MATHEMATICS

Pure mathematics is, in its way, the poetry of logical ideas.

ΠΑΡΆΓΩΓΟΣ ΣΥΝΆΡΤΗΣΗ

Στην παράγραφο «Η έννοια της Παραγώγου» είδαμε ότι η παράγωγος μιας συνάρτησης f στο σημείο x_0 ορίζεται από το όριο:

$$f'\left(x_0\right)=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0\right)}{h}$$

Στην άσκηση 1 υπολογίσαμε την παράγωγο της $f\left(x\right)=x^2$ σε διάφορα σημεία με χρήση του ορισμού. Ο υπολογισμός της παραγώγου με τη χρήση του ορισμού έχει δύο μειονεκτήματα:

1. Για να υπολογίσουμε τις παραγώγους μίας συνάρτησης σε πολλά σημεία πρέπει να επαναλάβουμε τον υπολογισμό του ορίου για κάθε σημείο.
2. Ο υπολογισμός του ορίου γίνεται δύσκολος για πολύπλοκες συναρτήσεις.

Για την αντιμετώπιση των παραπάνω δυσκολιών αναπτύχθηκε ένα σύνολο κανόνων που μας βοηθούν να υπολογίζουμε πολύ πιο εύκολα τις παραγώγους συγκριτικά με τη χρήση του ορισμού.

Άσκηση 1

Να βρεθεί η παράγωγος της $f\left(x\right)=x^2$ στο τυχαίο σημείο x_0

Λύση

Από το ορισμό θα έχουμε:

$$f'\left(x_0\right)=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0\right)}{h}$$

Παρατηρούμε ότι:

$$f\left(x_0+h\right)=\left(x_0+h\right)^2=x_0^2+2x_0h+h^2$$

επίσης

$$f\left(x_0\right)=x_0^2$$

άρα

$$\begin{aligned} f'\left(x_0\right) &= \lim_{h\to 0}\frac{f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0\right)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2+2x_0h+\cancel{x_0^2}-\cancel{x_0^2}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h^2+2x_0h}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(h+2x_0)}{\cancel{h}} = \lim_{h\to 0}(h+2x_0) \\ &\Rightarrow \boxed{f'\left(x_0\right)=2x_0} \end{aligned}$$

-Τέλος Λύσης-

Στην προηγούμενη άσκηση υπολογίσαμε την παράγωγο της $f\left(x\right)=x^2$ σε τυχαίο σημείο x_0 και βρήκαμε ότι

$$f'\left(x_0\right)=2x_0. \tag{1}$$

Αν τώρα θελήσουμε να υπολογίσουμε την παράγωγο της $f\left(x\right)=x^2$ σε κάποιο συγκεκριμένο σημείο, δε χρειάζεται να επαναλάβουμε τον υπολογισμό του ορίου, αλλά αρκεί να κάνουμε αντικατάσταση της αντίστοιχης τιμής στη σχέση (1). Για παράδειγμα έχουμε:

- $f'\left(1\right)=2\cdot 1=1$,
- $f'\left(2\right)=2\cdot 2=4$ και
- $f'\left(-1\right)=2\cdot\left(-1\right)=-2$

Παρατηρούμε ότι βρίσκουμε τα ίδια αποτελέσματα με αυτά που βρήκαμε στην Άσκηση 1 της παραγράφου «Η έννοια της Παραγώγου». Η σχέση (1) περιγράφει μία συνάρτηση η οποία για κάθε τιμή του x_0 μας επιστρέφει την παράγωγο της f στο x_0. Η συνάρτηση $f'\left(x\right)=2x$ ονομάζεται παράγωγος συνάρτηση της $f\left(x\right)=x^2$. Για λόγους απλότητας το παραπάνω συμπέρασμα συμβολίζεται $\left(x^2\right)'=2x$.

