

# ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ



ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: ΠΑΤΣΙΜΑΣ ΔΗΜΗΤΡΗΣ

[www.askisopolis.gr](http://www.askisopolis.gr)

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: ΠΑΤΣΙΜΑΣ ΔΗΜΗΤΡΗΣ

[www.askisopolis.gr](http://www.askisopolis.gr)

[www.askisopolis.gr](http://www.askisopolis.gr)

**Μεταβλητές**

**1.**

Ποιες από τις παρακάτω μεταβλητές είναι ποιοτικές; Ποιες είναι ποσοτικές;  
Ποιες από τις ποσοτικές είναι διακριτές και ποιες είναι συνεχείς ;

- α) Το μήκος ενός ποταμού
- β) Το πλήθος των σελίδων ενός βιβλίου
- γ) Το χρώμα μαλλιών
- δ) Η διάρκεια μιας κινηματογραφικής ταινίας
- ε) Τα μόρια για την εισαγωγή στα ΑΕΙ και ΤΕΙ
- στ) Η θερμοκρασία ενός δωματίου
- ζ) Η εθνικότητα
- η) Το πλήθος των επιβατών που χωράει ένα αυτοκίνητο
- θ) Το πλήθος των θεατών σε ένα αγώνα ποδοσφαίρου
- ι) Το ύψος ενός βουνού
- ια) Η διάρκεια ζωής ενός ηλεκτρικού λαμπτήρα
- ιβ) Οι πωλήσεις ενός μεγάλου αυτοκινήτου

**2.**

Ποιες από τις παρακάτω μεταβλητές είναι ποιοτικές; Ποιες είναι ποσοτικές;  
Ποιες από τις ποσοτικές είναι διακριτές και ποιες είναι συνεχείς ;

- α) Το φύλο ενός ανθρώπου
- β) Το πλήθος των ζώων ενός είδους που κινδυνεύει με εξαφάνιση
- γ) Το πλήθος των ορόφων ενός κτιρίου
- δ) Το βάρος μιας φραντζόλας ψωμιού
- ε) Το επάγγελμα
- στ) Η ταχύτητα ενός αυτοκινήτου όταν περνάει από ένα συγκεκριμένο σημείο της εθνικής οδού

**3.**

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να βρείτε ποιος είναι ο πληθυσμός και ποια είναι η μεταβλητή ή οι μεταβλητές. Να διακρίνετε ποιες από τις μεταβλητές αυτές είναι ποιοτικές, ποιες συνεχείς και ποιες διακριτές.

- α) Μας ενδιαφέρει να εξετάσουμε πόσοι Έλληνες είναι φορείς του AIDS.
- β) Μας ενδιαφέρει να εξετάσουμε πόσες Αγγλικές λέξεις είναι Ελληνικής προέλευσης.
- γ) Μας ενδιαφέρει να εξετάσουμε ποιο από τρία αρώματα προτιμούν οι γυναίκες.
- δ) Μας ενδιαφέρει να εξετάσουμε το νούμερο παπουτσιών των μαθητών μιας τάξης.
- ε) Μας ενδιαφέρει να εξετάσουμε τις επιδόσεις των αθλητών στο άλμα εις ύψος στους Πανευρωπαϊκούς αγώνες.

**4.**

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να βρείτε ποιος είναι ο πληθυσμός και ποια είναι η μεταβλητή ή οι μεταβλητές .

Να διακρίνετε ποιες από τις μεταβλητές αυτές είναι ποιοτικές, ποιες συνεχείς και ποιες διακριτές και να αναφέρετε μερικές δυνατές τιμές τους.

- α) Μας ενδιαφέρει να εξετάσουμε το επίπεδο μόρφωσης των Ελλήνων.
- β) Μας ενδιαφέρει να εξετάσουμε πόσο καθυστερούν οι πτήσεις της Ολυμπιακής.
- γ) Μας ενδιαφέρει να εξετάσουμε πόσοι Δανοί έχουν επισκεφθεί την Ελλάδα.
- δ) Μας ενδιαφέρει να εξετάσουμε ποιο είδος τροφής από τις Α, Β, Γ προτιμούν οι γάτες.

ε) Μας ενδιαφέρει το βάρος των μαθητών ενός σχολείου.

**5.**

Να βρείτε το είδος (ποιοτικές, ποσοτικές διακριτές ή ποσοτικές συνεχείς) των επόμενων μεταβλητών:

- α) το πλήθος των ορόφων που έχουν τα κτίρια μιας πόλης,
- β) το ύψος των μαθητών ενός λυκείου,
- γ) το θρήσκευμα των κατοίκων μιας πόλης,
- δ) ο χρόνος αναμονής των πελατών μιας τράπεζας
- ε) το επάγγελμα των κατοίκων μιας πόλης,
- στ) το πλήθος των θεατών που παρακολούθησαν, κινηματογραφική ταινία.

**6.**

Μελετάμε τους μαθητές της Γ' Λυκείου ενός σχολείου ως προς τη διαγωγή τους, τον αριθμό απουσιών, την κατεύθυνση που παρακολουθούν, το βάρος τους και τον βαθμό 1ου τετράμηνου στα Νέα Ελληνικά. Να βρείτε ποιες από τις παραπάνω μεταβλητές είναι ποιοτικές, ποιες είναι ποσοτικές διακριτές και ποιες είναι ποσοτικές συνεχείς.

**7.**

Από τις παρακάτω μεταβλητές ποσοτική διακριτή είναι:

- A: το βάρος των μαθητών.
  - B: η μηνιαία κατανάλωση ρεύματος.
  - Γ: ο χαρακτηρισμός της διαγωγής των μαθητών.
  - Δ: ο αριθμός των απουσιών.
  - Ε: η ποιότητα του περιεχομένου των σχολικών βιβλίων.
- Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

**8.**

Από τις παρακάτω μεταβλητές ποσοτική συνεχής είναι:

- A: ο αριθμός των τσιγάρων που καπνίζει κάποιος μία ημέρα.
  - B: η μάρκα ενός αυτοκινήτου.
  - Γ: ο συνολικός χρόνος ομιλίας στο κινητό σε έναν μήνα.
  - Δ: ο συνολικός αριθμός μηνυμάτων που στέλνουμε με το κινητό σε μία ημέρα.
  - Ε: το μορφωτικό επίπεδο.
- Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

**9.**

Προκειμένου να εκτιμήσουμε το πλήθος των Ελλήνων που καπνίζουν, αποφασίσαμε να επιλέξουμε ένα δείγμα 100 ατόμων. Ο καλύτερος τρόπος για να επιλέξουμε το δείγμα είναι:

- A: να πάρουμε 100 άτομα που συχνάζουν σε ένα καφενείο.
  - B: να πάρουμε 100 φαντάρους από ένα στρατόπεδο.
  - Γ: να πάρουμε 100 μαθητές ενός λυκείου.
  - Δ: να πάρουμε 100 αθλητές από αθλητικούς ομίλους σε όλη την Ελλάδα.
  - Ε: να ρωτήσουμε τηλεφωνικά 100 άτομα που επιλέξαμε από τηλεφωνικό κατάλογο όλης της Ελλάδας.
- Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

**10.**

Ο διευθυντής ενός λυκείου θέλει να κάνει μια έρευνα για τον αριθμό των παιδιών που υπάρχουν στις οικογένειες των μαθητών. Για τον λόγο αυτό ρώτησε 10 από τους μαθητές πόσα παιδιά υπάρχουν στις οικογένειές τους και πήρε τις εξής απαντήσεις: 1, 2, 3, 2, 2, 1, 4, 2, 1

Να βρείτε:

- α) ποιος είναι ο πληθυσμός,

- β) ποιο είναι το δείγμα,
- γ) ποια είναι η μεταβλητή,
- δ) ποιο είναι το είδος της μεταβλητής,
- ε) ποιες είναι οι τιμές της μεταβλητής.

#### 11.

Ο διευθυντής μιας επιχείρησης θέλει να κάνει μια έρευνα για την οικογενειακή κατάσταση των υπαλλήλων του. Για τον λόγο αυτό ρώτησε σχετικά 10 από τους υπαλλήλους και πήρε τις εξής απαντήσεις:

ελεύθερος, παντρεμένος, παντρεμένος, χωρισμένος, παντρεμένος, ελεύθερος, χωρισμένος, παντρεμένος, παντρεμένος, χωρισμένος. Να βρείτε:

- α) ποιος είναι ο πληθυσμός,
- β) ποιο είναι το δείγμα,
- γ) ποια είναι η μεταβλητή,
- δ) ποιο είναι το είδος της μεταβλητής,
- ε) ποιες είναι οι τιμές της μεταβλητής.

#### 12.

Είναι τα παρακάτω δείγματα αντιπροσωπευτικά; Εξηγήστε γιατί.

- α) Για να βρούμε πόσοι άνθρωποι παρακολουθούν μια τηλεοπτική εκπομπή τηλεφωνούμε την ώρα της μετάδοσης της σε 1000 τυχαίους αριθμούς και ρωτάμε εκείνους που απαντούν αν παρακολουθούν την εκπομπή.
- β) Προκειμένου να διαπιστώσουμε πόσα αυτοκίνητα μιας πόλης είναι Mercedes χρησιμοποιούμε ως δείγμα τα αυτοκίνητα που είναι σταθμευμένα σ' ένα μεγάλο πολυώροφο γκαράζ
- γ) Για να βρούμε πόσοι άνθρωποι μιας πόλης διαθέτουν αυτοκίνητο ρωτάμε κάθε δέκατο άνθρωπο που μπαίνει σ' ένα σταθμό του ηλεκτρικού σιδηροδρόμου.
- δ) Για να βρούμε πόσοι άνθρωποι μιας πόλης διαθέτουν δικό τους σπίτι ρωτάμε τυχαία τους οδηγούς αυτοκινήτων που σταματούν στα φανάρια.

#### 13.

Σε καθεμία από τις παρακάτω δημοσκοπήσεις η διαδικασία που ακολουθείται έχει κάποιο ελάττωμα. Σχολιάστε κάθε περίπτωση ξεχωριστά.

- α) Για να εκτιμήσει ο διευθυντής μιας αθλητικής εφημερίδας τη γνώμη που έχουν οι φίλαθλοι για τη διαιτησία τους καλεί να του γράψουν αν η ομάδα τους αδικείται ή όχι.
- β) Σε μια τηλεοπτική εκπομπή συζητείται ένα λάθος της κυβέρνησης για το οποίο, όπως λέει ο παρουσιαστής, μπορεί να φταίει ή ο υπουργός ή ο ίδιος ο πρωθυπουργός. Για να διαπιστώσει ο παρουσιαστής τι πιστεύει το κοινό δίνει δύο αριθμούς τηλεφώνου και ζητάει από τους τηλεθεατές να τηλεφωνήσουν στον πρώτο αριθμό αν πιστεύουν ότι φταίει ο πρωθυπουργός και στο δεύτερο αριθμό αν πιστεύουν ότι φταίει ο υπουργός.

## ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΟΥ ΠΙΝΑΚΑ

**14.**

Να συμπληρώσετε τους παρακάτω πίνακες :

α) β)

| $x_i$         | $v_i$ | $f_i$ | $f_i\%$ |
|---------------|-------|-------|---------|
| 0             | 9     |       |         |
| 1             | 12    |       |         |
| 3             | 24    |       |         |
| 4             | 9     |       |         |
| 7             | 6     |       |         |
| <b>Σύνολο</b> |       |       |         |

| $x_i$         | $v_i$ | $f_i$ | $f_i\%$ |
|---------------|-------|-------|---------|
| -2            |       |       | 15      |
| 0             |       |       | 25      |
| 1             |       |       | 40      |
| 3             |       |       | 15      |
| 5             |       |       |         |
| <b>Σύνολο</b> | 160   |       |         |

**15.**

Να συμπληρώσετε τους παρακάτω πίνακες :

α) β)

| $x_i$         | $v_i$ | $f_i$ | $f_i\%$ |
|---------------|-------|-------|---------|
| 1             | 12    |       |         |
| 2             |       |       |         |
| 3             | 24    |       | 40      |
| 5             |       | 0,05  |         |
| <b>Σύνολο</b> |       |       |         |

| $x_i$         | $v_i$ | $f_i$ | $f_i\%$ |
|---------------|-------|-------|---------|
| -5            |       | 0,05  |         |
| -3            |       |       |         |
| 0             |       |       | 40      |
| 1             | 8     | 0,2   |         |
| <b>Σύνολο</b> | 160   |       |         |

**16.**

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα :

| $x_i$         | $v_i$ | $N_i$ | $f_i$ | $F_i$ | $f_i\%$ | $F_i\%$ |
|---------------|-------|-------|-------|-------|---------|---------|
| 3             | 20    |       |       |       |         |         |
| 2             | 10    |       |       |       |         |         |
| 4             | 15    |       |       |       |         |         |
| 6             | 5     |       |       |       |         |         |
| <b>Σύνολο</b> |       |       |       |       |         |         |

**17.**

Να συμπληρώσετε τους παρακάτω πίνακες :

α)

| $x_i$         | $v_i$ | $N_i$ | $f_i$ | $F_i$ | $f_i\%$ | $F_i\%$ |
|---------------|-------|-------|-------|-------|---------|---------|
| -1            |       | 4     |       | 0,1   |         |         |
| 0             |       |       |       |       | 30      |         |
| 2             |       |       |       |       |         |         |
| 3             | 6     |       |       |       |         |         |
| <b>Σύνολο</b> | 40    |       |       |       |         |         |



β)

| $x_i$  | $v_i$ | $N_i$ | $f_i$ | $F_i$ | $f_i\%$ | $F_i\%$ |
|--------|-------|-------|-------|-------|---------|---------|
| 2      |       |       |       |       |         | 20      |
| 5      |       |       | 0,4   |       |         |         |
| 7      | 12    |       |       |       |         |         |
| 8      |       | 60    |       |       |         |         |
| Σύνολο |       |       |       |       |         |         |

γ)

| $x_i$  | $v_i$ | $N_i$ | $f_i$ | $F_i$ | $f_i\%$ | $F_i\%$ |
|--------|-------|-------|-------|-------|---------|---------|
| 0      |       |       |       |       |         | 10      |
| 10     |       |       | 0,15  |       |         |         |
| 20     |       |       |       | 0,60  |         |         |
| 30     | 5     |       |       |       |         |         |
| 40     |       | 20    |       |       |         |         |
| Σύνολο |       |       |       |       |         |         |

18.

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

| $x_i$  | $v_i$ | $N_i$ | $f_i$ | $F_i$ |
|--------|-------|-------|-------|-------|
| 1      | 10    |       |       |       |
| 2      |       | 25    |       |       |
| 3      |       |       |       |       |
| Σύνολο | 50    |       |       |       |

19.

Ο επόμενος πίνακας παρουσιάζει τους ανεξεταστέους μαθητές της Α' Λυκείου ανά μάθημα.

| Μαθήματα $x_i$  | $v_i$ | $f_i\%$ |
|-----------------|-------|---------|
| Αρχαία Ελληνικά | 12    |         |
| Νέα Ελληνικά    |       | 5       |
| Αγγλικά         | 4     |         |
| Μαθηματικά      | 6     |         |
| Φυσική          | 10    | 25      |
| Χημεία          |       |         |
| Σύνολο          |       |         |

Να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα

20.

Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον επόμενο πίνακα συχνοτήτων και στη συνέχεια να συμπληρώσετε τα στοιχεία που λείπουν σε καθεμία από τις πέντε στήλες.

| $x_i$  | $v_i$ | $N_i$ | $f_i$ | $f_i\%$ | $F_i\%$ |
|--------|-------|-------|-------|---------|---------|
| 1      | 2     |       | 0,1   |         |         |
| 2      |       | 8     |       |         |         |
| 3      | 8     |       |       |         |         |
| 4      |       |       |       |         |         |
| Σύνολο |       |       |       |         |         |

21.

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

| $x_i$  | $v_i$ | $N_i$ | $f_i$ | $F_i$ | $f_i\%$ | $F_i\%$ |
|--------|-------|-------|-------|-------|---------|---------|
| 1      | 8     |       | 0,4   |       |         |         |
| 2      |       | 10    |       |       |         |         |
| 3      |       |       |       | 0,75  |         |         |
| 4      |       |       |       |       |         | 90      |
| 5      |       |       |       |       |         |         |
| Σύνολο |       |       |       |       |         |         |

22.

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

| $x_i$  | $v_i$ | $N_i$ | $f_i$ | $F_i$ |
|--------|-------|-------|-------|-------|
| 1      |       |       | 0,2   |       |
| 2      |       | 24    |       |       |
| 3      | 16    |       |       |       |
| 4      | 12    |       |       |       |
| Σύνολο |       |       |       |       |

23.

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

| $x_i$  | $v_i$ | $N_i$ | $f_i$ | $F_i$ |
|--------|-------|-------|-------|-------|
| 1      |       |       |       |       |
| 2      | 60    |       |       | 0,45  |
| 3      | 90    | 0,45  |       |       |
| 4      |       |       |       |       |
| Σύνολο |       |       |       |       |

**24.**

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

| $x_i$  | $v_i$ | $N_i$ | $f_i$ | $F_i$ | $f_i\%$ | $F_i\%$ |
|--------|-------|-------|-------|-------|---------|---------|
| 1      |       | 6     |       |       |         |         |
| 2      |       | 18    |       |       |         |         |
| 3      |       | 38    |       |       |         |         |
| 4      |       | 48    |       |       |         |         |
| 5      |       |       |       |       |         |         |
| Σύνολο | 50    |       |       |       |         |         |

**25.**

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

| $x_i$  | $v_i$ | $N_i$ | $f_i$ | $F_i$ |
|--------|-------|-------|-------|-------|
| 1      | 2     |       |       |       |
| 2      |       |       | 0,15  |       |
| 3      |       | 28    |       |       |
| 4      |       |       |       | 0,9   |
| 5      |       | 40    |       |       |
| Σύνολο |       |       |       |       |

**26.**

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

| $x_i$  | $v_i$ | $N_i$ | $f_i$ | $F_i$ |
|--------|-------|-------|-------|-------|
| 1      |       |       |       | 0,05  |
| 2      |       |       | 0,2   |       |
| 3      |       | 36    |       | 0,6   |
| 4      | 18    |       |       |       |
| 5      |       |       |       |       |
| Σύνολο |       |       |       |       |

**27.**

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

| $x_i$  | $v_i$ | $N_i$ | $f_i$ | $F_i$ |
|--------|-------|-------|-------|-------|
| 1      |       |       | 0,1   |       |
| 2      |       |       |       | 0,5   |
| 3      |       | 16    |       |       |
| 4      | 4     |       |       |       |
| Σύνολο |       |       |       |       |

28.

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

| $x_i$  | $v_i$ | $N_i$ | $f_i$ | $F_i$ |
|--------|-------|-------|-------|-------|
| 1      |       |       | 0,1   |       |
| 2      |       | 20    |       |       |
| 3      |       |       |       | 0,8   |
| 4      | 10    |       |       |       |
| Σύνολο |       |       |       |       |

29.

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

| $x_i$  | $v_i$ | $f_i$ | $N_i$ | $F_i$ | $f_i\%$ | $F_i\%$ |
|--------|-------|-------|-------|-------|---------|---------|
| 1      |       |       |       |       |         | 12,5    |
| 2      | 4     | 0,1   | 9     |       |         |         |
| 3      |       |       |       | 0,475 |         |         |
| 4      |       |       |       |       | 20      |         |
| 5      |       |       |       |       |         |         |
| ΣΥΝΟΛΟ |       |       |       |       |         |         |

30.

Να συμπληρώσετε τον ακόλουθο πίνακα ο οποίος αναφέρεται σε κάποια μεταβλητή X.

| $x_i$  | $v_i$ | $f_i$ | $f_i\%$ | $N_i$ | $F_i$ | $F_i\%$ |
|--------|-------|-------|---------|-------|-------|---------|
| $x_1$  |       |       |         |       |       |         |
| $x_2$  | 100   |       |         | 150   |       |         |
| $x_3$  |       |       |         |       |       | 67,5    |
| $x_4$  |       | 0,1   |         |       |       |         |
| $x_5$  |       |       |         | 400   |       |         |
| Σύνολο |       |       |         |       |       |         |

31.

Να συμπληρώσετε τον ακόλουθο πίνακα ο οποίος αναφέρεται σε κάποια μεταβλητή X

| Μεταβλητή X | Συχνότητα | Σχετική συχνότητα | Αθροιστική συχνότητα | Αθροιστική σχετική συχνότητα |
|-------------|-----------|-------------------|----------------------|------------------------------|
| $x_1$       |           |                   | 100                  |                              |
| $x_2$       |           |                   |                      | 0,5                          |
| $x_3$       | 250       | 0,5               |                      |                              |

32.

Μερικά αποτελέσματα των εκλογών σε ένα εκλογικό τμήμα φαίνονται στον επόμενο πίνακα:

| Κόμματα<br>$x_i$ | Συχνότητα $v_i$<br>(ψηφοί) | Σχετική συχνότητα<br>$f_i\%$ |
|------------------|----------------------------|------------------------------|
| A                | 360                        |                              |
| B                |                            | 45                           |
| Γ                |                            | 30                           |
| Δ                | 140                        |                              |
| Σύνολο           |                            |                              |

Να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα.

33.

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας:

| $x_i$  | $v_i$      | $N_i$ | $f_i$ | $F_i$ | $f_i\%$ | $F_i\%$ |
|--------|------------|-------|-------|-------|---------|---------|
| $x_1$  | $\alpha$   |       |       |       |         |         |
| $x_2$  | $\beta$    |       | 0,2   |       |         |         |
| $x_3$  | $\alpha+2$ | 8     |       |       |         |         |
| $x_4$  | $2\beta$   |       |       |       |         |         |
| $x_5$  | $\beta$    |       |       |       |         |         |
| Σύνολο |            |       |       |       |         |         |

α) Να βρείτε τις τιμές των  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$

β) Να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα

34.

Εξετάσαμε ένα δείγμα 40 ατόμων ως προς την ομάδα αίματος και πήραμε τα εξής αποτελέσματα:

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| O | A | A | O | A |
| B | O | A | A | B |
| A | A | O | O | A |
| O | A | O | B | O |
| A | O | B | O | A |
| O | A | O | A | O |
| B | O | B | O | O |
| A | A | O | O | A |

Για τα παραπάνω δεδομένα να κατασκευάσετε πίνακα κατανομής συχνοτήτων, σχετικών συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων

**35.**

Ο αριθμός των μαθητών που υπάρχουν σε καθένα από τα 20 τμήματα ενός δημοτικού σχολείου είναι:

|    |    |    |    |
|----|----|----|----|
| 25 | 27 | 24 | 23 |
| 25 | 26 | 24 | 22 |
| 25 | 26 | 23 | 25 |
| 26 | 27 | 24 | 25 |
| 27 | 25 | 24 | 26 |

α) Να κατασκευάσετε πίνακα κατανομής συχνοτήτων, σχετικών συχνοτήτων %, αθροιστικών συχνοτήτων και αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων %.

β) Με τη βοήθεια του παραπάνω πίνακα, να βρείτε:

i) πόσα τμήματα έχουν το πολύ 23 μαθητές,

ii) πόσα τμήματα έχουν τουλάχιστον 25 μαθητές,

iii) το ποσοστό των τμημάτων που έχουν τουλάχιστον 24 και το πολύ 26 μαθητές

**36.**

**37.** Σε μια πόλη μετρήσαμε τη μεγαλύτερη ημερήσια θερμοκρασία για 40 συνεχείς ημέρες και βρήκαμε (σε °C) τα επόμενα αποτελέσματα:

|    |    |    |    |    |    |    |  |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|--|----|----|----|
| 25 | 26 | 26 | 26 | 24 | 21 | 21 |  | 22 | 24 | 26 |
| 26 | 27 | 22 | 22 | 24 | 23 | 23 |  | 26 | 25 | 26 |
| 22 | 23 | 27 | 24 | 23 | 21 | 21 |  | 23 | 23 | 22 |
| 23 | 22 | 24 | 22 | 22 | 23 | 23 |  | 24 | 26 | 23 |

α) Να κατασκευάσετε πίνακα κατανομής συχνοτήτων (απόλυτων και αθροιστικών), σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό και αθροιστικών συχνοτήτων επί τοις εκατό.

β) Με τη βοήθεια του παραπάνω πίνακα, να βρείτε :

i) πόσες ημέρες η θερμοκρασία είναι μικρότερη από 23° C,

ii) πόσες ημέρες η θερμοκρασία είναι το πολύ 24° C,

iii) το ποσοστό % των ημερών που η θερμοκρασία είναι τουλάχιστον 25° C

iv) το ποσοστό % των ημερών που η θερμοκρασία είναι πάνω από 25° C

v) πόσες ημέρες η θερμοκρασία ήταν τουλάχιστον 23° C και το πολύ 25° C

**38.**

Στον διπλανό πίνακα φαίνονται οι βαθμοί 200 φοιτητών στις εξετάσεις του μαθήματος της Στατιστικής,

α) Να φτιάξετε τον πίνακα κατανομής συχνοτήτων (απόλυτων και αθροιστικών), σχετικών συχνοτήτων, επί τοις εκατό σχετικών συχνοτήτων και επί τοις εκατό αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.

β) Να βρείτε πόσοι φοιτητές πήραν βαθμό:

i) κάτω από 4,

ii) πάνω από 8.

iii) Να βρείτε το ποσοστό % των φοιτητών που πήραν βαθμό:

α) τουλάχιστον 5,

β) το πολύ 7,

γ) τουλάχιστον 6 και το πολύ 8.

| Βαθμός | Αριθμός φοιτητών |
|--------|------------------|
| 1      | 8                |
| 2      | 10               |
| 3      | 20               |
| 4      | 32               |
| 5      | 40               |
| 6      | 48               |
| 7      | 20               |
| 8      | 12               |
| 9      | 8                |
| 10     | 2                |
|        | 200              |

39.

Ένα δείγμα 40 οικογενειών μιας περιοχής |εξετάστηκε ως προς τον αριθμό των παιδιών τους και προέκυψε ο πίνακας:

| Αριθμός παιδιών<br>$x_i$ | Συχνότητα<br>$v_i$ | Αθροιστική<br>συχνότητα<br>$N_i$ | Σχετική<br>συχνότητα<br>$f_i\%$ | Αθροιστική<br>συχνότητα<br>$F_i\%$ |
|--------------------------|--------------------|----------------------------------|---------------------------------|------------------------------------|
| 0                        | 4                  |                                  |                                 |                                    |
| 1                        |                    |                                  | 30                              |                                    |
| 2                        |                    | 30                               |                                 |                                    |
| 3                        |                    |                                  |                                 | 95                                 |
| 4                        |                    |                                  |                                 |                                    |
| Σύνολο                   | 40                 |                                  |                                 |                                    |

α) Να γράψετε στο τετράδιό σας συμπληρωμένο τον παραπάνω πίνακα.

β) Με τη βοήθεια του πίνακα, να βρείτε:

- πόσες οικογένειες έχουν το πολύ 3 παιδιά,
- το ποσοστό των οικογενειών που έχουν το πολύ 1 παιδί,
- το ποσοστό των οικογενειών που έχουν τουλάχιστον 3 παιδιά.

40.

Η σχετική συχνότητα  $f_i$  των τιμών μιας μεταβλητής  $X$  για ένα δείγμα μεγέθους  $n$  δίνεται από τον τύπο:  $f_i = \frac{i}{21}$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, \kappa$

α) Να βρείτε το πλήθος  $\kappa$  των τιμών του δείγματος

β) Αν το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες της τιμής  $x_4$  είναι 20, να βρείτε το μέγεθος του δείγματος και τη συχνότητα κάθε τιμής της μεταβλητής  $X$ .

41.

Έστω  $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$  οι τιμές μιας μεταβλητής  $X$  και  $F_i$  οι αθροιστικές συχνότητες της μεταβλητής.

Αν ισχύει  $F_i = \frac{i^2 + 4}{\kappa}$  όπου  $i = 1, 2, 3, 4$

α) Να βρεθεί η τιμή του  $\kappa$

β) Να βρεθούν οι σχετικές συχνότητες  $f_i$  όπου  $i = 1, 2, 3, 4$

γ) Να βρεθεί το ποσοστό των παρατηρήσεων που έχουν τιμή τουλάχιστον  $x_3$ .

42.

Σε μια πολυκατοικία υπάρχουν 20 διαμερίσματα σε καθένα από τα οποία μένουν 1, 2, 3, 4 ή 5 άτομα. Ισχύουν τα εξής:

- σε 15 διαμερίσματα μένουν το πολύ 3 άτομα,
- το πλήθος των διαμερισμάτων που μένουν 3 άτομα είναι διπλάσιο από το πλήθος των διαμερισμάτων που μένουν 4 άτομα,
- το 65% των διαμερισμάτων μένουν τουλάχιστον 3 άτομα,
- στο 15% των διαμερισμάτων μένουν 1 ή 5 άτομα.

Να κάνετε πίνακα κατανομής  $v_i$ ,  $f_i$ ,  $N_i$ ,  $F_i$ ,  $f_i\%$ ,  $F_i\%$ .

43.

Έγινε μια έρευνα σε  $n$  διαμερίσματα για το πλήθος των υπνοδωματίων που υπάρχουν σε καθένα από αυτά. Προέκυψαν οι τιμές  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$ ,  $x_3 = 3$  και  $x_4 = 4$ , με αντίστοιχες σχετικές συχνότητες  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $f_3$  και  $f_4$ , για τις οποίες ισχύουν:  $f_1 = \frac{f_2}{3} = \frac{f_3}{4} = \frac{f_4}{2}$

α) Να βρείτε τις σχετικές συχνότητες  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $f_3$  και  $f_4$

β) Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι 120 διαμερίσματα έχουν τουλάχιστον 3 υπνοδωμάτια, τότε:

i) να βρείτε το πλήθος  $n$  των διαμερισμάτων,

ii) να κατασκευάσετε πίνακα κατανομής συχνοτήτων (απόλυτων και αθροιστικών), σχετικών συχνοτήτων και αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.

44.

Έγινε έρευνα σε 200 κτίρια μιας πόλης για το πλήθος των ορόφων που έχει καθένα από αυτά. Προέκυψαν οι τιμές  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$ ,  $x_3 = 3$ ,  $x_4 = 4$ ,  $x_5 = 5$  και  $x_6 = 6$ , με αθροιστικές συχνότητες  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N_3$ ,  $N_4$ ,  $N_5$  και  $N_6$  αντίστοιχα, για τις οποίες ισχύει:  $N_i = 4i^2 + \lambda$  για  $i = 1, 2, \dots, 6$

α) Να βρείτε τον αριθμό  $\lambda$ .

β) Να κατασκευάσετε πίνακα κατανομής συχνοτήτων (απόλυτων και αθροιστικών) και επί τοις εκατό σχετικών και αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.

γ) Με τη βοήθεια του παραπάνω πίνακα, να βρείτε:

i) πόσα κτίρια έχουν το πολύ 3 ορόφους,

ii) το ποσοστό % των κτιρίων που έχουν τουλάχιστον 5 ορόφους.

### Ποιοτική μεταβλητή-Ραβδόγραμμα και κυκλικό διάγραμμα

45.

Στον διπλανό πίνακα φαίνεται ο χαρακτηρισμός που πήραν στο πτυχίο τους 150 φοιτητές που αποφοίτησαν φέτος από μια σχολή.

α) Να κατασκευάσετε πίνακα κατανομής σχετικών συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων %,

β) Να βρείτε το ποσοστό των φοιτητών που ο χαρακτηρισμός στο πτυχίο τους ήταν «Άριστα» ή «Λίαν καλώς»,

γ) Να κατασκευάσετε ραβδόγραμμα συχνοτήτων και κυκλικό διάγραμμα για τα παραπάνω δεδομένα.

| Χαρακτηρισμός<br>$x_i$ | Αριθμός<br>φοιτητών<br>$n_i$ |
|------------------------|------------------------------|
| Άριστα                 | 8                            |
| Λίαν καλώς             | 10                           |
| Καλώς                  | 20                           |
| Σχεδόν καλώς           | 32                           |
| Σύνολο                 | 200                          |

46.

Στην ερώτηση "ποιο μέσο προτιμάτε, για να ταξιδέψετε από την Αθήνα στην Θεσσαλονίκη" που έγινε σε 20 άτομα, δόθηκαν οι ακόλουθες απαντήσεις:

Αεροπλάνο, Τρένο, Λεωφορείο, Αυτοκίνητο, Αεροπλάνο, Λεωφορείο, Τρένο, Αεροπλάνο, Αυτοκίνητο, Λεωφορείο, Λεωφορείο, Λεωφορείο, Αεροπλάνο, Τρένο, Αεροπλάνο, Λεωφορείο, Τρένο, Λεωφορείο, Λεωφορείο, Αεροπλάνο.

Να κατασκευάσετε :

α) το ραβδόγραμμα

β) το κυκλικό διάγραμμα συχνοτήτων.



47.

Μια ομάδα μπάσκειτ πέτυχε σ' έναν αγώνα 12 βολές (που δίνουν από ένα πόντο), 20 δίποντα και 8 τρίποντα. Να κατασκευάσετε κυκλικό διάγραμμα και ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων για τους πόντους που προήλθαν από βολές, δίποντα ή τρίποντα.

48.

Ο παρακάτω πίνακας αναφέρεται στους χαρακτηρισμούς που πήραν οι μαθητές μιας τάξης Γ' Λυκείου με βάση το βαθμό του απολυτηρίου τους.

α) Να συμπληρώσετε τα κενά στον πίνακα αυτό.

β) Να κατασκευάσετε ραβδόγραμμα και κυκλικό διάγραμμα της κατανομής συχνοτήτων.

| ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΜΟΣ | Συχνότητα | Σχετική<br>συχνότητα % |
|---------------|-----------|------------------------|
| Άριστα        | 3         |                        |
| Λίαν καλώς    | 12        |                        |
| Καλώς         | 12        |                        |
| Σχεδόν καλώς  |           | 25                     |
| ΣΥΝΟΛΟ        | 36        |                        |

49.

Το διπλανό ραβδόγραμμα δημοσιεύτηκε σε μεγάλη απογευματινή εφημερίδα.

Αφορά στις απαντήσεις που έδωσε δείγμα ψηφοφόρων σχετικά με κάποια πτυχή της κυβερνητικής πολιτικής.

Είναι σωστά σχεδιασμένο το ραβδόγραμμα αυτό ;

Εξηγήστε το γιατί ;



50.

Το διπλανό ραβδόγραμμα δείχνει τα ποσοστά που έλαβαν δύο υποψήφιοι δήμαρχοι κάποιας πόλης στον πρώτο γύρο των δημοτικών εκλογών.

