώσετε το κριτήριο της πρώτης παραγώγου για τα ακρότατα
- Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_0)=0$ για $x_0\in(\alpha,\beta)$, $f'(x)>0$ στο (α,x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0,β) , τότε η f παρουσιάζει στο διάστημα (α,β) για $x = x_0$ **μέγιστο**.
- Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_0)=0$ για $x_0\in(\alpha,\beta)$, $f'(x)<0$ στο (α,x_0) και $f'(x)>0$ στο (x_0,β) , τότε η f παρουσιάζει στο διάστημα (α , β) για $x = x_0$ **ελάχιστο**.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ
Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $f'(x_0)= 0$, για $x_0 \in(\alpha , \beta)$ και η παραγωγός της f ′ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, τότε η f είναι **γνησίως μονότονη** στο (α , β) και **δεν παρουσιάζει ακρότατα** στο διάστημα αυτό.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΜΟΙΡΕΣ RAD	0 0	30 π/6	45 π/4	60 π/3	90 π/2
ημ	0	1/2	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
συν	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1/2	0
εφ = ημ/συν	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-
σφ = συν/ημ	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: $ημ^2ω+συν^2ω=1$

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΠΕΔΙΟ ΟΡΙΣΜΟΥ:
- Εάν είναι του τύπου f(x)=5x+12
Δεν υπάρχει περιορισμός για τις τιμές του x, άρα είναι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί:
A=R

- Κλασματική συνάρτηση του τύπου $f(x)=\frac{A(x)}{B(x)}$

Πρέπει $B(x)\neq 0$

Έστω B(x)=0. Βρίσκω λύσεις και λέω ότι η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού στους πραγματικούς αριθμούς, εκτός αυτών που μηδενίζουν τον παρονομαστή. Δηλαδή $A_f = R \setminus \{\dots\}$

- Αν έχει τετραγωνική ρίζα του τύπου $f(x)=\sqrt{A(x)}$

Πρέπει $A(x)\geq 0$

1ο ΒΗΜΑ: Λύνω την εξίσωση A(x)=0. Μπορεί να είναι δευτέρου βαθμού οπότε με διακρίνουσα να βρω 2 λύσεις

2ο ΒΗΜΑ: Φτιάχνω πίνακα προσήμων. Τα πρόσημα τα βρίσκω με δοκιμές στην συνάρτηση. ΔΕΧΟΜΑΙ μόνο τις περιοχές που έχει θετικές τιμές. Αν πχ έχει 2 θετικές περιοχές θα γράψω

$A_f = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ: Όταν στην ανίσωση διαιρώ με αρνητικό αριθμό, αλλάζει η φορά της ανίσωσης.

ΟΡΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ:

Κάνω αντικατάσταση στην συνάρτηση. Μπορεί να βγάλει απροσδιόριστη μορφή ($\frac{0}{0}$). Οπότε τότε χρησιμοποιώ μετασχηματισμούς:

- Διαφορά τετραγώνων $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$

- Επιμεριστική ιδιότητα $\alpha * \beta \pm \alpha * \beta = \alpha(\beta \pm \gamma)$

- Πολλαπλασιασμός με -1 δηλαδή α-β = - (β-α)

- Ταυτότητα ριζών $(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}) = \alpha - \beta$

- Διακρίνουσα (προσοχή στα πρόσημα)

$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$

$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$

Αν Δ>0 → α(x-ρ1)(x-ρ2)

Αν Δ=0 → α(x-ρ)(x-ρ)

- Αν είναι 3ου βαθμού και άνω, τότε Horner, ΠΧ:

Θα πρέπει να λύσουμε την εξίσωση:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$$

η οποία είναι 3ου βαθμού. Γνωρίζουμε ότι οι πιθανές ακέραιες ρίζες της εξίσωσης είναι οι διαιρέτες του σταθερού όρου $\alpha_0 = 6$, οι οποίοι είναι οι: $\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6$. Με το σχήμα Horner εξετάζουμε αν κάποιος από αυτούς μηδενίζει το πολυώνυμο $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$, πράγματι για $\rho = 1$ έχουμε:

