Άσκηση 4
Δίνεται η συνάρτηση
$f\left(x\right)=x^3-2x+1$
Να βρεθεί η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A\left(0,f\left(0\right)\right)$

ΛΥΣΗ
Η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού Α=R
Έστω ότι η εφαπτομένη της C_f έχει την μορφή y=αx+β.
Το σημείο Α(0,f(0)) είναι σημείο της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης, οπότε την επαληθεύει. Επομένως θα έχουμε:

$f(0)=0^3 – 2*0 + 1 = 1$

άρα το σημείο της C_f στο οποίο αναζητούμε την εφαπτομένη είναι το Α(0,1).

Η παράγωγος της f είναι:

$f'(x)=(x^3 – 2x +1)'= 3x^2 - 2$

από την θεωρία γνωρίζουμε ότι ο συντελεστής διεύθυνσης α της εφαπτομένης θα είναι:

$α = f'(0) => α = 3*0^2 -2 = -2$

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f διαμορφώνεται ως εξής:

y = -2x + β

Αφού η εφαπτομένη διέρχεται από το σημείο Α (0,1), πρέπει να το επαληθεύει, οπότε θα έχουμε για y=1 και x = 0

1 = -2*0 + β => β=1

Και τελικά η εφαπτομένη της Cf είναι η y = -2x + 1

Άσκηση 5
Δίνεται η συνάρτηση
$f\left(x\right)=\sqrt{2x-1}$
Να βρεθεί η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A\left(5,f\left(5\right)\right)$ καθώς και τα σημεία τομής της εφαπτομένης με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

ΛΥΣΗ
Θα πρέπει να ισχύει

$$2x-1\geq 0\Rightarrow 2x\geq 1\Rightarrow x\geq \frac{1}{2}$$

Άρα η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού A = [1/2, + ∞)
Έστω ότι η εφαπτομένη της C_f έχει την μορφή y=αx+β.
Το σημείο A(5,f(5)) είναι σημείο της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης, οπότε την επαληθεύει. Επομένως θα έχουμε:

$$f(5)=\sqrt{2*5-1}=\sqrt{10-1}=\sqrt{9}=3$$

άρα το σημείο της C_f στο οποίο αναζητούμε την εφαπτομένη είναι το A(5,3).
Η παράγωγος της f είναι:

$$f'(x)=(\sqrt{2x-1})'=\frac{(2x-1)'}{2\sqrt{2x-1}}=\frac{2}{2\sqrt{2x-1}}=\frac{1}{\sqrt{2x-1}}$$

από την θεωρία γνωρίζουμε ότι ο συντελεστής διεύθυνσης α της εφαπτομένης θα είναι:

$$\alpha=f'(5)=\frac{1}{srt\,2*5-1}=\frac{1}{\sqrt{10-1}}=\frac{1}{\sqrt{9}}=\frac{1}{3}$$

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f διαμορφώνεται ως εξής:

y = 1/3 * x + β

Αφού η εφαπτομένη διέρχεται από το σημείο A (5,3), πρέπει να το επαληθεύει, οπότε θα έχουμε για y=3 και x = 5

3 = 5/3 + β => β=9/3 – 5/3 => β = 4/3

Και τελικά η εφαπτομένη της Cf είναι η y = 1/3 * x + 4/3 ή y = (x+4)/3

Όσον αφορά τα σημεία τομής με τους άξονες θα έχουμε:
x'x: Έστω σημείο $B(x_\beta, y_\beta)$. Για να τέμνει τον άξονα x'x θα πρέπει να έχει $y_\beta = 0$. Οπότε θα αντικαταστήσουμε στην εξίσωση της εφαπτομένης που βρήκαμε παραπάνω και θα έχουμε:

$0 = (x_\beta + 4)/3 \Rightarrow x_\beta + 4 = 0 \Rightarrow x_\beta = -4$

Άρα το σημείο τομής με τον άξονα x'x είναι το B(-4,0)

y'y: Έστω σημείο $\Gamma(x_\gamma , y_\gamma)$. Για να τέμνει τον άξονα y'y θα πρέπει να έχει $x_\gamma = 0$. Οπότε θα αντικαταστήσουμε στην εξίσωση της εφαπτομένης που βρήκαμε παραπάνω και θα έχουμε:

$y_\gamma = (0 + 4)/3 \Rightarrow y_\gamma = 4/3$

Άρα το σημείο τομής με τον άξονα y’y είναι το B(0,4/3)

Άσκηση 6

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

και το σημείο $A(-1,1)$. Να βρεθούν οι εφαπτομένες της C_f που διέρχονται από το σημείο A.

