MATHEMATICS

Pure mathematics is, in its way, the poetry of logical ideas.

ΌΡΙΟ ΣΥΝΆΡΤΗΣΗΣ

Η έννοια του Ορίου

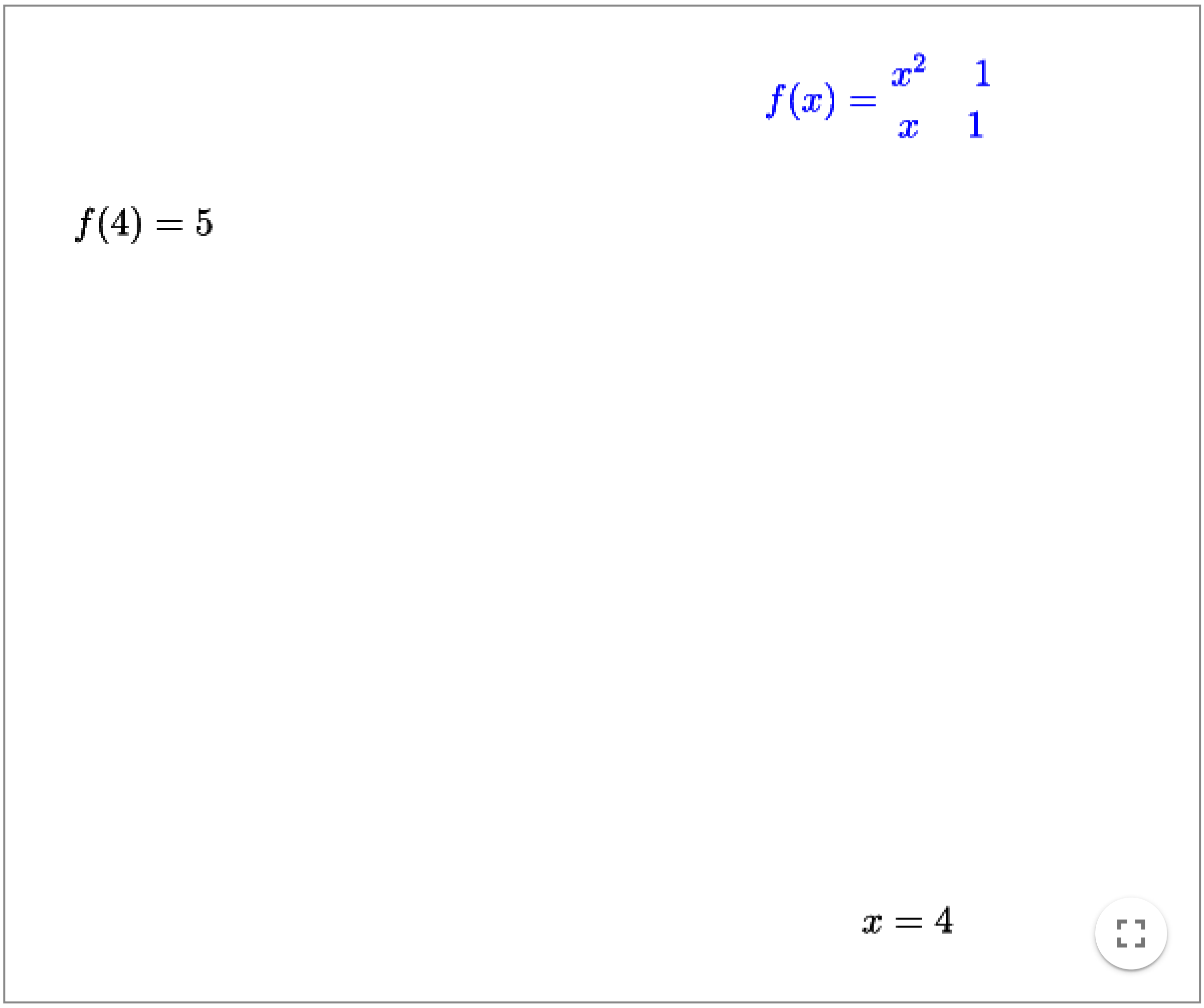
Έστω η συνάρτηση:

$$f\left(x\right)=\frac{x^2-1}{x-1},$$

η οποία έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}-\{1\}$ και επομένως δεν ορίζεται το $f\left(1\right)$. Ας εξετάσουμε όμως τη συμπεριφορά της f για τιμές του x κοντά στο 1. Με τη βοήθεια της παρακάτω εφαρμογής παρατηρούμε ότι αν το x τείνει (πλησιάζει) το 1, είτε από δεξιά, είτε από αριστερά του 1, το αντίστοιχο $f\left(x\right)$ πλησιάζει την τιμή 2. Λέμε λοιπόν ότι η f έχει στο σημείο 1 όριο (limit) 2 και γράφουμε:

$$\lim_{x\to 1} f\left(x\right)=2$$

Μετακινήστε το x (κόκκινο σημείο) προς το 1 και παρατηρήστε πού τείνει το αντίστοιχο $f\left(x\right)$ στον άξονα $y'y$.



Από το παραπάνω παράδειγμα γίνεται φανερό ότι ένα όριο μπορεί να υπάρχει ακόμα και όταν το x τείνει σε μία τιμή x_0 εκτός πεδίου ορισμού. Αυτό που μας ενδιαφέρει είναι η συνάρτηση να ορίζεται σε περιοχή κοντά στο x_0. Θα λέμε ότι το όριο της f στο x_0 είναι l, αν το $f\left(x\right)$ τείνει στο l, όταν το x τείνει στο x_0 και θα συμβολίζουμε:

$$\lim_{x \to x_0} f\left(x\right) = l$$

Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν στο x_0 όρια πραγματικούς αριθμούς, δηλαδή αν $\lim\limits_{x \to x_0} f\left(x\right) = l_1$ και $\lim\limits_{x \to x_0} g\left(x\right) = l_2$, όπου l_1 και l_2 πραγματικοί αριθμοί, τότε αποδεικνύονται οι ακόλουθες ιδιότητες:

1. $\lim\limits_{x \to x_0} \left(f\left(x\right) + g\left(x\right)\right) = l_1 + l_2$
2. $\lim\limits_{x \to x_0} \left(k \cdot f\left(x\right)\right) = k \cdot l_1$
3. $\lim\limits_{x \to x_0} \left(f\left(x\right) \cdot g\left(x\right)\right) = l_1 \cdot l_2$
4. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)} = \dfrac{l_1}{l_2}$
5. $\lim\limits_{x \to x_0} \left(f\left(x\right)\right)^n = l_1^n$
6. $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[n]{f\left(x\right)} = \sqrt[n]{l_1}$

7. $\lim\limits_{x \to x_0} (x) = x_0$
8. $\lim\limits_{x \to x_0} (c) = c$
9. $\lim\limits_{x \to x_0} (\eta\mu x) = \eta\mu x_0$
10. $\lim\limits_{x \to x_0} (\sigma\upsilon\nu x) = \sigma\upsilon\nu x_0$
11. $\lim\limits_{x \to x_0} (\varepsilon\varphi x) = \varepsilon\varphi x_0$

Εναλλακτικά, αν στις ιδιότητες (1) έως (6) αντικαταστήσουμε $l_1 = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ και $l_2 = \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$, τότε θα πάρουν την μορφή:

1. $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$
2. $\lim\limits_{x \to x_0} (k \cdot f(x)) = k \cdot \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$
3. $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$
4. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$
5. $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x))^n = \left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x)\right)^n$
6. $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}$

Άσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 2x + 1$. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

Λύση

Θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 2} f(x) &= \lim_{x \to 2} \left(x^2 + 2x + 1\right) \\ &\overset{(1)}{=} \lim_{x \to 2} \left(x^2\right) + \lim_{x \to 2} (2x) + \lim_{x \to 2} (1) \\ &\overset{(2),(5),(8)}{=} \left(\lim_{x \to 2} (x)\right)^2 + 2 \lim_{x \to 2} (x) + 1 \\ &\overset{(7)}{=} 2^2 + 2 \cdot 2 + 1 \\ &\Rightarrow \boxed{\lim_{x \to 2} f(x) = 9}. \end{aligned}$$

