MATHEMATICS

Pure mathematics is, in its way, the poetry of logical ideas.

Η ΈΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΏΓΟΥ

Έστω συνάρτηση f και σημείο A της C_f με συντεταγμένες $(x_0, f(x_0))$. Θα ορίσουμε την εφαπτομένη της C_f στο A. Για το λόγο αυτό, θεωρούμε ένα σημείο B της C_f του οποίου η τετμημένη απέχει απόσταση h από το A. Προφανώς, οι συντεταγμένες του σημείου B θα είναι οι $(x_0 + h, f(x_0 + h))$. Έστω ε η ευθεία που ορίζεται από τα A και B (πράσινη ευθεία). Παρατηρούμε ότι καθώς το h τείνει στο μηδέν, το σημείο B πλησιάζει το σημείο A και η ευθεία ε τείνει να πάρει μία οριακή θέση. Η οριακή αυτή θέση λέγεται εφαπτομένη (tangent) της C_f στο A. Η κλίση α (συντελεστής διεύθυνσης) της ε είναι η εφαπτομένη της γωνίας ω. Έστω τα τμήματα $A\Gamma \parallel x'x$ και $B\Gamma \parallel y'y$, τότε $\omega = \varphi$ ως εντός εκτός και επί ταυτά. Επομένως θα έχουμε:

$$\alpha = \varepsilon\varphi\omega = \varepsilon\varphi\phi = \frac{B\Gamma}{A\Gamma} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{1}$$

Η κλίση της εφαπτομένης στο A ισούται με το όριο της ποσότητας (1) όταν $h \to 0$. Έχουμε λοιπόν τον ακόλουθο ορισμό:

Να βρεθεί η παράγωγος της $f\left(x\right)=x^{2}$ στα σημεία:

1. $x=1.$
2. $x=2.$
3. $x=-1.$

Λύση

- *Για* $x=1$

Από το ορισμό (σχέση 2) θα έχουμε:

$$f'\left(1\right)=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(1+h\right)-f\left(1\right)}{h}$$

Παρατηρούμε ότι:

$$f\left(1+h\right)=\left(1+h\right)^{2}=\left(1^{2}+2\cdot 1\cdot h+h^{2}\right)=h^{2}+2h+1$$

επίσης

$$f\left(1\right)=1^{2}=1$$

άρα

$$\begin{aligned}f'\left(1\right)&=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(1+h\right)-f\left(1\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^{2}+2h+\cancel{1}-\cancel{1}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^{2}+2h}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(h+2)}{\cancel{h}}=\lim_{h\to 0}(h+2)\Rightarrow\boxed{f'\left(1\right)=2}\end{aligned}$$

- *Για* $x=2$

Από το ορισμό (σχέση 2) θα έχουμε:

$$f'\left(2\right)=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(2+h\right)-f\left(2\right)}{h}$$

Παρατηρούμε ότι:

$$f\left(2+h\right)=\left(2+h\right)^{2}=\left(2^{2}+2\cdot 2\cdot h+h^{2}\right)=h^{2}+4h+4$$

επίσης

$$f\left(2\right)=2^2=4$$

άρα

$$\begin{aligned} f'\left(2\right)&=\lim_{h\to0}\frac{f\left(2+h\right)-f\left(2\right)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h^2+4h+\cancel{4}-\cancel{4}}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h^2+4h}{h}\\ &=\lim_{h\to0}\frac{\cancel{h}(h+4)}{\cancel{h}}=\lim_{h\to0}(h+4)\Rightarrow\boxed{f'\left(2\right)=4}\end{aligned}$$

- *Για* $x=-1$

Από το ορισμό (σχέση 2) θα έχουμε:

$$f'\left(-1\right)=\lim_{h\to0}\frac{f\left(-1+h\right)-f\left(-1\right)}{h}$$

Παρατηρούμε ότι:

$$f\left(-1+h\right)=\left(-1+h\right)^2=\left(\left(-1\right)^2+2\cdot\left(-1\right)\cdot h+h^2\right)=h^2-2h+1$$

επίσης

$$f\left(-1\right)=\left(-1\right)^2=1$$

άρα

$$\begin{aligned} f'\left(-1\right)&=\lim_{h\to0}\frac{f\left(-1+h\right)-f\left(-1\right)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h^2-2h+\cancel{1}-\cancel{1}}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h^2-2h}{h}\\ &=\lim_{h\to0}\frac{\cancel{h}(h-2)}{\cancel{h}}=\lim_{h\to0}(h-2)\Rightarrow\boxed{f'\left(-1\right)=-2}\end{aligned}$$

-Τέλος Λύσης-

Το γεγονός ότι η παράγωγος ισοδυναμεί με την κλίση της εφαπτομένης, μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η παράγωγος μετρά το πόσο απότομα «ανεβαίνει» (θετική παράγωγος) ή «κατεβαίνει» (αρνητική παράγωγος) η C_f στο σημείο x_0. Στην παρακάτω εφαρμογή μπορείτε να συγκρίνεται την εκάστοτε τιμή της παραγώγου που βρήκαμε στην άσκηση 1 με την αντίστοιχη κλίση της εφαπτομένης. Πολλές φορές η παράγωγος $f'\left(x_0\right)$ καλείται ρυθμός μεταβολής (rate of change) του $y=f\left(x\right)$ ως προς x, όταν $x=x_0$.