Στην παρακάτω εφαρμογή παρουσιάζεται η γραφική παράσταση της $f\left(x\right)=x^2$ και της παραγώγου $f'\left(x\right)=2x$. Μετακινήστε το κόκκινο σημείο και παρατηρήστε πως μεταβάλλεται η κλίση της εφαπτομένης (κόκκινο ευθύγραμμο τμήμα) και συγκρίνετε την κλίση με τις αντίστοιχες τιμές της παραγώγου.

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \tag{6}$$

$$(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x \tag{7}$$

$$(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x \tag{8}$$

Επιπλέον αποδεικνύονται οι ακόλουθοι κανόνες παραγώγισης:

$$(cf(x))' = cf'(x) \tag{9}$$

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x) \tag{10}$$

$$(f(x)\,g(x))' = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x) \tag{11}$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{(g(x))^2} \tag{12}$$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))\,g'(x) \tag{13}$$

Η σχέση (4) αποδεικνύεται και για δυνάμεις που ο εκθέτης είναι αρνητικός ακέραιος ή ρητός. Σε αυτές τις περιπτώσεις μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και τους ακόλουθους ορισμούς:

$$x^{-\nu} = \frac{1}{x^{\nu}} \tag{14}$$

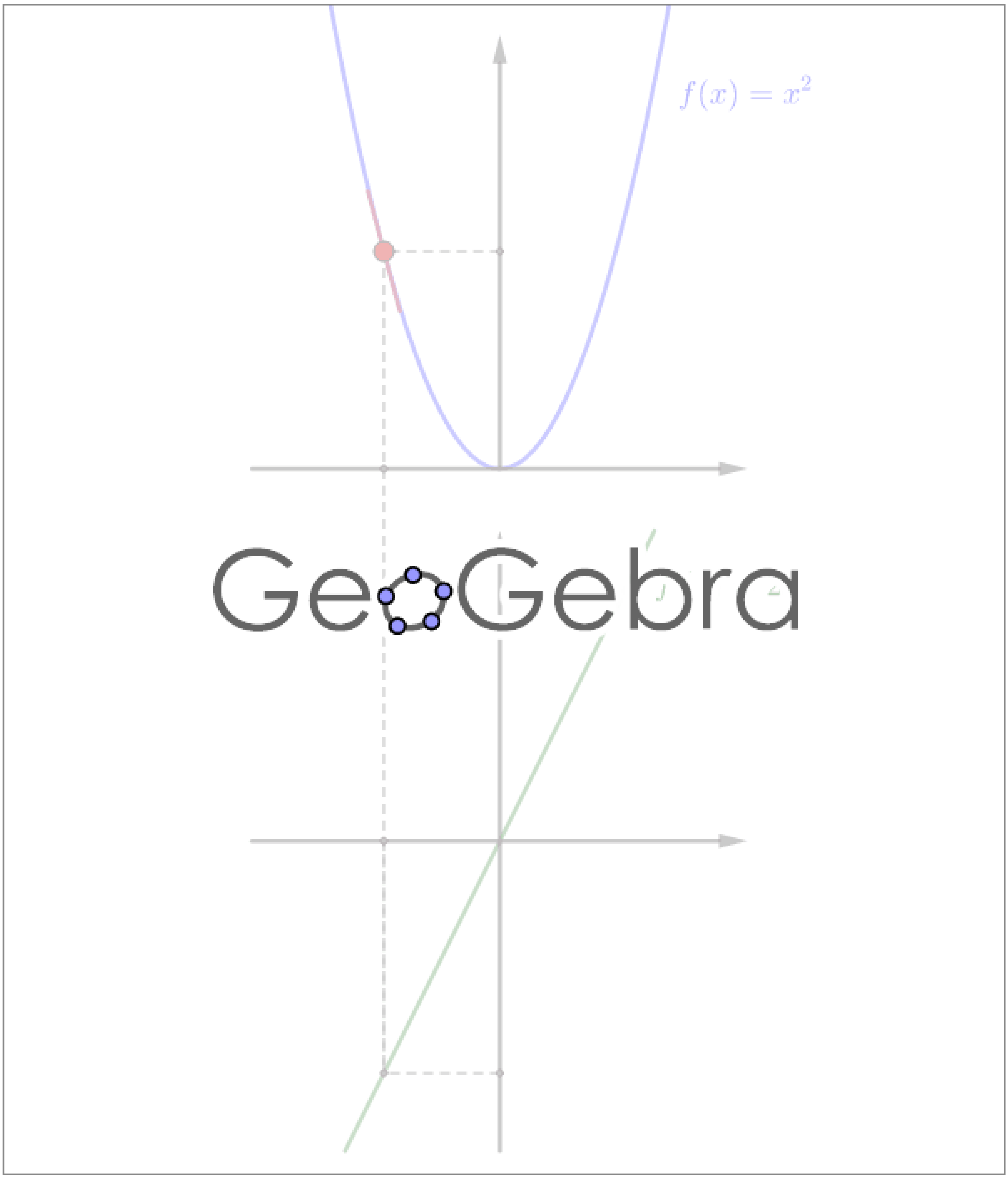
και

$$x^{\frac{\nu}{\mu}} = \sqrt[\mu]{x^{\nu}} \tag{15}$$

Άσκηση 2

Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων:

i. $f(x) = 12$
ii. $f(x) = x^5$
iii. $f(x) = x^{-7}$
iv. $f(x) = x^{\frac{5}{2}}$
v. $f(x) = \frac{1}{x^4}$



Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία για το σύνολο των βασικών συναρτήσεων καταλήγουμε στα ακόλουθα:

$$(c)' = 0 \tag{2}$$

$$(x)' = 1 \tag{3}$$

$$(x^{\rho})' = \rho x^{\rho-1}, \ \ \rho \in \mathbb{Q} \tag{4}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \tag{5}$$

vi. $f\left(x\right)=\sqrt[3]{x^{2}},\, x>0$

vii. $f\left(x\right)=\dfrac{1}{\sqrt{x}},\, x>0$