-Τέλος Λύσης-

Για να υπολογίσουμε το παραπάνω όριο εφαρμόσαμε αναλυτικά τις ιδιότητες των ορίων. Αν η συνάρτησή μας περιγράφεται από έναν απλό αλγεβρικό τύπο και το σημείο στο οποίο ψάχνουμε το όριο είναι σημείο του πεδίου ορισμού, τότε υπολογίζουμε το όριο με απλή αντικατάσταση. Επομένως, για το όριο της άσκησης 1, θα μπορούσαμε να γράψουμε απλά:

$$\lim_{x\to 2} f\left(x\right) = 2^2 + 2\cdot 2 + 1 = 9$$

Παρατηρούμε ότι για τη συνάρτηση της άσκησης 1 ισχύει $\lim_{x\to 2} f\left(x\right) = f\left(2\right)$. Έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός

Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέγεται συνεχής, αν για κάθε $x_0 \in A$ ισχύει

$$\lim_{x\to x_0} f\left(x\right) = f\left(x_0\right).$$

Χαρακτηριστικό γνώρισμα μιας συνεχούς συνάρτησης σε ένα κλειστό διάστημα είναι ότι η γραφική της παράσταση είναι μια συνεχής καμπύλη, δηλαδή για το σχεδιασμό της δεν χρειάζεται να σηκώσουμε το μολύβι από το χαρτί. Αποδεικνύεται ότι οι γνωστές μας συναρτήσεις, πολυωνυμικές, τριγωνομετρικές, αλλά και όσες προκύπτουν από πράξεις μεταξύ αυτών είναι συνεχείς συναρτήσεις.

Απροσδιόριστες Μορφές (0/0)

Είδαμε ότι η έννοια του ορίου μελετά τη συμπεριφορά της συνάρτησης «κοντά» σε μία τιμή x_0, η οποία μπορεί να είναι εκτός πεδίου ορισμού. Σε αυτές τις περιπτώσεις δεν μπορούμε να υπολογίσουμε το όριο με απλή αντικατάσταση, διότι αν $x_0 \notin A$ τότε η συνάρτηση δεν είναι συνεχής στο σημείο αυτό. Οι περιπτώσεις που θα μελετήσουμε θα είναι συναρτήσεις που με αντικατάσταση προκύπτει η απροσδιόριστη μορφή 0/0.

Επιμεριστική Ιδιότητα $\alpha\cdot\beta + \alpha\cdot\gamma = \alpha\left(\beta+\gamma\right)$

Άσκηση 2

Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to 2} \frac{2x-4}{x-2}$$

Λύση

Παρατηρούμε ότι $2 \notin A$ και αν κάνουμε αντικατάσταση όπου $x = 2$ προκύπτει απροσδιόριστη μορφή 0/0. Για τον υπολογισμό του ορίου θα χρησιμοποιήσουμε την επιμεριστική ιδιότητα για να κάνουμε παραγοντοποίηση του αριθμητή. Θα έχουμε:

$$\lim_{x \to 2} \frac{2x-4}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{2x - 2 \cdot 2}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{2\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} = \lim_{x \to 2} (2) \Rightarrow \boxed{\lim_{x \to 2} \frac{2x-4}{x-2} = 2}$$

-Τέλος Λύσης-

Αντιστροφή $\alpha - \beta = -(\beta - \alpha)$

Άσκηση 3

Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x-3}{3-x}$$

Λύση

Παρατηρούμε ότι $3 \notin A$ και αν κάνουμε αντικατάσταση όπου $x = 3$ προκύπτει απροσδιόριστη μορφή 0/0. Θα έχουμε:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x-3}{3-x} = \lim_{x \to 3} \left(-\frac{\cancel{3-x}}{\cancel{3-x}} \right) = \lim_{x \to 3} (-1) \Rightarrow \boxed{\lim_{x \to 3} \frac{x-3}{3-x} = -1}$$