Έστω $h > 0$, τότε

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \overset{(x_0=0)}{=} \lim_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h-0}{h} = 1$$

Για $h < 0$ έχουμε:

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h<0}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \overset{(x_0=0)}{=} \lim_{\substack{h \to 0 \\ h<0}} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-h-0}{h} = -1$$

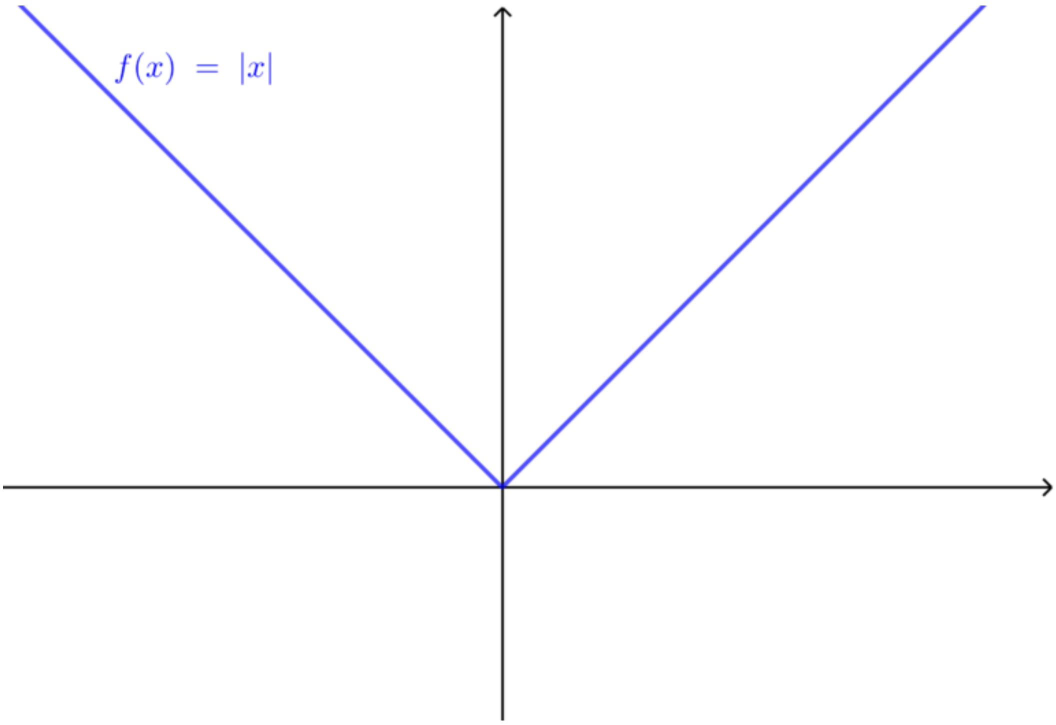
άρα παρατηρούμε ότι στο $x_0 = 0$ είναι:

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \neq \lim_{\substack{h \to 0 \\ h<0}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

επομένως δεν υπάρχει το όριο (2) της παραγώγου και άρα η συγκεκριμένη συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

-Τέλος Λύσης-

Η γραφική παράσταση της $f(x) = |x|$ παρουσιάζεται στο ακόλουθο σχήμα. Παρατηρούμε ότι στο $x_0 = 0$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης σχηματίζει «γωνία». Αυτή είναι η χαρακτηριστική εικόνα που έχουν οι μη παραγωγίσιμες συναρτήσεις, αντίθετα οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις είναι «ομαλές» και χωρίς «γωνίες».



Προσπαθήστε μόνοι σας

Άσκηση 3

Με τη βοήθεια του ορισμού της παραγώγου, να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης

1. $f\left(x\right)=2x+3$ στο $x=1$
2. $f\left(x\right)=4x^2$ στο $x=2$
3. $f\left(x\right)=x^2+\alpha x$ στο $x=1$
4. $f\left(x\right)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ στο $x=-1$
5. $f\left(x\right)=\sqrt{x}$ στο $x=4$
6. $f\left(x\right)=\frac{1}{x}$ στο $x=2$

Άσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f\left(x\right)=2+\left|x-1\right|$$

Να αποδείξετε ότι δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$

Στείλε την προσπάθειά σου

Ορισμός

Αν το όριο

$$\lim_{h \to 0} \frac{f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0\right)}{h}$$