1	-2	-5	6	1
	1	-1	-6	
1	-1	-6	0	

Κατεβάζω το 1. Πολ/ζω 1*1 και το βάζω κάτω από το -2. Προσθέτω κατά μέλη. Στη συνέχεια αυτό που βρίσκω (-1) το πολ/ζω με το 1 και βρίσκω -1 και το βάζω κάτω από το -5. Προσθέτω κοκ. Αν βγάλω 0 τότε αυτή είναι η ρίζα μου. Επομένως το $x - 1$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου, δηλαδή:

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x-1)\left(x^2 - x - 6\right)$$

Η εξίσωση παίρνει τη μορφή

$$(x-1)\left(x^2 - x - 6\right) = 0 \Rightarrow x = 1 \ \eta' \ x^2 - x - 6 = 0$$

Η 2ου βαθμού εξίσωση λύνεται με διακρίνουσα και έχει 2 λύσεις, τις $x = -2$ και $x = 3$. Άρα τα σημεία τομής της C_f με τον $x'x$ είναι τα $(-2, 0)$, $(1, 0)$ και $(3, 0)$.

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ (σε ασκήσεις θα το βλέπουμε και ως ρυθμός μεταβολής)

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

ΠΙΝΑΚΑΣ ΒΑΣΙΚΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

(c)΄= 0	(c. f(x))΄=c. f΄(x)
(x)΄= 1	$(f(x)\pm g(x))'=f'(x)\pm g'(x)$
$(x^2)'= 2x$	$(f(x).g(x))'=f'(x).g(x)+f(x).g'(x)$
$(x^\rho)'= \rho x^{\rho-1}$ όπου ρ ανήκει στο Q\{0}	$(\frac{f(x)}{g(x)})'=\frac{f'(x).g(x)-f(x).g'(x)}{g^2(x)}$
$(\frac{1}{x})'=\frac{-1}{x^2}$	$[f(g(x))]'=f'(g(x)).g'(x)$
$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(f(x)^\rho)'=\rho.f(x)^{\rho-1}.f'(x)$
(ημx)΄= συνx	$(\frac{1}{f(x)})'=\frac{-1}{f^2(x)}.f'(x)$
(συνx)΄= - ημx	$(\sqrt{f(x)})'=\frac{1}{2.\sqrt{f(x)}}.f'(x)$
$(\varepsilon\varphi x)'=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$	(ημf(x))΄=συνf(x) . f΄(x)
$(\sigma\varphi x)'=\frac{1}{\eta\mu^2 x}$	(συνf(x))΄=-ημf(x) . f΄(x)

ΕΦΑΡΜΟΦΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ: Σε ποια διαστήματα η γραφική παράσταση της συνάρτησης είναι αύξουσα ή φθίνουσα.

ΑΚΡΟΤΑΤΑ: Να βρούμε μέγιστη ή/και ελάχιστη τιμή. ΠΑΝΤΑ εκεί που αλλάζει η μονοτονία.

ΒΗΜΑΤΑ ΣΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1ο ΒΗΜΑ: Βρίσκω τα όρια της συνάρτησης (πεδίο ορισμού). Στη συνέχεια βρίσκω την παράγωγο της f(x).

2ο ΒΗΜΑ: Λύνω την εξίσωση f΄(x) =0. Μπορεί να τύχει να είναι αδύνατη (αν πχ Δ<0). **

3ο ΒΗΜΑ: Φτιάχνω πίνακα προσήμων. Τα πρόσημα τα βρίσκω με δοκιμές στην f΄(x)

x	-∞	+∞
f΄(x)	+	-
f(x)	Βελάκι προς επάνω	Βελάκι προς κάτω

ΠΡΟΣΟΧΗ: Εάν ένα σημείο δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού, το σημειώνω με διπλή γραμμή και το βγάζω από την απάντησή μου.

