

MATHEMATICS

Pure mathematics is, in its way, the poetry of logical ideas.

ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Μία συνάρτηση f καλείται παραμετρική, αν ο αλγεβρικός της τύπος περιέχει και άλλες άγνωστες παραμέτρους εκτός από την ανεξάρτητη μεταβλητή. Για παράδειγμα, η συνάρτηση

$$f(x) = \alpha x + \beta$$

έχει δύο παραμέτρους, τις α και β . Στην πραγματικότητα, ο παραπάνω τύπος δεν εκφράζει μόνο μία συνάρτηση, αλλά ένα σύνολο άπειρων συναρτήσεων. Έτσι, για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων παίρνουμε και διαφορετικές συναρτήσεις. Παρακάτω δίνονται ορισμένα παραδείγματα:

- Για $\alpha = 2$ και $\beta = 1$ έχουμε: $f(x) = 2x + 1$
- Για $\alpha = -1$ και $\beta = 3$ έχουμε: $f(x) = -x + 3$
- Για $\alpha = \sqrt{2}$ και $\beta = 0$ έχουμε: $f(x) = \sqrt{2}x$
- Για $\alpha = 0$ και $\beta = 1$ έχουμε: $f(x) = 1$
- Για $\alpha = 0$ και $\beta = 0$ έχουμε: $f(x) = 0$

Κάθε μία από τις παραπάνω συναρτήσεις έχει και τη δικιά της γραφική παράσταση. Πολλές φορές μας ενδιαφέρει να έχουμε μια γενική εικόνα για τη μορφή των γραφικών παραστάσεων, για τις διάφορες τιμές που μπορεί να πάρει η κάθε παράμετρος. Σε αυτό το εγχείρημα μπορεί να μας βοηθήσει το *geogebra*. Παρακάτω, παρουσιάζεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha x + \beta$. Μετακινήστε τους δρομείς α και β , για να αλλάξετε τις τιμές των παραμέτρων και παρατηρήστε πώς μεταβάλλεται η γραφική παράσταση.

Geogebra Tutorial 2



Άσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x$$

Να βρεθούν οι τιμές των παραμέτρων α και β , ώστε η γραφική παράσταση της f να διέρχεται από τα σημεία $A(2, 6)$ και $B(-2, -2)$.

Λύση

- Το σημείο $A(2, 6)$ είναι σημείο της γραφικής παράστασης αν και μόνο αν $f(2) = 6$. Τότε θα έχουμε

$$f(2) = 6 \Rightarrow \alpha \cdot 2^2 + \beta \cdot 2 = 6 \Rightarrow \boxed{4\alpha + 2\beta = 6} \quad (1)$$

- Το σημείο $B(-2, -2)$ είναι σημείο της γραφικής παράστασης αν και μόνο αν $f(-2) = -2$. Τότε θα έχουμε

$$f(-2) = -2 \Rightarrow \alpha(-2)^2 + \beta(-2) = -2 \Rightarrow \boxed{4\alpha - 2\beta = -2} \quad (2)$$

Οι εξισώσεις (1) και (2) αποτελούν ένα σύστημα δύο εξισώσεων με 2 αγνώστους. Για την επίλυση του συστήματος θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών.

Προσπαθήστε μόνοι σας τις ακόλουθες ασκήσεις και επαληθεύστε τα αποτελέσματα με τη βοήθεια του geogebra:

Άσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \alpha x^2 - 2$$

Να βρεθεί η τιμή της παραμέτρου α , ώστε η γραφική παράσταση της f να διέρχεται από το σημείο $(-1, 1)$.

Άσκηση 4

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = 4x^2 + \alpha x + 2$$

Να βρεθεί η τιμή της παραμέτρου α , ώστε η γραφική παράσταση της f να διέρχεται από το σημείο $(\frac{1}{2}, \frac{7}{2})$.

*Άσκηση 5

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \sqrt{\alpha x - 1}$$

Να βρεθεί η τιμή της παραμέτρου α , ώστε η γραφική παράσταση της f να διέρχεται από το σημείο $(1, 2)$.

