MATHEMATICS

Pure mathematics is, in its way, the poetry of logical ideas.

ΜΟΝΟΤΟΝΊΑΣ ΚΑΙ ΑΚΡΌΤΑΤΑ ΣΥΝΆΡΤΗΣΗΣ

Μονοτονία

Ορισμός (Γνησίως Αύξουσας Συνάρτηση)

Μια συνάρτηση f λέγεται **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1,\ x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f\left(x_1\right) < f\left(x_2\right)$.

Στην παρακάτω εφαρμογή παρουσιάζεται μία γνησίως αύξουσα συνάρτηση, δύο σημεία x_1 και x_2 του άξονα $x'x$ με $x_1 < x_2$ και οι αντίστοιχες εικόνες $f\left(x_1\right)$ και $f\left(x_2\right)$. Μπορείτε να μετακινήσετε τα σημεία x_1 και x_2 και να δείτε πώς μεταβάλλονται οι αντίστοιχες εικόνες. Παρατηρούμε ότι για οποιαδήποτε x_1 και x_2 με $x_1 < x_2$ ισχύει $f\left(x_1\right) < f\left(x_2\right)$.

1. Η παράγωγος συνάρτηση της f είναι:

$$f'\left(x\right) = \left(x^3 + 2x\right)' = \left(x^3\right)' + 2\left(x\right)' \Rightarrow \boxed{f'\left(x\right) = 3x^2 + 2}$$

Παρατηρούμε ότι η εξίσωση $f'\left(x\right) = 0$ είναι αδύνατη, πράγματι:

$$f'\left(x\right) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 2 = 0 \Rightarrow x^2 = -\frac{2}{3}$$

επομένως η $f'\left(x\right)$ διατηρεί πρόσημο σε όλο το $\mathbb{R}$. Για να βρούμε το πρόσημο της f' αρκεί να υπολογίσμουμε την τιμή της f για ένα τυχαίο σημείο x. Για $x = 0$ έχουμε $f'\left(0\right) = 2 > 0$ άρα ισχύει $f'\left(x\right) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbb{R}$.

2. Σύμφωνα με τον ορισμό της γνησίως αύξουσας συνάρτησης για $x_1 < x_2$ ισχύει $f\left(x_1\right) < f\left(x_2\right)$. Επομένως, για $x_1 = 2019$ και $x_2 = 2020$ προκύπτει $f\left(2019\right) < f\left(2020\right)$.

-Τέλος Λύσης-

Ορισμός (Γνησίως Φθίνουσα Συνάρτηση)

Μια συνάρτηση f λέγεται **γνησίως φθίνουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1,\ x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f\left(x_1\right) > f\left(x_2\right)$.

Στην παρακάτω εφαρμογή παρουσιάζεται μία γνησίως φθίνουσα συνάρτηση, δύο σημεία x_1 και x_2 του άξονα $x'x$ με $x_1 < x_2$ και οι αντίστοιχες εικόνες $f\left(x_1\right)$ και $f\left(x_2\right)$. Μπορείτε να μετακινήσετε τα σημεία x_1 και x_2 και να δείτε πώς μεταβάλλονται οι αντίστοιχες εικόνες. Παρατηρούμε ότι για οποιαδήποτε x_1 και x_2 με $x_1 < x_2$ ισχύει $f\left(x_1\right) > f\left(x_2\right)$.

1. Η παράγωγος συνάρτηση της f είναι:

$$f'(x) = \left(-x^3 - 2x\right)' = -\left(x^3\right)' - 2\left(x\right)' \Rightarrow \boxed{f'(x) = -3x^2 - 2}$$

Παρατηρούμε ότι η εξίσωση $f'(x) = 0$ είναι αδύνατη, πράγματι:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -3x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x^2 = -\frac{2}{3}$$

επομένως η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο σε όλο το $\mathbb{R}$. Για να βρούμε το πρόσημο της f' αρκεί να υπολογίσουμε την τιμή της f για ένα τυχαίο σημείο x. Για $x = 0$ έχουμε $f'(0) = -2 < 0$ άρα ισχύει $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$		$\searrow$	

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το $\mathbb{R}$.

2. Σύμφωνα με τον ορισμό της γνησίως φθίνουσας συνάρτησης για $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$. Επομένως, για $x_1 = 2019$ και $x_2 = 2020$ προκύπτει $f(2019) > f(2020)$.

-Τέλος Λύσης-

Μια συνάρτηση που είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα λέγεται **γνησίως μονότονη**.

Ακρότατα

Ορισμός (Τοπικό Μέγιστο)

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέμε ότι παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο** στο $x_0 \in A$, όταν υπάρχει περιοχή Δ γύρω από το x_0 για την οποία για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει $f(x) \leqslant f(x_0)$.

Ορισμός (Ολικό Μέγιστο)

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέμε ότι παρουσιάζει **ολικό μέγιστο** στο $x_0 \in$ όταν για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) \leqslant f(x_0)$.