Να εξηγήσετε γιατί το ραβδόγραμμα αυτό είναι λανθασμένο.



51.

Στο διπλανό κυκλικό διάγραμμα παρουσιάζεται το πρωινό ρόφημα που προτιμούν να πίνουν 180 πελάτες ενός ξενοδοχείου.

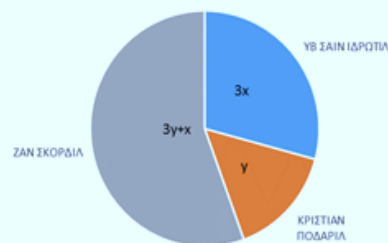
- α) Να βρείτε πόσοι πελάτες πίνουν κάθε ρόφημα.  
β) Να σχεδιάσετε ραβδόγραμμα συχνοτήτων για τα παραπάνω δεδομένα.



52.

Το διπλανό διάγραμμα παριστάνει τις προτιμήσεις 270 γυναικών προς 3 διαφορετικά αρώματα.

Αν  $3x + y = 160^\circ$  τότε να βρείτε ποιο ποσοστό γυναικών προτιμά καθένα από τα αρώματα και να κατασκευάσετε ραβδόγραμμα συχνοτήτων.



53.

Τα αποτελέσματα των εκλογών, σε ένα εκλογικό τμήμα, δίνονται από τον επόμενο (ελλιπή) πίνακα:

| Κόμμα $x_i$ | Συχνότητα $v_i$ | Σχετική συχνότητα $f_i$ |
|-------------|-----------------|-------------------------|
| A           |                 | 0,15                    |
| B           | 150             | 0,30                    |
| Γ           |                 | 0,35                    |
| Δ           |                 |                         |
| Σύνολο      |                 |                         |

- α) Να βρείτε πόσοι εκλογείς ψήφισαν στο τμήμα αυτό.  
β) Να βρείτε πόσες ψήφους πήρε κάθε κόμμα (σε| αυτό το εκλογικό τμήμα) ,  
γ) Να σχεδιάσετε το ραβδόγραμμα των σχετικών συχνοτήτων

**54.**

Στον πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζονται οι εξαγωγές ενός προϊόντος σε εκατοντάδες τόνους από την Ελλάδα προς τρίτες χώρες ανά τετράμηνο. Να γίνει παράσταση των δεδομένων αυτών σε ραβδόγραμμα.

| Χώρα       | 1 <sup>ο</sup><br>Τετράμηνο | 2 <sup>ο</sup><br>Τετράμηνο | 3 <sup>ο</sup><br>Τετράμηνο |
|------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| Γερμανία   | 20                          | 17                          | 19                          |
| Γαλλία     | 18                          | 19                          | 17                          |
| Ιταλία     | 15                          | 18                          | 16                          |
| Ρωσία      | 20                          | 18                          | 19                          |
| Μ.Βρετανία | 12                          | 14                          | 11                          |
| Ισπανία    | 16                          | 17                          | 18                          |
| Βέλγιο     | 13                          | 12                          | 14                          |
| Κύπρος     | 19                          | 20                          | 18                          |
| Ολλανδία   | 14                          | 15                          | 16                          |
| Αυστρία    | 17                          | 16                          | 18                          |

**55.**

Να κατασκευάσετε ραβδόγραμμα συχνοτήτων που να απεικονίζει γραφικά όλα τα στοιχεία του παρακάτω πίνακα:

#### ΠΡΟΣΩΠΙΚΟ ΦΑΡΜΑΚΕΥΤΙΚΩΝ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ

| Επίπεδο<br>Στράτευσης | Εργαζόμενοι<br>στη παραγωγή | Εργαζόμενοι<br>στη διοίκηση |
|-----------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| Ανώτατη               | 165                         | 793                         |
| Ανώτερη               | 377                         | 268                         |
| Μέση                  | 1359                        | 1199                        |
| Βασική                | 836                         | 149                         |

**56.**

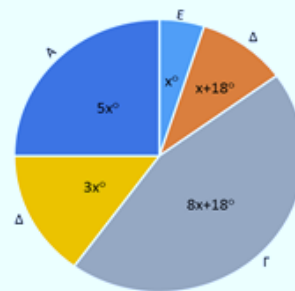
Ένα δείγμα από 240 γάτες έχει τα χαρακτηριστικά που συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα .  
Να κατασκευάσετε ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων  
α)ως προς το χρώμα των ματιών  
β)ως προς το χρώμα τριχώματος

#### ΧΡΩΜΑ ΜΑΤΙΩΝ ΚΑΙ ΤΡΙΧΩΜΑΤΟΣ

|                      | Κίτρινα<br>μάτια | Πράσινα<br>μάτια | Χαλκόχρωμα<br>μάτια |
|----------------------|------------------|------------------|---------------------|
| Μονόχρωμο<br>τρίχωμα | 50               | 40               | 35                  |
| Δίχρωμο<br>τρίχωμα   | 40               | 45               | 5                   |

57.

Σε έναν δήμο του νομού Αττικής υπήρχαν 5 υποψήφιοι δήμαρχοι Α, Β, Γ, Δ και Ε στις τελευταίες δημοτικές εκλογές. Το κυκλικό διάγραμμα που προέκυψε από τα αποτελέσματα σε ένα εκλογικό τμήμα, φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



- Να βρείτε την τιμή της γωνίας  $x$ .
- Να βρείτε τα ποσοστά % των ψήφων που συγκέντρωσε κάθε υποψήφιος,
- Αν ο υποψήφιος Β συγκέντρωσε 108 ψήφους, να κάνετε το ραβδόγραμμα συχνοτήτων για τα παραπάνω δεδομένα.

58.

Σε μια πόλη εκπέμπουν 5 ραδιοφωνικοί σταθμοί Α, Β, Γ, Δ και Ε. Ρωτήσαμε  $n$  κατοίκους της πόλης ποιον από τους παραπάνω σταθμούς προτιμούν και οι απαντήσεις τους φαίνονται στον παρακάτω (ελλιπή) πίνακα.

| Ραδιοφωνικός σταθμός | $x_i$ | Συχνότητα $v_i$ | Σχετική συχνότητα $f_i$ |
|----------------------|-------|-----------------|-------------------------|
| Α                    |       |                 | 0,25                    |
| Β                    |       | 30              | 0,15                    |
| Γ                    |       | 60              |                         |
| Δ                    |       |                 | 0,2                     |
| Ε                    |       |                 |                         |
| Σύνολο               |       |                 |                         |

- Να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα,
- Να κατασκευάσετε ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων και κυκλικό διάγραμμα για τα παραπάνω δεδομένα.

59.

Ρωτήσαμε 60 άτομα ποιο είναι το αγαπημένο τους είδος καφέ και πήραμε τις απαντήσεις  $x_1$  = Εσπρέσο,  $x_2$  = Γαλλικός,  $x_3$  = Καπουτσίνο,  $x_4$  = Ελληνικός και  $x_5$  = Φραπέ/Νες. Στο κυκλικό διάγραμμα των παραπάνω δεδομένων οι γωνίες των αντίστοιχων κυκλικών τομέων είναι ανάλογες των αριθμών 2, 3, 4, 5 και 6.

- Να βρείτε τη γωνία κάθε κυκλικού τομέα.
- Να κατασκευάσετε πίνακα κατανομής  $v_i$ ,  $f_i$  και  $f_i\%$ .
- Να κατασκευάσετε το ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό.

60.

Σε ένα κυκλικό διάγραμμα παριστάνεται το μορφωτικό επίπεδο των 400 εργαζομένων μιας επιχείρησης σε τέσσερις κατηγορίες.

Α' κατηγορία: Απόφοιτοι Γυμνασίου

Β' κατηγορία: Απόφοιτοι Λυκείου

Γ' κατηγορία: Πτυχιούχοι Ανώτατης Εκπαίδευσης

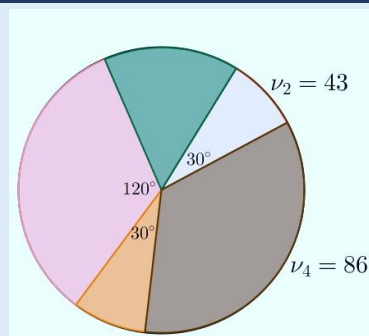
Δ' κατηγορία: Κάτοχοι Μεταπτυχιακού τίτλου

Κάθε εργαζόμενος ανήκει σε μία μόνο από τις κατηγορίες αυτές. Στην Α' κατηγορία ανήκει το 25% των εργαζομένων της επιχείρησης. Η γωνία του κυκλικού τομέα που αντιστοιχεί στους εργαζόμενους της Δ' κατηγορίας είναι  $18^\circ$ . Οι εργαζόμενοι της επιχείρησης της Β' κατηγορίας είναι εξαπλάσιοι των εργαζομένων της Γ' κατηγορίας,

- Να υπολογίσετε τον αριθμό των εργαζομένων κάθε κατηγορίας.
- Να μετατρέψετε το κυκλικό διάγραμμα σε ραβδόγραμμα συχνοτήτων.

61.

Κάποιος μαθητής παρουσίασε το διπλανό κυκλικό διάγραμμα μιας μεταβλητής. Όμως ένας άλλος μαθητής, αφού το μελέτησε είπε ότι υπάρχει κάποιο λάθος στο κυκλικό διάγραμμα. Συμφωνείτε με την άποψή του; Δικαιολογείτε την απάντησή σας



## Ποσοτική μεταβλητή-Διάγραμμα ,πολύγωνο και κυκλικό διάγραμμα

62.

Ένας παίκτης του μπάσκετ είχε το 1998 συμμετοχή σε 30 αγώνες της ομάδας του. Τα παρακάτω δεδομένα αντιπροσωπεύουν τα φάουλ που έκανε σε καθέναν από αυτούς τους αγώνες.

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 2 | 3 | 3 | 5 | 0 | 4 | 2 | 4 | 3 |
| 0 | 4 | 5 | 5 | 1 | 3 | 4 | 0 | 2 | 3 |
| 3 | 4 | 3 | 1 | 5 | 3 | 2 | 4 | 4 | 3 |

Να κατασκευάσετε πίνακα με τις συχνότητες, σχετικές συχνότητες, αθροιστικές συχνότητες και αθροιστικές σχετικές συχνότητες της μεταβλητής «φάουλ». Στη συνέχεια να κατασκευάσετε ένα διάγραμμα συχνοτήτων και το αντίστοιχο πολύγωνο συχνοτήτων.

63.

Οι παρακάτω αριθμοί αντιπροσωπεύουν το πλήθος των ενηλίκων επιβατών που μπορεί να μεταφέρει καθένα από 30 διαφορετικά αυτοκίνητα.

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 4 | 4 | 6 | 4 | 3 | 5 | 4 | 5 | 3 |
| 4 | 3 | 5 | 6 | 4 | 5 | 5 | 3 | 4 | 4 |
| 6 | 3 | 4 | 5 | 5 | 3 | 4 | 4 | 5 | 4 |

- Να κατασκευάσετε πίνακα με τις συχνότητες, σχετικές συχνότητες, αθροιστικές συχνότητες και αθροιστικές σχετικές συχνότητες της μεταβλητής «πλήθος επιβατών».
- Να κατασκευάσετε ένα διάγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων και το αντίστοιχο πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.
- Να βρείτε το ποσοστό των αυτοκινήτων του δείγματος που μπορεί να μεταφέρει:
  - τουλάχιστον 5 επιβάτες
  - το πολύ 4 επιβάτες
  - 4 ή 5 επιβάτες

**64.**

Στον παρακάτω πίνακα δίνονται 40 διάμετροι αξόνων ενός εξαρτήματος :

|     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 6,8 | 7,1 | 7,2 | 7,3 | 6,9 | 7,0 | 7,1 | 6,9 |
| 7,0 | 6,8 | 7,0 | 7,3 | 7,0 | 7,1 | 7,2 | 6,8 |
| 6,9 | 7,2 | 7,1 | 7,0 | 6,9 | 6,8 | 7,0 | 7,1 |
| 7,3 | 7,0 | 6,8 | 7,4 | 7,3 | 7,3 | 7,3 | 7,0 |
| 7,1 | 7,3 | 7,2 | 7,0 | 7,0 | 7,4 | 7,2 | 7,4 |

Να κατασκευάσετε το διάγραμμα συχνοτήτων.

**65.**

Έστω  $x_1, x_2, x_3, x_4$  οι τιμές μιας μεταβλητής  $X$  ενός δείγματος μεγέθους  $n$ .

Έστω ακόμα ότι  $N_3 = 20F_3$  και  $v_i = \frac{6}{i-1}$  με  $i = 2, 3, 4$ .

α) Να βρείτε το μέγεθος του δείγματος

β) Να βρείτε τις συχνότητες  $v_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$

γ) Να κατασκευάσετε πίνακα κατανομής συχνοτήτων με στήλες  $v_i, N_i, f_i \%, F_i \%$

δ) Να κατασκευάσετε το διάγραμμα σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων (%), και το αντίστοιχο πολύγωνο

**66.**

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας:

| $x_i$  | $v_i$ | $N_i$ | $f_i$ | $\alpha_i$  |
|--------|-------|-------|-------|-------------|
| 1      | 30    |       |       |             |
| 2      |       |       |       | $90^\circ$  |
| 3      |       | 100   |       |             |
| 4      | 60    |       |       | $108^\circ$ |
| 5      |       |       |       |             |
| Σύνολο |       |       |       |             |

α) Να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα,

β) Για τα παραπάνω δεδομένα να κατασκευάσετε:

- το διάγραμμα συχνοτήτων και το αντίστοιχο πολύγωνο,
- το κυκλικό διάγραμμα.

**67.**

Ρωτήσαμε ορισμένα άτομα πόσες κινηματογραφικές ταινίες είδαν τον περασμένο μήνα. Οι απαντήσεις τους, καθώς και οι αντίστοιχες αθροιστικές σχετικές συχνότητες, φαίνονται στον διπλανό πίνακα. Να κατασκευάσετε κυκλικό διάγραμμα για τα δεδομένα αυτά.

| $x_i$  | $F_i$ |
|--------|-------|
| 0      |       |
| 1      | 30    |
| 2      | 60    |
| 3      |       |
| 4      |       |
| Σύνολο |       |

68.

Εξετάσαμε ορισμένα μέλη ενός γυμναστηρίου ως προς τις φορές που το επισκέπτονται κάθε εβδομάδα. Τα αποτελέσματα φαίνονται στον επόμενο (ελλιπή) πίνακα.

| Αριθμ.Επισκ.( $x_i$ ) | $v_i$ | $N_i$ | $f_i$ | $F_i$ | $\alpha_i$  |
|-----------------------|-------|-------|-------|-------|-------------|
| 1                     |       |       |       |       | $72^\circ$  |
| 2                     |       | 30    |       |       | $144^\circ$ |
| 3                     |       |       |       | 0,9   |             |
| 4                     |       |       |       |       |             |
| Σύνολο                |       |       |       |       |             |

α) Να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα,

β) Με τα παραπάνω δεδομένα να κατασκευάσετε το διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό και το αντίστοιχο πολύγωνο.

69.

Εξετάσαμε  $n$  μαθητές της Γ' Λυκείου ως προς τον βαθμό που είχαν στο Α' τετράμηνο στα Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής. Ορισμένα από τα αποτελέσματα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

| Βαθμός<br>$x_i$ | Αριθμός μαθητών<br>$v_i$ | $N_i$ | $f_i$ | $F_i$ | $f_i\%$ |
|-----------------|--------------------------|-------|-------|-------|---------|
| 16              | 4                        |       |       |       |         |
| 17              |                          |       | 0,25  |       |         |
| 18              |                          | 52    | 0,35  |       |         |
| 19              |                          |       |       |       | 20      |
| 20              |                          |       |       |       |         |
| Σύνολο          |                          |       |       |       |         |

α) Να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα,

β) Με τα παραπάνω δεδομένα να κατασκευάσετε:

- το διάγραμμα συχνοτήτων και το αντίστοιχο πολύγωνο,
- το διάγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων % και το αντίστοιχο πολύγωνο,
- το κυκλικό διάγραμμα.

70.

Να κατασκευάσετε κυκλικό διάγραμμα που να δείχνει ποιο ποσοστό των στρατευσίμων κατατάχτηκε ,δεν κατατάχτηκε και για ποιους λόγους.

ΣΤΡΑΤΕΥΣΙΜΟΙ 1997

| ΚΑΤΑΤΑΧΤΗΚΑΝ                |       |
|-----------------------------|-------|
| 25228                       |       |
| ΔΕΝ ΚΑΤΑΤΑΧΤΗΚΑΝ            |       |
| Λόγω σπουδών                | 30248 |
| Λόγω ακαταλληλότητας        | 1092  |
| Λόγω υγείας                 | 2311  |
| Μόνιμοι κάτοικοι εξωτερικού | 2411  |
| Ανυπότακτοι-αναζητούμενοι   | 1408  |
| Άλλοι λόγοι                 | 1674  |

**71.**

Ένας μαθητής πήρε τον διπλανό πίνακα σχετικών συχνοτήτων από ένα δείγμα ποσοτικής διακριτής μεταβλητής.

Ξέχασε όμως το μέγεθος  $n$  του δείγματος.

α) Να βρείτε την μικρότερη δυνατή τιμή του  $n$ .

β) Για την τιμή αυτή του  $n$  να κατασκευάσετε το πολύγωνο συχνοτήτων για την μεταβλητή  $x$ .

| Τιμή $x_i$ | σχετική συχνότητα $f_i\%$ |
|------------|---------------------------|
| 0          | 12,5                      |
| 1          | 0                         |
| 2          | 50                        |
| 3          | 25                        |
| 4          | 12,5                      |

**72.**

Από μια έρευνα που έγινε για τις ημέρες απουσίας 40 υπαλλήλων μιας εταιρείας τον περασμένο μήνα, προέκυψε ο παρακάτω πίνακας:

| Ημέρες απουσίας $x_i$ | Αριθμός υπαλλήλων $n_i$ | $N_i$ | $f_i$ | $F_i$ |
|-----------------------|-------------------------|-------|-------|-------|
| 0                     |                         |       | 0,1   |       |
| 1                     |                         | 14    |       |       |
| 2                     |                         |       |       | 0,8   |
| 3                     | 6                       |       |       |       |
| 4                     |                         |       |       |       |
| Σύνολο                | 40                      |       |       |       |

α) Να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα

β) Να βρείτε:

i) πόσοι υπάλληλοι απουσίασαν το πολύ 2 ημέρες,

ii) το ποσοστό % των υπαλλήλων που απουσίασαν τουλάχιστον 2 ημέρες,

γ) Να σχεδιάσετε:

i) το διάγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων,

ii) το κυκλικό διάγραμμα των συχνοτήτων.

**73.**

36 υπάλληλοι ενός οργανισμού έκαναν αίτηση για μετάθεση και τα μόρια τους βάσει των οποίων θα γίνουν οι μεταθέσεις είναι:

80, 90, 120, 150, 80, 100, 130, 110, 120, 120, 100, 110, 160, 180, 190, 90, 120, 130, 80, 80, 90, 90, 100, 100, 100, 130, 120, 120, 150, 120, 160, 100, 140, 140, 110, 150.

Να κατασκευάσετε πίνακα συχνοτήτων.

i) Να κατασκευάσετε το διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων και το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.

ii) Αν ο οργανισμός μεταθέσει όσους έχουν πάνω από 120 μόρια πόσα άτομα θα πάρουν μετάθεση;

iii) Αν ο οργανισμός αποφασίσει ότι θα μεταθέσει μόνο το 25% των υποψηφίων πόσα μόρια τουλάχιστον πρέπει να έχει κάποιος για να πάρει μετάθεση;



74.

Εξετάσαμε ένα δείγμα  $n$  φοιτητών μιας σχολής ως προς τον αριθμό των μαθημάτων που πέρασαν το περασμένο εξάμηνο και οι απαντήσεις που πήραμε ήταν  $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4$  και  $x_5 = 5$ .

Από την επεξεργασία των δεδομένων προέκυψαν τα εξής:

- η γωνία του κυκλικού διαγράμματος που αντιστοιχεί στην τιμή  $x_2 = 2$  είναι κατά  $18^\circ$  μεγαλύτερη από τη γωνία που αντιστοιχεί στην τιμή  $x_1 = 1$ ,
- 27 φοιτητές πέρασαν το πολύ 2 μαθήματα,
- το 95% των φοιτητών πέρασαν το πολύ 4 μαθήματα,
- 3 φοιτητές πέρασαν 5 μαθήματα,
- οι φοιτητές που πέρασαν 3 μαθήματα είναι τετραπλάσιοι από τους φοιτητές που πέρασαν 4 μαθήματα.

α) Να κατασκευάσετε πίνακα κατανομής  $n_i, f_i, N_i, F_i, f_i\%$  και  $F_i\%$ .

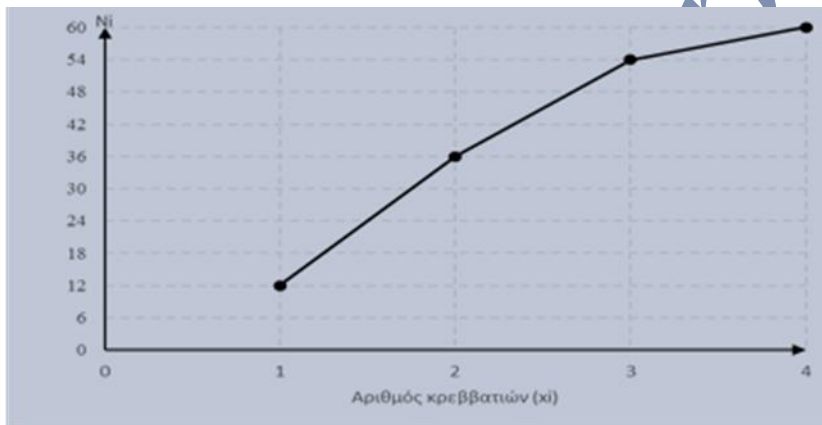
β) Να βρείτε το ποσοστό % των φοιτητών που πέρασαν:

- i) τουλάχιστον 3 μαθήματα,
- ii) τουλάχιστον 2 και το πολύ 4 μαθήματα.

γ) Για αυτά τα δεδομένα να κατασκευάσετε το διάγραμμα συχνοτήτων και το κυκλικό διάγραμμα

75.

Εξετάσαμε τα δωμάτια ενός ξενοδοχείου ως προς τον αριθμό των κρεβατιών που έχουν. Προέκυψε το επόμενο πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων.

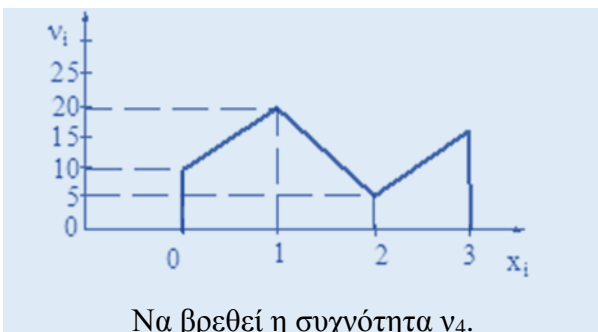


Για τα παραπάνω δεδομένα να κατασκευάσετε:

- α) το διάγραμμα συχνοτήτων και το αντίστοιχο πολύγωνο,
- β) το κυκλικό διάγραμμα.

76.

Δίνεται ότι το εμβαδόν του παρακάτω πολύγωνου συχνοτήτων με τον άξονα  $x_i$  είναι 37,5

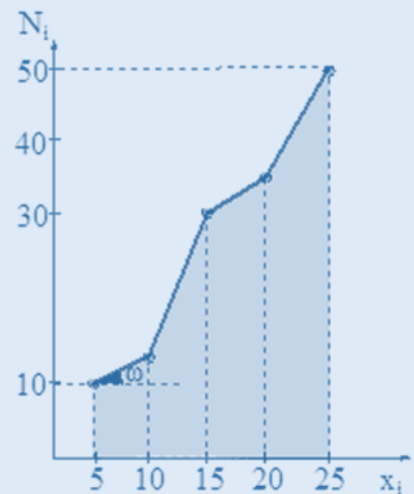


Να βρεθεί η συχνότητα  $v_4$ .

77.

Στο διπλανό σχήμα δίνεται το πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων για την διακριτή μεταβλητή  $X$ . Η γωνία  $\omega$  είναι ίση με  $45^\circ$ . Η συχνότητα της τιμής 15 είναι 15. Αν κατασκευάσουμε κυκλικό διάγραμμα, η γωνία του κυκλικού τομέα που αντιστοιχεί στην τιμή 20 θα είναι ίση με  $36^\circ$

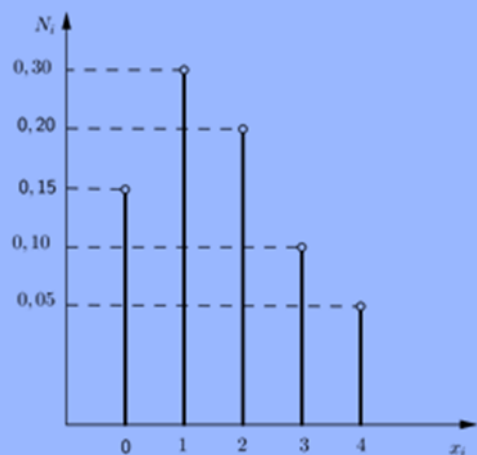
- Να βρείτε το μέγεθος του δείγματος
- Να κατασκευάσετε πίνακα κατανομής συχνοτήτων με τις στήλες  $v_i$ ,  $N_i$ ,  $f_i\%$ ,  $F_i\%$ ,  $a_i$
- Να κατασκευάσετε το αντίστοιχο κυκλικό διάγραμμα
- Να κατασκευάσετε το διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων, καθώς και το αντίστοιχο πολύγωνο



78.

Ρωτήσαμε  $n$  μαθητές μιας περιοχής πόσα μουσεία επισκέφτηκαν το προηγούμενο έτος. Πήραμε τις απαντήσεις  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 1$ ,  $x_3 = 2$ ,  $x_4 = 3$  και  $x_5 = 4$ , των οποίων το διάγραμμα των σχετικών συχνοτήτων φαίνεται στο διπλανό διάγραμμα.

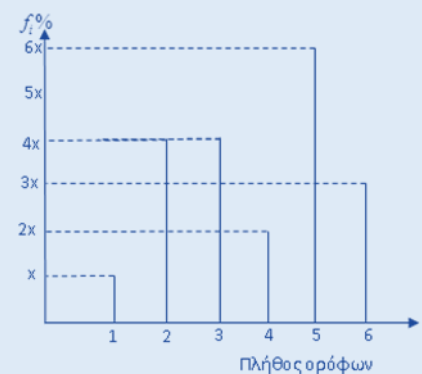
- Να κατασκευάσετε το κυκλικό διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων.
- Να βρείτε το ποσοστό των μαθητών που επισκέφτηκαν τουλάχιστον 2 μουσεία το περασμένο έτος
- Αν το περασμένο έτος 60 μαθητές επισκέφτηκαν πολύ 2 μουσεία, τότε:
  - να βρείτε το πλήθος  $n$  των μαθητών,
  - να κατασκευάσετε πίνακα κατανομής συχνοτήτων και αθροιστικών συχνοτήτων.



79.

Το παρακάτω διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων αναφέρεται στους ορόφους των κτισμάτων κάποιας πόλης.

- Να βρείτε το ποσοστό των κτιρίων που έχουν από 3 ορόφους και πάνω
- Να κατασκευάσετε κυκλικό διάγραμμα για το πλήθος των ορόφων.



80.

Στο Φυσικό τμήμα του Πανεπιστημίου Αθηνών  $n$  φοιτητές εξετάστηκαν στο μάθημα της Αστρονομίας και ορισμένα από τα στοιχεία που αφορούν στη βαθμολογία τους φαίνονται στον επόμενο πίνακα:

| Βαθμολογία<br>$x_i$ | Αριθμός φοιτητών<br>$v_i$ | $N_i$ | $f_i$ | $F_i$ |
|---------------------|---------------------------|-------|-------|-------|
| 1                   | $\alpha$                  |       |       |       |
| 2                   | $\beta$                   |       | 20    |       |
| 3                   | $4\alpha$                 |       |       |       |
| 4                   | $2\beta$                  |       |       | 0,35  |
| 5                   | $7\gamma$                 |       |       |       |
| 6                   |                           | 150   |       |       |
| 7                   |                           |       | 0,15  |       |
| 8                   | $\beta-\alpha$            |       | 0,05  |       |
| 9                   | $\gamma$                  |       |       |       |
| 10                  | $\gamma$                  |       |       |       |
| Σύνολο              |                           |       |       |       |

- α) Να βρείτε τους αριθμούς  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  και να συμπληρώσετε τον πίνακα.  
 β) Να κατασκευάσετε το διάγραμμα συχνοτήτων και το αντίστοιχο πολύγωνο,  
 γ) Να βρείτε το ποσοστό % των φοιτητών που πέρασαν το μάθημα (δηλαδή ο βαθμός τους ήταν το πολύ 4).  
 δ) Το 10% των φοιτητών που έγραψαν καλύτερα θα επισκεφτούν το Αστεροσκοπείο Αθηνών  
 Τι βαθμό τουλάχιστον πρέπει να έχει ένας φοιτητής για να επισκεφτεί το Αστεροσκοπείο ;

## Σημειόγραμμα-Χρονόγραμμα

81.

Από 12 επιβατηγά αυτοκίνητα που ελέγχθηκαν τυχαία τα 4 είχαν από 1 μόνο επιβάτη (τον οδηγό), τα 2 είχαν από 2 επιβάτες, τα 3 είχαν από 3 επιβάτες και τα υπόλοιπα είχαν από 4 επιβάτες. Να απεικονίσετε γραφικά τις παρατηρήσεις αυτές με ένα σημειόγραμμα.

82.

Οι βαθμοί Α' τετραμήνου στο μάθημα των Μαθηματικών Γενικής Παιδείας 20 μαθητών της Γ' Λυκείου είναι:

|    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|
| 18 | 19 | 18 | 17 | 16 |
| 20 | 20 | 19 | 19 | 18 |
| 18 | 17 | 16 | 18 | 20 |
| 19 | 20 | 18 | 17 | 19 |

- α) Να κατασκευάσετε:  
 i) τον πίνακα κατανομής  $v_i$ ,  $f_i$ ,  $N_i$ ,  $F_i$ ,  
 ii) το σημειόγραμμα  
 iii) το κυκλικό διάγραμμα.  
 β) Να βρείτε το ποσοστό % των μαθητών που έχουν βαθμό:  
 i) το πολύ 17, ii) τουλάχιστον 19

83.

Το επόμενο σημειόγραμμα αναφέρεται στον αριθμό των καφέδων που πίνουν καθημερινά 10 άτομα.

Για τα δεδομένα που φαίνονται σε αυτό να κατασκευάσετε:

- τον πίνακα κατανομής  $n_i$ ,  $f_i$ ,  $N_i$ ,  $F_i$ ,
- το πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων
- το κυκλικό διάγραμμα.



84.

Ένα εργοστάσιο κονσερβοποιίας παράγει 3 είδη προϊόντων. Η παραγωγή του σε Kg κατά τις 5 ημέρες τις εβδομάδας φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

| Προϊόν | Κιλά προϊόντος |       |         |        |           |
|--------|----------------|-------|---------|--------|-----------|
|        | Δευτέρα        | Τρίτη | Τετάρτη | Πέμπτη | Παρασκευή |
| 1      | 1300           | 1250  | 1150    | 1200   | 1000      |
| 2      | 1350           | 1500  | 1200    | 800    | 1000      |
| 3      | 2000           | 1800  | 1520    | 1570   | 1650      |

Να κατασκευάσετε τα χρονογράμματα για την παραγωγή των τριών προϊόντων.

85.

Το βάρος (σε kg) ενός μωρού κατά τους 6 πρώτους μήνες της ζωής του φαίνεται στον παρακάτω πίνακα :

| Μήνες     | 0 | 1   | 2   | 3 | 4 | 5   | 6 |
|-----------|---|-----|-----|---|---|-----|---|
| Βάρος(kg) | 3 | 3,5 | 4,5 | 6 | 7 | 7,5 | 9 |

Να κατασκευάσετε χρονόγραμμα για τα παραπάνω δεδομένα.

86.

Ένας χρηματιστής παρακολουθεί κάθε εβδομάδα των τιμών τριών μετοχών. Μετά το κλείσιμο του Χρηματιστηρίου κάθε Τετάρτη κάνει πρόβλεψη για τις δύο επόμενες μέρες.

Για μία τυχαία εβδομάδα είχε σχηματίσει τον ακόλουθο πίνακα:

| Μετοχή | Δευτέρα | Τρίτη | Τετάρτη | Πρόβλεψη Πέμπτη | Πρόβλεψη Παρασκευή |
|--------|---------|-------|---------|-----------------|--------------------|
| 1      | 1090    | 1120  | 1150    | 1130            | 1135               |
| 2      | 2170    | 2412  | 2345    | 2350            | 2420               |
| 3      | 4485    | 4378  | 4390    | 4380            | 4420               |

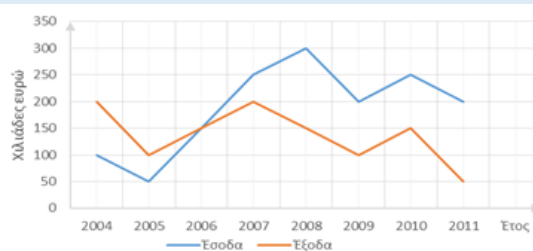
Να γίνουν τα χρονογράμματα για τις τρεις μετοχές.

87.

Τα έσοδα και τα έξοδα (σε χιλιάδες €) μιας επιχείρησης φαίνονται στο διπλανό χρονόγραμμα.

α) Να βρείτε ποια έτη η επιχείρηση:

- είχε τα περισσότερα έσοδα
- είχε τα λιγότερα έξοδα
- είχε έξοδα 100000€
- άρχισε να έχει κέρδη



β) Να κατασκευάσετε το χρονόγραμμα των κερδών της επιχείρησης ,από το έτος που αρχίζει να έχει κέρδη.