4ο ΒΗΜΑ: ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ:

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο (-∞,2]

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο [2,+∞)

ΑΚΡΟΤΑΤΑ:

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x=2 το οποίο είναι y=f(2)=1

κάνω την αντικατάσταση στον τύπο της συνάρτησης f για να βρω το y

**** Στο βήμα 2, όταν βρω αρνητική διακρίνουσα, τότε λέω είναι αδύνατη. Φτιάχνω τον πίνακα προσήμων και δοκιμάζω μια τιμή x. Ανάλογα τι αποτέλεσμα θα δώσει (θετικό ή αρνητικό), ΑΠΑΝΤΩ:** Είναι γνησίως φθίνουσα στο (-∞,+∞). Δεν έχει ακρότατα γιατί δεν έχει ρίζα.

ΓΝΗΣΙΩΣ ΜΟΝΟΤΟΝΗ σημαίνει ΔΕΝ ΕΧΕΙ ΡΙΖΑ.

ΠΡΟΣΟΧΗ: Όταν φτιάξω δικιά μου συνάρτηση (πχ περίμετρο), όταν μηδενίσω την παράγωγο για να βρω τις ρίζες της, μπορεί να δώσει και αρνητική τιμή. Αυτή απορρίπτεται.
ΧΡΗΣΙΜΟΙ ΤΥΠΟΙ ΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΙΣ:
ΌΓΚΟΣ: V=πλάτος*μήκος*ύψος
ΕΜΒΑΔΟ: E=πλάτος*μήκος
ΠΕΡΙΜΕΤΡΟΣ: L=2*(πλάτος+μήκος)
ΕΜΒΑΔΟ ΤΡΙΓΩΝΟΥ: E=(βάση*ύψος)/2
2ος Νόμος του Νεύτωνα $F = m \cdot \alpha$

ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ
Πρέπει να βρω την εφαπτομένη, άρα εξίσωση ευθείας y=αx+β
α→ συντελεστής διεύθυνσης ή κλίση
β → σταθερός όρος

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ
Δίνεται η $f(x)=2x^2+4$. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης C_f στο σημείο A(1 , f(1))
1ο ΒΗΜΑ: Ελέγχω αν ανήκει το σημείο στην γραφική παράσταση (θα μου δίνει και το x και το y). Μερικές φορές μπορώ να το χρησιμοποιήσω για να βρω κάποια δεδομένα παρακάτω.
Εδώ απλά θα βρω την τιμή στο σημείο x=1
$f(1)=2*1^2+4 =6$ άρα A(1,6)
2ο ΒΗΜΑ: Έστω ότι η εξίσωση της εφαπτομένης είναι y=αx+β
3ο ΒΗΜΑ: Ξέρω από την θεωρία ότι α=f΄(x)
Βρίσκω την παράγωγο $f'(x) = (2x^2+4)= 4x$
Άρα α=f΄(1) = 4*1=4 άρα α=4
Επομένως η εξίσωση της εφαπτομένης είναι y=4x+β
4ο ΒΗΜΑ: Για να βρω το β θα χρησιμοποιήσω το γεγονός ότι το σημείο Α είναι σημείο της εφαπτομένης, άρα πρέπει να την επαληθεύει. Στο παράδειγμά μας:
x=1, y=6 Δηλαδή 6=4*1+β άρα β=2
5ο ΒΗΜΑ: ΑΠΑΝΤΗΣΗ
Η ζητούμενη ευθεία είναι η y=4x+2

ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ:
- Δυο ευθείες είναι παράλληλες αν και μόνο αν έχουν ίδιο συντελεστή διεύθυνσης, δηλαδή $\alpha_1=\alpha_2$
- Δυο ευθείες είναι κάθετες αν οι συντελεστές διεύθυνσης έχουν γινόμενο -1, δηλαδή $\alpha_1*\alpha_2=-1$
- Σε ασκήσεις αν ζητάει την απόσταση δυο σημείων, θα ισχύει πυθαγόριο θεώρημα:
$d=\sqrt{(x^2+y^2)}$ Αν δεν αρχίζει από το 0, τότε το $x=x_2-x_1$ και $y=y_2-y_1$