*Άσκηση 6

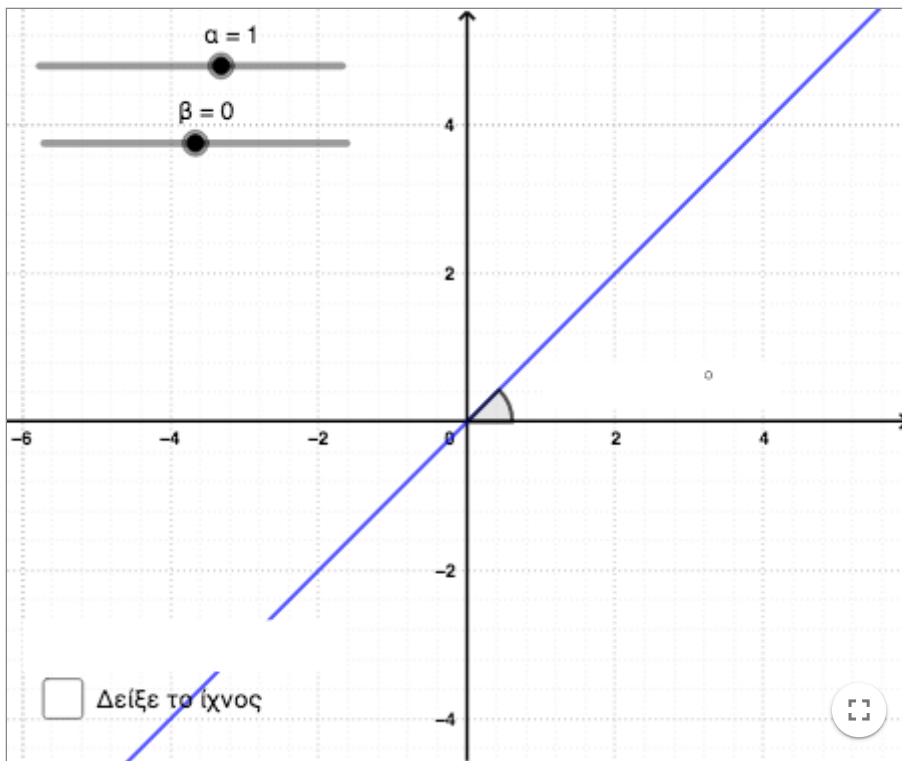
Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = 2x^2 + \alpha^2 x - 2$$

Να βρεθεί η τιμή της παραμέτρου α , ώστε η γραφική παράσταση της f να διέρχεται από το σημείο $(1, 1)$.

Στείλε την προσπάθειά σου

Απόρρητο - Όροι



Παρατηρούμε αρχικά ότι η γραφική παράσταση της f είναι πάντα ευθεία, ανεξάρτητα από τις τιμές των παραμέτρων. Επίσης, αν κρατήσουμε σταθερό το α και μεταβάλλουμε το β , η ευθεία κινείται παράλληλα στον εαυτό της και αν κρατήσουμε σταθερό το β και μεταβάλλουμε το α , η ευθεία περιστρέφεται γύρω από το σημείο τομής της C_f με τον άξονα $y'y$.

Άσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \alpha x^2$$

Να βρεθεί η τιμή της παραμέτρου α , ώστε η γραφική παράσταση της f να διέρχεται από το σημείο $(2, 1)$.

