# MATHEMATICS

Pure mathematics is, in its way, the poetry of logical ideas.

## ΣΥΝΈΧΕΙΑ ΣΥΝΆΡΤΗΣΗΣ

Είδαμε ότι μία συνάρτηση $f$ με πεδίο ορισμού το $A$ λέγεται συνεχής, αν για κάθε $x_0 \in A$ ισχύει:

$$\lim_{x \to x_0} f\left(x\right) = f\left(x_0\right).$$

### Άσκηση 1

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:

$$f\left(x\right) = \begin{cases} x^2\,, & x \neq 2 \\ 3\,, & x = 2 \end{cases}$$

δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 2$.

***Λύση***

Για να είναι συνεχής η συνάρτηση στο $x_0 = 2$ θα πρέπει:

$$\lim_{x \to 2} f\left(x\right) = f\left(2\right).$$

Παρατηρούμε ότι:

$$f\left(2\right) = 3$$

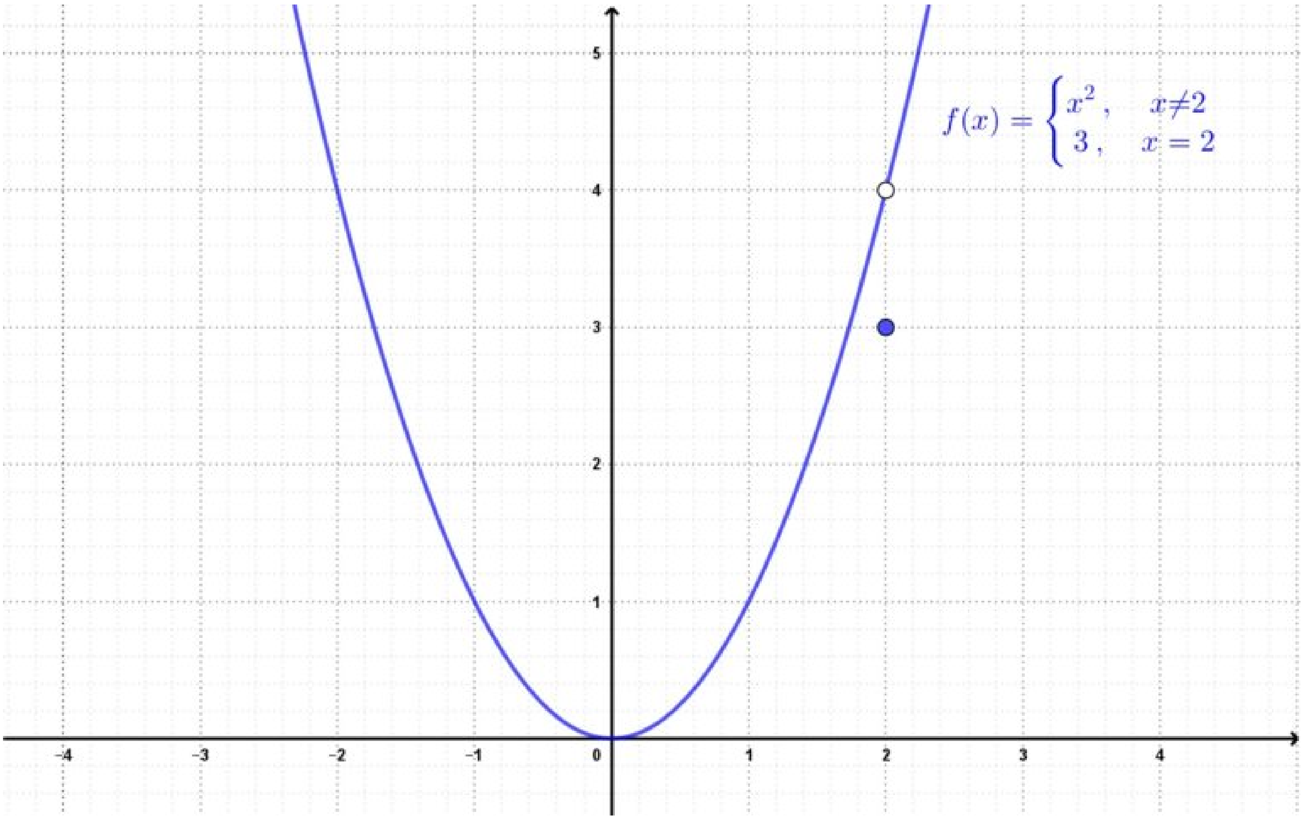
και

$$\lim_{x \to 2} f\left(x\right) = \lim_{x \to 2} \left(x^2\right) = 2^2 = 4$$

άρα

$$\lim_{x \to 2} f\left(x\right) \neq f\left(2\right)$$

Επομένως η συνάρτηση $f$ δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 2$.




*-Τέλος Λύσης-*

**Άσκηση 2**

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x < 1 \\ -x + 2, & x \geqslant 1 \end{cases}$$

δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

***Λύση***

Για να είναι συνεχής η συνάρτηση στο $x_0 = 1$ θα πρέπει:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = f(1).$$

Παρατηρούμε ότι:

$$f(1) = -1 + 2 = 1.$$

Για $x > 1$ έχουμε

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f\left(x\right)=\lim_{x\to 1}\left(-x+2\right)=-1+2=1.$$