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέμε ότι παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο** στο $x_0 \in A$, όταν υπάρχει περιοχή Δ γύρω από το x_0 για την οποία για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει $f\left(x\right) \geqslant f\left(x_0\right)$.

Ορισμός (Ολικό Ελάχιστο)

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέμε ότι παρουσιάζει **ολικό ελάχιστο** στο $x_0 \in A$, όταν για κάθε $x \in A$ ισχύει $f\left(x\right) \geqslant f\left(x_0\right)$.

Το παραπάνω θεώρημα συνδέει την έννοια του τοπικού ελαχίστου με την έννοια της παραγώγου.

Θεώρημα (Κριτήριο Πρώτης Παραγώγου – Τοπικό Ελάχιστο)

Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_0) = 0$ για $x_0 \in (\alpha, \beta)$, $f'(x) < 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) > 0$ στο (x_0, β), τότε η f παρουσιάζει στο διάστημα (α, β) για $x = x_0$ ελάχιστο.

Αν επιπλέον το x_0 είναι μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f'(x_0) = 0$, τότε το $f(x_0)$ είναι ολικό ελάχιστο.

Στην παρακάτω εφαρμογή μετακινήστε το κόκκινο σημείο x του άξονα $x'x$ και παρατηρήστε πώς μεταβάλλεται η αντίστοιχη τιμή $y = f\left(x\right)$. Τα $f\left(x_0\right)$ και $f\left(x_1\right)$ είναι ολικό και τοπικό ελάχιστο αντίστοιχα.

Για $x = 0 < 1/2$ έχουμε $f'(0) = -1 < 0$. Επίσης για $x = 1 > 1/2$ έχουμε $f'(1) = 1 > 0$ οπότε έχουμε τον ακόλουθο πίνακα προσήμων:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1/2]$, γνησίως αύξουσα στο $[1/2, +\infty)$ και παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 1/2$ το οποίο είναι:

$$y = f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - 1 = -\frac{5}{4}$$

-Τέλος Λύσης-

Προσπαθήστε μόνοι σας

Άσκηση 4

Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις συναρτήσεις:

1. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$
2. $f(x) = x^3 - 3x + 2$
3. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$

Άσκηση 5

Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - 3x + 1$ παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα σημεία $x_1 = -1$ και $x_2 = 1$. Να καθορίσετε το είδος των ακρότατων.

Άσκηση 6

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \sigma\upsilon\nu\, x - \frac{3}{2}x.$$

Να αποδείξετε ότι για κάθε x πραγματικό ισχύει $f(x) - f(x+1) > 0$

Άσκηση 7

Δίνεται η συνάρτηση

$$f\left(x\right)=\frac{x^{2}+\lambda x}{x^{2}+1}.$$

Αν η f έχει μόνο ένα ακρότατο να βρεθεί η τιμή του λ και να αποδείξετε ότι $f\left(x\right)\geqslant 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Άσκηση 8

1. Να μελετηθεί η συνάρτηση
$$f\left(x\right)=\sqrt{\alpha x}-\frac{x}{2}$$
ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
2. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha,\ \beta>0$ ισχύει:
$$\sqrt{\alpha\cdot\beta}\leqslant\frac{\alpha+\beta}{2}$$

Άσκηση 9

Δίνεται η συνάρτηση

$$f\left(x\right)=\left(1+x\right)^{n}-nx$$

με $n\in\mathbb{N}, n\geqslant 2$ και $x\geqslant -1$

1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
2. Να δείξετε ότι για κάθε $n\in\mathbb{N}$ με $n\geqslant 2$ ισχύει:
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}>2$$

Το παραπάνω θεώρημα συνδέει την έννοια της γνησίως αύξουσας συνάρτησης με την έννοια της παραγώγου.