**88.**

Χρησιμοποιώντας τα δεδομένα του παρακάτω πίνακα να κατασκευάσετε χρονόγραμμα το οποίο να δείχνει την εξέλιξη της παιδικής εγκληματικότητας από το 1987 έως και το 1997.

| Έτος | Συχνότητα |
|------|-----------|
| 1987 | 9         |
| 1988 | 26        |
| 1989 | 18        |
| 1990 | 2         |
| 1991 | 25        |
| 1992 | 76        |
| 1993 | 208       |
| 1994 | 101       |
| 1995 | 54        |
| 1996 | 110       |
| 1997 | 249       |

Ποιες τάσεις παρατηρείτε στο χρονόγραμμα αυτό;

**89.**

Χρησιμοποιώντας τα δεδομένα του παρακάτω πίνακα να κατασκευάσετε χρονογράμματα που να δείχνουν την εξέλιξη της γρίπης και του κοκίτη την περίοδο 1987 – 1997. Ποιες τάσεις παρατηρείτε;

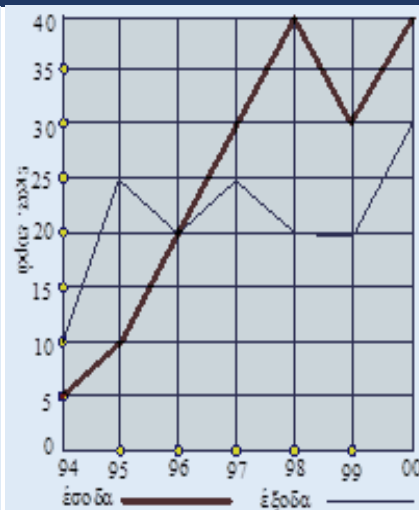
**ΕΞΕΛΙΞΗ ΤΩΝ ΚΡΟΥΣΜΑΤΩΝ ΓΡΙΠΗΣ ΚΑΙ ΚΟΚΙΤΗ  
ΤΗΝ ΠΕΡΙΟΔΟ 1987-1997 ΣΤΗΝ ΕΛΛΑΔΑ**

| Έτος | Κρούσματα γρίπης | Κρούσματα κοκίτη |
|------|------------------|------------------|
| 1987 | 6688             | 2696             |
| 1988 | 7299             | 880              |
| 1989 | 12534            | 649              |
| 1990 | 5259             | 705              |
| 1991 | 400              | 634              |
| 1992 | 3194             | 509              |
| 1993 | 1093             | 204              |
| 1994 | 243              | 253              |
| 1995 | 46               | 210              |
| 1996 | 1325             | 94               |
| 1997 | 553              | 106              |

90.

Στο διπλανό χρονοδιάγραμμα παρουσιάζονται τα έσοδα και τα έξοδα μιας εταιρείας (σε εκατ ευρώ) από το έτος 1994 έως και το έτος 2000

- Μετά από ποια χρονιά η εταιρεία παρουσιάζει κέρδη;
- Ποια χρονιά η εταιρεία έχει την μεγαλύτερη ζημιά και ποια χρονιά έχει το μεγαλύτερο κέρδος. Να υπολογίσετε τις τιμές αυτές.
- Να περιγράψετε την οικονομική κατάσταση της εταιρείας το έτος 1999
- Να γίνει χρονόγραμμα των κερδών από την χρονιά που έχει κέρδη
- Να γίνει συγκριτικό ραβδόγραμμα εσόδων – εξόδων
- Ποια χρονιά η εταιρεία είχε το μεγαλύτερο ποσοστό αύξησης κερδών;



## Συνδυαστικά θέματα

91.

Έγινε μία έρευνα σε  $n$  πελάτες ενός βιβλιοπωλείου για το πόσα βιβλία διάβασαν το περασμένο έτος. Προέκυψαν οι τιμές  $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$  και  $x_4 = 4$  με αντίστοιχες αθροιστικές σχετικές

συχνότητες  $F_1, F_2, F_3$  και  $F_4$  για τις οποίες ισχύει :  $F_i = \frac{i^2 + 4}{k}$  για  $i=1,2,3,4$ .

- Να βρείτε τον αριθμό  $n$
- Να κατασκευάσετε το κυκλικό διάγραμμα για τα παραπάνω δεδομένα.
- Αν το πλήθος των πελατών που διάβασαν το πολύ 2 βιβλία το περασμένο έτος είναι ίσο με το

όριο  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - 2}{\sqrt{x^2 + x + 2} - 2}$ , να κατασκευάσετε τον πίνακα κατανομής συχνοτήτων  $n_i, f_i, N_i, F_i$ .

92.

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας:

| $x_i$  | $n_i$  | $N_i$ | $f_i$ | $F_i$ |
|--------|--------|-------|-------|-------|
| 1      | $x$    |       |       |       |
| 2      | $x^2$  |       |       |       |
| 3      | $5x-2$ |       |       |       |
| 4      | $6-y$  |       |       | 0,95  |
| 5      | $y$    |       |       |       |
| Σύνολο |        |       |       |       |

όπου  $x, y \in \mathbb{N}$ , με  $x \geq 1$  και  $y \leq 6$ .

- Να βρείτε για ποια τιμή του  $x$ , η σχετική συχνότητα  $f_i$  γίνεται μέγιστη
- Για  $x=2$ :
  - να αποδείξετε ότι  $y=1$
  - να συμπληρώσετε τον προηγούμενο πίνακα
- Να κατασκευάσετε το διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων και το αντίστοιχο πολύγωνο

93.

Δίνεται η συνάρτηση:  $g(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$

- α) Να μελετήσετε τη  $g$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- β) Αν  $\alpha$  είναι η θέση του τοπικού μεγίστου και  $\beta$  είναι η θέση του τοπικού ελάχιστου της  $g$ , να συμπληρώσετε τον διπλανό πίνακα:
- γ) Να κατασκευάσετε το διάγραμμα αθροιστικών συχνοτήτων και το αντίστοιχο πολύγωνο

| $x_i$  | $v_i$            | $N_i$   | $f_i\%$    | $F_i\%$   |
|--------|------------------|---------|------------|-----------|
| 1      |                  | $\beta$ |            |           |
| 2      | $g(\alpha)$      |         |            |           |
| 3      |                  |         |            | $22\beta$ |
| 4      |                  |         |            |           |
| 5      | $\beta - \alpha$ |         | $g(\beta)$ |           |
| Σύνολο |                  |         |            |           |

### Ομαδοποίηση δεδομένων

94.

Τα βάρη (σε κιλά) 20 αγοριών της Γ' Λυκείου ενός σχολείου είναι τα εξής:

|    |    |    |    |
|----|----|----|----|
| 50 | 85 | 62 | 73 |
| 59 | 69 | 79 | 67 |
| 68 | 65 | 67 | 81 |
| 68 | 57 | 80 | 72 |

- α) Να ομαδοποιήσετε τα παραπάνω δεδομένα σε 5 κλάσεις ίσου πλάτους και να κατασκευάσετε πίνακα κατανομής  $v_i$ ,  $f_i$ ,  $N_i$ ,  $F_i$
- β) Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα και το πολύγωνο
- i) σχετικών συχνοτήτων, ii) αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.

95.

Τα ύψη (σε cm) 40 κοριτσιών της Γ' Λυκείου ενός σχολείου είναι τα εξής:

|     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| 168 | 160 | 164 | 154 | 169 |
| 158 | 162 | 176 | 165 | 161 |
| 163 | 155 | 164 | 166 | 172 |
| 174 | 164 | 156 | 159 | 165 |
| 166 | 161 | 167 | 163 | 167 |
| 165 | 172 | 157 | 175 | 160 |
| 168 | 160 | 164 | 159 | 167 |
| 156 | 163 | 178 | 155 | 164 |

- α) Να ομαδοποιήσετε τα παραπάνω δεδομένα σε 6 κλάσεις ίσου πλάτους και να κατασκευάσετε πίνακα κατανομής  $v_i$ ,  $f_i$ ,  $N_i$ ,  $F_i$
- β) Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα και το πολύγωνο
- i) σχετικών συχνοτήτων, ii) αθροιστικών συχνοτήτων.

96.

Για μία ορισμένη διαδρομή σαράντα αυτοκίνητα χρειάστηκαν τα ακόλουθα χρονικά διαστήματα σε ώρες.

|     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 5,6 | 6,1 | 6,6 | 6,7 | 7,2 | 6,4 | 7,0 | 6,5 |
| 6,9 | 6,5 | 5,8 | 7,6 | 6,0 | 8,3 | 6,1 | 7,2 |
| 7,4 | 6,9 | 6,5 | 6,3 | 7,5 | 5,6 | 6,4 | 7,9 |
| 6,1 | 7,3 | 7,5 | 6,6 | 6,7 | 8,4 | 6,7 | 7,6 |
| 8,1 | 7,5 | 6,1 | 8,3 | 7,6 | 5,8 | 7,9 | 7,7 |

- α) Να ομαδοποιήσετε τα δεδομένα σε πίνακα με κατάλληλο αριθμό κλάσεων.  
β) Να κατασκευάσετε τον πίνακα με τις συχνότητες  $v_i, f_i\%, N_i, F_i\%$ .  
γ) Να κατασκευάσετε τα πολύγωνα σχετικών συχνοτήτων και αθροιστικών συχνοτήτων.

97.

Σε ένα ορνιθοτροφείο ζύγισαν 48 αυγά και βρήκαν ότι τα βάρη τους σε γραμμάρια είναι:

|    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 50 | 60 | 67 | 57 | 62 | 51 | 64 | 51 |
| 60 | 57 | 65 | 50 | 64 | 61 | 66 | 59 |
| 55 | 60 | 64 | 60 | 66 | 54 | 59 | 64 |
| 60 | 70 | 66 | 71 | 59 | 66 | 61 | 51 |
| 55 | 56 | 55 | 55 | 56 | 61 | 67 | 65 |
| 64 | 62 | 62 | 62 | 74 | 64 | 56 | 64 |

- α) Να ομαδοποιήσετε τα δεδομένα σε πίνακα με κατάλληλο αριθμό κλάσεων  
β) Να κατασκευάσετε τον πίνακα με τις συχνότητες  $v_i, f_i\%, N_i, F_i\%$ .  
γ) Να κατασκευάσετε το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων και αθροιστικών συχνοτήτων

98.

Οι δείκτες νοημοσύνης (IQ) 40 ατόμων, όπως μετρήθηκε με κάποιο τεστ, φαίνονται στον επόμενο πίνακα.

|     |     |     |
|-----|-----|-----|
| 100 | 111 | 106 |
| 120 | 101 | 95  |
| 106 | 92  | 102 |
| 101 | 107 | 102 |
| 90  | 96  | 112 |
| 100 | 108 | 104 |
| 104 | 112 | 109 |
| 118 | 98  | 116 |

- α) Να ομαδοποιήσετε τα δεδομένα σε 6 κλάσεις και να κατασκευάσετε πίνακα κατανομής  $v_i, f_i, N_i, F_i$   
β) Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα και το πολύγωνο:  
i) σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό,  
ii) αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό.  
γ) Να κατασκευάσετε το κυκλικό διάγραμμα.



99.

Ζυγίστηκαν 30 αθλητές της άρσης βαρών και τα βάρη τους (σε kgr) ήταν τα εξής:

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 55 | 70 | 69 | 73 | 72 | 59 | 54 | 71 | 67 | 62 |
| 60 | 54 | 63 | 52 | 80 | 73 | 74 | 70 | 63 | 64 |
| 65 | 58 | 53 | 45 | 56 | 50 | 48 | 57 | 60 | 62 |

- Να ομαδοποιηθούν οι παρακάτω παρατηρήσεις.
- Να κατασκευασθεί πίνακας συχνοτήτων με στήλες  $[-)$ ,  $x_i$ ,  $v_i$ ,  $f_i\%$ ,  $F_i\%$
- Ποιο ποσοστό των αθλητών έχει βάρος μικρότερο από 57 kgr και ποιο μεγαλύτερο ή ίσο από 57 kgr;
- Ο προπονητής της ομάδας βλέποντας τα αποτελέσματα της μέτρησης συμπέρανε ότι το 30% των αθλητών είναι υπέρβαροι. Πόσοι σε πλήθος είναι οι υπέρβαροι αθλητές;
- Να κατασκευασθεί το ιστόγραμμα και το πολύγωνο συχνοτήτων και αθροιστικών συχνοτήτων.

### Κατασκευή ιστογράμματος-πολύγωνου

100.

Στον παρακάτω πίνακα δίνεται η κατανομή των εβδομαδιαίων αποδοχών (σε χιλιάδες δραχμές) των υπαλλήλων μιας εταιρείας. Να κατασκευάσετε το αντίστοιχο ιστόγραμμα και το αντίστοιχο πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων.

| Εβδομαδιαίες αποδοχές (σε χιλιάδες δραχμές) | Σχετ. συχν. $f_i\%$ |
|---|---------------------|
| [35,36]                                     | 7                   |
| [36,37]                                     | 10                  |
| [37,38]                                     | 21                  |
| [38,39]                                     | 27                  |
| [39,40]                                     | 22                  |
| [40,41]                                     | 9                   |
| [41,42]                                     | 4                   |
| <b>Σύνολο</b>                               | <b>100</b>          |

101.

Στον παρακάτω πίνακα έχουν ομαδοποιηθεί τα βάρη (σε g)  $v$  βρεφών που γεννήθηκαν σε ένα μαιευτήριο.

| Βάρος σε gr   | Αριθμός βρεφών $v_i$ | $f_i$ | $N_i$ | $F_i$ |
|---------------|----------------------|-------|-------|-------|
| [2400-2800)   | 4                    |       |       |       |
| [2800-3200)   | 8                    |       |       |       |
| [3200-3600)   | 12                   | 0,3   |       |       |
| [3600-4000)   |                      | 0,25  |       |       |
| [4000-4400)   |                      |       |       |       |
| <b>Σύνολο</b> |                      |       |       |       |

- α) Να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα.
- β) Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα και το πολύγωνο:
- συχνοτήτων,
  - αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.
- γ) Να βρείτε τις γωνίες των κυκλικών τομέων του κυκλικού διαγράμματος για τα παραπάνω δεδομένα.

### 102.

Οι ημέρες καλοκαιρινών διακοπών μιας ομάδας ατόμων δίνεται στον διπλανό πίνακα

- α) Να κατασκευάσετε τον πίνακα με τις συχνότητες  $v_i$ ,  $f_i\%$ ,  $N_i$ ,  $F_i\%$
- β) Να βρείτε πόσα άτομα έκαναν διακοπές κάτω από 12 ημέρες
- γ) Να βρείτε το ποσοστό των ατόμων που έκαναν διακοπές τουλάχιστον 16 ημέρες
- δ) Να βρείτε τις ημέρες που έκαναν διακοπές:
- τα 120 άτομα με τις λιγότερες ημέρες διακοπών
  - το 80% των ατόμων με τις λιγότερες ημέρες διακοπών

| Ημέρες<br>[ - ) | Άτομα<br>$v_i$ |
|-----------------|----------------|
| [7 -11 )        | 24             |
| [11-15 )        | 40             |
| [15 -19 )       | 48             |
| [19 -23 )       | 32             |
| [ 23-27 )       | 16             |

### 103.

Εξετάσαμε ορισμένα δρομολογία οργανισμού σιδηροδρόμων ως προς τον χρόνο (σε min) που καθυστέρησαν. Τα αποτελέσματα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

| Καθυστέρηση<br>σε min | Κεντρική<br>τιμή $x_i$ | $v_i$ | $f_i$ | $N_i$ | $F_i$ |
|-----------------------|------------------------|-------|-------|-------|-------|
| [0-2)                 |                        | 2     |       |       |       |
| [2-4)                 |                        |       |       | 14    |       |
| [4-6)                 |                        |       |       |       | 0,75  |
| [6-8)                 |                        | 6     | 0,15  |       |       |
| [8-10]                |                        |       |       |       |       |
| Σύνολο                |                        |       |       |       |       |

- α) Να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα
- β) Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα συχνοτήτων και το αντίστοιχο πολύγωνο,
- γ) Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό και τον αντίστοιχο πολύγωνο.
- δ) Να βρείτε το ποσοστό % των δρομολογίων που καθυστέρησαν :
- το πολύ 3 min
  - τουλάχιστον 5min.

### 104.

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας κατανομής συχνοτήτων της μεταβλητής X.

| Κλάσεις [-) | Κεντρική<br>τιμή $x_i$ | $v_i$ | $f_i$ | $F_i$ |
|-------------|------------------------|-------|-------|-------|
| 1-5         |                        |       |       | 20    |
| 5-9         |                        |       |       | 50    |
| 9-13        |                        |       |       | 85    |
| 13-17       |                        |       |       | 95    |
| 17-21       |                        | 2     |       |       |
| Σύνολο      |                        |       | 1     |       |

- α) Να γράψετε στο τετράδιό σας συμπληρωμένο παραπάνω πίνακα.  
 β) Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό και το αντίστοιχο πολύγωνο.  
 γ) Να βρείτε το ποσοστό % των παρατηρήσεων που έχουν τιμές από 4 έως 13.

**105.**

Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει τη διάρκεια ζωής 400 ηλεκτρικών συσκευών:

| Διάρκεια<br>ζωής | $v_i$ | $f_i\%$ | $N_i$ | $F_i\%$ |
|------------------|-------|---------|-------|---------|
| [400-500)        | 16    |         |       |         |
| [500-600)        |       | 11      |       |         |
| [600-700)        |       |         | 124   |         |
| [700-800)        |       |         |       | 50      |
| [800-900)        |       |         | 268   |         |
| [900-1000)       |       | 15      |       |         |
| [1000-1100)      | 48    |         |       |         |
| [1100-1200)      |       |         |       |         |
| Σύνολο           | 400   |         |       |         |

- α) Να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα.  
 β) Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό και το αντίστοιχο πολύγωνο.  
 γ) Να βρείτε το ποσοστό % των συσκευών που έχουν διάρκεια ζωής :  
 i) από 500 έως 650 ώρες  
 ii) τουλάχιστον 980 ώρες .

**106.**

Τα ποσά (σε €) που «σήκωσαν» 50 άτομα από ένα αυτόματο μηχάνημα (ATM) μιας τράπεζας, έχουν ομαδοποιηθεί στις κλάσεις [0, 50), [50, 100), [100, 150), [150, 200) και [200, 250). Γνωρίζουμε ότι:

το 16% των ατόμων σήκωσαν το πολύ 50 €,  
 28 άτομα σήκωσαν το πολύ 100 €,  
 το 80% των ατόμων σήκωσαν το πολύ 150 €,  
 4 άτομα σήκωσαν τουλάχιστον 200 €.

- α) Να παραστήσετε τα παραπάνω δεδομένα σε έναν πίνακα κατανομής συχνοτήτων ( $v_i$ ,  $f_i$ ,  $N_i$ ,  $F_i$  ).  
 β) Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα και το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό.  
 γ) Να βρείτε το ποσοστό % των ατόμων που σήκωσαν το πολύ 80 €.

**107.**

Στα σχολεία ενός Δήμου υπηρετούν συνολικά 100 εκπαιδευτικοί. Ο συνολικός χρόνος υπηρεσίας των εκπαιδευτικών δίνεται από τον διπλανό πίνακα:

α) Πόσοι εκπαιδευτικοί έχουν τουλάχιστον 15 χρόνια υπηρεσίας;

β) Με την προϋπόθεση ότι κάθε εκπαιδευτικός θα συνταξιοδοτηθεί, όταν συμπληρώσει 35 χρόνια:

i) πόσοι εκπαιδευτικοί θα συνταξιοδοτηθούν μέσα στα επόμενα 12,5 χρόνια; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

ii) πόσοι συνολικά εκπαιδευτικοί πρέπει να προσληφθούν μέσα στα επόμενα πέντε χρόνια, ώστε ο αριθμός των εκπαιδευτικών που υπηρετούν στα σχολεία του Δήμου να παραμένει ο ίδιος; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

| Χρόνια υπηρεσίας<br>[ - ) | Σχετική Συχνότητα<br>$f_i\%$ |
|---------------------------|------------------------------|
| 0- 5                      | 10                           |
| 5-10                      | 15                           |
| 10-15                     | 12                           |
| 15-20                     | 15                           |
| 20-25                     | 18                           |
| 25-30                     | 18                           |
| 30-35                     | 12                           |
| Σύνολο                    |                              |

**108.**

Σε μια εταιρεία εργάζονται συνολικά 200 άτομα. Όπως προέκυψε από ένα δείγμα ο συνολικός χρόνος υπηρεσίας τους δίνεται από τον παρακάτω πίνακα.

| Κλάσεις [ - ) | $v_i$   | $f_i\%$ | $F_i\%$ |
|---------------|---------|---------|---------|
| 0-10          |         | 48      |         |
| 10-20         |         | 34      |         |
| 20-30         |         | 14      |         |
| 30-40         |         |         |         |
|               | $v=200$ |         |         |

α) Να συμπληρώσετε τον προηγούμενο πίνακα.

β) Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα και το πολύγωνο συχνοτήτων και αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων

γ) Να βρείτε το ποσοστό των υπαλλήλων που εργάζονται έως και 15 χρόνια

δ) Πόσοι υπάλληλοι αναμένεται να συνταξιοδοτηθούν συμπληρώνοντας 35 έτη υπηρεσίας μέσα στα επόμενα 10 χρόνια;

**109.**

Στον παρακάτω πίνακα έχουν ομαδοποιηθεί τα ποσά (σε €) που ξόδεψαν 60 πελάτες ενός σουπερ μάρκετ:

| Ποσά σε € | $v_i$ | $f_i$ | $N_i$ | $F_i$ |
|-----------|-------|-------|-------|-------|
| [0-8)     | 3     |       |       |       |
| [8-16)    | 6     |       |       |       |
| [16-24)   | 6     |       |       |       |
| [24-32)   | 24    |       |       |       |
| [32-40)   | 12    |       |       |       |
| [40-48)   | 9     |       |       |       |
| Σύνολο    | 60    |       |       |       |

α) Να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα.

β) Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα και το πολύγωνο:

i) συχνοτήτων,

ii) αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό.

iii) Να βρείτε το ποσοστό % των πελατών που ξόδεψαν από 20 έως 30 €.

iv) Στο 10% των πελατών που ξόδεψαν τα λιγότερα χρήματα, θα δοθεί ένα διαφημιστικό

έντυπο. Να βρείτε από ποιο ποσό και κάτω πρέπει να έχει ξοδέψει κάποιος, ώστε να του δοθεί το διαφημιστικό έντυπο.

- ν) Στο 20% των πελατών που ξόδεψαν τα περισσότερα χρήματα, θα δοθεί μια δωροεπιταγή. Να βρείτε από ποιο ποσό και πάνω πρέπει να ξοδέψει κάποιος, ώστε να του δοθεί δωροεπιταγή.

#### 110.

Το βάρος του κάθε μαθητή της Γ' τάξης είναι τουλάχιστον 45 κιλά, αλλά μικρότερο από 85 κιλά. Το 90% των μαθητών έχει βάρος τουλάχιστον 55 κιλά, 15 μαθητές έχουν βάρος μικρότερο από 65 κιλά, 35 μαθητές έχουν βάρος τουλάχιστον 65 κιλά και το 60% των μαθητών έχει βάρος λιγότερο από 75 κιλά.

- α) Να παρασταθούν τα δεδομένα σε έναν πίνακα συχνοτήτων, σχετικών συχνοτήτων, αθροιστικών συχνοτήτων και σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων σε 4 κλάσεις.  
β) Να βρείτε το ποσοστό των μαθητών που έχουν βάρος τουλάχιστον 60 κιλά, αλλά λιγότερο από 80 κιλά.  
γ) Να βρεθούν οι γωνίες των αντιστοίχων κυκλικών τομέων της πίτας σχετικών συχνοτήτων

#### 111.

Το βάρος των αποσκευών καθενός εκ των 80 επιβατών μιας πτήσης κάποιας Αεροπορικής Εταιρείας είναι τουλάχιστον 11 κιλά αλλά μικρότερο από 26 κιλά. Γνωρίζουμε ότι 8 επιβάτες έχουν αποσκευές με βάρος μικρότερο από 14 κιλά, το 30% των επιβατών έχει αποσκευές με βάρος μικρότερο από 17 κιλά, 48 επιβάτες έχουν αποσκευές με βάρος μικρότερο από 20 κιλά και 15% των επιβατών έχει αποσκευές με βάρος τουλάχιστον 23 κιλά.

- α) Να παρασταθούν τα δεδομένα σε έναν πίνακα συχνοτήτων.  
β) Κάθε επιβάτης δικαιούται να μεταφέρει αποσκευές με βάρος μικρότερο των 20 κιλών, διαφορετικά έχει πρόσθετη οικονομική επιβάρυνση. Να βρείτε τι ποσοστό από τους 80 επιβάτες της πτήσης αυτής έχει πρόσθετη οικονομική επιβάρυνση.  
γ) Να βρεθούν οι γωνίες των αντιστοίχων κυκλικών τομέων του κυκλικού διαγράμματος σχετικών συχνοτήτων, για τα δεδομένα του προβλήματος.

#### 112.

Στον παρακάτω πίνακα έχουν ομαδοποιηθεί σε 5 κλάσεις ίσου πλάτους, οι ηλικίες 40 υπαλλήλων μιας επιχείρησης:

| Ηλικίες<br>(σε έτη) | Κεντρική<br>τιμή $x_i$ | $v_i$ | $f_i$ | $N_i$ | $F_i$ |
|---------------------|------------------------|-------|-------|-------|-------|
| [...,...)           | 22                     | 2     |       |       |       |
| [...,...)           | 26                     | 6     |       |       | 0,2   |
| [...,...)           |                        |       | 0,4   |       |       |
| [...,...)           |                        |       |       | 36    |       |
| [...,...)           |                        |       |       |       |       |
| Σύνολο              |                        |       |       |       |       |

- α) Να συμπληρώσετε τον προηγούμενο πίνακα.  
β) Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα και το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί

τοις εκατό.

γ) Να βρείτε πόσοι υπάλληλοι είναι το πολύ 26 ετών.

δ) Να βρείτε το ποσοστό % των υπαλλήλων που είναι τουλάχιστον 31 ετών.

**113.**

Στον επόμενο πίνακα έχουν ομαδοποιηθεί οι χρόνοι ομιλίας (σε min)  $n$  ατόμων στο κινητό τους κατά τη διάρκεια μίας ημέρας.

| Χρόνος ομιλίας<br>(σε min) | Κεντρική<br>τιμή $x_i$ | $n_i$ | $f_i$ | $N_i$ | $F_i$ |
|----------------------------|------------------------|-------|-------|-------|-------|
| [...,...)                  |                        |       | 0,05  |       |       |
| [...,...)                  |                        |       | 0,1   | 6     |       |
| [8,...)                    |                        |       |       |       |       |
| [...,...)                  | 14                     | 16    |       | 32    |       |
| [...,...)                  |                        |       |       |       |       |
| <b>Σύνολο</b>              |                        |       |       |       |       |

α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα,

β) Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα και το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό.

γ) Να βρείτε το ποσοστό % των ατόμων που μίλησαν στο κινητό τους :

i) το πολύ 10 min,

ii) τουλάχιστον 15 min.

**114.**

Οι βαθμολογίες των μαθητών της Γ' τάξης σε ένα διαγώνισμα Μαθηματικών έχουν ομαδοποιηθεί σε τέσσερις κλάσεις ίσου πλάτους και εμφανίζονται στον διπλανό ελλιπή πίνακα σχετικών συχνοτήτων. Δίνεται ακόμα ότι η σχετική συχνότητα  $f_3$  είναι διπλάσια της σχετικής συχνότητας  $f_1$

| Βαθμολογίες<br>[ - ) | Κέντρο κλάσης<br>$x_i$ | Σχετική<br>συχνότητα<br>$f_i$ |
|----------------------|------------------------|-------------------------------|
| [ ... - ... )        |                        |                               |
| [ 8 - ... )          |                        | 0,3                           |
| [ ... - ... )        | 14                     |                               |
| [ ... - ... )        |                        | 0,1                           |
| <b>Σύνολο</b>        |                        |                               |

α) Να αποδείξετε ότι το πλάτος  $c$  των κλάσεων ισούται με 4

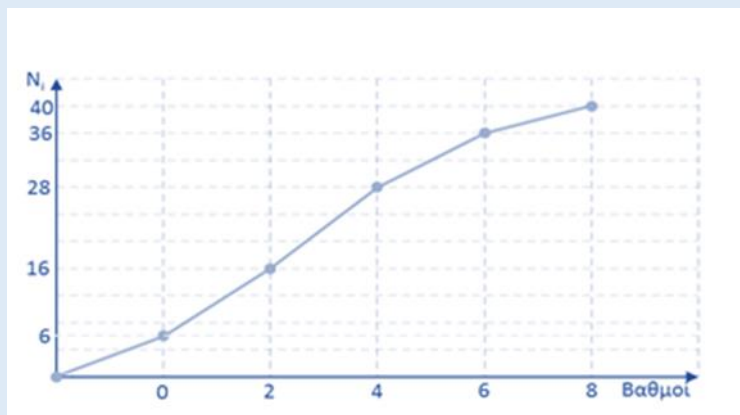
β) Να συμπληρώσετε τα κενά του πίνακα αφού υπολογίσετε τις αντίστοιχες τιμές

γ) Να κατασκευασθεί το ιστόγραμμα και το πολύγωνο των σχετικών συχνοτήτων καθώς και το πολύγωνο και ιστόγραμμα των σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων.

## Επεξεργασία ιστογράμματος και πολυγώνου

115.

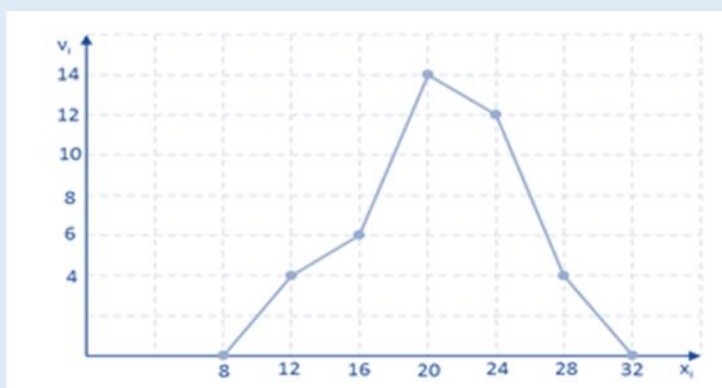
Οι βαθμοί  $n$  φοιτητών στο μάθημα της Στατιστικής ομαδοποιήθηκαν σε 5 κλάσεις ίσου πλάτους. Το πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων, που αναφέρεται σε αυτούς τους βαθμούς, φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί.



- α) Να βρείτε το πλήθος  $n$  των φοιτητών,
- β) Να κατασκευάσετε τον πίνακα κατανομής  $n_i$ ,  $f_i$ ,  $N_i$ ,  $F_i$ .
- γ) Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα και το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό,
- δ) Να βρείτε πόσοι φοιτητές δεν πέρασαν το μάθημα της Στατιστικής (έγραψαν βαθμό μικρότερο του 5).

116.

Στο επόμενο σχήμα φαίνεται το πολύγωνο συχνοτήτων που αναφέρεται σε ομαδοποιημένα δεδομένα, σε κλάσεις ίσου πλάτους  $c$  (θεωρώντας ως μονάδα μέτρησης του οριζόντιου άξονα το πλάτος των κλάσεων).

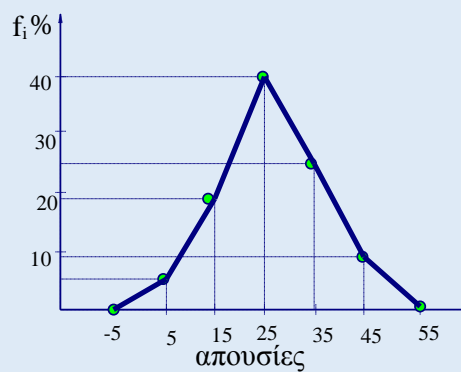


- α) Να συμπληρώσετε στο παραπάνω σχήμα το ιστόγραμμα συχνοτήτων,
- β) Να κατασκευάσετε πίνακα κατανομής  $n_i$ ,  $f_i$ ,  $N_i$ ,  $F_i$ .
- γ) Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα και το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό.
- δ) Να βρείτε το ποσοστό % των παρατηρήσεων που η τιμή τους είναι τουλάχιστον 15.

117.

Στο διπλανό σχήμα δίνεται το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων που παρουσιάζει τις αδικαιολόγητες απουσίες (ομαδοποιημένες) των μαθητών της Γ' Λυκείου.

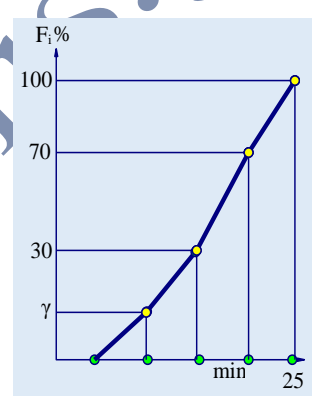
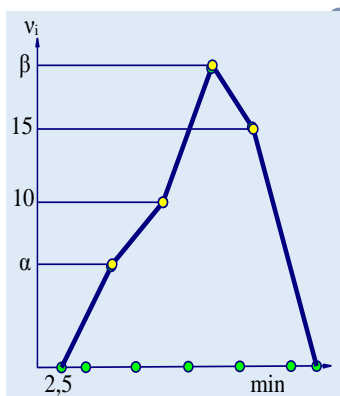
- Να κάνετε τον πίνακα σχετικών συχνοτήτων και αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων και τα αντίστοιχα ιστογράμματα, πολύγωνα.
- Να βρείτε τις απουσίες κάτω από τις οποίες έκανε το 33% των μαθητών
- Το ποσοστό  $p$  των μαθητών που έκανε τουλάχιστον 38 απουσίες



118.

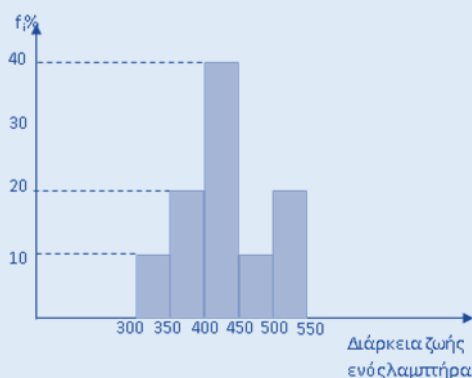
Τα διπλανά σχήματα είναι τα πολύγωνα συχνοτήτων και αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων και παρουσιάζουν το χρόνο που χρειάστηκαν μαθητές για να λύσουν μια άσκηση.