Σε ασκήσεις με κλίση με άξονα και συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C στο γνωστό σημείο A θα είναι

$$\varepsilon\varphi\omega=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Η παράγωγος της f στο σημείο x_0 ονομάζεται και **ρυθμός μεταβολής** (rate of change), διότι ο αριθμός $f'(x_0)$ είναι ένα μέτρο του πόσο «γρήγορα» μεταβάλλεται η ποσότητα $y = f(x)$ ως προς το x, όταν $x = x_0$. Επομένως, αν σε κάποια άσκηση μας ζητηθεί ο ρυθμός μεταβολής μιας συνάρτησης ως προς κάποια τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής, ουσιαστικά μας ζητείται η παράγωγος στο αντίστοιχο σημείο.

Ας υποθέσουμε ότι ένα σώμα κινείται πάνω σε μία ευθεία (ευθύγραμμη κίνηση). Η απόσταση x του σώματος από ένα σημείο αναφοράς O είναι μία συνάρτηση του χρόνου t και ονομάζεται συνάρτηση θέσης. Αν $x(t)$ είναι η συνάρτηση θέσης ενός σώματος, τότε η ταχύτητα $v(t)$ ορίζεται από την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης θέσης και η επιτάχυνση $\alpha(t)$ από τη δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης θέσης:

(1) $v(t) = x'(t)$

(2) $\alpha(t) = v'(t) = x''(t)$

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

Βασικές έννοιες

🌎 Στατιστική είναι ένα σύνολο αρχών και μεθοδολογιών για:

1. το σχεδιασμό της διαδικασίας συλλογής δεδομένων
2. τη συνοπτική και αποτελεσματική παρουσίασή τους
3. την ανάλυση και εξαγωγή αντίστοιχων συμπερασμάτων.

🌎 **Πληθυσμός (population)** είναι ένα σύνολο του οποίου εξετάζουμε τα στοιχεία του ως προς ένα ή περισσότερα χαρακτηριστικά τους.

Τα στοιχεία του πληθυσμού συχνά αναφέρονται και ως **μονάδες ή άτομα** του πληθυσμού.

🌎 **Μεταβλητές** λέγονται τα χαρακτηριστικά ως προς τα οποία εξετάζουμε έναν πληθυσμό (variables) και τις συμβολίζουμε συνήθως με τα κεφαλαία γράμματα X , Y , Z , B , ...

🌎 **Τιμές της μεταβλητής** λέγονται οι δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει μια μεταβλητή.

Στατιστικά δεδομένα ή παρατηρήσεις λέγονται η σειρά από δεδομένα που προκύπτουν από τη διαδοχική εξέταση των ατόμων του πληθυσμού ως προς ένα χαρακτηριστικό.

Τα στατιστικά δεδομένα δεν είναι κατ’ανάγκη διαφορετικά.

Τις μεταβλητές τις διακρίνουμε:

1. Σε **ποιοτικές ή κατηγορικές μεταβλητές**, των οποίων οι τιμές τους δεν είναι αριθμοί.

Τέτοιες είναι, για παράδειγμα, η ομάδα αίματος(με τιμές Α, Β, ΑΒ, Ο), το φύλο (με τιμές αγόρι, κορίτσι), οι συνέπειες του καπνίσματος (με τιμές καρδιακά νοσήματα, καρκίνος κτλ), όπως επίσης και η οικονομική κατάσταση και η υγεία των ανθρώπων (που μπορεί να χαρακτηριστεί ως κακή, μέτρια, καλή ή πολύ καλή), καθώς και το ενδιαφέρον των μαθητών για τη Στατιστική, που μπορεί να χαρακτηριστεί ως υψηλό, μέτριο, χαμηλό ή μηδαμινό.