Θεώρημα

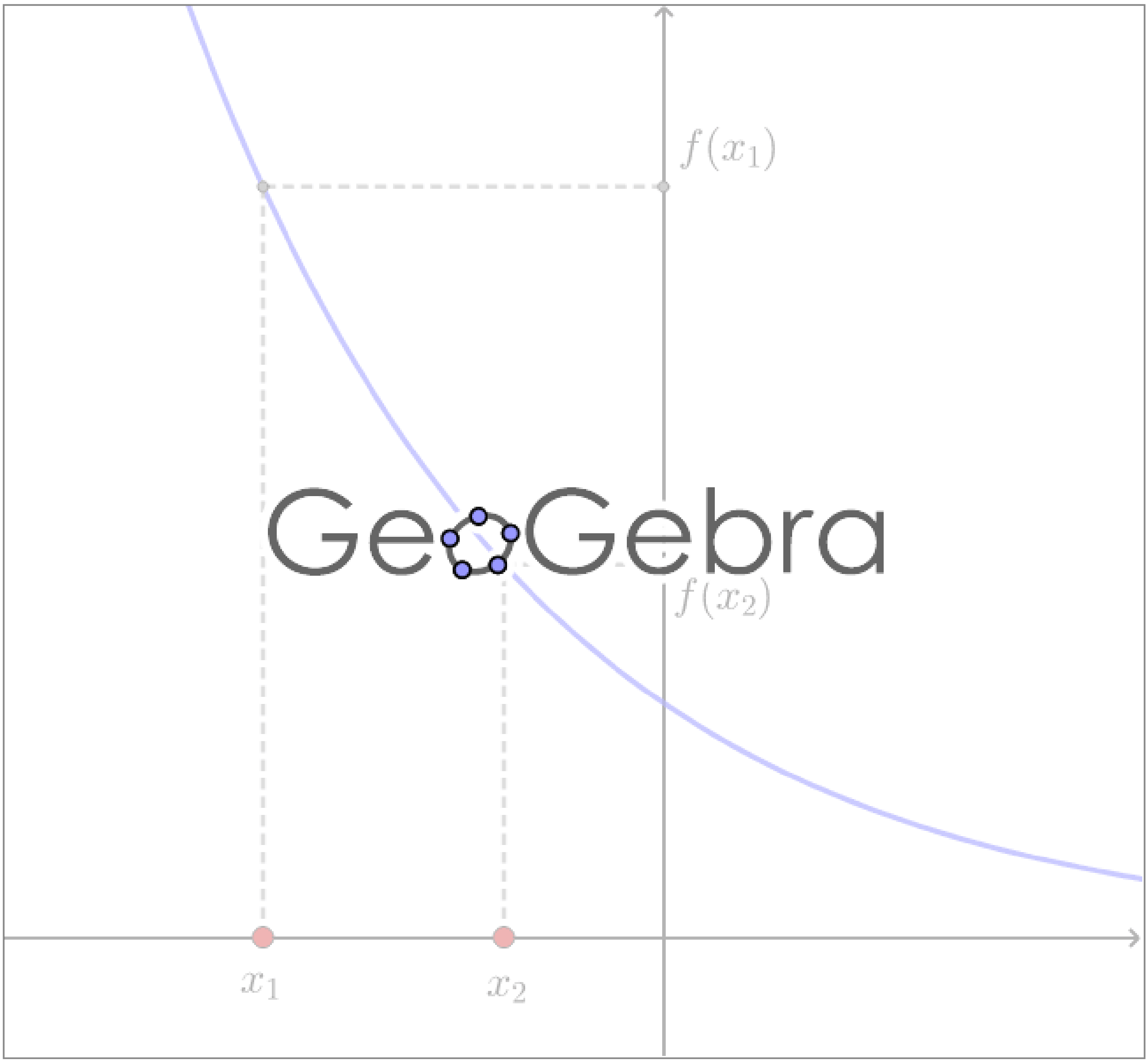
Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο Δ.

Άσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 2x$

1. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
2. Να συγκρίνεται τις τιμές $f(2019)$ και $f(2020)$.

Λύση



Το παραπάνω θεώρημα συνδέει την έννοια της γνησίως φθίνουσας συνάρτησης με την έννοια της παραγώγου.

Θεώρημα

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο Δ.

Άσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^3 - 2x$

1. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.
2. Να συγκρίνεται τις τιμές $f(2019)$ και $f(2020)$.

Λύση

Το παραπάνω θεώρημα συνδέει την έννοια του τοπικού μεγίστου με την έννοια της παραγώγου.

Θεώρημα (Κριτήριο Πρώτης Παραγώγου – Τοπικό Μέγιστο)

Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_0)=0$ για $x_0 \in (\alpha,\beta)$, $f'(x)>0$ στο (α,x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0,β), τότε η f παρουσιάζει στο διάστημα (α,β) για $x=x_0$ μέγιστο.

Αν επιπλέον το x_0 είναι μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f'(x_0)=0$, τότε το $f(x_0)$ είναι ολικό μέγιστο.

Στην παρακάτω εφαρμογή μετακινήστε το κόκκινο σημείο x του άξονα $x'x$ και παρατηρήστε πώς μεταβάλλεται η αντίστοιχη τιμή $y=f\left(x\right)$. Τα $f\left(x_0\right)$ και $f\left(x_1\right)$ είναι ολικό και τοπικό μέγιστο αντίστοιχα.

Ορισμός (Τοπικό Ελάχιστο)

Τα μέγιστα και τα ελάχιστα μίας συνάρτησης ονομάζονται **ακρότατα**.

Άσκηση 3

Να μελετηθεί η $f\left(x\right)=x^2-x-1$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Λύση

Αρχικά υπολογίζουμε την παράγωγο συνάρτηση της f.

$$f'\left(x\right)=\left(x^2-x-1\right)'=2x-1$$

στη συνέχεια αναζητούμε τα σημεία που μηδενίζουν την παράγωγο:

$$f'\left(x\right)=0\Rightarrow 2x-1=0\Rightarrow x=\frac{1}{2}$$