- Να βρεθούν οι αριθμοί  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  και να γίνει ο πίνακας συχνοτήτων
- Να βρεθεί το εμβαδό του πολυγώνου συχνοτήτων
- Πόσοι μαθητές θα χρειαστούν τουλάχιστον 17 λεπτά για να λύσουν την άσκηση;



119.

Το παρακάτω ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων αναφέρεται στη διάρκεια ζωής ενός δείγματος ηλεκτρικών λαμπτήρων.



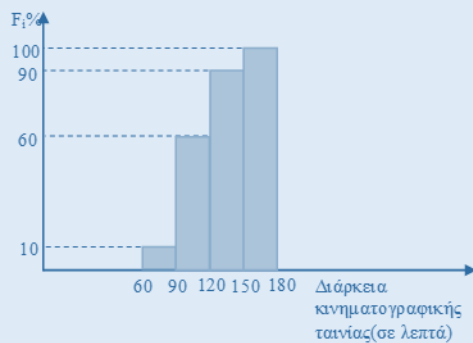
Να βρείτε το ποσοστό των λαμπτήρων που :

- διαρκούν περισσότερο από 450 ώρες
- διαρκούν λιγότερο από 400 ώρες
- διαρκούν από 350 έως 450 ώρες



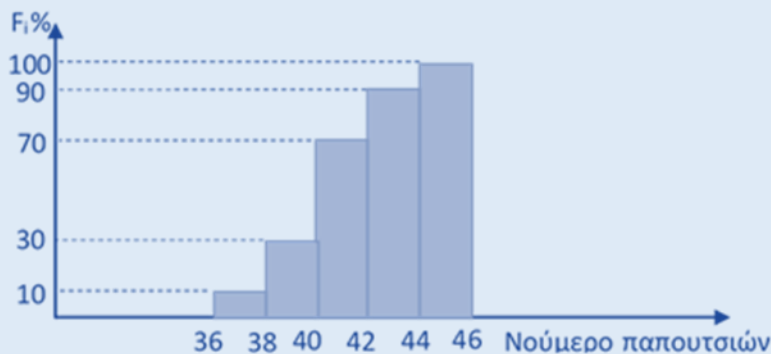
120.

Το παρακάτω ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων αναφέρεται στη διάρκεια δείγματος κινηματογραφικών ταινιών. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σχήμα το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων. Ποιο περίπου ποσοστό κινηματογραφικών ταινιών έχει διάρκεια πάνω από 2 ώρες κι ένα τέταρτο;



121.

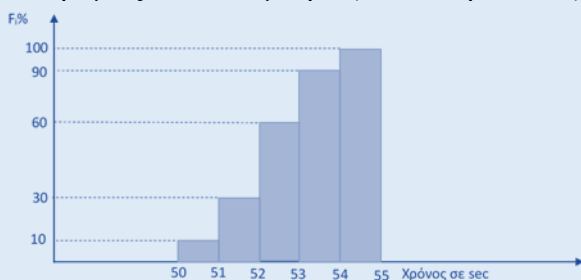
Το παρακάτω ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων αναφέρεται στο νούμερο παπουτσιών δείγματος 150 ανθρώπων.



- Να σχεδιάσετε το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.
- Ποιο ποσοστό του δείγματος φοράει παπούτσια με νούμερο από 36 έως και 39;
- Αν ξεχωρίσουμε από τους 150 ανθρώπους τους 75 με τα μεγαλύτερα νούμερα παπουτσιών τότε από ποιο νούμερο και πάνω θα φοράνε αυτοί;

122.

Το παρακάτω ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων αναφέρεται στο χρόνο που έκαναν 50 δρομείς στα 400 μέτρα (σε δευτερόλεπτα).

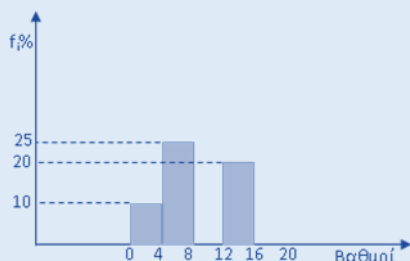


- Να κατασκευάσετε το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.
- Αν προκρίνονται οι 20 πρώτοι τότε τι χρόνο πρέπει να έχει κάποιος ώστε να προκριθεί;

γ) Να κατασκευάσετε ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων.

123.

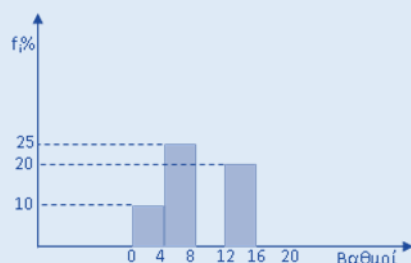
Οι βαθμοί (στην 20-βάθμια κλίμακα)  $n$  μαθητών της Γ' Λυκείου, σε ένα διαγώνισμα στα Μαθηματικά Γενικής Παιδείας, έχουν ομαδοποιηθεί σε κλάσεις. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό, από το οποίο λείπουν δύο ορθογώνια. Γνωρίζουμε ότι η σχετική συχνότητα της 3ης κλάσης είναι διπλάσια της σχετικής συχνότητας της 5ης κλάσης.



- α) Να συμπληρώσετε το παραπάνω ιστόγραμμα,  
β) Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα και το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί  
τοις εκατό.  
γ) Να βρείτε το ποσοστό % των μαθητών που έγραψαν :  
    i) κάτω από τη βάση,   ii) τουλάχιστον 15.  
δ) Αν οι μαθητές που έγραψαν το πολύ 12 είναι 26, να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα  
και το πολύγωνο συχνοτήτων.

## 124.

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το ιστόγραμμα των βαθμολογιών (στην εκατοντάβαθμη κλίμακα) ορισμένων μαθητών της Γ' Λυκείου σε ένα διαγώνισμα στα Μαθηματικά Γενικής Παιδείας, από το οποίο λείπουν τα ορθογώνια της 2ης και της 5ης κλάσης.

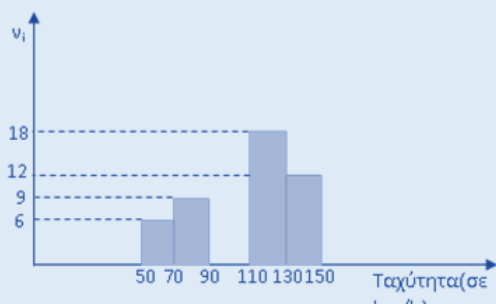


Αν ως μονάδα μέτρησης του οριζόντιου άξονα θεωρήσουμε το πλάτος κάθε κλάσης, τότε ισχύουν τα εξής:

- το εμβαδόν του ορθογωνίου της 2ης κλάσης είναι διπλάσιο από το εμβαδόν του ορθογωνίου της 5ης κλάσης,
  - το άθροισμα των εμβαδών και των 5 ορθογωνίων είναι ίσο με 50.
- α) Να συμπληρώσετε το προηγούμενο σχήμα με τα δύο ορθογώνια που λείπουν, καθώς και το αντίστοιχο πολύγωνο.
- β) Να κατασκευάσετε πίνακα κατανομής  $v_i$ ,  $f_i$ ,  $N_i$ ,  $F_i$ .
- γ) Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό,
- δ) Να βρείτε το ποσοστό % των μαθητών που έγραψαν κάτω από τη βάση.
- ε) Στο 20% των μαθητών με τη μεγαλύτερη βαθμολογία θα δοθεί ένας έπαινος. Να βρείτε από βαθμολογία και πάνω πρέπει να έχει ένας μαθητής, ώστε να πάρει έπαινο.

125.

Το παρακάτω ιστόγραμμα αναφέρεται στις ταχύτητες (σε km/h) 60 αυτοκινήτων, σύμφωνα με τις μετρήσεις της τροχαίας σε κάποιο σημείο εθνικού οδικού δικτύου.



- Να συμπληρώσετε το παραπάνω ιστόγραμμα με το ορθογώνιο της 3ης κλάσης, καθώς και με το αντίστοιχο πολύγωνο.
- Να κατασκευάσετε πίνακα κατανομής  $v_i, f_i, N_i, F_i$ .
- Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα και το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων τοις εκατό.
- Το όριο ταχύτητας στο συγκεκριμένο σημείο είναι τα 120 km/h. Να βρείτε το ποσοστό των αυτοκινήτων που υπερβήκανε το όριο.;

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΕΤΡΑ ΘΕΣΗΣ ΚΑΙ ΔΙΑΣΠΟΡΑΣ

### ΜΕΤΡΑ ΘΕΣΗΣ

#### Μέση τιμή και διάμεσος

1.

Να βρείτε τη μέση τιμή των παρατηρήσεων -5, 2, 0, 3, -2, 1, 1.

2.

Να βρείτε τη διάμεσο στα παρακάτω δύο δείγματα.

Δείγμα Α: -2, 0, 2, 4, 3, 10, 12.

Δείγμα Β: 3, 5, 8, 9, 12, 11, 14, 18.

3.

Δίνονται οι αριθμοί: 25, 35, 44, 36, 20

Να βρείτε :

α) τη μέση τιμή ,

β) τη διάμεσο.

4.

Δίνονται οι αριθμοί: 8, 12, 16, 24, 9, 10, 5, 28

Να βρείτε :

α) τη μέση τιμή ,

β) τη διάμεσο.

5.

Δίνονται οι ακόλουθες ομάδες δεδομένων. Να υπολογιστεί η μέση τιμή και η διάμεσος για κάθε περίπτωση. Να σχολιαστούν τα αποτελέσματα:

α) 3, 4, 6, 7

γ) 13, 14, 16, 17

β) 6, 8, 14, 22

δ) 16, 18, 24, 32

6.

Αν οι παρατηρήσεις  $a-1$ ,  $a^2-5$ ,  $3a+2$ ,  $-2a^2-3$ ,  $-a$  έχουν μέση τιμή  $-1$  να βρείτε το  $a$ .

7.

Έστω ότι οι αριθμοί :  $0$ ,  $-3x+2\lambda$ ,  $2x+\lambda$ ,  $\lambda$ ,  $x+\lambda$  έχουν μέση τιμή  $\bar{x}=1$ . Να βρείτε το  $\lambda$ .

8.

Η μέση τιμή των παρατηρήσεων: 1, 4, 7, 12,  $a$ ,  $2a$ ,  $a-2$  είναι  $\bar{x}=6$

Να βρείτε:

α) τον αριθμό  $a$ ,

β) τη διάμεσο των παραπάνω παρατηρήσεων.

9.

Δίνονται 6 αριθμοί, όπου ο επόμενος διαφέρει από τον προηγούμενο κατά 3. Αν η μέση τιμή τους είναι 13,5, να βρείτε τους αριθμούς αυτούς και τη διάμεσό τους.

10.

Η μέση τιμή 6 διαδοχικών άρτιων αριθμών είναι  $\bar{x}=9$  Να βρείτε:

α) τους αριθμούς αυτούς,

β) τη διάμεσο των αριθμών αυτών.

Ένα προϊόν συσκευάζεται σε συσκευασία των 8, 10 ή 12 τεμαχίων. Παίρνουμε ένα τυχαίο δείγμα με  $n=8$  συσκευασίες. Είναι δυνατόν η μέση τιμή των τεμαχίων να είναι:

$\alpha)$  10,                       $\beta)$  14,                       $\gamma)$  9,5 ;

12.

Η μέση τιμή έξι αριθμών είναι ίση με 7. Οι τέσσερις από τους αριθμούς αυτούς είναι: 7, 3, 12, 10 και από τους δύο αριθμούς που λείπουν, ο ένας είναι τετραπλάσιος του άλλου. Να βρείτε:

α) τους δύο αριθμούς που λείπουν,  
β) τη διάμεσο των έξι αριθμών.

13.

Η μέση τιμή πέντε αριθμών είναι 5. Αν οι τρεις από αυτούς είναι οι: 0, 3, 4. Να βρείτε τους άλλους δύο ώστε ο ένας να είναι τριπλάσιος του άλλου.

14.

Ένας μαθητής έλυνε ένα πρόβλημα στατιστικής και βρήκε τις ακόλουθες απαντήσεις 8,19, -20,0, 34,13, -3, 7. Οι απαντήσεις αυτές ήταν σε επί τοις εκατό (%) απόδοση.

Ποια είναι η μέση εκατοστιαία απόδοση που βρήκε ο μαθητής αυτός ;

15.

Οι αριθμοί:  $\alpha$ ,  $\alpha^2 + 4$ ,  $\alpha^2$ ,  $2\alpha + 1$ ,  $\alpha - 1$  έχουν μέση τιμή ίση με 4.

α) Να βρείτε τις τιμές του αριθμού  $a$ .  
β) Για καθεμία από τις παραπάνω τιμές, να βρείτε τη διάμεσο.

16.

Μια εταιρεία απασχολεί 15 υπαλλήλους εκ των οποίων οι 8 εργάζονται στο τμήμα Α και οι 7 στο τμήμα Β. Οι εβδομαδιαίοι μισθοί (σε ευρώ) των 8 εργαζομένων στο τμήμα Α είναι :300,325,330,305,315,310,320,315

ενώ των 7 εργαζομένων στο τμήμα Β είναι: 310, 250, 290, 340, 270, 330, 310

- Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των μισθών των εργαζομένων στο τμήμα Α της εταιρείας.
- Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των μισθών των εργαζομένων στο τμήμα Β της εταιρείας.
- Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των μισθών όλων των εργαζομένων της εταιρείας.

**17.**

Επτά αριθμοί έχουν μέση τιμή και διάμεσο ίσες με 8. Οι πέντε από αυτούς τους αριθμούς είναι οι: 3, 5, 6, 11, 13. Να βρείτε τους δύο άλλους αριθμούς.

18.

Η μέση τιμή 8 αριθμών είναι το 8. Οι πέντε από αυτούς είναι οι αριθμοί 1, 4, 9, 13 και 7.

Να βρεθούν οι τρεις υπόλοιποι αριθμοί, αν είναι γνωστό ότι ο πρώτος είναι το μισό του δεύτερου και το  $\frac{1}{3}$  του τρίτου.

19.

Θεωρούμε πέντε παρατηρήσεις, οποίες οι τέσσερις είναι: 5, 3, 5, 10.

α) Να αποδείξετε ότι η διάμεσος των πέντε παρατηρήσεων δεν εξαρτάται από την τιμή 5ης παρατήρησης.

β) Να βρείτε την 5η παρατήρηση, αν η μέση είναι κατά 1 μεγαλύτερη από τη διάμεσο

20.

Ένα δείγμα αποτελείται από πέντε παρατηρήσεις, από τις οποίες οι τέσσερις είναι 1, 2, 4, 5. Αν η μέση τιμή είναι διπλάσια της διαμέσου, να βρείτε την 5η παρατήρηση.

**21.**

Σε ένα κουτί υπάρχουν 4 είδη μπαταριών πολύ μικρές, μικρές, μεσαίες και μεγάλες με διάρκεια ζωής 8, 10, 12 και 14 ώρες αντίστοιχα. Οι μπαταρίες βρίσκονται σε αναλογία 20%, 10%, 30% και 40%. Να βρείτε τη μέση τιμή, τη διάμεσο διάρκειας ζωής, αν στο κουτί υπάρχουν

α) 30 μπαταρίες

β) 60 μπαταρίες

γ) δε γνωρίζουμε πόσες μπαταρίες υπάρχουν.

**22.**

Να βρείτε τις τιμές του  $\alpha \in \{0,1,2\}$  ώστε οι αριθμοί:  $\alpha-2, \alpha+1, \alpha^2-1, \alpha^3+1$  να έχουν διάμεσο  $\delta > 1$ .

**23.**

Να βρείτε τις τιμές του  $\kappa \in \{0,1,2\}$  ώστε η διάμεσος των αριθμών  $\kappa, 2\kappa-1, \kappa^2-1, 3\kappa$  να είναι μικρότερη από τη μέση τιμή αυτών.

**24.**

Η μέση τιμή και η διάμεσος πέντε αριθμών είναι 5. Οι τρεις από αυτούς είναι οι 1, 6, 10. Να βρείτε τους άλλους δύο.

**25.**

Αν η μέση τιμή πέντε αριθμών είναι διπλάσια της διαμέσου  $\delta$  με  $0 < \delta < 5$  και οι τέσσερις από αυτούς είναι οι: 0, 1, 5, 21 να βρείτε τον άλλο αριθμό.

### Σταθμικός μέσος

**26.**

Οι βαθμοί ενός μαθητή σε τέσσερα μαθήματα είναι: 11,15, 18,20

α) Να βρείτε τη μέση τιμή των παραπάνω βαθμών.

β) Να βρείτε τη μέση τιμή, αν τα παραπάνω μαθήματα έχουν αντίστοιχα συντελεστές βαρύτητας:

i) 2, 2, 1, 1

ii) 1, 1, 2, 2

**27.**

Οι βαθμοί ενός μαθητή σε 4 μαθήματα είναι: 9,12, 18,15. Τα τρία πρώτα μαθήματα έχουν συντελεστή βαρύτητας 4, 3, 1 αντίστοιχα. Να βρείτε τον συντελεστή βαρύτητας του τέταρτου μαθήματος, αν ο μέσος όρος των παραπάνω βαθμών είναι 12.

**28.**

Έστω οι τιμές 2, 5, 6 ενός συνόλου δεδομένων με συντελεστές στάθμισης 1, 2, 3. Να βρείτε τον σταθμικό μέσο αυτών.

**29.**

Η επίδοση ενός μαθητή σε δύο από τα τρία μαθήματα είναι 18 και 16 με αντίστοιχους συντελεστές 1 και 1,3. Ποια πρέπει να είναι η επίδοση του μαθητή στο τρίτο μάθημα με συντελεστή 0,7 ώστε ο σταθμικός μέσος να είναι 16,2 ;

**30.**

Οι βαθμοί ενός μαθητή σε τέσσερα μαθήματα είναι:  $\alpha, 12, 16, 14$ . Ο αριθμητικός μέσος των παραπάνω βαθμών ίσος με τον σταθμικό τους μέσο, αν τα μαθήματα έχουν συντελεστές βαρύτητας 3,2,2,1 αντίστοιχα. Να βρείτε τον βαθμό  $\alpha$  του πρώτου μαθήματος.

**31.**

Οι βαθμοί ενός μαθητή σε τέσσερα μαθήματα είναι:  $\alpha, \beta, 16, 18$ . Η μέση τιμή των παραπάνω βαθμών είναι 15. Αν τα μαθήματα έχουν συντελεστές βαρύτητας 3,1 αντίστοιχα, τότε ο σταθμικός μέσος των είναι 14,5. Να βρείτε τους βαθμούς  $\alpha$  και  $\beta$  των δύο πρώτων μαθημάτων.

**32.**

Μία βιομηχανία κρυστάλλινων ειδών κατασκευάζει 6 είδη ποτηριών. Σε ένα τεστ αντοχής που έγινε, η ελάχιστη τάση που απαιτήθηκε (δύναμη/εμβαδό επιφάνειας), για να σπάσει το κάθε είδος ποτηριού ήταν αντίστοιχα σε  $N/m^2$  : 20, 18, 24, 26, 28, 22.

α) Να βρείτε τη μέση απαιτούμενη τάση για να σπάσει το ποτήρι.

β) Αν το κάθε είδος έχει συντελεστή στάθμισης 0,5, 1, 1,5, 1,5, 1,2 και 0,8 ποια είναι η μέση τιμή της τάσης;

**33.**

Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι βαθμοί ενός μαθητή σε πέντε εργασίες και οι αντίστοιχοι συντελεστές βαρύτητας αυτών:

| Εργασία | Βαθμός | Συντελεστής βαρύτητας |
|---------|--------|-----------------------|
| A       | 10     | 3                     |
| B       | 13     | 2                     |
| Γ       | 19     | 2                     |
| Δ       | 15     | 2                     |
| E       | 16     | 1                     |

α) Να βρείτε τη μέση τιμή των παραπάνω βαθμών,

β) Να εξετάσετε σε ποιες από τις επόμενες περιπτώσεις ο μαθητής θα έχει καλύτερο μέσο όρο:

i) αν αυξήσει κατά 2 μονάδες τον βαθμό της εργασίας E,

ii) αν αυξήσει κατά 1 μονάδα τον βαθμό της εργασίας A.

**34.**

Ένας φοιτητής έγραψε τέσσερις εργασίες, από τις οποίες η πρώτη είναι βασική και έχει συντελεστή βαρύτητας 1,6 και οι υπόλοιπες έχουν συντελεστή βαρύτητας 0,8. Αν ο αριθμητικός μέσος των βαθμών στις παραπάνω εργασίες (χωρίς τους συντελεστές βαρύτητας) είναι ίσος με τον σταθμικό μέσο των βαθμών αυτών, να αποδείξετε ότι ο βαθμός της βασικής εργασίας ισούται με τον αριθμητικό μέσο των βαθμών των τριών άλλων εργασιών.

### Προβλήματα στη μέση τιμή

**35.**

Σε ένα διαφημιστικό διάλειμμα προβάλλονται 15 διαφημίσεις μέσης διάρκειας 32 sec.

Ποια θα είναι η μέση διάρκεια των διαφημίσεων αν:

α) δεν προβληθεί μία διαφήμιση διάρκειας 28 sec,

β) προστεθεί μία διαφήμιση διάρκειας 31 sec,

γ) δεν προβληθεί μία διαφήμιση των 28 sec και προστεθεί μία άλλη των 31 sec

**36.**

Η μέση τιμή των ωρών εργασίας ενός εργαζόμενου που δουλεύει τις 5 εργάσιμες μέρες είναι 7,2 ώρες.

α) Αν δουλέψει και το Σάββατο 8 ώρες, πόση θα είναι η μέση τιμή των ωρών εργασίας του ;

β) Αν δούλεψε και το Σάββατο και η μέση τιμή των ωρών εργασίας του ήταν 7,1 ώρες, πόσες ώρες δούλεψε το Σάββατο;

**37.**

Σε ένα Γυμνάσιο ο μέσος όρος το Γ τρίμηνο στα μαθηματικά στην Α' τάξη που έχει 36 μαθητές είναι 14,5, στη Β' τάξη με 32 μαθητές είναι 15 και στη Γ' τάξη με 30 μαθητές είναι 15,5.

Να βρείτε τον μέσο όρο στα μαθηματικά όλων των μαθητών του Γυμνασίου.

**38.**

Η μέση τιμή του ημερομισθίου 50 εργατών είναι 31 €. Από αυτούς οι 10, λόγω ανθυγιεινής εργασίας έχουν μέσο ημερομίσθιο 35 €. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή του ημερομισθίου των υπολοίπων εργατών.

**39.**

Η μέση τιμή του βάρους 150 σπουδαστών μιας Σχολής είναι 60 Kg. Η μέση του βάρους των αγοριών είναι 70 Kg, ενώ των κοριτσιών 55 Kg. Να βρείτε πόσα είναι τα αγόρια και πόσα τα κορίτσια.

**40.**

Σε μια επιχείρηση είναι 50 εργαζόμενοι στα τμήματα Α και Β. Οι εργαζόμενοι στο τμήμα Α πήραν αύξηση στο μηνιαίο μισθό 100 €, ενώ οι εργαζόμενοι στο τμήμα Β 50 €. Αν η μέση τιμή όλων των μηνιαίων μισθών αυξήθηκε κατά 70 € να βρείτε πόσοι είναι οι εργαζόμενοι στο τμήμα Α και πόσοι στο Β.

**41.**

Μια βιοτεχνία έχει 10 εργαζόμενους με μέσο μηνιαίο μισθό 1200 €.

α) Να βρείτε το νέο μέσο μισθό όταν:

i) ένας εργαζόμενος με μισθό 1200 πάρει σύνταξη.

ii) προσληφθούν δύο εργαζόμενοι ακόμη με μισθό 850 ευρώ.

iii) πάρει σύνταξη ένας με μισθό 1190 € και προσληφθούν τρεις με μισθό 850 €.

β) Αν προσληφθεί ένας εργαζόμενος ποιος πρέπει να είναι ο μηνιαίος μισθός του ώστε ο μέσος μηνιαίος μισθός όλων να είναι 1210.

**42.**

Ρωτήσαμε 40 άτομα (22 άντρες και 18 γυναίκες) πόσες ημέρες κάνουν διακοπές το χρόνο. Ο μέσος όρος και των δύο φύλων ήταν 21 ημέρες. Αν ο μέσος όρος ημερών που κάνουν διακοπές οι άντρες είναι 20,2 ημέρες, ποιος είναι ο αντίστοιχος μέσος όρος για τις γυναίκες;

**43.**

Σε 20 παρατηρήσεις μιας μεταβλητής  $X$  βρήκαμε μέση τιμή  $\bar{x} = 60$ . Διαπιστώθηκε όμως στο τέλος ότι οι 10 παρατηρήσεις από αυτές είχαν εσφαλμένα υπερεκτιμηθεί κατά 5 μονάδες κάθε μία ενώ οι 9 από τις υπόλοιπες είχαν υποεκτιμηθεί κατά 10 μονάδες η κάθε μία. Να βρείτε τη σωστή μέση τιμή των παρατηρήσεων αυτών.

**44.**

Σε μια επιχείρηση εργάζονται 50 υπάλληλοι οποίοι έχουν μέσο μηνιαίο μισθό 1.120€. Από τους 50 υπαλλήλους, οι 20 είναι γυναίκες και οι 30 είναι άντρες. Αν ο μέσος μηνιαίος μισθός των γυναικών είναι 1.000 €, να βρείτε τον μέσο μηνιαίο μισθό των αντρών.

**45.**

Το μέσο βάρος 8 ατόμων είναι 82 kg. Αν έρθουν 2 άτομα με βάρος 80 kg και 94 kg, να βρείτε το μέσο βάρος όλων των ατόμων μαζί.

**46.**

Το μέσο ύψος 7 ατόμων είναι 173 cm. Αν φύγουν 2 άτομα με ύψος 170 cm και 166 cm, να βρείτε το μέσο ύψος των ατόμων που έμειναν.

**47.**

Σε μια εταιρεία εργάζονται 11 υπάλληλοι με μέσο μηνιαίο μισθό 1.300 €. Από τους παραπάνω υπαλλήλους συνταξιοδοτήθηκαν 3 που είχαν μισθό 1.600 €, 1.500 € και 1.400 €, ενώ προσλήφθηκαν 2 υπάλληλοι με μισθούς 1.100€ και 1.200 €. Να βρείτε τον μέσο μηνιαίο μισθό των υπαλλήλων που υπάρχουν τελικά στην εταιρεία.



**48.**

Ένας μαθητής έχει γράψει 5 διαγωνίσματα στα Μαθηματικά και ο μέσος όρος των βαθμών του είναι 16. Να βρείτε ποιος πρέπει να είναι ο βαθμός του στο επόμενο διαγώνισμα, ώστε ο μέσος όρος των βαθμών του να γίνει 16,5.

**49.**

Σε ένα λύκειο υπάρχουν 44 μαθητές της Α' Λυκείου με μέση ηλικία 15 έτη, 32 μαθητές της Β' Λυκείου με μέση ηλικία 16 έτη και 24 μαθητές της Γ' Λυκείου με μέση ηλικία 17 έτη. Να βρείτε τη μέση ηλικία όλων των μαθητών του λυκείου.

**50.**

Τρεις φοιτητές που συγκατοικούν για να πληρώνουν δίκαια το λογαριασμό του τηλεφώνου, αποφάσισαν να σημειώνουν πόσα τηλεφωνήματα κάνουν την εβδομάδα και πόση ώρα μιλάνε κάθε φορά. Μία τυχαία εβδομάδα, ο πρώτος έκανε 10 τηλεφωνήματα με μέσο χρόνο ομιλίας 6,6 λεπτά, ο δεύτερος έκανε 12 τηλεφωνήματα με μέσο χρόνο ομιλίας 7,5 λεπτά και ο τρίτος 18 τηλεφωνήματα με μέσο χρόνο ομιλίας 8 λεπτά. Να βρεθεί ο μέσος χρόνος ομιλίας των τριών φοιτητών την εβδομάδα αυτή.

**51.**

Σε μια εταιρεία υπάρχουν δύο τμήματα Α και Β. Στο τμήμα Α ανήκει το 60% των υπαλλήλων και ο μέσος μηνιαίος μισθός τους είναι 1.100 €. Στο τμήμα Β ανήκει το υπόλοιπο 40% των υπαλλήλων και ο μέσος μηνιαίος μισθός τους είναι 900 €. Να βρείτε τον μέσο μισθό όλων των υπαλλήλων της εταιρείας.

**52.**

Σε μια ομάδα μπάσκετ παίζουν δύο παίκτες Α και Β. Ο παίκτης Α έχει παίξει σε 9 αγώνες και έχει μέσο όρο πόντων 21, ενώ ο παίκτης Β έχει παίξει σε 7 αγώνες και έχει μέσο όρο πόντων 19. Στον επόμενο αγώνα έπαιξαν και οι δύο παίκτες. Ο παίκτης Α πέτυχε 11 πόντους. Να βρείτε πόσους πόντους πέτυχε ο παίκτης Β, αν μετά το τέλος του αγώνα οι δύο παίκτες είχαν τον ίδιο μέσο όρο πόντων.

**53.**

Ρωτήσαμε 100 άτομα ποιο είναι το βάρος τους. Από τις απαντήσεις που έδωσαν προέκυψε ότι το μέσο βάρος τους είναι 90 kg. Όμως 20 άτομα δήλωσαν βάρος 5 kg μεγαλύτερο από το πραγματικό και 30 άτομα δήλωσαν βάρος 10 kg μικρότερο από το πραγματικό. Να βρείτε το πραγματικό μέσο βάρος των ατόμων.

**54.**

Σε μια εταιρεία εργάζονται 20 υπάλληλοι με μέση ηλικία 38 έτη. Η μέση ηλικία των αντρών είναι 40 έτη και η μέση ηλικία των γυναικών είναι

- α) Να βρείτε πόσοι άντρες και πόσες γυναίκες εργάζονται στην εταιρεία,
- β) Αν ο μέσος μηνιαίος μισθός των αντρών είναι 1.000 € και ο μέσος μηνιαίος μισθός των γυναικών είναι 900 €, να βρείτε τον μέσο μισθό όλων των υπαλλήλων.

**55.**

Μια τάξη έχει 9 αγόρια και ορισμένα κορίτσια. Το μέσο ύψος των αγοριών είναι 170cm, το μέσο ύψος των κοριτσιών είναι 160 cm και το μέσο ύψος όλων των μαθητών της τάξης είναι 166cm

- α) Να βρείτε πόσα κορίτσια υπάρχουν στη τάξη
- β) Στην τάξη προστέθηκε ένα αγόρι με ύψος 190 cm. Να βρείτε το νέο μέσο ύψος:
  - i) των αγοριών,
  - ii) όλων των μαθητών

## Μέση τιμή και διάμεσος από κατανομή συχνοτήτων

**56.**

Μία εταιρία κατασκευάζει μηχανικά εξαρτήματα. Σε δείγμα 30 εξαρτημάτων τα οποία ζυγίστηκαν (σε kg) η ζυγαριά έδωσε τις ακόλουθες ενδείξεις:

|      |      |      |      |      |      |
|------|------|------|------|------|------|
| 6,48 | 6,50 | 6,51 | 6,49 | 6,49 | 6,51 |
| 6,52 | 6,49 | 6,48 | 6,52 | 6,52 | 6,49 |
| 6,51 | 6,51 | 6,52 | 6,49 | 6,51 | 6,52 |
| 6,49 | 6,52 | 6,49 | 6,51 | 6,49 | 6,52 |
| 6,52 | 6,49 | 6,51 | 6,49 | 6,51 | 6,49 |

Να υπολογίσετε:

i) τη μέση τιμή,

ii) τη διάμεσο.

**57.**

Οι χαμηλότερες θερμοκρασίες σε μια πόλη τον Νοέμβριο φαίνονται στον πίνακα δίπλα. Να βρείτε τη μέση θερμοκρασία τις ημέρες αυτές.

| Θερμοκρασία | Ημέρες |
|-------------|--------|
| -5          | 4      |
| -2          | 5      |
| 0           | 3      |
| 1           | 12     |
| 3           | 6      |
| Σύνολο      | 30     |

**58.**

Η βαθμολογία μιας ομάδας φοιτητών σε ένα μάθημα φαίνεται στον πίνακα δίπλα. Να βρείτε τον μέσο όρο των βαθμών

| Βαθμολογία | Φοιτητές % |
|------------|------------|
| 4          | 10         |
| 5          | 30         |
| 6          | 40         |
| 7          | 20         |
| 8          | 10         |

**59.**

Εξετάσαμε 20 οικογένειες ως προς τον αριθμό των παιδιών που έχουν και πήραμε τα εξής αποτελέσματα:

Να βρείτε :

α) τη διάμεσο

β) τη μέση τιμή

| Αριθμός παιδιών $x_i$ | Οικογένειες $n_i$ |
|-----------------------|-------------------|
| 0                     | 3                 |
| 1                     | 5                 |
| 2                     | 8                 |
| 3                     | 3                 |
| 4                     | 1                 |
| Σύνολο                | 20                |

60.

Να βρείτε τη διάμεσο των χρόνων (σε λεπτά) που χρειάστηκαν, για να λύσουν ένα πρόβλημα οι μαθητές των τεσσάρων τμημάτων της Α' τάξης ενός Λυκείου που φαίνονται στους παρακάτω πίνακες.

1<sup>ο</sup> Τμήμα

| Χρόνος | Μαθητές |
|--------|---------|
| 10     | 5       |
| 12     | 7       |
| 14     | 8       |
| 16     | 7       |

2<sup>ο</sup> Τμήμα

| Χρόνος | Μαθητές |
|--------|---------|
| 10     | 7       |
| 12     | 6       |
| 14     | 10      |
| 16     | 13      |

3<sup>ο</sup> Τμήμα

| Χρόνος | Μαθητές |
|--------|---------|
| 10     | 30      |
| 12     | 25      |
| 14     | 35      |
| 16     | 10      |

4<sup>ο</sup> Τμήμα

| Χρόνος | Μαθητές |
|--------|---------|
| 10     | 30      |
| 12     | 20      |
| 14     | 40      |
| 16     | 10      |

61.

Η εξέταση ενός δείγματος 20 υπαλλήλων μιας επιχείρησης, ως προς τον αριθμό των ημερών που αυτοί απουσίασαν κατά τον μήνα Δεκέμβριο του 2002, έδωσε τις επόμενες παρατηρήσεις:

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 3 | 0 | 0 | 2 | 4 | 0 | 1 |
| 1 | 2 | 0 | 1 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

α) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα .

| Ημέρες<br>απουσίας $x_i$ | $v_i$ | $N_i$ | $f_i\%$ | $F_i\%$ |
|--------------------------|-------|-------|---------|---------|
| 0                        |       |       |         |         |
| 1                        |       |       |         |         |
| 2                        |       |       |         |         |
| 3                        |       |       |         |         |
| 4                        |       |       |         |         |
| Σύνολο                   |       |       |         |         |

β) Να βρείτε τη μέση τιμή  $\bar{x}$  των παρατηρήσεων

γ) Να βρείτε τη διάμεσο  $\delta$  των παρατηρήσεων

62.

