Άσκηση 3

Μία σφαιρική μπάλα χιονιού αρχίζει να λιώνει. Η ακτίνα της, που ελαττώνεται, δίνεται σε cm από τον τύπο $r(t)=4-t^2$, όπου t ο χρόνος σε sec. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της επιφάνειας E και του όγκου V της μπάλας, όταν t=1 sec. Θυμίζουμε ότι $E=4\pi r^2$ και $V=\frac{4}{3}\pi r^3$.

ΛΥΣΗ

Μετά την αντικατάσταση του r στην εξίσωση της επιφάνειας θα έχουμε:

$$E(t) = 4\pi (4-t^2)^2$$

Ο ρυθμός μεταβολής της επιφάνειας Ε για χρόνο t=1 sec θα ισούται με την τιμή της παραγώγου της Ε στο 1, δηλαδή Ε'(1). Ας παραγωγίσουμε:

$$E'(t) = (4\pi(4-t^2)^2)' = 8\pi(4-t^2)(4-t^2)' = 8\pi(4-t^2)(-2t) = -16\pi t(4-t^2)$$

άρα ο ζητούμενος ρυθμός μεταβολής επιφάνειας θα είναι:

$$E'(1) = -16\pi 1(4-1^2) = -48\pi \Rightarrow E'(1) = -48\pi$$

Αντίστοιχα θα κάνουμε αντικατάσταση και στον όγκο για να βρούμε την εξίσωση του όγκου:

$$V(t) = \frac{4}{3}\pi(4-t^2)^3$$

Ο ρυθμός μεταβολής του όγκου V για χρόνο t=1 sec θα ισούται με την τιμή της παραγώγου V στο 1, δηλαδή V'(1). Ας παραγωγίσουμε:

$$V(t) = (\frac{4}{3}\pi(4-t^2)^3)' = \frac{4}{3}\pi 3(4-t^2)^2(4-t^2)' = 4\pi(4-t^2)^2(-2t) = -8\pi t(4-t^2)^2$$

άρα ο ζητούμενος ρυθμός μεταβολής όγκου θα είναι:

$$V'(1) = -8\pi (4-1^2)^2 = -8\pi 9 \Rightarrow V'(1) = -72\pi$$

Άσκηση 4

Ένα σώμα μάζας $m=3\,Kg$ κινείται ευθύγραμμα λόγω της επίδρασης μίας δύναμης F για 7s. Η συνάρτηση θέσης του σώματος είναι η:

$$x(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 8t$$

με το x να μετριέται σε μέτρα (m) και ο χρόνος σε δευτερόλεπτα (s). να βρεθούν:

- i. Η συνάρτηση της ταχύτητας $v\left(t
 ight)$
- ii. Η συνάρτηση της επιτάχυνσης $lpha\left(t
 ight)$
- iii. Η συνάρτηση της δύναμης που ασκείται στο σώμα $F\left(t
 ight)$
- iv. Ποια είναι η ταχύτητα του σώματος τη χρονική $t=0\,s$
- **ν.** Ποια είναι η δύναμη που ασκείται στο σώμα τη χρονική $t=2\,s$
- **νί.** Ποιες χρονικές στιγμές μηδενίζεται η ταχύτητα;
- vii. Πότε το σώμα κινείται στη θετική κατεύθυνση και πότε στην αρνητική κατεύθυνση;
- viii. Να βρεθεί το ολικό διάστημα που έχει διανύσει το σημείο στη διάρκεια των πρώτων 7s.

ΛΥΣΗ

i. Για την συνάρτηση της ταχύτητας γνωρίζουμε ότι υ(t) = x'(t) άρα:

$$v(t)=x'(t)=(\frac{1}{3}t^3-3t^2+8t)'=t^2-6t+8\Rightarrow v(t)=t^2-6t+8$$

ii. Για την συνάρτηση της επιτάχυνσης γνωρίζουμε ότι α(t) = u'(t) = x''(t) άρα:

$$\alpha(t) = v'(t) = (t^2 - 6t + 8)' = 2t - 6 \Rightarrow \alpha(t) = v'(t) = 2t - 6$$

iii.Γνωρίζουμε από τον 2ο Νόμο του Νεύτωνα ότι F=m*α άρα

$$F(t) = m * \alpha(t) = 3 (2t-6) => F(t) = 6 t - 18$$

iv. Η ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή t=0s είναι

$$u(0) = 0^2 - 6*0 + 8 => u(0) = 8 \text{ m/s}$$

ν. Η δύναμη που ασκείται στο σώμα τη χρονική στιγμή t=2s είναι

$$F(2) = 6*2-18 = 12-18 = -6 => F(2) = -6 N$$

νί. Η ταχύτητα μηδενίζεται τις χρονικές στιγμές t για τις οποίες ισχύει $v\left(t\right)=0$, οπότε θα έχουμε:

$$u(t) = 0 => t^2-6t+8 = 0$$

$$\Delta = 36 - 4*8 = 36-32 = 4$$

$$t_1 = \frac{-(-6) - \sqrt{4}}{2} = \frac{6-2}{2} = 2$$

$$t_2 = \frac{-(-6) + \sqrt{4}}{2} = \frac{6+2}{2} = 4$$

Άρα η ταχύτητα του σώματος μηδενίζεται τις χρονικές στιγμές t_1 =2 και t_2 =4

νίὶ. Το σώμα κινείται στη θετική κατέυθυνση όταν v>0 και στην αρνητική κατέυθυνση όταν v<0. Για να βρούμε τα χρονικά διαστήματα που η ταχύτητα είναι θετική και αρνητική

θα μελετήσουμε το τριώνυμο t^2 -6t+8 ως προς το πρόσημο για τις διάφορες τιμές του t. Έχουμε επομένως τον ακόλουθο πίνακα προσήμων:

t	0	2	4		7
t ² -6t+8	+	0	- 0	+	

Παρατηρούμε ότι το σώμα κινείται προς τη θετική κατεύθυνση (δεξιά) όταν $t \in [0,2)$ U (4,7] και προς την αρνητική κατεύθυνση (αριστερα) όταν $t \in (2,4)$

viii. Για να βρούμε το συνολικό διάστημα που διένυσε το σώμα στο διάστημα 0s-7s θα υπολογίσουμε τα επιμέρους διαστήματα που διένυσε το σώμα κατά τη θετική και κατά την αρνητική φορά. Σύμφωνα με τον πίνακα προσήμων του προηγούμενου ερωτήματος παρατηρούμε ότι το σώμα κινείται προς τη θετική φορά απο 0s-2s και από 4s-7s, ενώ προς την αρνητική φορά κινείται από 2s-4s. Άρα θα έχουμε:

$$\begin{split} S_1 &= |x(2) - x(0)| = \left| \frac{20}{3} - 0 \right| = \frac{20}{3} m \\ S_2 &= |x(4) - x(2)| = \left| \frac{16}{3} - \frac{20}{3} \right| = \frac{4}{3} m \\ S_3 &= |x(4) - x(4)| = \left| \frac{70}{3} - \frac{16}{3} \right| = \frac{54}{3} m \end{split}$$

Επομένως η το ολικό διάστημα S που διάνυσε το σώμα σε χρόνο 7s είναι:

$$S_1 + S_2 + S_3 = \frac{20 + 4 + 54}{3} = \frac{78}{3} = 26 \, m$$