

MATHEMATICS

Pure mathematics is, in its way, the poetry of logical ideas.

ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ ΚΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΘΕΣΗΣ

Η παράγωγος της f στο σημείο x_0 ονομάζεται και **ρυθμός μεταβολής** (rate of change), διότι ο αριθμός $f'(x_0)$ είναι ένα μέτρο του πόσο «γρήγορα» μεταβάλλεται η ποσότητα $y = f(x)$ ως προς το x , όταν $x = x_0$. Επομένως, αν σε κάποια άσκηση μας ζητηθεί ο ρυθμός μεταβολής μιας συνάρτησης ως προς κάποια τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής, ουσιαστικά μας ζητείται η παράγωγος στο αντίστοιχο σημείο.

Άσκηση 1

Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού E ενός τετραγώνου πλευράς x όταν $x = 3$.

Λύση

Το εμβαδόν E τετραγώνου πλευρά x υπολογίζεται από τον τύπο $E = x^2$, επομένως είναι μία συνάρτηση του x :

$$E(x) = x^2$$

Ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού E όταν $x = 3$ ισούται με την τιμή της παραγώγου στο 3, δηλαδή με $E'(3)$. Από τους κανόνες παραγώγισης έχουμε:

$$E'(x) = (x^2)' = 2x$$

άρα ο ζητούμενος ρυθμός μεταβολής είναι: $E'(3) = 2 \cdot 3 = 6$

-Τέλος Λύσης-

Ας υποθέσουμε ότι ένα σώμα κινείται πάνω σε μία ευθεία (ευθύγραμμη κίνηση). Η απόσταση x του σώματος από ένα σημείο αναφοράς O είναι μία συνάρτηση του χρόνου t και ονομάζεται συνάρτηση θέσης. Αν $x(t)$ είναι η συνάρτηση θέσης ενός σώματος, τότε η ταχύτητα $v(t)$ ορίζεται από την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης θέσης και η επιτάχυνση $a(t)$ από τη δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης θέσης:

$$v(t) = x'(t) \quad (1)$$

$$a(t) = v'(t) = x''(t) \quad (2)$$

Άσκηση 2

Ένα σώμα μάζας $m = 2 \text{ Kg}$ κινείται ευθύγραμμα λόγω της επίδρασης μίας δύναμης F για 7 s . Η συνάρτηση θέσης του σώματος είναι η:

$$x(t) = t^3 - 9t^2 + 15t$$

με το x να μετριέται σε μέτρα (m) και ο χρόνος σε δευτερόλεπτα (s). να βρεθούν:

- i. Η συνάρτηση της ταχύτητας $v(t)$
- ii. Η συνάρτηση της επιτάχυνσης $a(t)$
- iii. Η συνάρτηση της δύναμης που ασκείται στο σώμα $F(t)$
- iv. Ποια είναι η ταχύτητα του σώματος τη χρονική $t = 0 \text{ s}$
- v. Ποια είναι η δύναμη που ασκείται στο σώμα τη χρονική $t = 2 \text{ s}$
- vi. Ποιες χρονικές στιγμές μηδενίζεται η ταχύτητα;
- vii. Πότε το σώμα κινείται στη θετική κατεύθυνση και πότε στην αρνητική κατεύθυνση;
- viii. Να βρεθεί το ολικό διάστημα που έχει διανύσει το σημείο στη διάρκεια των πρώτων 7 s .

Λύση

- i. Για την συνάρτηση της ταχύτητας γνωρίζουμε ότι $v(t) = x'(t)$ άρα:

$$\begin{aligned} v(t) = x'(t) &= (t^3 - 9t^2 + 15t)' \\ &= (t^3)' - 9(t^2)' + 15(t)' \\ &= 3t^2 - 9 \cdot 2t + 15 \\ &\Rightarrow \boxed{v(t) = 3t^2 - 18t + 15} \end{aligned}$$

- ii. Για την συνάρτηση της επιτάχυνσης γνωρίζουμε ότι $a(t) = v'(t) = x''(t)$ άρα:

$$\begin{aligned} a(t) = v'(t) &= (3t^2 - 18t + 15)' \\ &= 3(t^2)' - 18(t)' + (15)' \\ &= 3 \cdot 2t - 18 \cdot 1 + 0 \\ &\Rightarrow \boxed{a(t) = 6t - 18} \end{aligned}$$

iii. Γνωρίζουμε από τον 2ο Νόμο του Νεύτωνα ότι $F = m \cdot \alpha$, άρα:

$$F(t) = m\alpha(t) = 2(6t - 18) \Rightarrow \boxed{F(t) = 12t - 36}$$

iv. Η ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή $t = 0$ s είναι:

$$v(0) = 3 \cdot 0^2 - 18 \cdot 0 + 15 \Rightarrow \boxed{v(0) = 15 \text{ m/s}}$$

v. Η δύναμη που ασκείται στο σώμα τη χρονική στιγμή $t = 2$ s είναι:

$$F(2) = 12 \cdot 2 - 36 \Rightarrow \boxed{F(2) = -12 \text{ N}}$$

vi. Οι ταχύτητα μηδενίζεται τις χρονικές στιγμές t για τις οποίες ισχύει $v(t) = 0$, οπότε θα έχουμε:

$$\begin{aligned} v(t) &= 0 \\ \Rightarrow 3t^2 - 18t + 15 &= 0 \\ \Rightarrow \boxed{t_1 = 1 \text{ s}} \quad \boxed{t_2 = 5 \text{ s}} \end{aligned}$$

Άρα η ταχύτητα του σώματος μηδενίζεται τις χρονικές στιγμές $t_1 = 1$ s και $t_2 = 5$.

vii. Το σώμα κινείται στη θετική κατεύθυνση όταν $v > 0$ και στην αρνητική κατεύθυνση όταν $v < 0$. Για να βρούμε τα χρονικά διαστήματα που η ταχύτητα είναι θετική και αρνητική θα μελετήσουμε το τριώνυμο $3t^2 - 18t + 15$ ως προς το πρόσημο για τις διάφορες τιμές του t . Έχουμε επομένως τον ακόλουθο πίνακα προσήμων:

t	0	1	5	7	
$3t^2 - 18t + 15$	+	0	-	0	+

Παρατηρούμε ότι το σώμα κινείται προς τη θετική κατεύθυνση (δεξιά) όταν $t \in [0, 1) \cup (5, 7]$ και προς την αρνητική κατεύθυνση (αριστερά) όταν $t \in (1, 5)$.

viii. Για να βρούμε το συνολικό διάστημα που διένυσε το σώμα στο διάστημα $0\text{s} - 7\text{s}$ θα υπολογίσουμε τα επιμέρους διαστήματα που διένυσε το σώμα κατά τη θετική και κατά την αρνητική φορά. Σύμφωνα με τον πίνακα προσήμων του προηγούμενου ερωτήματος παρατηρούμε ότι το σώμα κινείται προς τη θετική φορά από $0\text{s} - 1\text{s}$ και από $5\text{s} - 10\text{s}$, ενώ προς την αρνητική φορά κινείται από $1\text{s} - 5\text{s}$. Άρα θα έχουμε:

Προσπαθήστε μόνοι σας**Άσκηση 3**

Μία σφαιρική μπάλα χιονιού αρχίζει να λιώνει. Η ακτίνα της, που ελαττώνεται, δίνεται σε cm από τον τύπο $r(t) = 4 - t^2$, όπου t ο χρόνος σε sec . Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της επιφάνειας E και του όγκου V της μπάλας, όταν $t = 1 sec$. Θυμίζουμε ότι $E = 4\pi r^2$ και $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Άσκηση 4

Ένα σώμα μάζας $m = 3 Kg$ κινείται ευθύγραμμα λόγω της επίδρασης μίας δύναμης F για $7s$. Η συνάρτηση θέσης του σώματος είναι η:

$$x(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 8t$$

με το x να μετριέται σε μέτρα (m) και ο χρόνος σε δευτερόλεπτα (s). να βρεθούν:

- i. Η συνάρτηση της ταχύτητας $v(t)$
- ii. Η συνάρτηση της επιτάχυνσης $a(t)$
- iii. Η συνάρτηση της δύναμης που ασκείται στο σώμα $F(t)$
- iv. Ποια είναι η ταχύτητα του σώματος τη χρονική $t = 0 s$
- v. Ποια είναι η δύναμη που ασκείται στο σώμα τη χρονική $t = 2 s$
- vi. Ποιες χρονικές στιγμές μηδενίζεται η ταχύτητα;
- vii. Πότε το σώμα κινείται στη θετική κατεύθυνση και πότε στην αρνητική κατεύθυνση;
- viii. Να βρεθεί το ολικό διάστημα που έχει διανύσει το σημείο στη διάρκεια των πρώτων $7 s$.

Στείλε την προσπάθειά σου

$$S_1 = |x(1) - x(0)| = |7 - 0| = 7m$$

$$S_2 = |x(5) - x(1)| = |-25 - 7| = 32m$$

$$S_3 = |x(7) - x(5)| = |7 - (-25)| = 32m$$

Επομένως η το ολικό διάστημα S που διάνυσε το σώμα σε χρόνο $7s$ είναι:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = 7 + 32 + 32 = 71m$$