Λύση

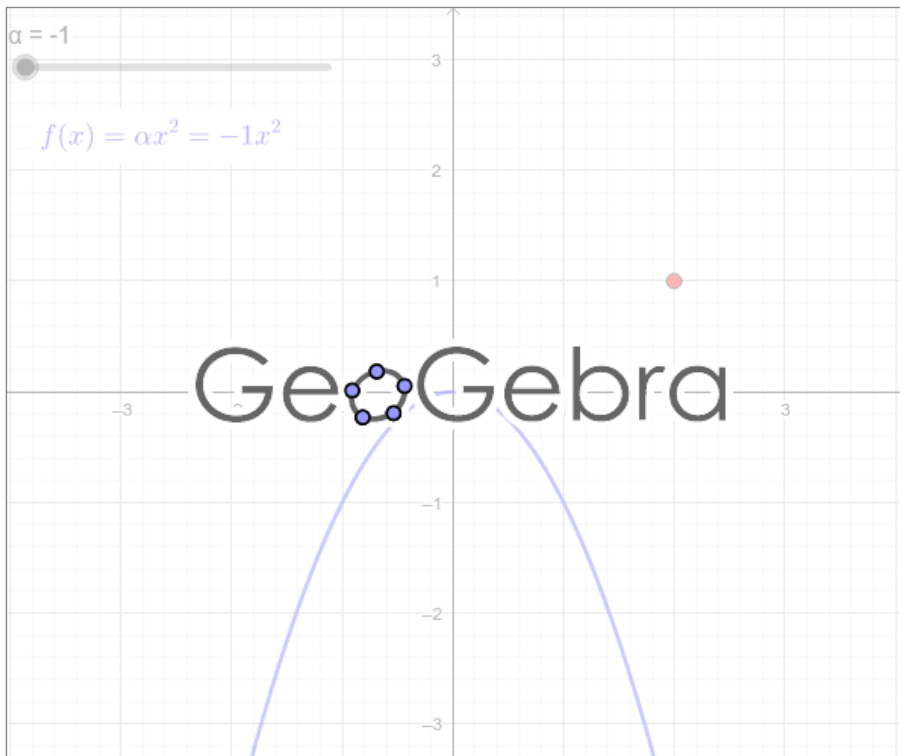
Γνωρίζουμε ότι ένα σημείο του καρτεσιανού επιπέδου (x_0, y_0) είναι σημείο της γραφικής παράστασης της f αν και μόνο αν $f(x_0) = y_0$. Επομένως, για $x_0 = 2$ και $y_0 = 1$ έχουμε

$$f(x_0) = y_0 \Rightarrow f(2) = 1 \Rightarrow \alpha \cdot 2^2 = 1 \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{1}{4} = 0.25}$$

-Τέλος λύσης-

Επαλήθευση αποτελεσμάτων με geogebra

Παρακάτω, βλέπουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f κατασκευασμένη σε *geogebra*, καθώς και το σημείο $(2, 1)$. Με τη βοήθεια του δρομέα μπορούμε να μεταβάλλουμε την τιμή της παραμέτρου α . Παρατηρούμε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το δοσμένο σημείο, όταν $\alpha = 0.25$.



Κατασκευή Γραφικής Παράστασης Παραμετρικής Συνάρτησης με geogebra

Παρακάτω, παρουσιάζεται σε μορφή βίντεο, ο τρόπος με τον οποίο μπορείτε να κατασκευάσετε μόνοι σας μια αντίστοιχη εφαρμογή με τη βοήθεια του *geogebra classic*, το οποίο μπορείτε να ανοίξετε από [εδώ](#). Προσοχή, όταν εισάγουμε μεταβλητές (x , y κλπ) στο πεδίο *εισαγωγή*, χρησιμοποιούμε λατινικούς χαρακτήρες.

$$\begin{aligned}
 4\alpha + 2\beta &= 6 \\
 + \quad 4\alpha - 2\beta &= -2
 \end{aligned}$$

$$8\alpha + 0 = 4 \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{1}{2} = 0.5}$$

Για να βρούμε το β αντικαθιστούμε την τιμή του α στην εξίσωση (1).

$$4\alpha + 2\beta = 6 \Rightarrow 4\frac{1}{2} + 2\beta = 6 \Rightarrow \boxed{\beta = 2}$$

-Τέλος λύσης-

Επαλήθευση αποτελεσμάτων με geogebra

Παρακάτω, βλέπουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f κατασκευασμένη σε *geogebra*, καθώς και τα σημεία $A(2, 6)$ και $B(-2, -2)$. Με τη βοήθεια των δρομέων μπορούμε να μεταβάλλουμε τις τιμές των παραμέτρων α και β . Παρατηρούμε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα δοσμένα σημεία, όταν $\alpha = 0.5$ και $\beta = 2$.