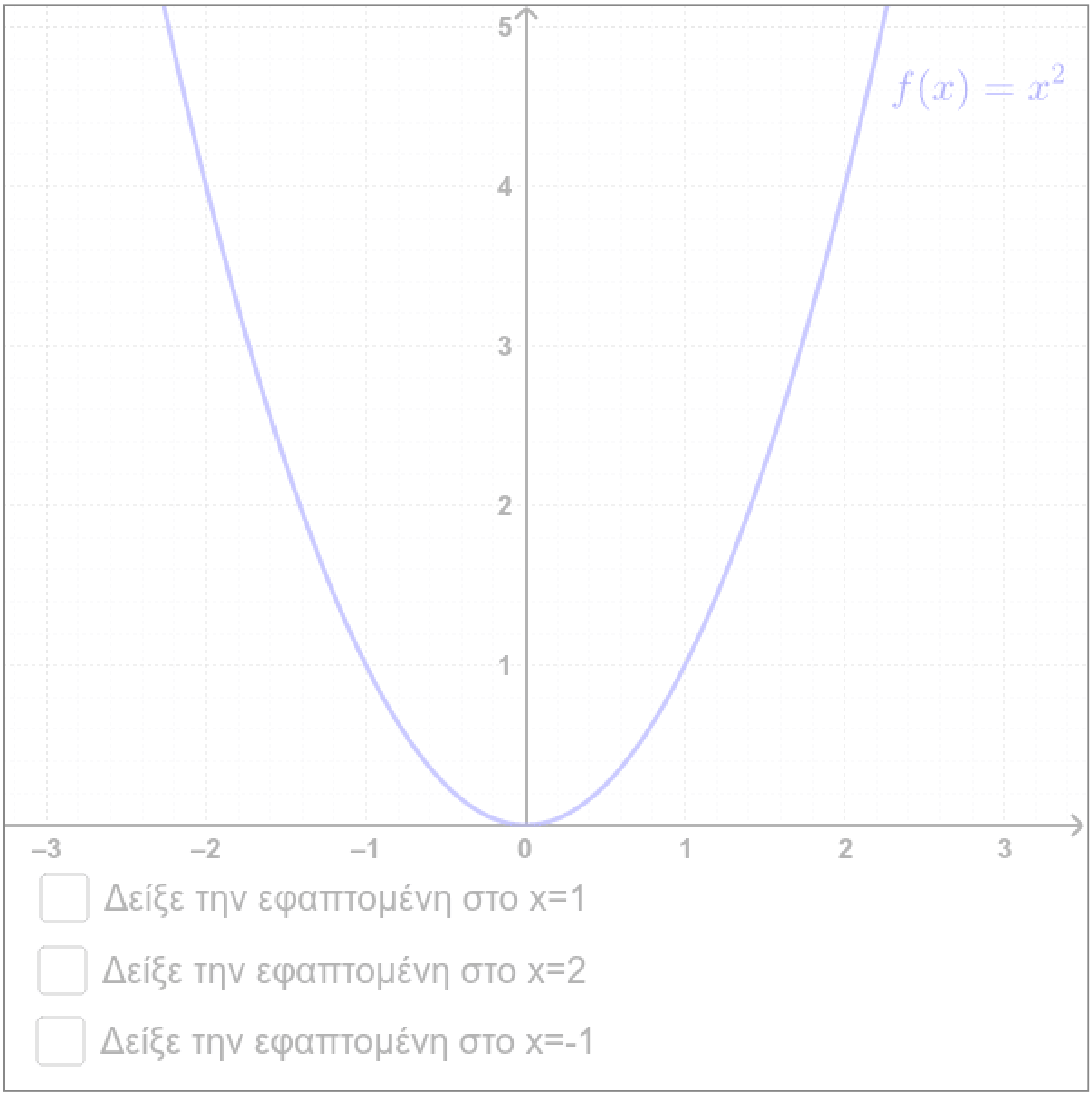
υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός, τότε λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της. Το όριο αυτό ονομάζεται **παράγωγος** της f στο x_0 και συμβολίζεται με $f'\left(x_0\right)$. Έχουμε λοιπόν:

$$f'\left(x_0\right)=\lim_{h \to 0} \frac{f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0\right)}{h} \qquad (2)$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω, η κλίση (συντελεστής διεύθυνσης) α της εφαπτομένης στο σημείο $A\left(x_0, f(x_0)\right)$ της C_f ισούται με την παράγωγο της f στο x_0, δηλαδή:

$$\alpha=f'\left(x_0\right) \qquad (3)$$

Άσκηση 1



Αποδεικνύεται ότι αν μία συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό. Υπάρχουν όμως περιπτώσεις που δεν ισχύει το αντίστροφο, δηλαδή υπάρχουν συναρτήσεις που είναι συνεχής σε κάποιο σημείο αλλά όχι παραγωγίσιμες. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η παρακάτω συνάρτηση:

Άσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f\left(x\right)=\left|x\right|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$$

Να αποδείξετε ότι δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$

Λύση