2. Σε **ποσοτικές μεταβλητές**, των οποίων οι τιμές είναι αριθμοί και διακρίνονται:

i) Σε **διακριτές μεταβλητές**, που παίρνουν μόνο “μεμονωμένες” τιμές. Τέτοιες μεταβλητές είναι, για παράδειγμα, ο αριθμός των υπαλλήλων μιας επιχείρησης (με τιμές 1,2,...), το αποτέλεσμα της ρίψης ενός ζαριού (με τιμές 1,2,...,6) κτλ.

ii) Σε **συνεχείς μεταβλητές**, που μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε τιμή ενός διαστήματος πραγματικών αριθμών (α , β) . Τέτοιες μεταβλητές είναι το ύψος και το βάρος των μαθητών της Γ' Λυκείου, ο χρόνος που χρειάζονται οι μαθητές να απαντήσουν στα θέματα μιας εξέτασης, η διάρκεια μιας τηλεφωνικής συνδιάλεξης κτλ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: Διακριτή: μισθός. Συνεχής: θερμοκρασία, ταχύτητα, βάρος, μάζα, μήκος.

Ο χρόνος είναι συνεχής μεταβλητή αλλά αν θέλουμε να παίρνει ακέραιες τιμές τότε είναι διακριτή. Το χρήμα θεωρείται διακριτή μεταβλητή εκτός εάν εννοούμε ισοτιμία που είναι συνεχής μεταβλητή. Γενικά, μια μεταβλητή θεωρείται διακριτή αν είμαστε βέβαιοι ότι για κάθε τιμή α της μεταβλητής υπάρχει η επόμενη β (αν η α δεν είναι η μέγιστη τιμή) και η μεταβλητή δεν μπορεί να πάρει τιμή μεταξύ των α και β.

🌎 **Απογραφή (census)**. Ένας τρόπος για να πάρουμε τις απαραίτητες πληροφορίες που χρειαζόμαστε για κάποιο πληθυσμό είναι να εξετάσουμε όλα τα άτομα (στοιχεία) του πληθυσμού ως προς το χαρακτηριστικό που μας ενδιαφέρει. Η μέθοδος αυτή συλλογής των δεδομένων καλείται απογραφή.

🌎 **Δείγμα** ονομάζουμε κάθε υποσύνολο του πληθυσμού από το οποίο μαζεύονται πληροφορίες ως προς το εξέταση χαρακτηριστικό. Αυτό γίνεται όπου η απογραφή είναι δύσκολη, ή αδύνατη ή οικονομικά ασύμφορη.

🌎 **Αντιπροσωπευτικό δείγμα**: Ένα δείγμα θεωρείται αντιπροσωπευτικό ενός πληθυσμού, εάν έχει επιλεγεί κατά τέτοιο τρόπο, ώστε κάθε μονάδα του πληθυσμού να έχει την ίδια δυνατότητα να επιλεγεί. Η σωστή επιλογή του αντιπροσωπευτικού δείγματος οδηγεί σε αξιόπιστα συμπεράσματα από τη μελέτη του δείγματος και θα ισχύουν με ικανοποιητική ακρίβεια για ολόκληρο τον πληθυσμό.

🌎 **Μειονεκτήματα στη διαδικασία επιλογής ενός δείγματος:**
- ο κακός σχεδιασμός και η εκτέλεση της στατιστικής έρευνας,
- η μη αντιπροσωπευτικότητα του δείγματος,
- ο μη σωστός καθορισμός του μεγέθους του δείγματος

Από την άλλη πλευρά, στις απογραφές απαιτείται συνήθως μεγάλος αριθμός απογραφέων. Παρουσιάζεται έτσι η ανάγκη πρόσληψης και εκπαίδευσης μεγάλου αριθμού υπαλλήλων. Λόγω του μεγάλου χρόνου και κυρίως των σημαντικών εξόδων που απαιτούνται, πολλές φορές χρησιμοποιούνται ανεπαρκώς εκπαιδευμένοι απογραφείς με κίνδυνο να σημειώνονται λάθη οφειλόμενα σ’ αυτούς.