Δίνεται ο διπλανός πίνακας .Να βρείτε την αριθμητική τιμή της 4ης τιμής μεταβλητής, αν γνωρίζετε ότι:

α) Η μέση τιμή είναι 9.

β) Το άθροισμα των  $x_i$  είναι 45.

| $x_i$ | $v_i$ |
|-------|-------|
| 3     | 3     |
|       |       |
| 6     | 4     |
| 9     | 5     |
| ;     | 4     |
| 15    | 3     |

**63.**

Στο διπλανό πίνακα φαίνεται η βαθμολογία 20 φοιτητών σε ένα μάθημα. Αν ο μέσος όρος των βαθμών είναι 5,9 να βρείτε τα  $\alpha$ ,  $\beta$ .

| Βαθμολογία | Φοιτητές |
|------------|----------|
| 4          | 2        |
| 5          | 8        |
| 6          | $\alpha$ |
| 8          | $\beta$  |

**64.**

Να βρείτε τις τιμές των  $\alpha$ ,  $\beta$  του πίνακα δίπλα αν η μέση τιμή είναι 0,8.

| $x_i$ | $f_i \%$ |
|-------|----------|
| 0     | 10       |
| -2    | $\alpha$ |
| 3     | 40       |
| 1     | $\beta$  |

**65.**

Δίνεται ο διπλανός πίνακας με τις τιμές μιας ποσοτικής μεταβλητής  $X$  και τις αντίστοιχες συχνότητες. Αν η μέση τιμή του διπλανού δείγματος είναι 3, να βρείτε:

- α) τον φυσικό αριθμό  $\alpha$ ,  
β) τη διάμεσο.

| $x_i$  | $v_i$      |
|--------|------------|
| 1      | 12         |
| 2      | 8          |
| 3      | $\alpha$   |
| 4      | 18         |
| 5      | $\alpha+2$ |
| Σύνολο |            |

**66.**

Ρωτήσαμε 25 άτομα πόσες τηλεοράσεις το σπίτι τους. Οι απαντήσεις που πήραμε, στον διπλανό πίνακα. Η μέση τιμή του αριθμού των τηλεοράσεων 2,4. Να βρείτε:

- α) τους αριθμούς  $\alpha$  και  $\beta$ ,  
β) τη διάμεσο του διπλανού δείγματος.

| Αριθμός τηλεοράσεων<br>$x_i$ | $v_i$    |
|------------------------------|----------|
| 1                            | $\alpha$ |
| 2                            | 11       |
| 3                            | $\beta$  |
| 4                            | 4        |
| Σύνολο                       | 25       |

**67.**

Στο διπλανό πίνακα δίνονται οι τιμές μιας μεταβλητής  $X$  με τις αντίστοιχες συχνότητες τους. Να βρείτε το  $\alpha$  αν η διάμεσος είναι 5.

| $x_i$ | $v_i$    |
|-------|----------|
| 2     | 7        |
| 3     | 8        |
| 4     | 9        |
| 6     | $\alpha$ |
| 9     | 8        |

68.

Στο διπλανό πίνακα δίνονται οι τιμές μιας μεταβλητής  $X$  με τις αντίστοιχες σχετικές συχνότητες. Αν η διάμεσος είναι 6,5 να βρείτε τις τιμές των  $\alpha, \beta$ .

| $x_i$ | $f_i\%$  |
|-------|----------|
| 2     | 10       |
| 3     | $\alpha$ |
| 6     | 25       |
| 7     | 30       |
| 10    | $\beta$  |

69.

Στο διπλανό πίνακα δίνονται οι τιμές μιας μεταβλητής  $X$  με τις αντίστοιχες αθροιστικές σχετικές συχνότητες. Αν η διάμεσος είναι 6 και η μέση τιμή 5,5 να βρείτε τις τιμές των  $\alpha, \beta, \gamma$ .

| $x_i$ | $F_i\%$  |
|-------|----------|
| 2     | 10       |
| 3     | 30       |
| 6     | $\alpha$ |
| 7     | $\beta$  |
| 10    | $\gamma$ |

70.

Ρωτήσαμε ορισμένους μαθητές για τον αριθμό των βιβλίων που διάβασαν στις διακοπές.

Τα αποτελέσματα της έρευνας φαίνονται στον διπλανό πίνακα.

- α) Να κατασκευάσετε το διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό  
 β) Να βρείτε τη μέση τιμή  $\bar{x}$  του δείγματος  
 γ) Να βρείτε τη διάμεσο  $\delta$

| Αριθμός βιβλίων $x_i$ | $F_i$ |
|-----------------------|-------|
| 0                     | 0,22  |
| 1                     | 0,5   |
| 2                     | 0,84  |
| 3                     | 0,94  |
| 4                     | 1     |

71.

Εξετάσαμε ένα δείγμα 50 κατοίκων μιας πόλης ως προς τον αριθμό των πιστωτικών τους καρτών. Ορισμένα από τα αποτελέσματα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

| Αριθμός καρτών $x_i$ | Αριθμός κατοίκων $n_i$ | $N_i$ | $f_i$ | $F_i$ |
|----------------------|------------------------|-------|-------|-------|
| 0                    | 8                      |       |       |       |
| 1                    |                        |       | 0,4   |       |
| 2                    |                        | 39    |       |       |
| 3                    |                        |       |       | 0,9   |
| 4                    |                        |       |       |       |
| Σύνολο               | 50                     |       |       |       |

- α) Να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα,  
 β) Να βρείτε τη διάμεσο του δείγματος,  
 γ) Να βρείτε τη μέση τιμή.

**72.**

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας κατανομής συχνοτήτων :

| $x_i$  | $v_i$ | $N_i$ | $f_i$ | $F_i$ |
|--------|-------|-------|-------|-------|
| 1      |       |       |       |       |
| 2      | 16    |       | 0,32  |       |
| 3      |       |       |       |       |
| 4      | 14    |       |       |       |
| Σύνολο |       |       |       |       |

Γνωρίζουμε ότι η μέση τιμή του παραπάνω δείγματος είναι  $\bar{x} = 2,6$ .

- Να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα.
- Να βρείτε τη διάμεσο του δείγματος,
- Να σχεδιάσετε το διάγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό.

**73.**

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας κατανομής συχνοτήτων :

| $x_i$  | $v_i$ | $N_i$ | $f_i$ | $F_i$ |
|--------|-------|-------|-------|-------|
| 0      |       |       |       |       |
| 1      | 6     |       |       | 0,4   |
| 2      |       |       |       |       |
| 3      | 4     |       |       |       |
| 4      | 3     |       |       |       |
| Σύνολο |       |       |       |       |

Γνωρίζουμε ότι η μέση τιμή του παραπάνω δείγματος είναι  $\bar{x} = 2$ .

- Να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα.
- Να βρείτε τη διάμεσο του δείγματος,
- Να βρείτε το ποσοστό % των παρατηρήσεων που οι τιμές τους είναι το πολύ ίσες με 2.

**74.**

Ρωτήσαμε ορισμένους οπαδούς μιας ποδοσφαιρικής ομάδας πόσες φορές πήγαν στο γήπεδο τον περασμένο μήνα. Από την επεξεργασία των δεδομένων προέκυψε ο διπλανός πίνακας. Η μέση τιμή του αριθμού επισκέψεων στο γήπεδο είναι 2,7. Να βρείτε:

- τις σχετικές συχνότητες  $f_1$  και  $f_4$
- τη διάμεσο των παραπάνω δεδομένων

| Αριθμός επισκέψεων στο γήπεδο $x_i$ | $f_i$ |
|-------------------------------------|-------|
| 0                                   | 0,22  |
| 1                                   | 0,5   |
| 2                                   | 0,84  |
| 3                                   | 0,94  |
| 4                                   | 1     |

**75.**

Στον διπλανό πίνακα δίνονται οι θερμοκρασίες των 20 πρώτων ημερών του Μαΐου, σε βαθμούς Κελσίου ( $^{\circ}\text{C}$ ).

- Αν γνωρίζουμε ότι η μέση θερμοκρασία των διπλανών ημερών είναι  $24,4^{\circ}\text{C}$ , τότε:
  - να βρείτε πόσες ημέρες είχαν θερμοκρασία  $24^{\circ}\text{C}$  και πόσες  $25^{\circ}\text{C}$ ,
  - να υπολογίσετε τη διάμεσο.
- Αν γνωρίζουμε ότι η διάμεσος είναι  $24,5$  βρείτε πόσες ημέρες είχαν θερμοκρασία  $24^{\circ}\text{C}$  και πόσες  $25^{\circ}\text{C}$

| Τιμές Θερμοκρασίας $x_i$ | $v_i$ |
|--------------------------|-------|
| 22                       | 2     |
| 23                       | 4     |
| 24                       |       |
| 25                       |       |
| 26                       | 2     |
| 27                       | 3     |

76.

Στον διπλανό πίνακα φαίνονται οι τιμές μιας μεταβλητής  $X$  και οι αντίστοιχες σχετικές συχνότητες. Γνωρίζουμε ότι η σχετική συχνότητα  $f_4$  είναι διπλάσια από τη σχετική συχνότητα  $f_1$ .

α) Να βρείτε τις  $f_1$  και  $f_4$ .

β) Να βρείτε τη μέση τιμή  $\bar{x}$ .

γ) Αν επιπλέον ισχύει ότι  $\sum_{i=1}^5 x_i v_i = 600$ , να κατασκευάσετε το

διάγραμμα συχνοτήτων και το αντίστοιχο πολύγωνο.

| $x_i$ | $f_i$ |
|-------|-------|
| 1     |       |
| 2     | 0,2   |
| 3     | 0,25  |
| 4     |       |
| 5     | 0,1   |

77.

Δίνεται ο διπλανός πίνακας κατανομής συχνοτήτων. Αν  $\bar{x} = 2,5$  και  $\delta = 2,5$

α) Να αποδείξετε ότι το μέγεθος  $n$  του δείγματος είναι 20.

β) Να αποδείξετε ότι η συχνότητα  $v_2$  της τιμής  $x_2 = 2$  ισούται με 2.

γ) Να συμπληρώσετε τον πίνακα.

| $x_i$  | $v_i$ | $f_i$ |
|--------|-------|-------|
| 1      | 8     |       |
| 2      |       |       |
| 3      |       |       |
| 4      |       |       |
| 5      | 2     | 0,1   |
| Σύνολο |       |       |

78.

Ο διπλανός πίνακας αναφέρεται στις τιμές μιας μεταβλητής  $X$ .

α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα.

β) Να βρείτε τη μέση τιμή.

γ) Αν ισχύει ότι  $\sum_{i=1}^4 x_i v_i = 120$ , να σχεδιάσετε το διάγραμμα

συχνοτήτων και το αντίστοιχο πολύγωνο

| $x_i$  | $f_i$ | $F_i$ | $\alpha_i$ |
|--------|-------|-------|------------|
| 1      | 0,1   |       |            |
| 2      |       |       | $54^\circ$ |
| 3      |       | 0,65  |            |
| 4      |       |       |            |
| Σύνολο |       |       |            |

79.

Εξετάσαμε ένα δείγμα πενήντα (50) μαθητών Γ' Γυμνασίου ως προς τον αριθμό των ορθογραφικών λαθών που έκαναν σε ένα κείμενο Αρχαίων Ελληνικών. Τα αποτελέσματα φαίνονται στον διπλανό πίνακα.

α) Να αποδείξετε ότι  $\omega = 10$ .

β) Να συμπληρώσετε τον πίνακα,

γ) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή του αριθμού των ορθογραφικών λαθών των μαθητών του δείγματος.

δ) Αν στο παραπάνω δείγμα προστεθούν 25 μαθητές με μέση τιμή

αριθμού ορθογραφικών λαθών 2, να βρείτε τη νέα μέση τιμή του αριθμού των λαθών στο δείγμα των 75 μαθητών.

| Λάθη   | Μαθητές<br>$v_i$ | $f_i\%$   |
|--------|------------------|-----------|
| 2      |                  | $2\omega$ |
| 5      |                  | $4\omega$ |
| 6      |                  | $3\omega$ |
| 8      |                  | $\omega$  |
| Σύνολο |                  |           |

## Μέση τιμή και διάμεσος σε ομαδοποιημένα δεδομένα

**80.**

Ο χρόνος που κάνουν οι μαθητές ενός σχολείου να πάνε από το σπίτι στο σχολείο είναι από 4 έως 20 λεπτά. Το 20% κάνει χρόνους κάτω από 8 λεπτά, το 50% κάτω από 12 λεπτά, και το 15% τουλάχιστον 16 λεπτά. Να βρείτε το μέσο χρόνο των μαθητών.

**81.**

Εξετάσαμε  $n$  αυγά ως προς το βάρος τους. Τα βάρη κυμάνθηκαν από 45 g έως 85 g και ομαδοποιήθηκαν σε 4 κλάσεις ίσου πλάτους. Ισχύουν τα εξής:

- 40 αυγά έχουν βάρος από 45 g έως 55 g,
- το 70% των αυγών έχουν βάρος το πολύ 65 g,
- 180 αυγά έχουν βάρος το πολύ 75 g,
- Το 10% των αυγών έχουν βάρος τουλάχιστον 75 g

α) Να παραστήσετε τα παραπάνω δεδομένα σε έναν πίνακα κατανομής συχνοτήτων  $n_i$ ,  $f_i\%$ ,  $N_i$ ,  $F_i\%$

β) Να βρείτε το μέσο βάρος των αυγών

γ) Να βρείτε τη διάμεσο

**82.**

Να βρείτε τη διάμεσο στα δείγματα που έχουν τους παρακάτω πίνακες σχετικών συχνοτήτων %.

| Κλάσεις | $f_i\%$ |
|---------|---------|
| [3,8)   | 18      |
| [8,13)  | 32      |
| [13,18) | 40      |
| [18,23) | 10      |

| Κλάσεις | $f_i\%$ |
|---------|---------|
| [5,9)   | 15      |
| [9,13)  | 25      |
| [13,17) | 40      |
| [17,21) | 20      |

**83.**

Σε μία πολυκατοικία με 20 διαμερίσματα ένας υπάλληλος της αρμόδιας υπηρεσίας (ΕΥΔΑΠ) μέτρησε πόσα  $m^3$  νερού καταναλώνουν οι ένοικοι. Τα αποτελέσματα φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα.

Να υπολογιστούν :

- α) η μέση τιμή,  
β) η διάμεσος

| $m^2$ | Συχνότητα |
|-------|-----------|
| 10-20 | 2         |
| 20-30 | 5         |
| 30-40 | 6         |
| 40-50 | 4         |
| 50-60 | 3         |

**84.**

Οι χρόνοι (σε λεπτά) που χρειάστηκαν οι μαθητές της Α' Λυκείου να λύσουν ένα πρόβλημα φαίνονται στον πίνακα δίπλα.

Να βρείτε το μέσο χρόνο των μαθητών.

| Χρόνος | Μαθητές |
|--------|---------|
| [0,4)  | 12      |
| [4,8)  | 15      |
| [8,12) | 13      |



**85.**

Σε μια κατασκήνωση υπάρχουν 40 παιδιά των οποίων οι ηλικίες (σε έτη) φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

| Ηλικίες<br>(σε έτη) | Κεντρική<br>τιμή $x_i$ | Αριθμός<br>παιδιών $n_i$ | $f_i$ | $F_i$ |
|---------------------|------------------------|--------------------------|-------|-------|
| [8,10)              |                        | 4                        |       |       |
| [10,12)             |                        | 16                       |       |       |
| [12,14)             |                        | 6                        |       |       |
| [14,16)             |                        | 14                       |       |       |
| Σύνολο              |                        | 40                       |       |       |

- α) Να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα.  
 β) Να βρείτε τη μέση τιμή των ηλικιών των παιδιών  
 γ) Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα και το πολύγωνο  $F_i\%$ .  
 δ) Να βρείτε τη διάμεσο

**86.**

Στην αποθήκη μίας βιομηχανίας υπάρχουν δύο τύποι καλωδίων κομμένα σε διάφορα μήκη. Η κατάταξή τους φαίνεται στον παρακάτω πίνακα. Να γίνουν στο ίδιο σχήμα τα πολύγωνα αθροιστικών συχνοτήτων για τούς δύο τύπους και να γίνει σύγκριση μεταξύ αυτών.

| ΜΗΚΟΣ  | Τύπος 1 |         |         | Τύπος 2 |         |         |
|--------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
|        | $n_i$   | $f_i\%$ | $F_i\%$ | $n_i$   | $f_i\%$ | $F_i\%$ |
| 10-20  | 8       |         |         | 5       |         |         |
| 20-30  | 12      |         |         | 8       |         |         |
| 30-40  | 20      |         |         | 15      |         |         |
| 40-50  | 24      |         |         | 12      |         |         |
| 50-60  | 16      |         |         | 10      |         |         |
| Σύνολο | 80      |         |         | 50      |         |         |

**87.**

Τα ποσά (σε €) που ξόδεψαν 50 μ στο κυλικείο του σχολείου τους κατά τη διάρκεια της περασμένης εβδομάδας, φαίνονται στον κάτω πίνακα:

| Ποσά σε € | Κεντρική<br>τιμή $x_i$ | Αριθμός<br>μαθητών $n_i$ | $f_i$ | $F_i$ |
|-----------|------------------------|--------------------------|-------|-------|
| [0,4)     |                        |                          | 0,1   |       |
| [4,8)     |                        |                          | 0,3   |       |
| [8,12)    |                        |                          | 0,2   |       |
| [12,16)   |                        |                          |       |       |
| Σύνολο    |                        | 50                       |       |       |

- α) Να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα  
 β) Να βρείτε το μέσο ποσό που ξόδεψαν οι μαθητές  
 γ) Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα και το πολύγωνο συχνοτήτων  $F_i\%$   
 δ) Να βρείτε τη διάμεσο

**88.**

Ένα δείγμα εργαζομένων μιας εταιρείας εξετάστηκε ως προς το χρόνο (σε ώρες) υπερωριακής απασχόλησης κατά τη διάρκεια ενός μηνός και προέκυψε ο παρακάτω πίνακας.

| Ώρες υπερωριακής απασχόλησης<br>Κλάσεις [ - ) | Αθροιστική<br>συχνότητα $N_i$ |
|---|-------------------------------|
| 0 – 2   | 5                             |
| 2 – 4   | 15                            |
| 4 – 6   | 20                            |
| 6 – 8   | 35                            |
| 8 – 10  | 40                            |

Να βρείτε:

- το μέγεθος του δείγματος,
- τις συχνότητες και τις σχετικές συχνότητες των κλάσεων και
- τη μέση τιμή.

**89.**

Στην «Αττική οδό» εξυπηρετούνται καθημερινά 200 χιλιάδες οχήματα, τα οποία διανύουν από 5 έως 45 χιλιόμετρα. Η διανύμενη απόσταση σε χιλιόμετρα από τα οχήματα αυτά παρουσιάζεται στην πρώτη στήλη του πίνακα:

| Κλάσεις<br>σε χλμ. | Κέντρο<br>κλάσης<br>$x_i$ | Συχνότητα<br>$n_i$ σε χιλ.<br>μονάδες | Σχετική<br>συχνότητα<br>$f_i\%$ | Αθροιστική<br>Συχνότητα<br>$N_i$ σε χιλ.<br>μονάδες | Αθρ. Σχετ.<br>Συχνότητα<br>$F_i\%$ |
|--------------------|---------------------------|---------------------------------------|---------------------------------|---|------------------------------------|
| [5 , 15)           |                           | 60                                    |                                 |   |                                    |
| [15 , 25)          |                           |                                       |                                 |   | 68                                 |
| [25 , 35)          |                           |                                       |                                 | 180   |                                    |
| [35 , 45)          |                           |                                       |                                 |   |                                    |
| Σύνολο             |                           | 200                                   |                                 |   |                                    |

- Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα και να συμπληρώσετε τις τιμές των αντίστοιχων μεγεθών.
- Να σχεδιάσετε το ιστόγραμμα ( $x_i$  ,  $f_i\%$ ) και το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων.
- Να βρείτε τη μέση τιμή  $\bar{x}$ .
- Να βρείτε το πλήθος των οχημάτων που διανύουν απόσταση τουλάχιστον 25 χιλιομέτρων.

**90.**

Στον παρακάτω πίνακα έχουν ομαδοποιηθεί αποστάσεις (σε km) των κατοικιών 50 υπαλλήλων μιας επιχείρησης από τον χώρο εργασίας τους

| Απόσταση<br>σε km | $x_i$ | $n_i$ | $f_i$ | $N_i$ | $F_i\%$ |
|-------------------|-------|-------|-------|-------|---------|
| [1 , 3)           |       |       | 0,1   |       |         |
| [3,5)             |       |       |       | 20    |         |
| [5,7)             |       | 20    |       |       |         |
| [7,9)             |       |       |       |       |         |
| Σύνολο            |       | 50    |       |       |         |

- Να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα.
- Να βρείτε τη μέση τιμή των παραπάνω αποστάσεων

γ) Να βρείτε τη διάμεσο.

**91.**

Ο επόμενος πίνακας παρουσιάζει τα χρόνια υπηρεσίας ενός δείγματος εργαζομένων σε μια εταιρεία

| Χρόνια υπηρεσίας  | [0,10) | [10,20)  | [20,30) | [30,40) |
|-------------------|--------|----------|---------|---------|
| Εργαζόμενοι $v_i$ | 10     | $\alpha$ | 20      | 5       |

Γνωρίζουμε ότι ο μέσος χρόνος υπηρεσίας των εργαζομένων του δείγματος είναι 19 χρόνια.

α) Να αποδείξετε ότι  $\alpha=15$

β) Να κατασκευάσετε πίνακα κατανομής  $v_i, f_i, N_i, F_i$ .

γ) Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα και το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό

δ) Να βρείτε τη διάμεσο

ε) Να βρείτε το ποσοστό % των εργαζομένων που έχουν το πολύ 14 χρόνια υπηρεσίας στην εταιρεία.

**92.**

Στον παρακάτω (ελλιπή) πίνακα παρουσιάζονται οι σχετικές συχνότητες των τιμών σε Ευρώ ενός συγκεκριμένου προϊόντος σε 50 καταστήματα μιας πόλης:

| Τιμή προϊόντος<br>(σε Ευρώ)<br>[ - ) | Σχετική Συχνότητα<br>$f_i$ |
|--------------------------------------|----------------------------|
| 8 – 10                               | 0,2                        |
| 10 – 12                              | $f_2$                      |
| 12 – 14                              | 0,3                        |
| 14 – 16                              | $f_4$                      |

α) Αν η μέση τιμή των τιμών του προϊόντος στα καταστήματα αυτά είναι  $\bar{x}=11,60$  Ευρώ, να βρείτε τις σχετικές συχνότητες  $f_2$  και  $f_4$ .

β) Αν  $f_2=0,4$  και  $f_4=0,1$  τότε,

i) να βρείτε σε πόσα καταστήματα η τιμή του προϊόντος είναι μεγαλύτερη ή ίση των 10 Ευρώ.

ii) να κατασκευάσετε το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.

**93.**

Η μέση βαθμολογία των μαθητών μιας τάξης σε ένα τεστ είναι 70. Χωρίζουμε τη βαθμολογία σε τέσσερις κλάσεις ίσου πλάτους, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

| Κλάσεις<br>[ - ) | Κεντρικές τιμές<br>$x_i$ | Συχνότητα<br>$v_i$ | Σχετική<br>συχνότητα $f_i$ |
|------------------|--------------------------|--------------------|----------------------------|
| 20 – 40          |                          |                    |                            |
| 40 – 60          |                          |                    |                            |
| 60 – 80          |                          |                    |                            |
| 80 – 100         |                          |                    |                            |
| Σύνολα           |                          |                    |                            |

Δίνεται επιπλέον ότι το ποσοστό των μαθητών που έχουν βαθμό από 20 έως 40 είναι ίσο με το ποσοστό των μαθητών που έχουν βαθμό από 40 έως 60, ενώ στο κυκλικό διάγραμμα των

δεδομένων, η γωνία του κυκλικού τομέα για την επίδοση από 80 έως 100 είναι  $108^\circ$ .

α) Να δείξετε ότι  $f_1 = f_2 = \frac{1}{10}$ ,  $f_3 = \frac{5}{10}$ ,  $f_4 = \frac{3}{10}$ .

β) Αν ο αριθμός των μαθητών της τάξης είναι 50, τότε:

- i) Να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα συχνοτήτων.
- ii) Να βρείτε το πλήθος των μαθητών που έχουν βαθμολογία τουλάχιστον 60.
- iii) Να βρείτε το ποσοστό των μαθητών που έχουν βαθμολογία από 50 έως 70.

**94.**

Ο παρακάτω πίνακας αναφέρεται μεταβλητή  $X$  της οποίας οι παρατηρήσεις ομαδοποιηθεί σε 4 κλάσεις ίσου πλάτους:

| Κλάσεις          | $x_i$ | $n_i$ | $f_i$ |
|------------------|-------|-------|-------|
| $[2, \dots)$     |       | 6     | 0,15  |
| $[\dots, \dots)$ |       | 10    |       |
| $[\dots, \dots)$ |       |       |       |
| $[\dots, \dots)$ |       |       | 0,1   |
| $[\dots, \dots)$ |       |       |       |
| Σύνολο           |       |       |       |

Γνωρίζουμε ότι η μέση τιμή ισούται με 6,1

α) Να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα

β) Να βρείτε το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι τουλάχιστον ίσες με 5 και το πολύ ίσες με 9

γ) Να βρείτε τη διάμεσο.

**95.**

Ο επόμενος πίνακας αναφέρεται σε μια μεταβλητή  $X$  της οποίας οι τιμές έχουν ομαδοποιηθεί σε 14 κλάσεις ίσου πλάτους.

| Κλάσεις          | $x_i$ | $n_i$ | $f_i$ | $N_i$ | $F_i$ |
|------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $[\dots, \dots)$ |       | 2     |       |       |       |
| $[\dots, \dots)$ |       |       | 0,3   | 8     |       |
| $[\dots, \dots)$ |       |       |       |       | 0,8   |
| $[\dots, \dots)$ |       |       |       |       |       |
| $[\dots, \dots)$ |       |       |       |       |       |
| Σύνολο           |       |       |       |       |       |

Γνωρίζουμε ότι η μέση τιμή ισούται με 9,8 και η διάμεσος ισούται με 10

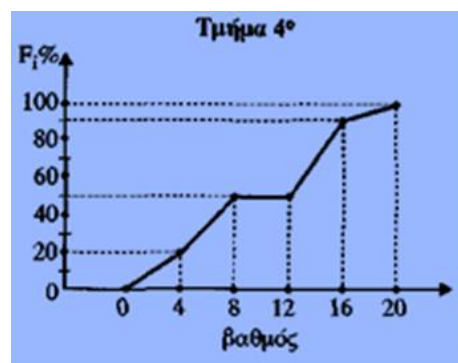
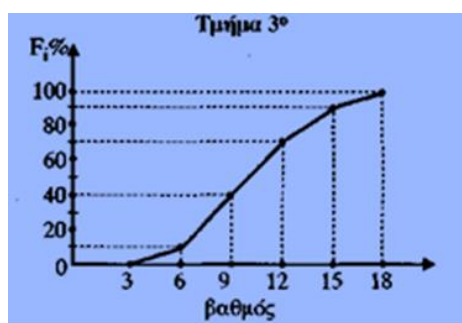
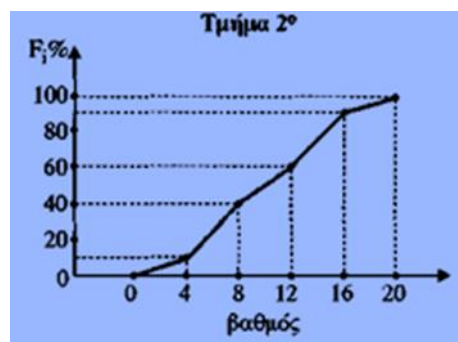
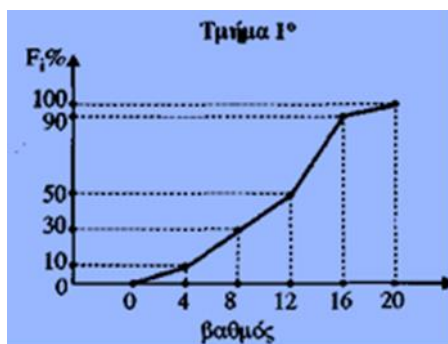
α) Να βρείτε τις συχνότητες και τις σχετικές συχνότητες κάθε κλάσης.

β) Να βρείτε τα όρια των κλάσεων

γ) Να βρείτε το ποσοστό % των παρατηρήσεων που έχουν τιμή τουλάχιστον ίση με 14.

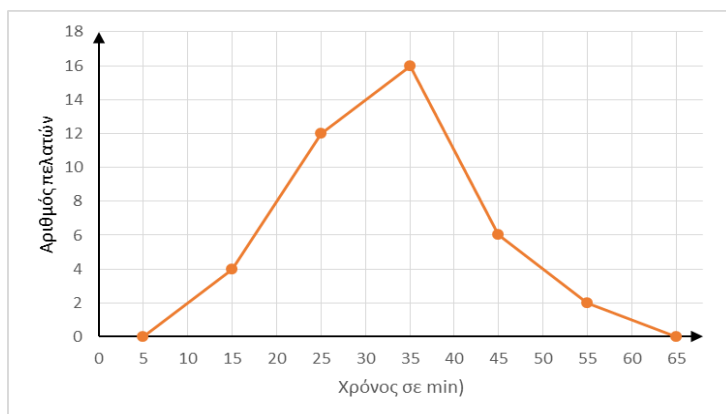
96.

Να βρείτε τη διάμεσο των βαθμών των μαθητών της Α' Λυκείου του κάθε τμήματος που πήραν σε ένα διαγώνισμα αν τα πολύγωνα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων είναι τα παρακάτω.



97.

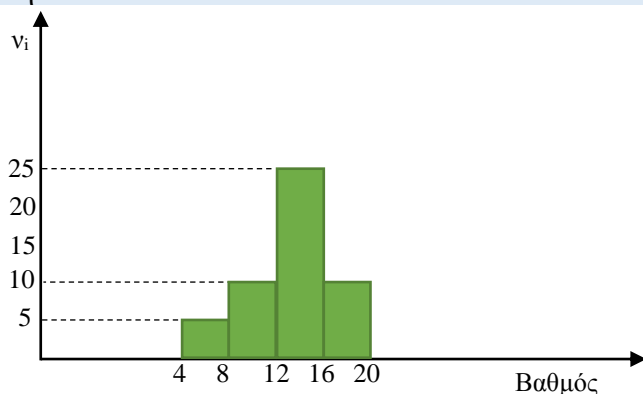
Εξετάσαμε  $n$  πελάτες μιας καφετέριας ως προς τον χρόνο (σε min) παραμονής τους σε αυτή. Τα αποτελέσματα ομαδοποιήθηκαν σε 5 κλάσεις ίσου πλάτους και το πολύγωνο συχνοτήτων φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



- Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα συχνοτήτων
- Να κατασκευάσετε πίνακα κατανομής συχνοτήτων  $n_i$ ,  $fi\%$ ,  $N_i$ ,  $Fi\%$
- Να βρείτε τη μέση τιμή.
- Να βρείτε τη διάμεσο.

98.

Σε ένα διαγώνισμα Βιολογίας η βαθμολογία των μαθητών δίνεται από το παρακάτω ιστόγραμμα συχνοτήτων  $v_i$ .



α) Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας και να συμπληρώσετε τον επόμενο πίνακα.

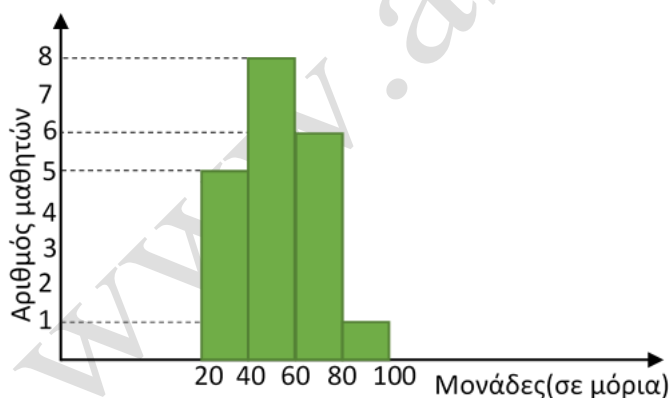
| Κλάσεις Βαθμολογίας | $x_i$ | $v_i$ | $f_i$ | $N_i$ | $F_i$ |
|---------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| [4,8)               |       |       |       |       |       |
| [8,12)              |       |       |       |       |       |
| [12,16)             |       |       |       |       |       |
| [16,20)             |       |       |       |       |       |
| Σύνολο              |       |       |       |       |       |

β) Να βρείτε τη μέση τιμή των βαθμών

γ) Πόσοι μαθητές έχουν βαθμό μέχρι και 10;

99.

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι βαθμολογίες, στην εκατοντάβαθμη κλίμακα, των μαθητών ενός τμήματος της Δ' τάξης, κάποιου Εσπερινού Ενιαίου Λυκείου, στα Μαθηματικά Γενικής Παιδείας.



α) Να βρείτε πόσοι είναι οι μαθητές του τμήματος.

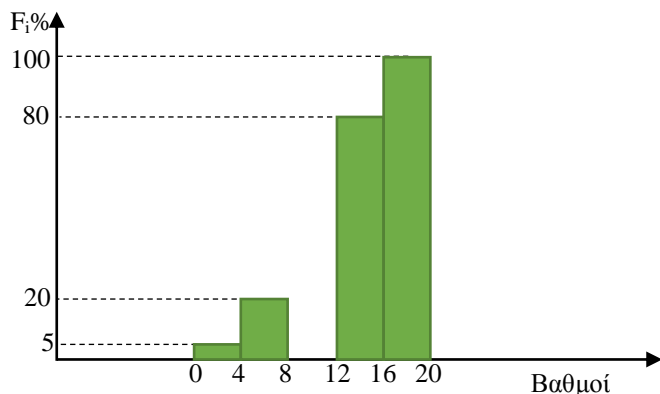
β) Να βρείτε πόσοι είναι οι μαθητές που έχουν βαθμό από 40 μόρια και πάνω.

