Άσκηση 3
Με τη βοήθεια του ορισμού της παραγώγου, να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης
1.$f\left(x\right)=2x+3$ στο $x=1$
ΛΥΣΗ
Για την συνάρτηση f έχουμε πεδίο ορισμού A = R

Για x=1
Από τον ορισμό θα έχουμε

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

Παρατηρούμε ότι
f(1+h)= 2(1+h) +3 = 2+2h+3 = 2h + 5

Επίσης
f(1)=2*1+3 = 2+3 = 5

Άρα
$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2h+5-5}{h}\lim_{h\to 0}\frac{2h}{h}=2\Rightarrow f'(1)=2$$

2.$f\left(x\right)=4x^{2}$ στο $x=2$
ΛΥΣΗ
Για την συνάρτηση f έχουμε πεδίο ορισμού A = R

Για x=2
Από τον ορισμό θα έχουμε

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

Παρατηρούμε ότι
f(2+h) = $4(2+h)^2$= $4(4+4h+h^2)$ = 16 + 16h +$4h^2$

Επίσης
f(2) = $4*2^2$=16

Άρα
$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{16+16h+4h^{2}-16}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(16+4h)}{h}=\lim_{h\to 0}16+4h=16\Rightarrow f'(2)=16$$

3.$f\left(x\right)=x^{2}+\alpha x$ στο $x=1$
ΛΥΣΗ
Για την συνάρτηση f έχουμε πεδίο ορισμού A = R

Για x=1
Από τον ορισμό θα έχουμε

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

Παρατηρούμε ότι
f(1+h) = $(1+h)^2$ + α(1+h) = 1+2h+h^2 + α + αh

Επίσης
f(1) = 1^2 + α = α + 1

Άρα

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1+2h+h^2+\alpha+\alpha h-\alpha-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+2h+\alpha h}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(h+2+\alpha)}{h}=\lim_{h\to 0}(h+2+\alpha h)$$

και με αντικατάσταση, τελικά έχουμε

$$f'(1)=2$$

4.$f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ στο $x=-1$

ΛΥΣΗ

Για την συνάρτηση f έχουμε πεδίο ορισμού A = R

Για x=-1

Από τον ορισμό θα έχουμε

$$f'(-1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$$

Παρατηρούμε ότι
f(1+h) = α $(-1+h)^2$ + β (-1+h) + γ = α - 2αh + αh^2 - β + βh +γ

Επίσης
f(-1) = α – β +γ

Άρα

$$f'(-1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(\alpha-2\alpha h+\alpha h^2-\beta+\beta h+\gamma-\alpha+\beta-\gamma)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(-2\alpha h+\alpha h^2+\beta h)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{h(\alpha h-2\alpha+\beta)}{h}=\lim_{h\to 0}(\alpha h-2\alpha+\beta)=\beta-2\alpha\Rightarrow f'(-1)=\beta-2\alpha$$

5.$f(x)=\sqrt{x}$ στο $x=4$

ΛΥΣΗ

Για την συνάρτηση f έχουμε πεδίο ορισμού A = [0 , +∞)

Για x = 4

Από τον ορισμό θα έχουμε

$$f'(4)=\lim_{h\to 0}\frac{f(4+h)-f(4)}{h}$$

Παρατηρούμε ότι

$$f(4+h)=\sqrt{4+h}$$

Επίσης

$f(4)=\sqrt{4}=2$

Άρα

$$f'(4)=\lim_{h\to 0}\frac{f(4+h)-f(4)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{4+h}-2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{4+h})^2-2^2}{h(\sqrt{4+h}+2)}=\lim_{h\to 0}\frac{4+h-4}{h(\sqrt{4+h}+2)}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt{4+h}+2)}=¿$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{4+h}+2}=\frac{1}{\sqrt{4}+2}=\frac{1}{4}\Rightarrow f'(4)=\frac{1}{4}$$

6. $f(x)=\frac{1}{x}$ στο $x=2$

ΛΥΣΗ

Για την συνάρτηση f έχουμε πεδίο ορισμού A = R - { 0 }

Για x=2

Από τον ορισμό θα έχουμε

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

Παρατηρούμε ότι

$$f(2+h)=\frac{1}{2+h},\mu\varepsilon\, h\neq -2$$

Επίσης

$$f(2)=\frac{1}{2}$$

Άρα

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{2+h}-\frac{1}{2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{2}{2(2+h)}-\frac{2+h}{2(2+h)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2-2-h}{2h(2+h)}=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{2(2+h)}=\frac{-1}{2*2}=\frac{-1}{4}$$

Επομένως

$$f'(2)=\frac{-1}{4}$$

Άσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση:

$f(x)=2+|x-1|$

Να αποδείξετε ότι δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$

ΛΥΣΗ

Για την συνάρτηση f έχουμε πεδίο ορισμού A = R

- Αν

$$x-1\geq 0\Leftrightarrow x\geq 1,\, \tau\acute{o}\tau\varepsilon\, |x-1|=x-1$$

Άρα

$$f(x)=2+x-1\Leftrightarrow f(x)=x+1$$

- Αν

$$x-1<0\Leftrightarrow x<1,\, \tau\acute{o}\tau\varepsilon\, |x-1|=-(x-1)=-x+1$$

Άρα

$$f(x)=2+(-x+1)\Leftrightarrow f(x)=3-x$$

Αφού έχουμε τις συναρτήσεις μας, πάμε να δούμε εάν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$

Έστω h>0

$$\lim_{\substack{h\to 1\\ h>0}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

για $x_0=1$
Θα έχουμε
$f(x_0+h)=f(1+h)=1+h+1 \Leftrightarrow f(x_0+h)=h+2$
και
$f(x_0)=f(1)=1+1=2 \Leftrightarrow f(x_0) = 2$

Άρα

$$\lim_{\substack{h\to 1\\ h>0}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{\substack{h\to 1\\ h>0}} \frac{h+2-2}{h}=\lim_{\substack{h\to 1\\ h>0}} \frac{h}{h}=\lim_{\substack{h\to 1\\ h>0}} 1=1$$

Έστω h<0

$$\lim_{\substack{h\to 1\\ h<0}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

για $x_0=1$
Θα έχουμε
$f(x_0+h)=f(1+h)=3-1-h \Leftrightarrow f(x_0+h)=2-h$
και
$f(x_0)=f(1)=3-1=2 \Leftrightarrow f(x_0) = 2$

Άρα

$$\lim_{\substack{h\to 1\\ h<0}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{\substack{h\to 1\\ h<0}} \frac{2-h-2}{h}=\lim_{\substack{h\to 1\\ h<0}} \frac{-h}{h}=\lim_{\substack{h\to 1\\ h<0}} -1=-1$$

Από τα παραπάνω παρατηρήσαμε ότι στο $x_0=1$

$$\lim_{\substack{h\to 1\\ h>0}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\neq\lim_{\substack{h\to 1\\ h<0}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

επομένως δεν υπάρχει το όριο της παραγώγου και άρα η συγκεκριμένη συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$