<u>Λύση</u>

i.

$$f'\left(x\right)=\left(12\right)'\overset{(2)}{=}0$$

ii.

$$f'\left(x\right)=\left(x^{5}\right)'\overset{(4)}{=}5x^{4}$$

iii.

$$f'\left(x\right)=\left(x^{-7}\right)'\overset{(4)}{=}-7x^{-8}$$

iv.

$$f'\left(x\right)=\left(x^{\frac{5}{2}}\right)'\overset{(4)}{=}\frac{5}{2}x^{\frac{5}{2}-1}=\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$$

v.

$$f'\left(x\right)=\left(\frac{1}{x^{4}}\right)'\overset{(14)}{=}\left(x^{-4}\right)'\overset{(4)}{=}-4x^{-5}\overset{(14)}{=}-4\frac{1}{x^{5}}=-\frac{4}{x^{5}}$$

vi.

$$f'\left(x\right)=\left(\sqrt[3]{x^{2}}\right)'\overset{(15)}{=}\left(x^{\frac{2}{3}}\right)'\overset{(4)}{=}\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\overset{(14)}{=}\frac{2}{3}\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\overset{(15)}{=}\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

vii.

$$f'\left(x\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)'\overset{(15)}{=}\left(\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\right)'\overset{(14)}{=}\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)'\overset{(4)}{=}-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1}=-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$$
$$\overset{(14)}{=}-\frac{1}{2}\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\overset{(15)}{=}-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^{3}}}$$

-Τέλος Λύσης-

Άσκηση 3

Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων:

i. $f\left(x\right)=3x^2$
ii. $f\left(x\right)=x^3-2x^2+5x-7$
iii. $f\left(x\right)=-x^2+2\sqrt{x}+\eta\mu x$
iv. $f\left(x\right)=2x\,\eta\mu x$
v. $f\left(x\right)=x^2\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu x$
vi. $f\left(x\right)=\dfrac{1}{x^2+1}$
vii. $f\left(x\right)=\sigma\varphi x$