🌎 **Δειγματοληψία:** Οι αρχές και οι μέθοδοι για τη συλλογή και ανάλυση δεδομένων από πεπερασμένους πληθυσμούς είναι το αντικείμενο της δειγματοληψίας που αποτελεί τη βάση της Στατιστικής.

Στατιστικοί Πίνακες
Μετά τη συλλογή των στατιστικών δεδομένων είναι αναγκαία η κατασκευή **συνοπτικών πινάκων ή γραφικών παραστάσεων**, ώστε να είναι εύκολη η κατανόησή τους και η εξαγωγή σωστών συμπερασμάτων. Η παρουσίαση των στατιστικών δεδομένων σε πίνακες γίνεται με την κατάλληλη τοποθέτηση των πληροφοριών σε γραμμές και στήλες, με τρόπο που να διευκολύνεται η σύγκριση των στοιχείων και η καλύτερη ενημέρωση του αναγνώστη σχετικά με τη δομή του πληθυσμού που ερευνάμε.

Οι πίνακες διακρίνονται στους:
🌎 α) **γενικούς πίνακες**, οι οποίοι περιέχουν όλες τις πληροφορίες που προκύπτουν από μία στατιστική έρευνα (συνήθως με αρκετά λεπτομερειακά στοιχεία) και αποτελούν πηγές στατιστικών πληροφοριών στη διάθεση των επιστημόνων-ερευνητών για παραπέρα ανάλυση και εξαγωγή συμπερασμάτων,
🌎 β) **ειδικούς πίνακες**, οι οποίοι είναι συνοπτικοί και σαφείς. Τα στοιχεία τους συνήθως έχουν ληφθεί από τους γενικούς πίνακες.

Κάθε πίνακας που έχει κατασκευαστεί σωστά πρέπει να περιέχει:
α) τον **τίτλο**, που γράφεται στο επάνω μέρος του πίνακα και δηλώνει με σαφήνεια και συνοπτικά το περιεχόμενο του πίνακα,
β) τις **επικεφαλίδες των γραμμών και στηλών**, που δείχνουν συνοπτικά τη φύση και τις μονάδες μέτρησης των δεδομένων,
γ) το **κύριο σώμα (κορμό)**, που περιέχει διαχωρισμένα μέσα στις γραμμές και στις στήλες τα στατιστικά δεδομένα,
δ) την **πηγή**, που γράφεται στο κάτω μέρος του πίνακα και δείχνει την προέλευση των στατιστικών στοιχείων, έτσι ώστε ο αναγνώστης να ανατρέχει σ’ αυτήν, όταν επιθυμεί, για επαλήθευση στοιχείων ή για λήψη περισσότερων πληροφοριών.

Ας υποθέσουμε ότι x_1 , x_2 ,..., $x_κ$ είναι οι τιμές μιας μεταβλητής Χ, που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους ν, $ν_κ$.

🌎 **Συχνότητα** : Στην τιμή x_i αντιστοιχίζεται η **(απόλυτη) συχνότητα (frequency)** ν_i , δηλαδή ο <u>φυσικός αριθμός που δείχνει πόσες φορές εμφανίζεται</u> η τιμή x_i της εξεταζόμενης μεταβλητής X στο σύνολο των παρατηρήσεων.
Ισχύει : $\nu_1 + \nu_2 +... + \nu_\kappa = \nu$
🌎 **Διαλογή:** διαδικασία με την οποία γίνεται ο υπολογισμός των συχνοτήτων.
🌎 **Σχετική συχνότητα**: Αν διαιρέσουμε τη συχνότητα ν_i με το μέγεθος ν του δείγματος, προκύπτει η σχετική συχνότητα (relative frequency) f_i της τιμής x_i , δηλαδή

$$f_i=\frac{\nu_i}{\nu}$$
$$i=1,2,3,4\ldots,\kappa$$

Για τη σχετική συχνότητα ισχύουν οι ιδιότητες:

1. $0\leq f_\iota\leq 1\; για\; i=1,2,\ldots,\kappa\; αφού\; 0\leq \nu\leq \nu_\iota$
2. $f_1+f_2+\ldots+f_\kappa=1,αφού$

$$f_1+f_2+\ldots+f_\kappa=\frac{\nu_1}{\nu}+\frac{\nu_2}{\nu}+\ldots+\frac{\nu_\kappa}{\nu}=\frac{\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_\kappa}{\nu}=\frac{\nu}{\nu}=1$$

Θεώρημα

Για τη σχετική συχνότητα ισχύουν οι ιδιότητες:
1.$0 \leqslant f_i \leqslant 1$ για $i = 1, 2, ..., k$
2.$f_1 + f_2 + \cdots + f_k = 1$

Απόδειξη

1. Προφανώς για τη συχνότητα ν_i ισχύει $0 \leqslant \nu_i \leqslant \nu$ οπότε:

$$0 \leqslant \nu_i \leqslant \nu \Rightarrow \frac{0}{\nu} \leqslant \frac{\nu_i}{\nu} \leqslant \frac{\nu}{\nu} \Rightarrow 0 \leqslant f_i \leqslant 1$$

2.

$$f_1 + f_2 + \cdots + f_k = \frac{\nu_1}{\nu} + \frac{\nu_2}{\nu} + \cdots + \frac{\nu_k}{\nu} = \frac{\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_k}{\nu} = \frac{\nu}{\nu} = 1$$

Συνήθως, τις σχετικές συχνότητες f_i τις εκφράζουμε επί τοις εκατό, οπότε συμβολίζονται με $f_i\%$, δηλαδή $f_i\%= 100\, f_i$.
🌎 **Πίνακας συχνοτήτων**: Οι ποσότητες x_i , ν_i , f_i για ένα δείγμα συγκεντρώνονται σε ένα συνοπτικό πίνακα, που ονομάζεται **πίνακας κατανομής συχνοτήτων** ή απλά **πίνακας συχνοτήτων**.
🌎 **Κατανομή συχνοτήτων**: Για μια μεταβλητή, το σύνολο των ζευγών (x_i , ν_i) λέμε ότι αποτελεί την **κατανομή συχνοτήτων** και το σύνολο των ζευγών (x_i , f_i) , ή των ζευγών (x_i , $f_i\%$) , την κατανομή των σχετικών συχνοτήτων.
🌎 **Αθροιστική συχνότητα N_i** μιας τιμής x_i μιας ποσοτικής μεταβλητής X, λέγεται το άθροισμα των συχνοτήτων των τιμών που έχουν τιμή μικρότερη ή ίση με την x_i, δηλαδή $N_i = \nu_1 + \nu_2 +...+\nu_i$, για i = 1 , 2 ,..., κ . Ισχύει $\nu_\kappa =N_\kappa- N_{\kappa-1}$
🌎 **Αθροιστική σχετική συχνότητα F_i** μιας τιμής x_i μιας ποσοτικής μεταβλητής X, λέγεται το άθροισμα των σχετικών συχνοτήτων των τιμών που έχουν τιμή μικρότερη ή ίση με την x_i δηλαδή : $F_i = f_1 + f_2 +... + f_i$,για i = 1 , 2 ,..., κ . Ισχύει $f_\kappa=F_\kappa- F_{\kappa-1}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:
Για συμπλήρωση πινάκων, όταν λέει **ΤΟ ΠΟΛΥ** τότε ξέρω την αθροιστική συχνότητα των μεταβλητών μου. Εάν λέει **ΤΟΥΛΑΧΙΣΤΟΝ** τότε γνωρίζω f_3+f_4+ (ή αντίστοιχα τις συχνότητές τους). Εάν λέει **μεταβλητή Ή μεταβλητή** τότε ΠΡΟΣΘΕΤΩ τις σχετικές συχνότητες.
Για να συμπληρώσω το πινακάκι, πρέπει να φτιάξω ένα σύστημα με εξισώσεις, όσων αγνώστων έχω. Το κόλπο είναι στις εξισώσεις στα αριστερά να βάλω όλες τις συχνότητες ν_1, ν_2 κλπ και στα δεξιά το σύνολο του δείγματος.