γ) Να κατασκευάσετε τον πίνακα με τις συχνότητες  $v_i$ , τις κεντρικές τιμές  $x_i$  και τα γινόμενα  $x_i v_i$ .

δ) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των βαθμών των μαθητών του τμήματος.

100.

Οι βαθμοί  $n$  μαθητών σε ένα διαγώνισμα ομαδοποιήθηκαν σε 5 κλάσεις και προέκυψε το παρακάτω ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό, από το οποίο λείπει ένα ορθογώνιο. Γνωρίζουμε ότι η διάμεσος των παρακάτω βαθμών είναι 13



- α) Να συμπληρώσετε το παραπάνω ιστόγραμμα.  
β) Να βρείτε τη μέση τιμή  
γ) Αν γνωρίζουμε ότι κάτω από 10 έγραψαν 12 μαθητές, να βρείτε πόσοι μαθητές έγραψαν τουλάχιστον 17.

### Συνδυαστικά θέματα

101.

Μια μεταβλητή  $X$  παίρνει τις τιμές  $x_1=a$ ,  $x_2=a+5$ ,  $x_3=a+10$  και  $x_4=a+35$ , όπου  $a$  πραγματικός αριθμός. Οι αθροιστικές σχετικές συχνότητες των τιμών δίνονται από τον τύπο:

$$F_i = \frac{7i-3}{\lambda}, \text{ για } i=1,2,3,4, \text{ όπου } \lambda \text{ θετικός ακέραιος.}$$

- α) Να αποδείξετε ότι  $\lambda=25$ .  
β) Να βρείτε τις σχετικές συχνότητες  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $f_3$  και  $f_4$ .  
γ) Αν η μέση τιμή των παρατηρήσεων είναι  $\bar{x}=19$ , να βρείτε την τιμή του  $a$ .

102.

Έστω  $x_1, x_2, x_3, x_4$  οι τιμές μιας μεταβλητής  $X$  ενός δείγματος μεγέθους  $n=72$  με αντίστοιχες (απόλυτες) συχνότητες  $v_1, v_2, v_3, v_4$ , όπου  $v_4=3v_3$ . Δίνεται επίσης ότι τα τόξα του κυκλικού διαγράμματος συχνοτήτων που αντιστοιχούν στις τιμές  $x_1$  και  $x_2$  είναι αντίστοιχα  $50^\circ$  και  $30^\circ$ .

- α) Να βρεθούν οι συχνότητες  $v_i$ ,  $i=1,2,3,4$   
β) Να βρεθούν τα τόξα που αντιστοιχούν στις τιμές  $x_3$  και  $x_4$   
γ) Δίνεται ότι  $x_1 < -7$ ,  $x_2 = -7$ ,  $x_3 = 3$ , και  $x_4 > 3$ . Ναδειχθεί ότι  $10R + 72\bar{x} = 52\delta$  όπου  $R$ ,  $\bar{x}$ ,  $\delta$  είναι αντίστοιχα το εύρος, η μέση τιμή και η διάμεσος των παρατηρήσεων.

**103.**

Εξετάσαμε 25 συνδρομητές μιας εταιρείας κινητής τηλεφωνίας ως προς το πλήθος των τηλεφωνικών κλήσεων που πραγματοποίησαν κατά τη διάρκεια μίας ημέρας. Ορισμένα από τα αποτελέσματα της έρευνας φαίνονται στον πίνακα:

| Πλήθος κλήσεων $x_i$ | Πλήθος συνδρομητών $v_i$ | $N_i$ | $f_i\%$ | $F_i\%$ |
|----------------------|--------------------------|-------|---------|---------|
| 2                    |                          |       | 16      |         |
| 3                    |                          | 10    |         |         |
| 4                    | 5                        |       |         | 60      |
| 5                    |                          | 22    |         |         |
| 6                    |                          |       | 8       |         |
| 7                    | 1                        |       |         |         |
| Σύνολο               |                          |       |         |         |

- α) Να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα  
 β) Να βρείτε τη μέση τιμή του πλήθους των κλήσεων  
 γ) Να βρείτε τη διάμεσο των παραπάνω δεδομένων  
 δ) Στο παραπάνω δείγμα προστίθενται  $v$  συνδρομητές οι οποίοι έχουν μέση τιμή πλήθους κλήσεων ίση με 6. Με τον τρόπο αυτό η μέση τιμή πλήθους κλήσεων όλων των συνδρομητών μαζί γίνεται ίση με 5,5. Να βρείτε τον αριθμό  $v$ .

**104.**

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται οι ώρες πρωινής εργασίας των μαθητών ενός τμήματος Εσπερινού Λυκείου, όπου  $\alpha$  και  $\beta$  είναι οι τιμές του τοπικού μεγίστου και του τοπικού ελαχίστου αντίστοιχα της συνάρτησης  $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

- α) Να αποδείξετε ότι:  $\alpha=4$  και  $\beta=3$ .  
 β) Να βρείτε τη μέση τιμή  $\bar{x}$  και τη διάμεσο  $\delta$  των ωρών πρωινής εργασίας των μαθητών.  
 γ) Πόσοι μαθητές εργάστηκαν το πολύ 4 ώρες.

| Ωρες εργασίας μαθητών $x_i$ | $v_i$    |
|-----------------------------|----------|
| 1                           | $\alpha$ |
| 2                           | 5        |
| 3                           | $\beta$  |
| 4                           | 2        |
| 5                           | 1        |

**105.**

Ο παρακάτω πίνακας αναφέρεται σε δεδομένα που έχουν ομαδοποιηθεί σε 4 κλάσεις ίσου πλάτους:

| Κλάσεις          | $x_i$ | $v_i$ | $f_i\%$ | $N_i$ | $F_i\%$ |
|------------------|-------|-------|---------|-------|---------|
| $[10, \dots)$    |       | 4     |         |       |         |
| $[\dots, \dots)$ |       |       | 15      |       |         |
| $[\dots, \dots)$ |       |       |         | 26    |         |
| $[\dots, \dots)$ |       |       |         |       |         |
| Σύνολο           |       | 40    |         |       |         |

Γνωρίζουμε ότι η μέση τιμή των παραπάνω δεδομένων ισούται με 20.

- α) Να συμπληρώσετε τις στήλες  $v_i$ ,  $f_i\%$ ,  $N_i$ ,  $F_i\%$  του παραπάνω πίνακα  
 β) Να αποδείξετε ότι το πλάτος κάθε κλάσης ισούται με 4  
 γ) Να βρείτε τη διάμεσο.

**106.**

Δίνονται οι αριθμοί:  $2\ln(x-2)$ ,  $-x$ ,  $2, 4x$ ,  $5$ , με  $x > 2$ .

- α) Να βρείτε για ποια τιμή του  $x$ , η μέση τιμή των τεσσάρων αριθμών γίνεται μέγιστη, καθώς και ποια είναι η μέγιστη μέση τιμή.  
 β) Για την τιμή του  $x$  που βρήκατε στο ερώτημα (i) να βρείτε τη διάμεσο των τεσσάρων αριθμών



107.

Ο παρακάτω πίνακας αναφέρεται σε μια μεταβλητή X.

| Κλάσεις | $x_i$ | $v_i$ | $f_i$ | $N_i$ | $F_i$ |
|---------|-------|-------|-------|-------|-------|
| [0,4)   |       |       |       |       |       |
| [4,8)   |       | 16    |       |       | 0,6   |
| [8,12)  |       |       | 0,1   | 28    |       |
| [12,16) |       |       |       |       |       |
| Σύνολο  |       |       |       |       |       |

vii)

α) Να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα

β) Αν  $\bar{x}$  είναι η μέση τιμή και  $\delta$  είναι η διάμεσος της μεταβλητής X, να μελετήσετε τη συνάρτηση :  $f(x) = 2x^3 - \delta \cdot x^2 + \bar{x} \cdot x + 1$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα

Τα ψυγεία μιας εταιρείας συντήρησης τροφίμων είναι κατανομημένα σε 4 κλάσεις σύμφωνα με την θερμοκρασία τους X (σε °C) όπως φαίνεται στον πίνακα. Η δεύτερη κλάση έχει 3πλάσιο αριθμό ψυγείων από την πρώτη και η τέταρτη 5πλάσιο της πρώτης.

α) Να δειχθεί ότι η μέση θερμοκρασία των ψυγείων είναι  $\bar{x} = 1^\circ\text{C}$

β) Έστω ότι η τρίτη κλάση έχει ίδιο αριθμό ψυγείων με την πρώτη.

i) Να συμπληρωθεί ο πίνακας και να γίνει το πολύγωνο σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων

ii) Να υπολογίσετε την διάμεσο θερμοκρασία

iii) Από το πολύγωνο σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων να βρείτε το ποσοστό των ψυγείων που η θερμοκρασία τους είναι πάνω από 0,5 °C

| [ - )    | $x_i$ | $v_i$ | $f_i$<br>% |
|----------|-------|-------|------------|
| [-4, -2) |       |       |            |
| [-2, 0)  |       |       |            |
| [0, 2)   |       |       |            |
| [2, 4)   |       |       |            |
| Σύνολο   |       |       |            |

## ΜΕΤΡΑ ΔΙΑΣΠΟΡΑΣ

### Μέτρα διασποράς των τιμών $t_i$

108.

Να υπολογίσετε τη διακύμανση και την τυπική απόκλιση για καθεμία από τις παρακάτω ομάδες δεδομένων:

α) 3,6,8,10,13

γ) 8,11,13,15,18

β) 5,10,14,18,23

δ) -3,-6,-8,-10,-13

109.

Δίνονται οι αριθμοί: 3,4, 10, 6, 2. Να βρείτε:

α) το εύρος, β) τη διάμεσο, γ) τη μέση τιμή, δ) τη διακύμανση.

110.

Δίνονται οι αριθμοί: -1, 4, 7, -2, 5, 2. Να βρείτε:

α) το εύρος, β) τη διάμεσο, γ) τη μέση τιμή, δ) τη διακύμανση.

111.

Οι ελάχιστες θερμοκρασίες σε μια πόλη για πέντε συνεχείς ημέρες ήταν: -5, -3, 0, -3, 1. Να βρείτε:

α) το εύρος των θερμοκρασιών.

β) την διακύμανση.

γ) την τυπική απόκλιση

**112.**

Η διάμετρος 10 βαρελιών σε cm είναι: 60 , 125 , 80 , 90 , 130 , 110 , 100, 135 , 120 , 110  
Να υπολογίσετε:

- α) τη μέση τιμή, τη διάμεσο,  
β) το εύρος, την τυπική απόκλιση και το συντελεστή μεταβολής.

**113.**

Όλες οι παρακάτω ομάδες δεδομένων (λίστες) έχουν μέση τιμή 65.

|    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|
| 20 | 35 | 50 | 65 | 80 | 95 | 11 |
| 20 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 11 |
| 20 | 21 | 22 | 65 | 10 | 10 | 11 |

- α) Χωρίς να κάνετε πράξεις, μπορείτε να πείτε σε ποια λίστα υπάρχει  
i) μικρότερη και ii) μεγαλύτερη διασπορά των παρατηρήσεων;  
β) Μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως μέτρο σύγκρισης το εύρος;

**114.**

Οι ελάχιστες θερμοκρασίες (σε °C) που μετρήθηκαν σε έναν μετεωρολογικό σταθμό μιας πόλης κατά τη διάρκεια 5 ημερών του περασμένου χειμώνα είναι: -3, -5, -7, -9, -6.  
Να βρείτε τον συντελεστή μεταβολής του παραπάνω δείγματος θερμοκρασιών.

**115.**

Οι βαθμοί 8 μαθητών στο πρώτο τετράμηνο, στα Μαθηματικά, είναι: 18, 10, 16, 14, 10, 20,  $\alpha$ ,  $\beta$  και η μέση βαθμολογία τους είναι 14. Αν επιπλέον ισχύει ότι  $\alpha = 2\beta$ , τότε:

- α) να βρείτε τους αριθμούς  $\alpha$  και  $\beta$ ,  
β) να βρείτε τη διάμεσο των παραπάνω βαθμών,  
γ) να βρείτε τη διασπορά των παραπάνω βαθμών,  
δ) να εξετάσετε αν το παραπάνω δείγμα είναι ομοιογενές.

**116.**

Για τη μελέτη του αριθμού των τροχαίων ατυχημάτων, που γίνονται σε μια κεντρική διασταύρωση κάποιας επαρχιακής πόλης, πήραμε δείγμα πέντε παρατηρήσεων που αφορούν στον αριθμό των ατυχημάτων σε καθέναν από τους πέντε τελευταίους μήνες. Οι παρατηρήσεις είναι αντίστοιχα 1, 2, 1

- α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διασπορά του δείγματος.  
β) Να βρείτε τη διάμεσο του δείγματος,  
γ) Ποια είναι η (απόλυτη) συχνότητα και η σχετική συχνότητα της τιμής 3;  
δ) Ποιο είναι το εύρος του δείγματος;

**117.**

Η μέση ελάχιστη θερμοκρασία σε μια πόλη τον Ιανουάριο ήταν - 4° C και η διασπορά 4.  
Να βρείτε τον συντελεστή μεταβολής.

**118.**

Έστω δύο δείγματα τιμών A και B μιας μεταβλητής X. Το A έχει μέση τιμή 30 και διασποράς 8. Το B έχει μέση τιμή -5 και διασπορά 2. Να βρείτε ποιο από τα δύο δείγματα.

- α) έχει μεγαλύτερη ομοιογένεια.  
β) είναι ομοιογενές.

**119.**

Στο διπλανό πίνακα δίνονται οι ελάχιστες θερμοκρασίες (σε βαθμούς Κελσίου) σε δύο πόλεις A και B για πέντε συνεχείς ημέρες. Να βρείτε ποιο από τα δύο δείγματα έχει μεγαλύτερη ομοιογένεια.

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 1 | 2 | 3 |
| B | 1 | 2 | 4 | 5 |

120.

Σε ένα δείγμα ισχύει ότι:  $\bar{x} + 4s = 0$ . Να βρείτε το συντελεστή μεταβλητότητας του δείγματος.

121.

Αν ένα δείγμα έχει διασπορά 4 και συντελεστή μεταβλητότητας 20% να βρείτε τη μέση τιμή του δείγματος.

122.

Δίνονται τα παρακάτω δείγματα τιμών :

Δείγμα A: 1, 3, 4, 5, 7

Δείγμα B: 5, 6, 7, 9, 9

Να συγκρίνετε τα δείγματα A και B ως προς την ομοιογένεια.

123.

Οι αριθμοί  $\alpha$ ,  $\beta$ , 2, 5 έχουν μέση τιμή  $\bar{x} = 3$  και διακύμανση  $s^2 = 2,5$ . Να βρείτε:

α) τους αριθμούς  $\alpha$  και  $\beta$ ,

β) το εύρος και τη διάμεσο των παραπάνω αριθμών

124.

Δίνονται πέντε αριθμοί των οποίων η τιμή είναι διπλάσια της διαμέσου. Οι τέσσερις από αυτούς τους αριθμούς είναι οι: 1, 3, 10, 21

α) Να βρείτε τις πιθανές τιμές του πέμπτου αριθμού.

β) Αν επιπλέον το εύρος των πέντε αριθμών 27, να βρείτε τη διακύμανση των πέντε αριθμών

125.

Θεωρούμε τα παρακάτω δείγματα παρατηρήσεων:

Δείγμα A:  $t_1, t_2, t_3, \alpha, 7$ , Δείγμα B:  $t_1, t_2, t_3, 2\alpha, \alpha + 5$  τα οποία έχουν την ίδια μέση τιμή.

α) Να βρείτε τον αριθμό  $\alpha$ .

β) Αν  $s_A^2$  και  $s_B^2$  είναι οι διακυμάνσεις των δειγμάτων A και B αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι :

$$s_A^2 - s_B^2 = 2$$

### Μέτρα διασποράς σε πίνακα συχνοτήτων

126.

Οι βαθμοί του πρώτου τετράμηνου 30 μαθητών της Γ' Λυκείου στα Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής είναι:

|    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|
| 15 | 17 | 19 | 18 | 16 |
| 20 | 16 | 18 | 15 | 20 |
| 19 | 15 | 17 | 20 | 16 |
| 17 | 16 | 15 | 15 | 18 |
| 16 | 19 | 18 | 17 | 15 |
| 15 | 17 | 15 | 20 | 16 |

α) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα :

| $x_i$ | $v_i$ | $N_i$ | $x_i v_i$ |
|-------|-------|-------|-----------|
| 15    |       |       |           |
| 16    |       |       |           |
| 17    |       |       |           |
| 18    |       |       |           |
| 19    |       |       |           |
| 20    |       |       |           |

- β) Να βρείτε τη διάμεσο  
 γ) Να βρείτε τη μέση τιμή  
 δ) Να βρείτε τη διασπορά

**127.**

Οι εισπράξεις (σε χιλιάδες ευρώ) ενός δείγματος δέκα υποκαταστημάτων μιας εμπορικής επιχείρησης, κατά τον μήνα Απρίλιο του 2004, ήταν:

|    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|
| 50 | 15 | 15 | 20 | 15 |
| 30 | 15 | 20 | 50 | 50 |

- α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή  $\bar{x}$  των εισπράξεων  
 β) Να συμπληρώσετε τον επόμενο πίνακα

| Εισπράξεις (σε<br>χιλιάδες €)<br>$x_i$ | $v_i$ | $f_i$ | $x_i - \bar{x}$ | $(x_i - \bar{x})^2$ | $(x_i - \bar{x})^2 v_i$ |
|--|-------|-------|-----------------|---------------------|-------------------------|
| 15                                     |       |       |                 |                     |                         |
| 20                                     |       |       |                 |                     |                         |
| 30                                     |       |       |                 |                     |                         |
| 50                                     |       |       |                 |                     |                         |
| Σύνολο                                 |       |       |                 |                     |                         |

γ) Θεωρώντας γνωστό ότι για τη διακύμανση ισχύει ο τύπος :  $s^2 = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 v_i$ , να υπολογίσετε

- i) τη διακύμανση των εισπράξεων  
 ii) την τυπική απόκλιση

**128.**

Οι βαθμολογίες μιας ομάδας φοιτητών σε ένα μάθημα δίνεται από τον πίνακα δίπλα. Να βρείτε:

- α) το εύρος.  
 β) την διασπορά.  
 γ) την τυπική απόκλιση.

| Βαθμολογία | Φοιτητές |
|------------|----------|
| 5          | 4        |
| 6          | 5        |
| 7          | 10       |
| 8          | 1        |

**129.**

Στον διπλανό πίνακα δίνονται οι τιμές  $x_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  μιας μεταβλητής  $X$  με τις αντίστοιχες συχνότητες τους  $v_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . Να υπολογίσετε:

- α) τη μέση τιμή  $\bar{x}$ ,  
 β) τη διάμεσο  $\delta$ ,  
 γ) τη διακύμανση  $s^2$ .

| $x_i$ | $v_i$ |
|-------|-------|
| 1     | 1     |
| 3     | 2     |
| 5     | 1     |
| 7     | 4     |

**130.**

Στον διπλανό πίνακα δίνονται οι τιμές  $x_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  μιας μεταβλητής  $X$  με τις αντίστοιχες συχνότητες τους  $v_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . Το μέγεθος του δείγματος είναι  $n = 80$  και η μέση τιμή είναι  $\bar{x} = 2,6$ .

- α) Να αποδείξετε ότι  $\mu=33$  και  $\lambda=10$ ,  
 β) Να υπολογίσετε τη διάμεσο του δείγματος,  
 γ) Να υπολογίσετε τη διακύμανση του δείγματος .

| $x_i$  | $v_i$     |
|--------|-----------|
| 1      | 12        |
| 2      | $\mu$     |
| 3      | $\lambda$ |
| 4      | 25        |
| Σύνολο | $n=80$    |

**131.**

Δίνεται ο διπλανός πίνακας κατανομής συχνοτήτων μιας μεταβλητής  $X$ .  
 Δίνεται ότι η μέση τιμή των παρατηρήσεων είναι  $\bar{x}=20$ .

- α) Να βρείτε τη συχνότητα  $v_3$   
 β) Να αποδείξετε ότι το παραπάνω δείγμα είναι ομοιογενές.

| $x_i$  | $v_i$ |
|--------|-------|
| 18     | 8     |
| 20     | 6     |
| 22     |       |
| 24     | 2     |
| Σύνολο |       |

**132.**

Στον διπλανό πίνακα δίνεται η κατανομή συχνοτήτων των ωρών μελέτης των μαθητών της Α' τάξης ενός Εσπερινού Γενικού Λυκείου στη διάρκεια μίας εβδομάδας.

- α) Αν η διάμεσος του δείγματος είναι  $\delta = 3,5$ , να βρείτε την τιμή του  $\alpha$ .  
 β) Για  $\alpha = 30$ , να βρείτε τη μέση τιμή  $\bar{x}$  των ωρών μελέτης των μαθητών,  
 γ) Για  $\alpha = 30$ , να βρείτε τη διακύμανση  $s^2$  των ωρών μελέτης των μαθητών.

| Ώρες $x_i$ | $v_i$    |
|------------|----------|
| 2          | 10       |
| 3          | $\alpha$ |
| 4          | 10       |
| 5          | 10       |
| 6          | 20       |

**133.**

Οι ώρες παρακολούθησης τηλεοπτικών προγραμμάτων από 20 άτομα σε διάστημα μιας εβδομάδας αναγράφονται στον παρακάτω (ελλιπή) πίνακα:

| Ώρες παρακολούθησης $x_i$ | Συχνότητα $v_i$ | $x_i v_i$ | $x_i^2 v_i$ |
|---------------------------|-----------------|-----------|-------------|
| 2                         |                 |           |             |
| 3                         | 6               |           |             |
| 9                         |                 |           |             |
| 11                        | 2               |           |             |
| Σύνολο                    | $n=20$          |           |             |

Στο κυκλικό διάγραμμα συχνοτήτων του παραπάνω πίνακα δίνεται ότι η γωνία του κυκλικού τομέα, που αντιστοιχεί στην παρατήρηση  $x_1 = 2$  ώρες, είναι  $\alpha_1 = 72^\circ$ .

- α) Να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα

β) Θεωρώντας γνωστό ότι για τη διακύμανση ισχύει ο τύπος  $s^2 = \frac{1}{v} \left[ \sum_{i=1}^k x_i^2 v_i - \frac{\left( \sum_{i=1}^k x_i v_i \right)^2}{v} \right]$

να υπολογίσετε την τυπική απόκλιση  $s$ .

γ) Να υπολογίσετε τον συντελεστή μεταβολής CV του δείγματος.

**134.**

Να γράψετε στο τετράδιό σας τον πίνακα των τιμών της μεταβλητής  $X$  σωστά συμπληρωμένο.

| $x_i$  | $v_i$  | $f_i$ | $f_i\%$ | $N_i$ | $x_i v_i$ | $x_i^2$ | $x_i^2 v_i$ |
|--------|--------|-------|---------|-------|-----------|---------|-------------|
| 1      | 10     |       |         |       | 10        | 1       | 10          |
| 2      |        |       |         | 35    |           | 4       |             |
| 3      |        |       |         |       |           | 9       |             |
| ΣΥΝΟΛΟ | $v=50$ | 1     | 100     |       |           |         |             |

α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο.

β) Να δείξετε ότι η διακύμανση είναι  $s^2=0,49$ .

Δίνεται ότι:  $s^2 = \frac{1}{v} \left[ \sum_{i=1}^k x_i^2 v_i - \frac{\left( \sum_{i=1}^k x_i v_i \right)^2}{v} \right]$

**135.**

Δίνεται ο πίνακας συχνοτήτων

| $x_i$  | $v_i$ | $f_i$ | $N_i$ | $F_i$ |
|--------|-------|-------|-------|-------|
| 1      | 4     |       |       |       |
| 2      | 10    | 0,25  |       |       |
| 3      |       |       |       | 0,75  |
| 4      |       |       | 32    |       |
| 5      |       |       |       |       |
| Σύνολο |       |       |       |       |

α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα.

β) Να βρείτε τη μέση τιμή.

γ) Να βρείτε τη διασπορά.

**136.**

Δίνεται ο πίνακας συχνοτήτων

| $x_i$  | $v_i$ | $f_i$ | $x_i v_i$ | $x_i^2 v_i$ |
|--------|-------|-------|-----------|-------------|
| 1      |       | 0,1   |           |             |
| 2      |       | 0,3   |           |             |
| 3      |       | 0,4   |           |             |
| 4      | 4     |       |           |             |
| Σύνολο |       |       |           |             |

α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα.

- β) Να βρείτε τη μέση τιμή.  
 γ) Να βρείτε τη διασπορά.

**137.**

Ρωτήσαμε ορισμένους φοιτητές μιας σχολής, πόσα μαθήματα πέρασαν την προηγούμενη εξεταστική περίοδο. Από την επεξεργασία των απαντήσεων τους προέκυψε ο διπλανός πίνακας. Επίσης, ο μέσος αριθμός μαθημάτων που πέρασαν οι φοιτητές είναι ίσος με 2. Να βρείτε:

- α) τις δύο σχετικές συχνότητες που λείπουν από τον πίνακα  
 β) τη διακύμανση της παραπάνω κατανομής

| Αριθμός μαθημάτων | $f_i$ |
|-------------------|-------|
| 0                 | 0,15  |
| 1                 |       |
| 2                 | 0,25  |
| 3                 |       |
| 4                 | 0,1   |
| Σύνολο            |       |

### Μέτρα διασποράς σε ομαδοποιημένα δεδομένα

**138.**

Οι χρόνοι αναμονής σε λεπτά 20 μαθητών στη στάση λεωφορείων για να πάνε σχολείο φαίνονται στο διπλανό πίνακα. Να βρείτε την τυπική απόκλιση.

| Χρόνος | Μαθητές |
|--------|---------|
| [1,3)  | 6       |
| [3,5)  | 8       |
| [5,7)  | 4       |
| [7,9)  | 2       |

**139.**

Στον πίνακα δίπλα φαίνονται οι θερμοκρασίες σε 10 πόλεις στις 8 το πρωί. Να βρείτε την τυπική απόκλιση.

$$\text{Δίνεται ότι: } s^2 = \frac{1}{n} \left[ \sum_{i=1}^k x_i^2 v_i - \frac{\left( \sum_{i=1}^k x_i v_i \right)^2}{n} \right]$$

| Κλάσεις | $v_i$ |
|---------|-------|
| [0,2)   | 1     |
| [2,4)   | 5     |
| [4,6)   | 4     |

**140.**

50 αντιπρόσωποι εμπορεύονται ένα προϊόν. Σε μια εβδομάδα πούλησαν ως 50 τεμάχια του προϊόντος αυτού. Η κατανομή φαίνεται στον παρακάτω πίνακα. Να υπολογίσετε:

- α) την τυπική απόκλιση και β) το συντελεστή μεταβολής

| Τεμάχια | Συχνότητα |
|---------|-----------|
| 0-10    | 3         |
| 10-20   | 7         |
| 20-30   | 15        |
| 30-40   | 16        |
| 40-50   | 9         |

**141.**

Οι ηλικίες των θαμώνων μιας καφετέριας δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

| Ηλικίες σε έτη | $x_i$ | $v_i$ | $f_i$ |
|----------------|-------|-------|-------|
| [17,19)        |       |       | 0,4   |
| [19,21)        |       | 15    |       |
| [21,23)        |       |       | 0,2   |
| [23,25)        |       |       | 0,1   |
| Σύνολο         |       |       |       |

α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα.

β) Να εξετάσετε αν το δείγμα των ηλικιών είναι ομοιογενές.

**142.**

Ρωτήσαμε 50 ανθρώπους πόσες φορές τρώνε έτοιμα φαγητά κάθε μήνα. Τα αποτελέσματα φαίνονται στον πίνακα που ακολουθεί. Να υπολογιστεί η τυπική απόκλιση.

| Έτοιμα φαγητά | Συχνότητα |
|---------------|-----------|
| 10-20         | 18        |
| 20-30         | 12        |
| 30-40         | 9         |
| 40-50         | 7         |
| 50-60         | 4         |

**143.**

Δίνεται ο επόμενος πίνακας κατανομής συχνοτήτων.

| Κλάσεις | $x_i$ | $v_i$ | $f_i$ | $N_i$ | $F_i\%$ |
|---------|-------|-------|-------|-------|---------|
| [0,2)   |       | 3     | 0,15  |       |         |
| [2,4)   |       |       |       |       | 0,55    |
| [4,6)   |       |       |       | 16    |         |
| [6,8)   |       |       |       |       |         |
| Σύνολο  |       |       |       |       |         |

α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα.

β) Να βρείτε τη μέση τιμή.

γ) Να βρείτε τη διακύμανση,

δ) Να βρείτε το ποσοστό % των παρατηρήσεων που είναι το πολύ ίσες με 3.



144.

Ο παρακάτω πίνακας μάς δίνει τις ώρες χρήσης των κινητών τηλεφώνων 40 υπαλλήλων μιας εταιρείας για έναν μήνα.

| Ωρες   | $x_i$ | $v_i$ |
|--------|-------|-------|
| [0,2)  |       | 6     |
| [2,4)  |       |       |
| [4,6)  |       | 14    |
| [6,8)  |       | 10    |
| [8,10) |       |       |
| Σύνολο |       | 40    |

Αν η μέση τιμή των ωρών χρήσης των κινητών τηλεφώνων είναι 5 ώρες, να βρείτε:

- α) τις συχνότητες  $v_2$  και  $v_5$ ,  
β) τη διακύμανση της παρακάτω κατανομής.

145.

Ο παρακάτω πίνακας αναφέρεται στις ηλικίες των υπαλλήλων μιας εταιρείας.

| Ηλικίες σε έτη | $x_i$ | Αριθμ.υπαλ. $v_i$ | $f_i$ | $N_i$ | $F_i$ | $x_i v_i$ | $x_i^2 v_i$ |
|----------------|-------|-------------------|-------|-------|-------|-----------|-------------|
| [ 25 , 35 )    |       |                   | 0,25  |       |       |           |             |
| [ 35 , 45 )    |       | 16                |       | 26    |       |           |             |
| [ 45 , 55 )    |       |                   |       |       |       |           |             |
| [ 55 , 65 )    |       |                   | 0,15  |       |       |           |             |
| Σύνολο         |       |                   |       |       |       |           |             |

- α) Να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα.  
β) Να βρείτε τη μέση τιμή.  
γ) Να βρείτε τη διακύμανση,  
δ) Να βρείτε τη διάμεσο,  
ε) Να βρείτε το ποσοστό % των υπαλλήλων που έχουν ηλικία τουλάχιστον 53 έτη.

146.

Στον διπλανό πίνακα δίνεται η κατανομή της ηλικίας ενός δείγματος ατόμων μιας πόλης. Να βρείτε:

- α) τη διάμεσο.  
β) το πλήθος των ατόμων που έχουν ηλικία κάτω από 35 έτη.  
γ) τη μέση τιμή.  
δ) την τυπική απόκλιση.  
ε) τον συντελεστή μεταβολής.

| Ηλικία [ , ) | Συχνότητα |
|--------------|-----------|
| 0-20         | 18        |
| 20-40        | 24        |
| 40-60        | 30        |
| 60-80        | 36        |
| 80-100       | 12        |

147.

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας:

| Κλάσεις | $x_i$ | $v_i$ | $f_i$ | $N_i$ | $F_i$ |
|---------|-------|-------|-------|-------|-------|
| [1-3)   |       |       | 0,04  |       |       |
| [3-5)   |       | 22    |       |       |       |
| [5-7)   |       |       | 0,26  | 37    |       |
| [7-9)   |       |       |       |       | 0,94  |
| [9-11)  |       |       |       |       |       |
| Σύνολο  |       |       |       |       |       |

- α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα.

- β) Να βρείτε τον συντελεστή μεταβολής,  
 γ) Να βρείτε το ποσοστό % των παρατηρήσεων των οποίων οι τιμές είναι τουλάχιστον ίσες με 8 .

**148.**

Εξετάσαμε έναν παίκτη μπάσκετ ως προς τον χρόνο συμμετοχής του (σε min) στα παιχνίδια της ομάδας του. Οι χρόνοι που προέκυψαν κυμαίνονται από 0 min έως και 20 min και ομαδοποιήθηκαν σε 5 κλάσεις ίσου πλάτους. Επίσης διαπιστώθηκε ότι ο παίκτης:

- συμμετείχε λιγότερο από 4 min σε 4 παιχνίδια
- συμμετείχε λιγότερο από 8 min στο 45% των παιχνιδιών,
- συμμετείχε λιγότερο από 12 min σε 11 παιχνίδια,
- συμμετείχε από 12 min έως 16 min στο 25% των παιχνιδιών,
- συμμετείχε τουλάχιστον 16 min σε 4 παιχνίδια

α) Να παρουσιάσετε τα παραπάνω δεδομένα σε πίνακα κατανομής συχνοτήτων  $n_i$ ,  $f_i$ ,  $N_i$ ,  $F_i$

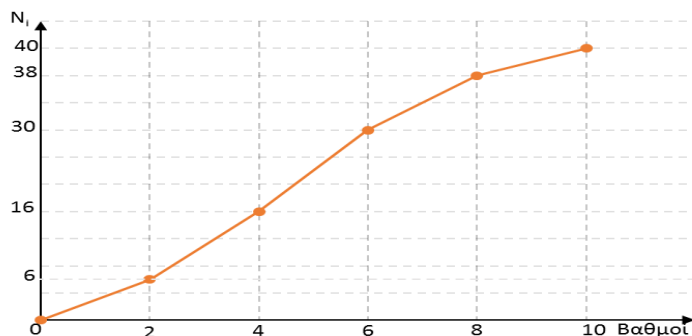
β) Να κατασκευάσετε το κυκλικό διάγραμμα για τα παραπάνω δεδομένα.

γ) Να βρείτε τον μέσο χρόνο συμμετοχής του παίκτη.

δ) Να βρείτε τη διακύμανση.

**149.**

Εξετάσαμε ένα δείγμα φοιτητών ως προς τον βαθμό που έγραψαν σε ένα μάθημα. Τα αποτελέσματα ομαδοποιήθηκαν και προέκυψε το παρακάτω πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων.