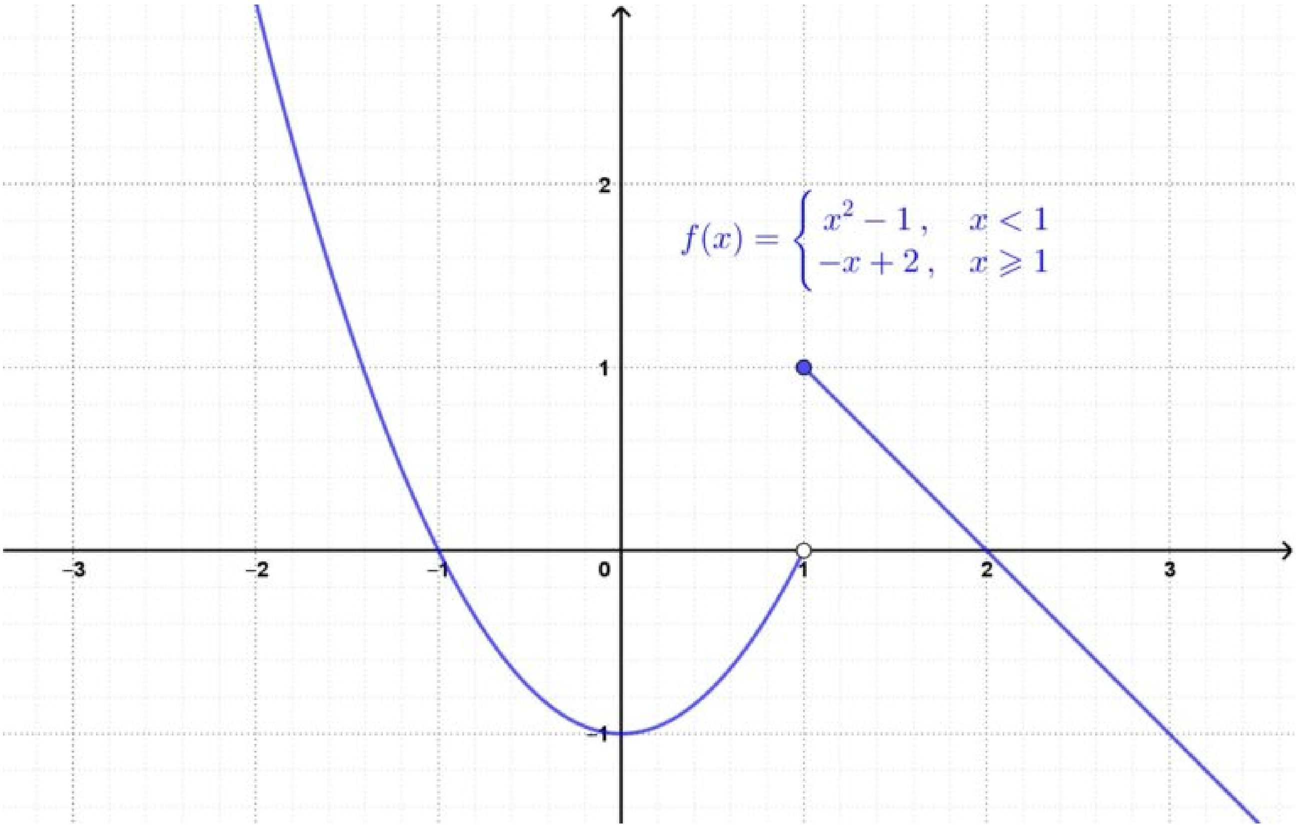
Για $x<1$ έχουμε

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f\left(x\right)=\lim_{x\to 1}\left(x^2-1\right)=1^2-1=0$$

άρα

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f\left(x\right)\neq\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f\left(x\right)$$

Επομένως η συνάρτηση $f$ δεν είναι συνεχής στο $x_0=1$.




*-Τέλος Λύσης-*

**Άσκηση 3**

Δίνεται η συνάρτηση

$$f\left(x\right)=\begin{cases}\alpha x^2+2\,, & x<-1\\ 3\alpha x+6\alpha\,, & x\geqslant -1\end{cases}$$

Να βρεθεί η τιμή του $\alpha$ ώστε η $f$ να είναι συνεχής στο $x_0=-1$.

***Λύση***

Για να είναι συνεχής η συνάρτηση στο $x_0 = -1$ θα πρέπει:

$$\lim_{x\to -1} f\left(x\right) = f\left(-1\right).$$

Παρατηρούμε ότι:

$$f\left(-1\right) = -3\alpha + 6\alpha = 3\alpha$$

Για $x > -1$ έχουμε

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f\left(x\right) = \lim_{x\to -1}\left(3\alpha x + 6\alpha\right) = -3\alpha + 6\alpha = 3\alpha.$$

Για $x < -1$ έχουμε

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} f\left(x\right) = \lim_{x\to -1}\left(\alpha x^2 + 2\right) = \alpha + 2$$

άρα για να είναι συνεχής στο $x_0 = -1$ πρέπει