<u>Λύση</u>

i.

$$f'\left(x\right)=\left(3x^2\right)'\overset{(9)}{=}3\left(x^2\right)'\overset{(4)}{=}3\cdot 2x^1=6x$$

ii.

$$\begin{aligned}f'\left(x\right)&=\left(x^3-2x^2+5x-7\right)'\overset{(10)}{=}\left(x^3\right)'-\left(2x^2\right)'+\left(5x\right)'-\left(7\right)'\\&\overset{(9)}{=}\left(x^3\right)'-2\left(x^2\right)'+5\left(x\right)'-\left(7\right)'\overset{(2),(3),(4)}{=}3x^2-4x+5\end{aligned}$$

iii.

$$\begin{aligned}f'\left(x\right)&=\left(-x^2+2\sqrt{x}+\eta\mu x\right)'\overset{(9),(10)}{=}-\left(x^2\right)'+2\left(\sqrt{x}\right)'+\left(\eta\mu x\right)'\\&\overset{(4),(6),(7)}{=}-2x+\cancel{2}\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x}}+\sigma\upsilon\nu x=-2x+\frac{1}{\sqrt{x}}+\sigma\upsilon\nu x\end{aligned}$$

iv.

$$\begin{aligned}f'\left(x\right)&=\left(2x\,\eta\mu x\right)'\overset{(9)}{=}2\left(x\,\eta\mu x\right)'\overset{(11)}{=}2\left(\left(x\right)'\eta\mu x+x\left(\eta\mu x\right)'\right)\\&\overset{(3),(7)}{=}2\left(\eta\mu x+x\,\sigma\upsilon\nu x\right)=2\eta\mu x+2x\,\sigma\upsilon\nu x\end{aligned}$$

v.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x^2 ημx\, συνx\right)' \\ &\overset{(11)}{=} \left(x^2\right)' ημx\, συνx + x^2\,(ημx)'\, συνx + x^2 ημx\,(συνx)' \\ &\overset{(4),(7),(8)}{=} 2x\, ημx\, συνx + x^2\, συνx\, συνx - x^2\, ημx\, ημx \\ &= 2x\, ημx\, συνx + x^2\, συν^2 x - x^2\, ημ^2 x \end{aligned}$$

vi.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{1}{x^2+1}\right)' \overset{(12)}{=} \frac{(1)'\left(x^2+1\right) - 1\cdot\left(x^2+1\right)'}{\left(x^2+1\right)^2} \\ &\overset{(2),(4)}{=} \frac{-2x}{\left(x^2+1\right)^2} \end{aligned}$$

vii.

$$\begin{aligned} f'(x) = (σφx)' &= \left(\frac{συνx}{ημx}\right)' \\ &\overset{(12)}{=} \frac{(συνx)'\, ημx - συνx\,(ημx)'}{ημ^2 x} \\ &\overset{(7),(8)}{=} \frac{-ημx\, ημx - συνx\, συνx}{ημ^2 x} \\ &= -\frac{ημ^2 x + συν^2 x}{ημ^2 x} = -\frac{1}{ημ^2 x} \end{aligned}$$

-Τέλος Λύσης-

Αν στις σχέσεις (4) έως (8) αντικαταστήσουμε το x με μία παραγωγίσημη συνάρτηση $g(x)$, τότε με τη βοήθεια του κανόνα (13), οι σχέσεις (4) έως (8) θα πάρουν τη μορφή:

$$\left((g(x))^{ρ}\right)' = ρ\,(g(x))^{ρ-1}\, g'(x)\,,\quad ρ \in \mathbb{Q} \tag{16}$$