α) Να συμπληρώσετε το παραπάνω σχήμα με το ιστόγραμμα αθροιστικών συχνοτήτων

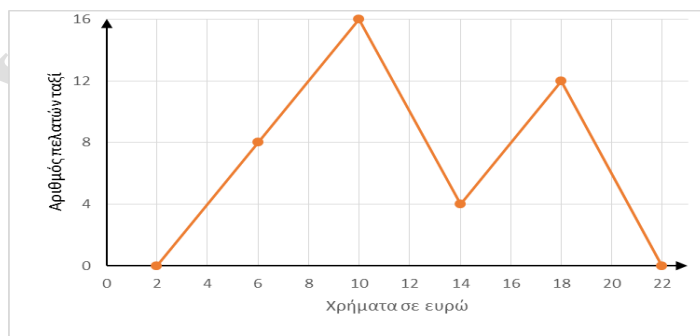
β) Να κατασκευάσετε πίνακα κατανομής συχνοτήτων  $n_i$ ,  $f_i$ ,  $N_i$ ,  $F_i$

γ) Να βρείτε το μέσο βαθμό των μαθητών

δ) Να βρείτε τη διακύμανση των βαθμών.

**150.**

Εξετάσαμε 40 πελάτες ενός ταξί, ως προς τα χρήματα που πλήρωσαν (σε €). Τα αποτελέσματα ομαδοποιήθηκαν σε κλάσεις ίσου πλάτους και από την επεξεργασία τους προέκυψε το παρακάτω πολύγωνο συχνοτήτων.



α) Να συμπληρώσετε το παραπάνω σχήμα με το ιστόγραμμα συχνοτήτων.

β) Να κατασκευάσετε πίνακα κατανομής συχνοτήτων  $n_i$ ,  $f_i$ ,  $N_i$ ,  $F_i$

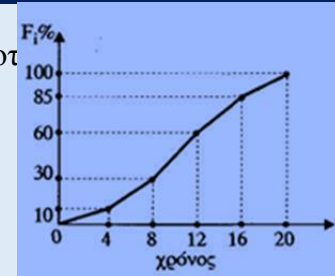
γ) Να βρείτε τη μέση τιμή των χρημάτων που πλήρωσαν οι 40 πελάτες.

- δ) Να βρείτε τη διακύμανση της παραπάνω κατανομής  
 ε) Να βρείτε τη διάμεσο.

**151.**

Σε ένα δείγμα ανέργων για το χρόνο σε εβδομάδες που είναι άνεργοι προέκυψε το διπλανό πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων

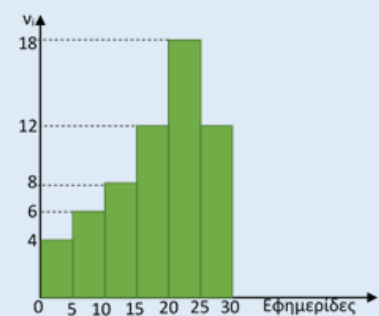
- α) τη διάμεσο.  
 β) την μέση τιμή.  
 γ) την τυπική απόκλιση.  
 δ) τον συντελεστή μεταβλητότητας.



**152.**

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται πόσες εφημερίδες διαβάζουν το μήνα τα άτομα που ρωτήθηκαν;

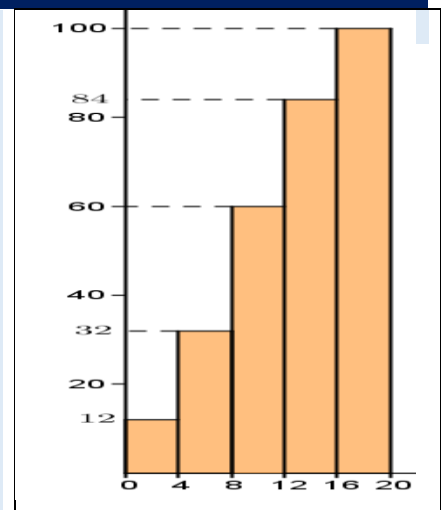
- α) Πόσα άτομα ρωτήθηκαν;  
 β) Πόσοι διαβάζουν από 20 εφημερίδες και πάνω το μήνα;  
 γ) Να γίνει ο πίνακας συχνοτήτων και να υπολογιστεί η μέση τιμή και η διακύμανση.



**153.**

Το διπλανό ιστόγραμμα αθροιστικών συχνοτήτων  $F_i\%$  δίνει τη βαθμολογία  $n$  μαθητών στο μάθημα της ιστορίας. Το πλήθος των μαθητών που η βαθμολογία τους είναι στην κλάση  $[8,12)$  είναι 7 και ότι κανένας μαθητής δεν βαθμολογήθηκε με 20.

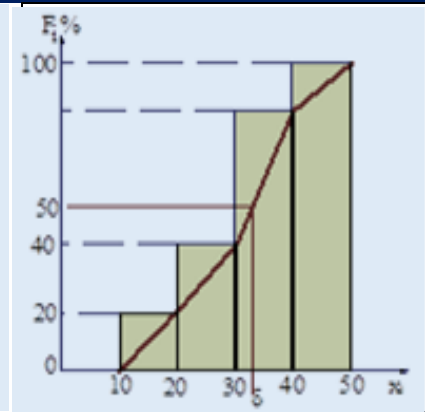
- α) Να κατασκευασθεί πίνακας με στήλες  $x_i$ ,  $v_i$ ,  $N_i$ ,  $f_i\%$ ,  $F_i\%$ ,  $x_i v_i$   
 β) Να υπολογίσετε τη μέση βαθμολογία  
 γ) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διακύμανση των κεντρικών τιμών  $x_i$   
 δ) Να εξετάσετε την ομοιογένεια του δείγματος των κεντρικών τιμών



### 154.

Στο διπλανό ιστόγραμμα σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων  $F_i\%$ , η διάμεσος  $\delta$  είναι ίση με 32 και το μέγεθος του δείγματος είναι ίσο με 20.

- Να υπολογίσετε την σχετική αθροιστική συχνότητα της κλάσης  $[30,40)$
- Να γίνει πίνακας συχνοτήτων με στήλες  $x_i, v_i, N_i, f_i\%, F_i\%, x_i v_i$
- Να κατασκευάσετε ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων και το πολύγωνο.
- Να υπολογίσετε τη μέση τιμή, τη διασπορά και την τυπική απόκλιση.
- Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές



### 155.

Ο παρακάτω πίνακας αναφέρεται στις τιμές μιας μεταβλητής  $X$ , που έχουν ομαδοποιηθεί σε επτά κλάσεις ίσου πλάτους.

| Κλάσεις         | $x_i$ | $v_i$ | $f_i$ | $N_i$ | $F_i$ |
|-----------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $[-\dots-)$     |       | 12    |       |       |       |
| $[5-\dots)$     |       |       | 0,18  |       |       |
| $[\dots-\dots)$ |       | 15    |       |       |       |
| $[\dots-\dots)$ |       | 10    |       | 55    |       |
| $[\dots-\dots)$ | 12    |       |       |       | 0,75  |
| $[\dots-\dots)$ |       |       |       | 83    |       |
| $[\dots-\dots)$ |       |       |       |       |       |
| Σύνολο          |       |       |       |       |       |

- Να αποδείξετε ότι το πλάτος κάθε κλάσης είναι ίσο με 2.
- Να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα,
- Να εξετάσετε αν το δείγμα των παραπάνω παρατηρήσεων είναι ομοιογενές,
- Να βρείτε τη διάμεσο.
- Να βρείτε το πλήθος των παρατηρήσεων που έχουν τιμή τουλάχιστον ίση με 12.

### 156.

α) Αν  $x_i$ , με  $i = 1, \dots, v$ , είναι οι τιμές μιας μεταβλητής  $X$ ,  $f_i$ , με  $i = 1, \dots, v$ , είναι οι αντίστοιχες σχετικές συχνότητες και  $\bar{x}$  η μέση τιμή τους, να αποδείξετε ότι η διακύμανσή τους δίνεται από τη σχέση  $s^2 = \sum_{i=1}^v x_i^2 f_i - \bar{x}^2$ .

β) Δίνεται ο παρακάτω πίνακας:

| Κλάσεις   | $x_i$ | $f_i$ | $F_i$ | $F_i\%$ |
|-----------|-------|-------|-------|---------|
| $[1-7)$   |       |       |       |         |
| $[7-13)$  |       | 0,3   |       |         |
| $[13-19)$ |       |       |       |         |
| $[19-25)$ |       | 0,1   |       |         |
| Σύνολο    |       |       |       |         |

Αν γνωρίζετε ότι η σχετική συχνότητα  $f_i$  είναι διπλάσια από τη σχετική συχνότητα  $f_3$

- να συμπληρώσετε τον προηγούμενο πίνακα
- να βρείτε τη μέση τιμή
- να βρείτε τη διακύμανση,
- να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές
- να βρείτε τη διάμεσο,

## Ασκήσεις στη σχέση $s^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2$

**157.**

Η μέση τιμή των βαθμών που πήραν οι 25 μαθητές της Γ' τάξης ενός Λυκείου στα Μαθηματικά είναι 14, ενώ η μέση τιμή των βαθμών των 10 μαθητών που παρουσίασαν τη μικρότερη βαθμολογία είναι 11.

α) Να βρείτε τη μέση τιμή της βαθμολογίας των 15 υπόλοιπων μαθητών.

β) Αν το άθροισμα των τετραγώνων των βαθμών των 25 αυτών μαθητών είναι 5000, να βρείτε το συντελεστή μεταβολής (CV).

**158.**

Η μέση τιμή και η διακύμανση 6 αριθμών είναι  $\bar{x} = 5$  και  $s^2 = 10$  αντίστοιχα. Αν για τις 5 πρώτες τιμές ισχύει  $\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 = 51$ , να βρεθεί η έκτη τιμή.

**159.**

Η μέση τιμή και η διακύμανση των 20 τιμών ενός δείγματος είναι  $\bar{x} = 6$  και  $s^2 = 4$ , αντίστοιχα. Εάν για τις δεκαεννέα τιμές ισχύει  $\sum_{i=1}^{19} (x_i - \bar{x})^2 = 79$ , να βρείτε την εικοστή τιμή.

**160.**

Η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση των 10 τιμών ενός δείγματος είναι  $\bar{x} = 10$  και  $s = 2$  αντίστοιχα. Εάν για τις εννέα τιμές ισχύει  $\sum_{i=1}^9 x_i^2 = 871$  να βρείτε την δέκατη τιμή.

**161.**

Από ένα δείγμα 100 τουριστών βρέθηκε ότι ο μέσος χρόνος παραμονής τους στην Ελλάδα ήταν 15 ημέρες. Αν  $\sum_{i=1}^{100} x_i^2 \nu_i = 27400$ , να βρεθεί η τυπική απόκλιση και ο συντελεστής μεταβολής.

**162.**

Οι παρατηρήσεις  $t_1, t_2, \dots, t_n$  έχουν διακύμανση  $s^2 = 9$  και συντελεστή μεταβολής  $CV = 75\%$ .

Επίσης ισχύει ότι  $\sum_{i=1}^n t_i^2 = 2500$ . Να βρείτε:

α) τη μέση τιμή των παρατηρήσεων,

β) το πλήθος  $n$  των παρατηρήσεων,

γ) το άθροισμα  $\sum_{i=1}^{100} (t_i - 4)^2$

**163.**

Δίνονται οι παρατηρήσεις  $t_1, t_2, \dots, t_{50}$  για τις οποίες ισχύουν:  $\sum_{i=1}^{50} t_i = 400$  και  $\sum_{i=1}^{50} (t_i - 8)^2 = 800$

Να βρείτε:

ι) τον συντελεστή μεταβολής των παρατηρήσεων,

ii) το άθροισμα  $\sum_{i=1}^{50} t_i^2$

**164.**

Δίνονται τα επόμενα δείγματα παρατηρήσεων:

A: 3, 5, 6, 7, 9

B:  $t_1, t_2, \dots, t_{100}$

Ισχύει ότι  $\sum_{i=1}^{100} t_i^2 = 9000$  και τα δείγματα A και B έχουν τον ίδιο συντελεστή μεταβολής. Να βρείτε:

α) τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση του δείγματος A,

β) τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση του δείγματος B,

γ) το άθροισμα  $\sum_{i=1}^{100} (t_i^2 - 18t_i + 81)$

**165.**

Δίνονται 10 θετικές παρατηρήσεις  $t_1, t_2, \dots, t_{10}$ , με  $\sum_{i=1}^{10} t_i^2 = 1000$ , οι οποίες έχουν συντελεστή μεταβολής  $CV = 75\%$ .

α) Να βρείτε τη διακύμανση και τη μέση τιμή παρατηρήσεων,

β) Αν για τις 9 παρατηρήσεις ισχύει ότι:  $\sum_{i=1}^9 (t_i^2 - 16t_i + 64) = 279$  να βρείτε τη 10η παρατήρηση.

**166.**

Οι παρατηρήσεις  $t_1, t_2, \dots, t_9$  έχουν τιμή  $\bar{x} = 6$  και διακύμανση  $s^2 = 4$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $\sum_{i=1}^9 t_i^2 = 360$

β) Να βρείτε τον συντελεστή μεταβολής των παρατηρήσεων  $t_1, t_2, \dots, t_9, 9$ .

Δίνεται ότι  $\sqrt{4,41} = 2,1$

**167.**

Θεωρούμε δύο δείγματα A και B με παρατηρήσεις:

Δείγμα A: 12, 18,  $t_3, t_4, \dots, t_{25}$

Δείγμα B: 16, 14,  $t_3, t_4, \dots, t_{25}$ .

Δίνεται ότι  $t_3 + t_4 + \dots + t_{25} = 345$ .

α) Να αποδείξετε ότι οι μέσες τιμές  $\bar{x}_A$  και  $\bar{x}_B$  των δύο δειγμάτων A και B αντίστοιχα είναι  $\bar{x}_A = \bar{x}_B = 15$ .

β) Αν  $s_A^2$  είναι η διακύμανση του δείγματος A και  $s_B^2$  είναι η διακύμανση του δείγματος B, να αποδείξετε ότι  $s_A^2 - s_B^2 = \frac{16}{25}$ .

γ) Αν ο συντελεστής μεταβολής του δείγματος A είναι ίσος με  $CV_A = \frac{1}{15}$ , να βρείτε τον συντελεστή μεταβολής  $CV_B$  του δείγματος B.

**168.**

Δίνονται οι παρατηρήσεις  $t_1, t_2, \dots, t_{100}$  μιας μεταβλητής X. Οι πρώτες 25 παρατηρήσεις έχουν μέση τιμή  $\bar{x}_1 = 2$  και τυπική απόκλιση  $s_1 = 2$  ενώ οι υπόλοιπες 75 παρατηρήσεις έχουν μέση τιμή  $\bar{x}_2 = 10$  και τυπική απόκλιση  $s_2 = 4$ . Να βρείτε τη μέση τιμή  $\bar{x}$  και την τυπική απόκλιση  $s$  του συνόλου των 100 παρατηρήσεων.

**169.**

Έστω η συνάρτηση  $f(x) = (x-3)^2$  και τα σημεία  $A_1(x_1, f(x_1)), A_2(x_2, f(x_2)), \dots, A_{10}(x_{10}, f(x_{10}))$ . Αν οι τετμημένες των σημείων  $A_1, A_2, \dots, A_{10}$  έχουν μέση τιμή 3 και τυπική απόκλιση  $s = 2$  να βρείτε την μέση τιμή  $y$  των τεταγμένων τους.

**170.**

Έστω η συνάρτηση  $f(x) = x^2$  και τα σημεία  $A_1(x_1, f(x_1)), A_2(x_2, f(x_2)), \dots, A_{12}(x_{12}, f(x_{12}))$ . Αν οι τετμημένες των σημείων  $A_1, A_2, \dots, A_{12}$  έχουν μέση τιμή 0 και τυπική απόκλιση 3 να βρείτε τη μέση τιμή των τεταγμένων τους.

**171.**

Οι παρατηρήσεις  $t_1, t_2, \dots, t_n$  ενός δείγματος μεγέθους  $n$  έχουν τυπική απόκλιση 2. Αν η καμπύλη της συνάρτησης  $f(x) = (t_1 - x)^2 + (t_2 - x)^2 + \dots + (t_n - x)^2$  διέρχεται από το σημείο  $(\bar{x}, 40)$ , να βρείτε τον  $n$ .

**172.**

Ένα σύρμα μήκους  $\ell = 40$  cm κόβεται σε δέκα κομμάτια με μήκη  $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{10}$ . Αν  $\sum_{i=1}^{10} (\ell_i - 2)^2 = 90$  να βρείτε τον συντελεστή μεταβολής των  $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{10}$ .

**173.**

Οι παρατηρήσεις  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ενός δείγματος μεγέθους  $n$  έχουν μέση τιμή  $\bar{x} = -8$  και συντελεστή μεταβλητότητας  $CV = 25\%$ . Αν  $\sum_{i=1}^n (x_i + 8)^2 = 40$  να βρείτε το μέγεθος του δείγματος.

**174.**

Έστω ότι η μέση τιμή ενός δείγματος πέντε παρατηρήσεων  $x_1, x_2, \dots, x_5$  είναι  $\bar{x} = -2$ ,  $\sum_{i=1}^4 (x_i + 2)^2 = 10$  και  $x_5 = 18$ . Να δείξετε ότι το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

**175.**

Οι βαθμοί των μαθητών του Α1 σε ένα διαγώνισμα έχουν μέση τιμή 12 και συντελεστή μεταβολής 25%. Αν  $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 3060$  πόσοι είναι οι μαθητές του Α1 ;

**176.**

Θεωρούμε τα εξής δείγματα:

Δείγμα Α:  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , Δείγμα Β:  $y_1, y_2, \dots, y_\mu$ , Δείγμα Γ:  $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_\mu$

Τα δείγματα Α και Β έχουν την ίδια μέση τιμή  $\bar{x}$  και διακυμάνσεις  $s_A^2$  και  $s_B^2$  αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι το δείγμα Γ έχει διακύμανση:  $s_\Gamma^2 = \frac{ns_A^2 + \mu s_B^2}{n + \mu}$

β) Αν επιπλέον ισχύουν:

$$s_A^2 = 4, s_B^2 = 25, \sum_{i=1}^n x_i^2 = 48120, CV_B - CV_A = 7,5\% \text{ και } CV_\Gamma = 10\%, \text{ όπου } CV_A, CV_B \text{ και } CV_\Gamma \text{ οι συντελεστές μεταβολής των δειγμάτων Α, Β και Γ αντίστοιχα, τότε:}$$

CV<sub>Γ</sub> οι συντελεστές μεταβολής των δειγμάτων Α, Β και Γ αντίστοιχα, τότε:

i) να αποδείξετε ότι  $\bar{x} = 40$ ,

ii) να βρείτε τους αριθμούς  $\mu$  και  $n$ .

177.

Δίνεται ο διπλανός πίνακας σχετικών συχνοτήτων μιας μεταβλητής  $X$  της οποίας οι τιμές είναι ομαδοποιημένες σε 4 κλάσεις ίσου πλάτους. Αν  $\bar{x} = 4$ , τότε:

- να βρείτε το πλάτος  $c$  των κλάσεων καθώς και τα όρια των κλάσεων.
- να βρείτε τη διάμεσο και την τυπική απόκλιση, αν  $\sqrt{4,2} \approx 2,05$ .
- να αποδείξετε ότι το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.
- να βρείτε την ελάχιστη τιμή του φυσικού αριθμού  $a$  που πρέπει να προστεθεί στις τιμές ώστε το δείγμα να γίνει ομοιογενές.

| $[-)$ | $f_i$ |
|-------|-------|
| 0-    | 0,2   |
|       | 0,3   |
|       | 0,3   |
|       | 0,2   |

178.

Για δύο τύπους μπαταριών A και B επιλέχθηκαν δύο δείγματα μεγέθους 5 το καθένα. Οι χρόνοι ζωής των μπαταριών για το κάθε δείγμα (σε χιλιάδες ώρες) δίνονται στον διπλανό πίνακα:

- Να βρείτε τη μέση διάρκεια ζωής μιας μπαταρίας τύπου A και μιας μπαταρίας τύπου B.
- Αν μια μπαταρία τύπου A στοιχίζει 38 ευρώ και μια μπαταρία τύπου B στοιχίζει 40 ευρώ, ποιον τύπο μπαταρίας συμφέρει να αγοράσετε; (Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας).
- Να βρείτε τις τυπικές αποκλίσεις  $S_A$  και  $S_B$  της διάρκειας ζωής των δύο τύπων μπαταριών.
- Να βρείτε ποιος από τους δύο τύπους μπαταριών A και B παρουσιάζει τη μεγαλύτερη ομοιογένεια ως προς τη διάρκεια ζωής του.

| A  | B  |
|----|----|
| 20 | 26 |
| 26 | 32 |
| 24 | 19 |
| 22 | 20 |
| 18 | 23 |

Δίνεται ότι  $\sqrt{11} \approx 3,3$ .

179.

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο  $f(x) = x^3 - sx^2 + 2x + \bar{x}$ , όπου  $\bar{x}$  η μέση τιμή και  $s$  η τυπική απόκλιση ενός δείγματος  $n$  παρατηρήσεων μιας μεταβλητής  $X$ . Αν στο σημείο  $M(1, 5)$  της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  η εφαπτομένη σχηματίζει γωνία  $45^\circ$  με τον άξονα  $x'x$ :

- Να βρείτε τη μέση τιμή  $\bar{x}$  και την τυπική απόκλιση  $s$  του δείγματος.
- Αν  $\bar{x} = 4$  και  $s = 2$ , τότε:
  - Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.
  - Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της παραγώγου της συνάρτησης  $f$  στο  $x_0 = 1$ .

180.

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 4$

- Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο της  $M(3, f(3))$ .
- Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία,
- Θεωρούμε τις παρατηρήσεις:  $\alpha, \beta, 3, 4, 7$  όπου  $\alpha$  και  $\beta$  είναι οι θέσεις τοπικού μεγίστου και τοπικού ελάχιστου της  $f$ .
  - Να εξετάσετε αν το παραπάνω δείγμα των παρατηρήσεων είναι ομοιογενές.
  - Αν  $\bar{x}$  και  $s$  είναι η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση των παραπάνω παρατηρήσεων, να

βρείτε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f''(x)}{\sqrt{x + \bar{x} + s} - 3}$



**181.**

Δίνονται οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής  $X$ :  $\alpha, 30, 27, 21, \beta$  με  $\alpha < \beta$ . Ο συντελεστής μεταβολής των παρατηρήσεων αυτών είναι  $CV = 40\%$  και η τυπική τους απόκλιση είναι  $s = 8$ .

α) Να βρείτε τους αριθμούς  $\alpha$  και  $\beta$ .

β) Αν  $\delta$  είναι η διάμεσος των παρατηρήσεων θεωρούμε τη συνάρτηση:  $f(x) = x^3 - ax^2 - \delta x + 45$

i) Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii) Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{f(x)}{f''(x) + 36}$

**182.**

Δίνονται οι παρακάτω παρατηρήσεις  $0, 2, 1, 3, 1, 5, x$

α) Να αποδείξετε ότι η διακύμανση των παραπάνω παρατηρήσεων είναι:  $s^2 = \frac{6x^2 - 24x + 136}{49}$

β) Να βρείτε την τιμή του  $x$ , ώστε οι παραπάνω παρατηρήσεις να έχουν την ελάχιστη διακύμανση.

γ) Για  $x = 2$ , στις αρχικές 7 παρατηρήσεις προστίθεται άλλη μία και η μέση τιμή των 8 παρατηρήσεων γίνεται ίση με 3. Να βρείτε:

i) την 8η παρατήρηση,

ii) την τυπική απόκλιση των 8 παρατηρήσεων

**183.**

Δίνονται οι παρατηρήσεις  $t_1, t_2, \dots, t_n$ , μιας μεταβλητής  $X$ , οι οποίες έχουν διακύμανση  $s^2 = 16$  και έστω  $\bar{x}$  η μέση τιμή τους. Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση:

$f(x) = (t_1 - x)^3 + (t_2 - x)^3 + \dots + (t_n - x)^3$  για την οποία ισχύει ότι  $f'(\bar{x}) = -960$ .

α) Να βρείτε το πλήθος  $n$  των παρατηρήσεων

β) Αν επιπλέον ισχύει ότι  $f''(0) = 960$ , να βρείτε :

i) τον συντελεστή μεταβολής των παρατηρήσεων  $t_1, t_2, \dots, t_n$ ,

ii) τον συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο της  $M(0, f(0))$ .

## Η μεταβλητή $Y = aX + b$

**184.**

Ένας φοιτητής θέλει να παραγγείλει 5 βιβλία, των οποίων οι τιμές (σε €) είναι: 9, 12, 13, 5, 15, 18

α) Να βρείτε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση των παραπάνω τιμών.

β) Τα έξοδα αποστολής για κάθε βιβλίο είναι 1,5 €. Να βρείτε τον συντελεστή μεταβολής των τιμών που προκύπτουν.

**185.**

Οι τιμές 6 προϊόντων (σε €) είναι: 5, 7, 7, 8, 10, 11

α) Να βρείτε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση των παραπάνω τιμών.

β) Σε καθένα από αυτά τα προϊόντα γίνεται έκπτωση 20%. Να βρείτε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση των τιμών μετά την έκπτωση.

**186.**

Σε μια κάβα υπάρχουν 12 βαρέλια κρασί από διαφορετικούς προμηθευτές περιέχουν 5, 8, 12, 14, 16, 6, 14, 6, 16, 11, 13, 14 λίτρα αντίστοιχα.

α) Ποια είναι η μέση τιμή, η διάμεσος

β) Αν στο κάθε βαρέλι προστεθεί 20% του αρχικού του όγκου, πώς θα μεταβληθούν οι τιμές του ερωτήματος (α).

**187.**

Δίνονται οι αριθμοί: 7, 5, 2, 1, 5, 10

- α) Να βρείτε το εύρος των τιμών.
- β) Να βρείτε τη διάμεσο των τιμών.
- γ) Να βρείτε τη μέση τιμή των τιμών
- δ) Να αποδείξετε ότι το δείγμα δεν είναι ομοιογενές
- ε) Να βρείτε τον μικρότερο αριθμό  $c > 0$  που πρέπει να προσθέσουμε σε καθέναν από τους προηγούμενους αριθμούς, ώστε το δείγμα των αριθμών που θα προκύψουν να είναι ομοιογενές.

**188.**

Οι ηλικίες 6 παιδιών είναι: 3, 3, 8,  $\alpha$ ,  $\alpha + 2$ , 14 και έχουν μέση τιμή  $\bar{x} = 8$  έτη.

- α) Να αποδείξετε ότι  $\alpha = 9$ .
- β) Να αποδείξετε ότι το δείγμα των ηλικιών δεν είναι ομοιογενές.
- γ) Να βρείτε μετά από πόσα χρόνια τουλάχιστον το δείγμα των ηλικιών των παιδιών θα γίνει ομοιογενές.

**189.**

Ένα προϊόν πωλείται σε 10 διαφορετικά καταστήματα στις παρακάτω τιμές, σε Ευρώ:  
8, 10, 13, 13, 15, 16, 18, 14, 14, 9.

- α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή, τη διάμεσο και την επικρατούσα τιμή.
- β) Να υπολογίσετε το εύρος, την τυπική απόκλιση και τον συντελεστή μεταβολής.
- γ) Αν οι τιμές του προϊόντος σε όλα τα καταστήματα υποστούν έκπτωση 10%, να εξετάσετε αν θα μεταβληθεί ο συντελεστής μεταβολής.

**190.**

Έστω ότι ένα σύνολο παρατηρήσεων  $x_i$  έχει μέση τιμή  $\bar{x} = 3$ , διάμεσο  $\delta_x = 4$  και τυπική απόκλιση  $s_x = 2$ . Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

|            | $y_i = x_i + 1$ | $y_i = -2x_i$ | $y_i = -2x_i + 1$ |
|------------|-----------------|---------------|-------------------|
| $\bar{y}$  |                 |               |                   |
| $\delta_y$ |                 |               |                   |
| $s_y$      |                 |               |                   |
| $CV_y$     |                 |               |                   |

**191.**

Έστω  $x_1, x_2, \dots, x_n$  οι παρατηρήσεις ενός δείγματος που έχουν μέση τιμή 3 και διασπορά 4. Να βρείτε τον συντελεστή μεταβλητότητας των παρατηρήσεων  $y_1, y_2, \dots, y_n$  που προκύπτουν από τις  $x_1, x_2, \dots, x_n$  αφού:

- α) προσθέσουμε σε καθεμία το 1.
- β) πολλαπλασιάσουμε καθεμία με το -2.
- γ) αυξήσουμε καθεμία κατά 10%.
- δ) ελαττώσουμε καθεμία κατά 20% και μετά προσθέσουμε σε καθεμία το 1,6.

**192.**

Έστω η ευθεία  $\varepsilon : y = -3x + 2$  και τα σημεία της  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_9$  με τετμημένες  $x_1, x_2, \dots, x_9$  που έχουν μέση τιμή -8 και τυπική απόκλιση 2. Να βρείτε τον συντελεστή μεταβολής των τεταγμένων των σημείων  $A_1, A_2, \dots, A_9$ .

**193.**

Έστω  $x_1, x_2, \dots, x_n$  οι παρατηρήσεις ενός δείγματος που έχουν μέση τιμή και διακύμανση 4. Να βρείτε πόσες μονάδες πρέπει να αυξήσουμε καθεμία από τις παρατηρήσεις τουλάχιστον ώστε το δείγμα να είναι ομοιογενές.

**194.**

Έστω η παραβολή  $C: y = x^2 - 4x + 3$  και τα σημεία της  $A_1, A_2, \dots, A_{10}$  με τετμημένες  $x_1, x_2, \dots, x_{10}$  που έχουν μέση τιμή και τυπική απόκλιση 2. Να βρείτε τη μέση τιμή των τεταγμένων των παραπάνω σημείων.

**195.**

Μια τάξη έχει μέση τιμή ηλικίας των μαθητών 14 χρόνια και τυπική απόκλιση 3 μήνες. Να βρείτε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση της ηλικίας των μαθητών ύστερα από 3 χρόνια.

**196.**

Η μέση τιμή των μέγιστων θερμοκρασιών σε μια πόλη τον Μάιο ήταν  $20^\circ \text{C}$  και η διασπορά 4. Αν η σχέση που συνδέει τους βαθμούς Fahrenheit με τους βαθμούς Celsius είναι  $F = 1,8C + 32$  να υπολογίσετε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση σε βαθμούς Fahrenheit.

**197.**

Σε ένα εργοστάσιο σε ένα δείγμα εργαζομένων στο τμήμα Α έχουν μέσο (μηνιαίο) μισθό 950 € και τυπική απόκλιση 100 € ενώ στο τμήμα Β έχουν μέσο (μηνιαίο) μισθό 1080 € και τυπική απόκλιση 120 €. Έστω ότι οι εργαζόμενοι πάρουν αύξηση στο τμήμα Α, 50 € και στο τμήμα Β, 5% (μηνιαίως). Στους νέους μισθούς να εξετάσετε ποιο από τα δύο δείγματα μισθών:

- α) έχει μεγαλύτερη ομοιογένεια.
- β) είναι ομοιογενές.

**198.**

Ένας δάσκαλος σε ένα βιβλιοπωλείο επέλεξε βιβλία με αναγραφόμενες τιμές σε ευρώ όπως φαίνεται στο διπλανό πίνακα.

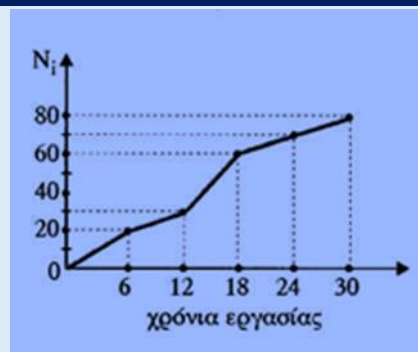
| Τιμή | Βιβλία |
|------|--------|
| 10   | 2      |
| 15   | 3      |
| 17   | 5      |

- α) Ποια είναι η μέση, η διάμεση, η τυπική απόκλιση και το εύρος των τιμών των βιβλίων.
- β) Αν το βιβλιοπωλείο του κάνει έκπτωση 10% στην αναγραφόμενη τιμή και αυτά τα βιβλία τα δωρίσει σε φίλους όπου τα έξοδα αποστολής είναι 2 € το κάθε βιβλίο, να βρείτε τον συντελεστή μεταβλητότητας.

**199.**

Τα χρόνια εργασίας ενός δείγματος εργαζομένων σε ένα εργοστάσιο σχηματίζουν το διπλανό πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων. Να βρείτε:

- α) την διάμεσο.
- β) την μέση τιμή χρόνια εργασίας
- γ) την τυπική απόκλιση.
- δ) τον συντελεστή μεταβολής μετά από 5 χρόνια.



**200.**

Η μέση τιμή και ο συντελεστής μεταβολής των 10 τιμών ενός δείγματος είναι  $\bar{x} = 80$  και  $CV = 25\%$  αντίστοιχα. Εάν, για τις εννέα τιμές ισχύει  $\sum_{i=1}^9 (x_i - \bar{x})^2 = 3975$  να βρείτε:

- την δέκατη τιμή.
- πόσες μονάδες τουλάχιστον πρέπει να αυξηθούν οι τιμές του δείγματος ώστε να γίνει ομοιογενές.

### 201.

Αν  $\bar{x}$  και  $s$  είναι η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση των  $n$  παρατηρήσεων  $x_1, x_2, \dots, x_n$  να αποδείξετε ότι η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων  $\frac{x_1 - \bar{x}}{s}, \frac{x_2 - \bar{x}}{s}, \dots, \frac{x_n - \bar{x}}{s}$  είναι 0 και 1 αντίστοιχα.

### 202.

Ένα σύρμα μήκους  $\ell = 50$  m το κόβουμε σε 5 κομμάτια με μήκη  $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, \ell_5$  τα οποία έχουν διασπορά  $4 \text{ m}^2$ . Με τα 5 σύρματα κατασκευάζουμε τετράγωνα. Αν το άθροισμα των εμβαδών των τεσσάρων τετραγώνων είναι  $\frac{55}{2} \text{ m}^2$  να βρείτε το μήκος της πλευράς του 5ου τετραγώνου.