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f\left(x\right) = \lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} f\left(x\right) \Rightarrow 3\alpha = \alpha + 2 \Rightarrow \boxed{\alpha = 1}$$

**Άσκηση 5**

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:

$$f\left(x\right)=\begin{cases}2x^2+x+1\,, & x<-1\\ -3x-2\,, & x\geqslant -1\end{cases}$$

δεν είναι συνεχής στο $x_0=-1$.

**Άσκηση 6**

Δίνεται η συνάρτηση

$$f\left(x\right)=\begin{cases}2x^2+\alpha x+1\,, & x<1\\ -\alpha x^2+7\,, & x\geqslant 1\end{cases}$$

Να βρεθεί η τιμή του $\alpha$ ώστε η $f$ να είναι συνεχής στο $x_0=1$.

**Άσκηση 7**

Αν η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το $(2,3)$, να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to 2}\frac{f\left(x\right)\left(x-2\right)}{x^2-x-2}$$

**Στείλε την προσπάθειά σου**

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 2x^2\,, & x \neq 1 \\ 3\,, & x = 1 \end{cases}$$

*-Τέλος Λύσης-*

***Προσπαθήστε μόνοι σας***

### Άσκηση 4

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 2x^2\,, & x \neq 1 \\ 3\,, & x = 1 \end{cases}$$

είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.