-Τέλος Λύσης-

Διαφορά Τετραγώνου $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$

Άσκηση 4

Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$$

Λύση

Παρατηρούμε ότι $1 \notin A$ και αν κάνουμε αντικατάσταση όπου $x = 1$ προκύπτει απροσδιόριστη μορφή 0/0. Για τον υπολογισμό του ορίου θα χρησιμοποιήσουμε τη διαφορά τετραγώνου για να κάνουμε παραγοντοποίηση του αριθμητή. Θα έχουμε:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1^2}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}} = \lim_{x\to 1}(x+1)$$
$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = 2}$$

-Τέλος Λύσης-

Παραγοντοποίηση Τριωνύμου

Για την παραγοντοποίηση τριωνύμου της μορφής $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ γνωρίζουμε ότι:

- $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left(x-\rho_1\right)\left(x-\rho_2\right)$, αν $\Delta > 0$. Όπου ρ_1 και ρ_2 οι δύο ρίζες του τριωνύμου.
- $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left(x-\rho\right)\left(x-\rho\right) = \alpha\left(x-\rho\right)^2$, αν $\Delta = 0$. Όπου ρ και η μοναδική ρίζα του τριωνύμου.
- Το $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ δεν παραγοντοποιείται αν $\Delta < 0$

Άσκηση 5

Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to 3}\frac{2x^2-4x-6}{x-3}$$

Λύση

Παρατηρούμε ότι $3 \notin A$ και αν κάνουμε αντικατάσταση όπου $x = 3$ προκύπτει απροσδιόριστη μορφή 0/0. Για τον υπολογισμό του ορίου θα πρέπει να παραγοντοποιήσουμε το τριώνυμο στον αριθμητή. Με τη μέθοδο της διακρίνουσας εύκολα βρίσκουμε ότι το τριώνυμο έχει δύο ρίζες, τις $\rho_1 = -1$ και $\rho_2 = 3$, άρα θα έχουμε:

$$\lim_{x\to 3}\frac{2x^2-4x-6}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{2\left(x+1\right)\cancel{\left(x-3\right)}}{\cancel{x-3}} = \lim_{x\to 3}\left(2(x+1)\right)$$
$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to 3}\frac{2x^2-4x-6}{x-3} = 8}$$

-Τέλος Λύσης-

Ριζικά και συζυγής παράσταση $a-b=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)$

Άσκηση 6

Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$$

Λύση

Παρατηρούμε ότι $4\notin A$ και αν κάνουμε αντικατάσταση όπου $x=4$ προκύπτει απροσδιόριστη μορφή 0/0. Για τον υπολογισμό του ορίου θα πολλαπλασιάσουμε αριθμητή και παρανομαστή με τη συζυγή παράσταση του αριθμητή, οπότε θα έχουμε:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}&=\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{4}}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{4}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{4}\right)}{(x-4)\left(\sqrt{x}+\sqrt{4}\right)}\\&=\lim_{x\to 4}\frac{\cancel{x-4}}{(\cancel{x-4})\left(\sqrt{x}+\sqrt{4}\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{4}}\\&\Rightarrow\boxed{\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\frac{1}{4}}\end{aligned}$$

-Τέλος Λύσης-

Προσπαθήστε μόνοι σας

Άσκηση 7

Να υπολογίσετε τα όρια:

1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{2x-4}$

2) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-32}{4-x}$

3) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{x}-3}{9-x}$

4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}}{x^2-3x+2}$

5) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{6x^2+x-2}{1-\sqrt{2x}}$

Άσκηση 8

Δίνεται η συνάρτηση

$$f\left(x\right)=\frac{x^2+\lambda x+2\lambda-4}{x+1}.$$

Αν $\lim\limits_{x\to -1} f\left(x\right)=\alpha\in\mathbb{R}$, να βρεθεί η τιμή του λ και η τιμή του α.

Στείλε την προσπάθειά σου