ΛΥΣΗ

Η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού A=R - {0}

Για αρχή, παρατηρούμε ότι το σημείο A(-1,1) δεν είναι σημείο της γραφικής παράστασης C_f διότι:

$$f(-1)=\frac{1}{-1}=-1$$

Έστω $B(x_0, f(x_0))$ σημείο της C_f και $y = \alpha x + \beta$ η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο B. Αρχικά έχουμε:

$$f(x_0)=\frac{1}{x_0}$$

άρα το σημείο της C_f στο οποίο αναζητούμε την εφαπτομένη είναι το

$$B(x_0,\frac{1}{x_0})$$

Η παράγωγος της f είναι:

$$f'(x)=(\frac{1}{x})'=\frac{-1}{x^2}$$

από την θεωρία γνωρίζουμε ότι ο συντελεστής διεύθυνσης α της εφαπτομένης θα είναι:

$$\alpha=f'(x_0)=\frac{-1}{x_0^2}$$

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f διαμορφώνεται ως εξής:

$$y=\frac{-1}{x_0^2}*x+\beta$$

Αφού η εφαπτομένη διέρχεται από το σημείο $B(x_0,\frac{1}{x_0})$, πρέπει να το επαληθεύει, οπότε θα έχουμε για y=1/x_0 και x = x_0

$$\frac{1}{x_0}=\frac{-1}{x_0^2}*x_0+\beta\Rightarrow\beta=\frac{1}{x_0}+\frac{1}{x_0}\Rightarrow\beta=\frac{2}{x_0}$$

Και τελικά η εφαπτομένη της C_f είναι η

$$y=\frac{-1}{x_0^2}*x+\frac{2}{x_0}$$

Η παραπάνω ευθεία θέλουμε να διέρχεται από το σημείο Α(-1,1), οπότε πρέπει να επαληθεύεται για x = -1 και για y = 1. Με αντικατάσταση στην εξίσωση ευθείας παίρνουμε:

$$y=\frac{-1}{x_0^2}*x+\frac{2}{x_0}\Rightarrow 1=\frac{-1}{x_0^2}*(-1)+\frac{2}{x_0}\Rightarrow\frac{1}{x_0^2}+\frac{2}{x_0}-1=0\Rightarrow\frac{x_0^2}{x_0^2}+\frac{2x_0^2}{x_0}-x_0^2=0\Rightarrow 1+2x_0-x_0^2=0$$

$\Delta=2^2 - 4*(-1)*1= 4+4=8>0$

Άρα θα έχουμε δυο λύσεις:

$$x_1=\frac{-2+\sqrt{8}}{2*(-1)}=\frac{2-\sqrt{8}}{2}$$

$$x_2=\frac{-2-\sqrt{8}}{2*(-1)}=\frac{2+\sqrt{8}}{2}$$

οπότε υπάρχουν δύο σημεία της C_f των οποίων η εφαπτομένη διέρχεται από το σημείο A, το

$$B_1(\frac{2-\sqrt{8}}{2},f(\frac{2-\sqrt{8}}{2}))=(\frac{2-\sqrt{8}}{2},\frac{2}{2-\sqrt{8}})$$

και το

$$B_2(\frac{2+\sqrt{8}}{2},f(\frac{2+\sqrt{8}}{2}))=(\frac{2+\sqrt{8}}{2},\frac{2}{2+\sqrt{8}})$$

Οι εξισώσεις των εφαπτόμενων ευθειών στα σημεία B_1 και B_2 είναι η

$$y=\frac{-1}{(\frac{2-\sqrt{8}}{2})^2}*x+\frac{2}{\frac{2-\sqrt{8}}{2}}\Rightarrow y=\frac{-4}{(2-\sqrt{8})^2}*x+\frac{4}{2-\sqrt{8}}$$

και

$$y=\frac{-1}{\left(\frac{2+\sqrt{8}}{2}\right)^2}*x+\frac{2}{\frac{2+\sqrt{8}}{2}}\Rightarrow y=\frac{-4}{\left(2+\sqrt{8}\right)^2}*x+\frac{4}{2+\sqrt{8}}$$