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{1}{(g(x))^2} g'(x) \tag{17}$$

$$\left(\sqrt{g(x)}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} g'(x) \tag{18}$$

$$\left(ημ\,(g(x)\right)' = συν\,(g(x))\, g'(x) \tag{19}$$

$$(συν\,(g(x)))' = -ημ\,(g(x))\, g'(x)$$

Άσκηση 4

Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων:

i. $f\left(x\right)=\left(2x+4\right)^{10}$
ii. $f\left(x\right)=\sqrt{x^2+2x+5}$
iii. $f\left(x\right)=\eta\mu\left(3x\right)$
iv. $f\left(x\right)=\sigma\upsilon\nu\sqrt{x}$
v. $f\left(x\right)=\eta\mu^5x$

Λύση

i.

$$\begin{aligned}f\left(x\right)&=\left(\left(2x+4\right)^{10}\right)'\overset{(16)}{=}10\left(2x+4\right)^9\left(2x+4\right)'\\&\overset{(2),(3),(9)}{=}10\left(2x+4\right)^9 2=20\left(2x+4\right)^9\end{aligned}$$

ii.

$$\begin{aligned}f\left(x\right)&=\left(\sqrt{x^2+2x+5}\right)'\\&\overset{(18)}{=}\frac{1}{2\sqrt{x^2+2x+5}}\left(x^2+2x+5\right)'\\&=\frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+5}}=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}}\end{aligned}$$

iii.

$$f\left(x\right)=\left(\eta\mu\left(3x\right)\right)'\overset{(19)}{=}\sigma\upsilon\nu\left(3x\right)\left(3x\right)'=3\sigma\upsilon\nu\left(3x\right)$$

iv.

$$f\left(x\right)=\left(\sigma\upsilon\nu\sqrt{x}\right)'\overset{(20)}{=}-\eta\mu\left(\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x}\right)'=-\eta\mu\left(\sqrt{x}\right)\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

v.

$$f\left(x\right)=\left(\eta\mu^5x\right)'\overset{(16)}{=}5\eta\mu^4x\left(\eta\mu x\right)'=5\eta\mu^4x\,\sigma\upsilon\nu x$$

-Τέλος Λύσης-

Άσκηση 5

Αν $h\left(x\right)=f\left(g\left(x\right)\right)$ και $g\left(1\right)=2,\ g'\left(1\right)=3$ και $f'\left(2\right)=4,$ να βρεθεί το $h'\left(1\right)$.

Λύση

Λόγω του κανόνα (13) θα έχουμε:

$$h'\left(x\right)=\left(f\left(g\left(x\right)\right)\right)'=f'\left(g\left(x\right)\right)g'\left(x\right)$$

Για $x=1$ η παραπάνω σχέση παίρνει τη μορφή:

$$h'\left(1\right)=f'\left(g\left(1\right)\right)g'\left(1\right)=f'\left(2\right)3=4\cdot 3=12$$

-Τέλος Λύσης-

Προσπαθήστε μόνοι σας

Άσκηση 6

Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων:
i. $f\left(x\right)=-2x^4+3\alpha x^2-5x+\beta$
ii. $f\left(x\right)=\sqrt[3]{x}-\dfrac{3}{x^3}$
iii. $f\left(x\right)=\sqrt{\alpha x}\cdot\eta\mu x$
iv. $f\left(x\right)=\dfrac{\eta\mu x}{2x+1}$
v. $f\left(x\right)=\left(x+1\right)^8$
vi. $f\left(x\right)=\sqrt{\alpha x+2}$
vii. $f\left(x\right)=\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$

Άσκηση 7

Αν $f\left(x\right)=A\,\eta\mu\,\omega x+B\,\sigma\upsilon\nu\,\omega x$ να δείξετε ότι: $f''\left(x\right)+\omega^2 f\left(x\right)=0$

Άσκηση 8

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f\left(x\right)>0,\ f\left(1\right)=3$ και $f'\left(1\right)=0$ να δείξετε ότι για τη συνάρτηση

$$g\left(x\right)=\sqrt{f\left(x\right)+x^2}$$

ισχύει $g'\left(1\right)=\dfrac{1}{2}$

Στείλε την προσπάθειά σου