### 203.

Στον πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζεται η χρηματική παροχή από τους γονείς, σε Ευρώ, δείγματος έξι μαθητών της πρώτης τάξης (ομάδα Α) και έξι μαθητών της δεύτερης τάξης (ομάδα Β) ενός Γυμνασίου.

| Ομάδα Α | Ομάδα Β |
|---------|---------|
| 1       | 7       |
| 8       | 14      |
| 9       | 6       |
| 5       | 4       |
| 3       | 12      |
| 4       | 5       |

- Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των παρατηρήσεων κάθε ομάδας.
- Να συγκρίνετε μεταξύ τους ως προς την ομοιογένεια τις δύο ομάδες.
- Αν σε κάθε παρατήρηση της ομάδας Α γίνει αύξηση 20% και οι παρατηρήσεις της ομάδας Β αυξηθούν κατά 5 Ευρώ η κάθε μία, πώς διαμορφώνονται οι νέες μέσες τιμές των δύο ομάδων;
- Να συγκρίνετε μεταξύ τους ως προς την ομοιογένεια τις δύο ομάδες με τα νέα δεδομένα.

### 204.

Δίνονται οι αριθμοί:  $x_1 = \lambda, x_2 = \lambda + 1, x_3 = 5, x_4 = 6, x_5 = 0, x_6 = 2$  οι οποίοι έχουν μέση τιμή 3.

- Να αποδείξετε ότι  $\lambda = 2$ .
- Να βρείτε την τυπική απόκλιση των τιμών  $x_i$ .
- Θεωρούμε τους αριθμούς  $y_i = ax_i + b$ , με  $i = 1, 2, \dots, 6$ . Να βρείτε τις τιμές των  $a, b > 0$ , ώστε οι αριθμοί  $y_i$  να έχουν μέση τιμή 20 και συντελεστή μεταβολής 40%.

**205.**

Θεωρούμε το δείγμα  $x_1, x_2, \dots, x_n$  για το οποίο ισχύει ότι  $\bar{x} = 6$  και  $\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 450$

- α) Να βρείτε τον συντελεστή μεταβολής του παραπάνω δείγματος.  
β) Να βρείτε ποιον αριθμό  $c$  πρέπει να προσθέσουμε σε καθεμία από τις τιμές  $x_i$ , με  $i = 1, 2, \dots, 9$  ώστε ο συντελεστής μεταβολής των τιμών που θα προκύψουν να είναι 15%.

**206.**

Θεωρούμε τους  $n$  πρώτους όρους αριθμητικής προόδου (α $n$ ), με  $a_1 = 4$  και διαφορά  $\omega = 2$ , οι οποίοι έχουν μέση τιμή  $\bar{x} = 10$ .

- α) Να αποδείξετε ότι  $n = 7$ .  
β) Να βρείτε τον συντελεστή μεταβολής των παραπάνω 7 όρων της αριθμητικής προόδου,  
γ) Να βρείτε τον μικρότερο θετικό αριθμό  $c$  που πρέπει να προσθέσουμε σε καθέναν από τους 7 όρους της αριθμητικής προόδου, ώστε το δείγμα των αριθμών που θα προκύψουν να είναι ομοιογενές.

**207.**

Δίνονται οι παρατηρήσεις  $x_1, x_2, \dots, x_n$  οι οποίες έχουν μέση τιμή  $\bar{x} = 1$ . Επίσης θεωρούμε τις παρατηρήσεις:  $y_i = 2x_i - 4$  και  $z_i = -\frac{1}{2}x_i + \frac{1}{4}$  με  $i = 1, 2, \dots, n$  για τις οποίες ισχύουν:

$CV_y + CV_z = 0,3$ . Να βρείτε τους συντελεστές μεταβολής  $CV_x$ ,  $CV_y$  και  $CV_z$ .

**208.**

Δίνονται οι παρατηρήσεις  $x_1, x_2, \dots, x_n$  με μέση τιμή  $\bar{x} > 0$  και τυπική απόκλιση  $s_x \neq 0$ .

Θεωρούμε και τις παρατηρήσεις:  $y_i = \frac{4x_i - 2\bar{x}}{s_x}$ , με  $i = 1, 2, \dots, n$ . Να βρείτε τον λόγο  $\frac{CV_y}{CV_x}$ .

**209.**

Δίνονται οι παρατηρήσεις  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , οι οποίες έχουν μέση τιμή  $\bar{x} = 8$  και διακύμανση  $s^2 = 4$ . Θεωρούμε και τις παρατηρήσεις:  $y_i = ax_i + 6$ , με  $i = 1, 2, \dots, n$  όπου  $a > 0$ , οι οποίες έχουν συντελεστή μεταβολής  $CV_y = 20\%$ .

- α) Να αποδείξετε ότι  $a = 3$ .

- β) Αν επιπλέον ισχύει  $\sum_{i=1}^n x_i = 160$ , να βρείτε το άθροισμα  $\sum_{i=1}^n y_i^2$

**210.**

Σε ένα δείγμα  $n$  παρατηρήσεων  $x_1, x_2, \dots, x_n$  μιας μεταβλητής  $X$  είναι  $\bar{x} = 8$  και  $s_x^2 = 4$ .

- α) Αν  $y_1, y_2, \dots, y_n$  είναι το δείγμα των παρατηρήσεων που προκύπτουν αντίστοιχα από τις  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , όταν καθεμία αυξηθεί κατά 10%,  
i) να εξετάσετε αν το δείγμα  $y_1, y_2, \dots, y_n$  ομοιογενές,  
ii) να συγκρίνετε μεταξύ τους τα δύο δείγματα ως προς την ομοιογένεια.

- β) Αν  $z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{s_x}$  για κάθε  $i = 1, 2, \dots, n$ :

- i) να βρείτε τη μέση τιμή  $\bar{z}$  και την τυπική απόκλιση  $s_z$  των  $z_1, z_2, \dots, z_n$ ,  
ii) να εξετάσετε αν ορίζεται ο συντελεστής μεταβολής (CV) των  $z_1, z_2, \dots, z_n$ .

**211.**

Οι μηνιαίοι μισθοί των υπαλλήλων μιας Αμερικανικής εταιρείας έχουν μέση τιμή  $\bar{x}_A = 1.000$  δολάρια και τυπική απόκλιση  $s_A = 125$  δολάρια.

Οι μισθοί των υπαλλήλων μιας Ευρωπαϊκής εταιρείας έχουν μέση τιμή  $\bar{x}_E = 800$  ευρώ και τυπική απόκλιση  $s_E = 90$  ευρώ.

- Να βρείτε ποια από τις δύο εταιρείες έχει μεγαλύτερη ομοιογένεια μισθών.
- Η Αμερικανική εταιρεία αποφασίζει να αυξήσει το μηνιαίο μισθό κάθε υπαλλήλου κατά 250 δολάρια. Επίσης η Ευρωπαϊκή εταιρεία αποφασίζει να αυξήσει το μηνιαίο μισθό κάθε υπαλλήλου κατά 20%. Να βρείτε τη νέα μέση τιμή και τη νέα τυπική απόκλιση των μηνιαίων μισθών και για τις δύο εταιρείες.
- Ποια από τις δύο εταιρείες έχει μεγαλύτερη ομοιογένεια των μηνιαίων μισθών μετά τις αυξήσεις;

**212.**

Στις 12 το μεσημέρι, η θερμοκρασία (σε βαθμούς Κελσίου) δύο πόλεων Α και Β, το τελευταίο δεκαήμερο του Μαρτίου, ήταν :

Πόλη Α: 20 18 20 17 18 17 16 17 16 10

Πόλη Β: 18 16 17 15 16 12 16 17 20 22

- Να βρείτε τη μέση, τη διάμεσο και την επικρατούσα θερμοκρασία των πόλεων Α και Β.
- Αν η τυπική απόκλιση των θερμοκρασιών (σε βαθμούς Κελσίου) των πόλεων Α και Β είναι  $s_A = 2,66$  και  $s_B = 2,59$  αντίστοιχα, να δικαιολογήσετε σε ποια από τις δύο πόλεις οι τιμές της θερμοκρασίας έχουν μεγαλύτερη διασπορά.
- Εκ των υστέρων διαπιστώθηκε ότι το θερμόμετρο που χρησιμοποιήθηκε για τη μέτρηση της θερμοκρασίας στην πόλη Α παρουσίαζε, λόγω κατασκευαστικού λάθους, αυξημένη θερμοκρασία κατά 5 βαθμούς. Αφού υπολογίσετε τις σωστές θερμοκρασίες της πόλης Α, να βρείτε σε ποια από τις δύο πόλεις Α και Β οι τιμές της θερμοκρασίας έχουν μεγαλύτερη ομοιογένεια. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

**213.**

Θεωρούμε το δείγμα  $x_1, x_2, \dots, x_n$  το οποίο έχει τυπική απόκλιση  $s_x = 4$ . Επίσης γνωρίζουμε ότι τα δείγματα Α και Β των αριθμών που προκύπτουν αντίστοιχα:

- αν αυξήσουμε τις τιμές  $x_i$  κατά 2,
- αν αυξήσουμε τις τιμές  $x_i$  κατά 20%, έχουν την ίδια μέση τιμή.

α) Να βρείτε τον συντελεστή μεταβολής των τιμών  $x_i$ , με  $i=1, 2, \dots, n$

β) Αν επιπλέον ισχύει  $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 2320$ , να βρείτε τα αθροίσματα  $\sum_{i=1}^n x_i$  και  $\sum_{i=1}^n (x_i - 10)^2$ .

γ) Να βρείτε τη μικρότερη τιμή του αριθμού  $c > 0$  που πρέπει να προσθέσουμε σε καθεμία από τις τιμές  $x_i$ , με  $i=1, 2, \dots, n$ , ώστε το δείγμα των αριθμών που θα προκύψουν να είναι ομοιογενές.

**Κανονική κατανομή****214.**

Μία εταιρία εμφιαλώνει μεταλλικό νερό από μία πηγή σε συσκευασία του 1 lt=1000 ml. Όμως όλα τα μπουκάλια δεν έχουν το ίδιο περιεχόμενο. Αν η διακύμανση είναι 16 και έχουμε περίπου κανονική κατανομή, να βρεθεί το ποσοστό των μπουκαλιών που περιέχουν όγκο νερού:

- Λιγότερο από 996 ml
- 992-1008 ml
- Περισσότερο από 1008 ml
- 996-1008 ml



**215.**

Μια κανονική κατανομή έχει μέση τιμή  $\bar{x} = 16$  και διακύμανση  $s^2 = 16$ . Να βρείτε το ποσοστό των παρατηρήσεων που ανήκουν στο διάστημα :

- α) (8,20)                      β) (16, 24)                      γ) (12, 28)

**216.**

Μια κανονική κατανομή έχει μέση τιμή  $\bar{x} = 40$  και συντελεστή μεταβολής  $CV = 25\%$ . Να βρείτε το ποσοστό % των παρατηρήσεων που είναι:

- α) κάτω από 30,    β) πάνω από 60,  
γ) τουλάχιστον ίσες με 70,    δ) το πολύ ίσες με 50.

**217.**

Οι βαθμοί που έγραψαν οι μαθητές μιας τάξης σε ένα διαγώνισμα είναι πάνω από 4, έχουν μέσο όρο 12 και τυπική απόκλιση 2. Υποθέτοντας ότι έχουμε περίπου κανονική κατανομή, να βρείτε κατά προσέγγιση το ποσοστό των μαθητών που έχει βαθμό:

- α) κάτω από 10    β) πάνω από 16    γ) από 8 έως 14  
δ) το πολύ 8    ε) τουλάχιστον 10.

**218.**

Η μέση τιμή μιας κανονικής κατανομής είναι 20 και η τυπική απόκλιση 4. Ποιο ποσοστό των παρατηρήσεων είναι:

- α) πάνω από 28    β) κάτω από 16    γ) μεταξύ 16 και 28  
iv) τουλάχιστον 12  
ε) το πολύ 12 ή τουλάχιστον 24.

**219.**

Η κατανομή συχνοτήτων των σωλήνων που παράγει μια μηχανή ως προς το μήκος τους είναι περίπου κανονική. Έστω ότι η διάμεσος των μηκών των σωλήνων είναι 3 m και το 2,5% των σωλήνων έχουν μήκος πάνω από 3,04 m.

- α) Να βρείτε:  
i) τη μέση τιμή, την τυπική απόκλιση, το εύρος και τον συντελεστή μεταβολής.  
ii) το ποσοστό των σωλήνων που έχουν μήκος από 2,96 m έως 3,02 m.  
β) Μια σωλήνα θεωρείται ελαττωματική όταν έχει μήκος μεγαλύτερο από 3,06 m ή μικρότερο από 2,94 m. Αν η μηχανή παράγει 4000 σωλήνες και οι 18 είναι ελαττωματικές να εξετάσετε αν η λειτουργία της μηχανής έχει βλάβη.

**220.**

Η κατανομή συχνοτήτων των δίσκων που παράγει μια μηχανή ως προς τη διάμετρο τους είναι περίπου κανονική. Έστω ότι η τυπική απόκλιση των δίσκων είναι 2 cm και ότι το 50% των δίσκων έχει διάμετρο 22 cm.

- α) Αν αγοράσουμε ένα τέτοιο δίσκο σε ποιο διάστημα είναι σχεδόν βέβαιο ότι θα βρίσκεται η διάμετρος του;  
β) Αν διαλέξουμε ένα τέτοιο δίσκο στην τύχη ποια πρέπει να είναι η διάμετρος του ώστε να ελέγξουμε τη λειτουργία της μηχανής για πιθανή βλάβη;

**221.**

Η βαθμολογία 200 μαθητών σε ένα διαγώνισμα είναι περίπου κανονική. Εκατό μαθητές έχουν βαθμό το πολύ 12 και 5 μαθητές τουλάχιστον 16.

- α) Να βρείτε πόσοι μαθητές έχουν βαθμό από 8 έως 16.  
β) Να εξετάσετε αν το δείγμα των βαθμών είναι ομοιογενές.

**222.**

Τα νούμερα των παπουτσιών 400 μαθητών ενός Λυκείου ακολουθούν περίπου την κανονική κατανομή. Δέκα μαθητές φοράνε παπούτσια με νούμερο τουλάχιστον 43 και 64 μαθητές το πολύ 37. Να βρείτε πόσοι μαθητές φοράνε παπούτσια με νούμερο από 37 έως 43.

**223.**

Οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής  $X$  ακολουθούν την κανονική κατανομή. Αν το 16% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες του 10 και το 50% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες του 12 να βρείτε τον συντελεστή μεταβλητότητας του δείγματος των παρατηρήσεων.

**224.**

Οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής  $X$  ακολουθούν την κανονική κατανομή. Αν το 2,5% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες του 30 και το 84% μεγαλύτερες του 15 να βρείτε το ποσοστό των παρατηρήσεων από 15 έως 35.

**225.**

Οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής  $X$  μεγέθους 800 ακολουθούν την κανονική κατανομή. Είκοσι παρατηρήσεις είναι μικρότερες του 18 και 128 μεγαλύτερες του 36.

α) Να βρείτε κατά προσέγγιση το εύρος του δείγματος.

β) Να εξετάσετε αν το δείγμα των παρατηρήσεων είναι ομοιογενές.

**226.**

Ο χρόνος αναμονής των πολιτών, μέχρι να εξυπηρετηθούν σε μια δημόσια υπηρεσία, ακολουθεί την κανονική κατανομή, με μέση τιμή 5 λεπτά και τυπική απόκλιση 1 λεπτό.

α) Να βρείτε πόσο είναι περίπου το ποσοστό των πολιτών που εξυπηρετούνται σε χρόνο:

i) από 4 έως 6 λεπτά, ii) από 3 έως 6 λεπτά.

β) Να βρείτε τη διάμεσο και το εύρος της κατανομής του χρόνου αναμονής των πολιτών.

γ) Να υπολογίσετε τον συντελεστή μεταβολής της κατανομής του χρόνου αναμονής.

**227.**

Η ηλικία των κατοίκων μιας πόλης ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή 50 έτη και τυπική απόκλιση 15 έτη.

α) Να βρείτε τη διάμεσο της κατανομής της ηλικίας των κατοίκων,

β) Να βρείτε τον συντελεστή μεταβολής και να εξετάσετε αν το δείγμα των ηλικιών είναι ομοιογενές.

γ) Αν ο αριθμός των κατοίκων της πόλης είναι 4.000, να βρείτε πόσοι περίπου κάτοικοι είναι ηλικίας:

i) μεταξύ 35 και 65 ετών, ii) μεταξύ 5 και 35 ετών.

**228.**

Οι βαθμοί των γραπτών στα «Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής» των μαθητών μιας πόλης, στις προηγούμενες Πανελλήνιες εξετάσεις, ακολουθούν την κανονική κατανομή.

Γνωρίζουμε ότι:

- πάνω από 80 έγραψε το 2,5% των μαθητών,

- κάτω από 65 έγραψε το 84% των μαθητών.

α) Να βρείτε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση των βαθμών,

β) Να εξετάσετε αν το παραπάνω δείγμα των βαθμών είναι ομοιογενές,

γ) Αν γνωρίζουμε ότι κάτω από 35 έγραψαν 320 μαθητές, να βρείτε:

i) τον συνολικό αριθμό των μαθητών,

ii) τον αριθμό των μαθητών που έγραψαν από 50 έως 95.



**229.**

Το βάρος ενός δείγματος μαθητών λυκείου ακολουθεί κανονική ή περίπου κανονική κατανομή. Το 50% των μαθητών του δείγματος έχουν βάρος το πολύ 65 kg, ενώ περίπου το 47,5% αυτών έχουν βάρος από 65 kg έως 75 kg.

- α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή, τη διάμεσο και την τυπική απόκλιση του βάρους των μαθητών του δείγματος.  
β) Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές,  
γ) Να υπολογίσετε το ποσοστό των μαθητών του δείγματος, που έχουν βάρος από 55 kg έως 70 kg.  
δ) Ο αριθμός των μαθητών του δείγματος αυτού που έχουν βάρος από 55 kg έως 60 kg είναι 27.  
Να υπολογίσετε το σύνολο των μαθητών του δείγματος.

**230.**

Οι παρατηρήσεις  $x_1, x_2, \dots, x_n$  μιας μεταβλητής  $X$  ακολουθούν την κανονική τιμή. Γνωρίζουμε ότι: το 97,5% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες από 120, το 15,85% των παρατηρήσεων ανήκει στο διάστημα  $(100, 140)$ , του οποίου τα άκρα είναι χαρακτηριστικές τιμές της κανονικής κατανομής  $(\bar{x} \pm 3s, \bar{x} \pm 2s, \bar{x} \pm s, \bar{x})$ .

- α) Να βρείτε τη μέση τιμή  $\bar{x}$  και την τυπική απόκλιση  $s$ .  
β) Αν στο διάστημα  $(\alpha, 100)$  ανήκει το 83,85% των παρατηρήσεων, να βρείτε τον αριθμό  $\alpha$   
γ) Αν στο διάστημα  $(40, 80)$  ανήκουν 1900 παρατηρήσεις, να βρείτε το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μεγαλύτερες από 60.

**231.**

Ένα δείγμα  $x_1, x_2, \dots, x_{2000}$  ακολουθεί κανονική κατανομή και ισχύει ότι:  $\sum_{i=1}^{2000} x_i^2 = 1300000$

Επίσης γνωρίζουμε ότι 1.000 παρατηρήσεις είναι μικρότερες από 25.

- α) Να βρείτε τη μέση τιμή  $\bar{x}$ , και την τυπική απόκλιση  $s$ .  
β) Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές  
γ) Να βρείτε πόσες παρατηρήσεις:  
i) είναι μικρότερες από 30,  
ii) είναι μεγαλύτερες από 35,  
iii) ανήκουν στο διάστημα  $(10, 35)$ .

**232.**

Ένα δείγμα  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ,  $n$  παρατηρήσεων μιας μεταβλητής  $X$ , ακολουθεί την κανονική κατανομή. Γνωρίζουμε ότι:

- το 2,5% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες από το 24,
  - το 81,5% των παρατηρήσεων ανήκουν στο διάστημα  $(24, 33)$ , του οποίου τα άκρα είναι χαρακτηριστικές τιμές της κανονικής κατανομής  $(\bar{x} \pm 3s, \bar{x} \pm 2s, \bar{x} \pm s, \bar{x})$ .
- α) Να βρείτε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση  
β) Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

γ) Αν ισχύει ότι  $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1818000$ , τότε:

- i) να αποδείξετε ότι  $n = 2.000$ ,  
ii) να βρείτε πόσες παρατηρήσεις είναι πάνω από το 33,  
iii) να υπολογίσετε το άθροισμα  $\sum_{i=1}^{2000} (x_i - 30)^2$

**233.**

Ένα δείγμα  $n$  παρατηρήσεων μιας μεταβλητής είναι ομοιογενές και ακολουθεί την κανονική κατανομή. Γνωρίζουμε ότι το 2,35% των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα  $(14, 16)$ , του οποίου τα άκρα είναι χαρακτηριστικές τιμές της κανονικής κατανομής  $(\bar{x} \pm 3s, \bar{x} \pm 2s, \bar{x} \pm s, \bar{x})$ .

- Να βρείτε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση.
- Να βρείτε τη διάμεσο και το εύρος,
- Επίσης γνωρίζουμε ότι 950 παρατηρήσεις βρίσκονται στο διάστημα  $(16, 20)$ .
  - Να αποδείξετε ότι  $n = 2.000$ .
  - Να βρείτε πόσες παρατηρήσεις είναι κάτω από το 16 και πόσες είναι πάνω από το 22.
  - Να υπολογίσετε το άθροισμα  $\sum_{i=1}^{2000} x_i^2$

**234.**

Η διάρκεια ζωής σε χιλιάδες ώρες ενός δείγματος 4000 συσκευών ακολουθεί περίπου κανονική κατανομή. Η διάμεσος του δείγματος είναι 20 και 640 συσκευές έχουν διάρκεια ζωής τουλάχιστον 22 χιλιάδες ώρες.

- Να υπολογίσετε τη μέση τιμή, την τυπική απόκλιση και το εύρος του δείγματος
- Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.
- Να υπολογίσετε το πλήθος των συσκευών του δείγματος που έχουν διάρκεια ζωής από 15 έως 20 χιλ. ώρες.
- Μια συσκευή θεωρείται ελαττωματική αν η διάρκεια ζωής της είναι κάτω από 14 χιλιάδες ώρες. Αν στο δείγμα βρέθηκαν 10 ελαττωματικές συσκευές, να εξετάσετε αν υπάρχει πρόβλημα στη διαδικασία παραγωγής τους

### Συνδυαστικά θέματα

**235.**

Έστω οι τιμές  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ενός δείγματος με μέση τιμή  $\bar{x}$  και τυπική απόκλιση  $s$

- Να αποδειχθεί  $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0$
- Αν  $s = 0$  να δείξετε  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = \bar{x}$
- Αν  $s \neq 0$  θεωρούμε τις τιμές  $y_i$  με  $y_i = \frac{x_i - \bar{x}}{s}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Να αποδειχθεί  $\bar{y} = 0$  και  $s_y = 1$
- Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $f(\lambda) = \sum_{i=1}^n (x_i - \lambda)^2$  παίρνει ελάχιστο όταν  $\lambda = \bar{x}$ .

**236.**

Η ομάδα ποδοσφαίρου του Λυκείου αποτελείται από μαθητές της Α, Β και Γ τάξης. Η συμμετοχή τους στην ομάδα σε σχέση με την ηλικία τους ακολουθεί την κανονική κατανομή. Οι σημερινές ηλικίες των μαθητών έχουν συντελεστή μεταβολής  $CV_1 = 6,25\%$ . Πριν από 11 χρόνια ο συντελεστής μεταβολής ήταν  $CV_2 = 20\%$

- Να βρεθεί η μέση σημερινή ηλικία τους.
- Πριν πόσα χρόνια από σήμερα οι ηλικίες τους είχαν για πρώτη φορά ομοιογένεια;
- Δείξτε ότι ο τύπος που δίνει την διακύμανση μπορεί να πάρει την μορφή

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\bar{x})^2$$

- δ) Αν το άθροισμα των τετραγώνων των σημερινών ηλικιών των μαθητών είναι 5140 να βρεθεί πόσοι μαθητές απαρτίζουν την ομάδα ποδοσφαίρου.
- ε) Αν οι μαθητές της Α είναι μέχρι και 15 χρονών και της Β μέχρι και 17 χρονών να βρείτε το ποσοστό των μαθητών κάθε τάξης που συμμετέχουν στην ομάδα

**237.**

Ο παρακάτω πίνακας δίνει τη σύνθεση του υπαλληλικού προσωπικού σε μια δημόσια υπηρεσία από άποψη φύλλου και μόρφωσης

|                   | Άνδρες | Γυναίκες |
|-------------------|--------|----------|
| Απόφοιτοι Λυκείου | 20%    | 10%      |
| Πτυχιούχοι ΑΕΙ    | 20%    | 50%      |

Αν η μέση ηλικία ολοκλήρου του προσωπικού είναι 42 χρόνια, των ανδρών είναι 48 χρόνια, των αποφοίτων Λυκείου είναι 37 χρόνια και των γυναικών πτυχιούχων ΑΕΙ είναι 40 χρόνια να υπολογισθούν οι μέσες ηλικίες

- α) όλων των γυναικών  
β) των ανδρών αποφοίτων Λυκείου

**238.**

Η γραπτή βαθμολογία 30 μαθητών της Γ Λυκείου στη Στατιστική αναγράφεται στο διπλανό πίνακα (σε ακέραιες τιμές). Αν ισχύουν:  $x_1 < 10$ ,  $x_6 > 18$ , το εύρος της βαθμολογίας είναι  $R=11$ , η μέση τιμή είναι  $\bar{x}=14,2$  και η διάμεσος είναι 14,5 τότε να βρεθεί:

- α) Ο αριθμός των μαθητών που έγραψε 13  
β) Πόσοι μαθητές πήραν την υψηλότερη βαθμολογία  
γ) Η χαμηλότερη και υψηλότερη βαθμολογία  
δ) Ο αριθμός και το ποσοστό των μαθητών που έγραψε το πολύ 16.  
ε) Ο αριθμός και το ποσοστό των μαθητών που έγραψε άριστα ( $\geq 18$ )  
στ) Το κυκλικό διάγραμμα των παραπάνω γραπτών βαθμών

| Βαθμολογία<br>$x_i$ | Συχνότητα<br>$v_i$ |
|---------------------|--------------------|
| $x_1$               | 2                  |
| 10                  | 5                  |
| 13                  | $v_3$              |
| 16                  | 10                 |
| 18                  | 3                  |
| $x_6$               | $v_6$              |

**239.**

- α) Σε δύο τμήματα Α και Β της Γ' Λυκείου που το καθένα έχει 20 μαθητές η μέση τιμή του βαθμού πρόσβασης είναι 14 στο καθένα και οι τυπικές αποκλίσεις 3 και 4,5 αντιστοίχως.
- i) Να βρείτε σε ποιο τμήμα αναμένεται να υπάρχουν περισσότερες επιτυχίες σε ΑΕΙ δεδομένου ότι για την εισαγωγή σε ΑΕΙ χρειάζεται βαθμός μεγαλύτερος από 17. Η κατανομή θεωρείται κανονική.
- ii) Να συγκρίνετε την ομοιογένεια των δύο τμημάτων.
- β) Θεωρούμε το δείγμα που αποτελείται από τους μαθητές και των δύο τμημάτων. Έστω  $\bar{z}$  η μέση τιμή του βαθμού πρόσβασης στο δείγμα αυτό και  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  οι μέσες τιμές στα αρχικά τμήματα.
- i) Να δείξετε  $\bar{z} = \frac{\bar{x} + \bar{y}}{2}$
- ii) Να εξετάσετε αν ισχύει πάντα η σχέση  $\bar{z} = \frac{\bar{x} + \bar{y}}{2}$  σε κάθε περίπτωση που δημιουργούμε ένα νέο δείγμα που προέρχεται από δύο άλλα δείγματα όπως στην περίπτωση του ερωτήματος α).

**240.**

Σε έρευνα που έγινε στους μαθητές μιας πόλης, για τον χρόνο που κάνουν να πάνε από το στο σχολείο, διαπιστώθηκε ότι το 50% περίπου των μαθητών χρειάζεται περισσότερο από 12 ενώ το 16% περίπου χρειάζεται λιγότερο από 10 λεπτά. Υποθέτουμε ότι η κατανομή του χρόνου διαδρομής είναι κατά προσέγγιση κανονική.

- α) Να βρείτε τον μέσο χρόνο διαδρομής των μαθητών και την τυπική απόκλιση του χρόνου διαδρομής τους.
- β) Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.
- γ) Αν οι μαθητές της πόλης είναι 4.000, πόσοι μαθητές θα κάνουν χρόνο διαδρομής από 14 έως 16 λεπτά;
- δ) Μια ημέρα, λόγω έργων στον κεντρικό δρόμο της πόλης, κάθε μαθητής καθυστέρησε 5 λεπτά. Να βρείτε πόσο μεταβάλλεται ο συντελεστής μεταβολής CV.

**241.**

Οι μηνιαίοι μισθοί (σε €)  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ,  $n$  υπαλλήλων μιας εταιρείας, έχουν συντελεστή μεταβολής,  $CV_X = 2,5\%$ . Αν κάθε υπάλληλος έπαιρνε 200 € περισσότερα τον μήνα, τότε οι νέοι μισθοί θα είχαν συντελεστή μεταβολής  $CV_Y = 2\%$ .

- α) Να βρείτε τη μέση τιμή  $\bar{x}$  και την τυπική απόκλιση  $s_x$  των μισθών  $x_i$ .

β) Γνωρίζουμε επίσης ότι  $\sum_{i=1}^n (x_i - 800)^2 = 2400$

- i) Να αποδείξετε ότι  $n=6$

ii) Να βρείτε το άθροισμα  $\sum_{i=1}^6 x_i^2$

- iii) Αν στην εταιρεία προσλήφθηκε ένας ακόμη υπάλληλος με μισθό 940 €, να βρείτε τη μέση τιμή των μισθών των 7 υπαλλήλων.

**242.**

Ένα δείγμα 4.000 παρατηρήσεων  $x_1, x_2, \dots, x_{4000}$ , ακολουθεί την κανονική κατανομή. Γνωρίζουμε ότι:

- 6 παρατηρήσεις είναι μικρότερες από 25,
- 100 παρατηρήσεις είναι μεγαλύτερες από 50.
- α) Να βρείτε τη μέση τιμή, την τυπική απόκλιση, τη διάμεσο και το εύρος του δείγματος.
- β) Να αποδείξετε ότι το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.
- γ) Να βρείτε τον μικρότερο θετικό αριθμό  $c$  που πρέπει να προσθέσουμε σε καθεμία από τις τιμές  $x_i$ , με  $i = 1, 2, \dots, 4.000$ , ώστε το δείγμα των αριθμών που θα προκύψουν να είναι ομοιογενές.

δ) Να βρείτε το άθροισμα  $\sum_{i=1}^{4000} x_i^2$

**243.**

Δίνονται οι θετικές τιμές  $x_1, x_2, \dots, x_n$  μιας μεταβλητής  $X$ . Θεωρούμε και τις τιμές:  $y_i = 2x_i + 5$  και  $z_i = 3x_i + 20$ , με  $i = 1, 2, \dots, n$  για τις οποίες ισχύει  $CV_Y = 40\%$  και  $CV_Z = 30\%$ .

- α) Να βρείτε τη μέση τιμή  $\bar{x}$  και την τυπική απόκλιση  $s_x$  των τιμών  $x_i$ .
- β) Να βρείτε τη μικρότερη τιμή του αριθμού  $c > 0$  που πρέπει να προσθέσουμε σε καθεμία από τις τιμές  $x_i$ , ώστε το δείγμα των αριθμών που θα προκύψουν να είναι ομοιογενές.
- γ) Αν επιπλέον ισχύει ότι  $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 2500$ , τότε:
  - i) να αποδείξετε ότι  $n = 20$ ,

ii) να βρείτε τα αθροίσματα:  $\sum_{i=1}^{20} (y_i - 25)^2$  και  $\sum_{i=1}^{20} x_i^2$ .

**244.**

Οι παρατηρήσεις  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ακολουθούν την κανονική κατανομή. Γνωρίζουμε ότι:

- το 16% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες από 6,
- το 49,85% των παρατηρήσεων ανήκει στο διάστημα (8, 14), του οποίου τα άκρα είναι χαρακτηριστικές τιμές της κανονικής κατανομής ( $\bar{x} \pm 3s, \bar{x} \pm 2s, \bar{x} \pm s, \bar{x}$ ).

α) Να βρείτε τη μέση τιμή  $\bar{x}$  και την τυπική απόκλιση  $s$ .

β) Θεωρούμε τις τιμές  $y_i = cx_i - 4$ , οι οποίες έχουν μέση τιμή  $\bar{y} = 20$  και ισχύει ότι

$$\sum_{i=1}^n y_i^2 = 872000.$$

i) Να βρείτε τον αριθμό  $c$ .

ii) Να αποδείξετε ότι  $n = 2.000$ .

iii) Να βρείτε το πλήθος των παρατηρήσεων  $x_i$  που είναι μεγαλύτερες από 12.

iv) Να υπολογίσετε το άθροισμα:  $\sum_{i=1}^{2000} (x_i^2 - 16x_i + 64)$

**245.**

Στα δύο τμήματα A και B της Γ' τάξης του Λυκείου η μέση βαθμολογία στο μάθημα των Μαθηματικών Γενικής Παιδείας στο 1ο τετράμηνο ήταν  $\bar{x} = 6$  και η τυπική απόκλιση  $s=1$ . Στο 2ο τετράμηνο όλοι οι μαθητές του τμήματος A αύξησαν τη βαθμολογία τους κατά 1 μονάδα και οι μαθητές του τμήματος B κατά 15%

α) Να βρεθούν οι νέες μέσες τιμές και οι νέες τυπικές αποκλίσεις του κάθε τμήματος.

β) Ποιου τμήματος η βαθμολογία παρουσιάζει μεγαλύτερη ομοιογένεια μετά τις αυξήσεις της βαθμολογίας που πέτυχαν στο 2ο τετράμηνο;

γ) Να βρεθεί η μικρότερη τιμή της θετικής σταθεράς  $a$  που πρέπει να προστεθεί στις βαθμολογίες των μαθητών του τμήματος A μετά τη βαθμολογία του 2ου τετράμηνου έτσι ώστε το δείγμα της βαθμολογίας τους να γίνει ομοιογενές

δ) Αν οι βαθμολογίες του τμήματος A αποτελούν περίπου κανονική κατανομή να βρεθεί το ποσοστό των μαθητών με βαθμολογία από 6 έως 9 στο 1ο και στο 2ο τετράμηνο.

**246.**

Σε μια κανονική ή περίπου κανονική κατανομή το 50% των παρατηρήσεων έχουν τιμή μεγαλύτερη του 20. Το 81,5% των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα (16, 22), με άκρα του διαστήματος χαρακτηριστικές τιμές της κανονικής κατανομής ( $\bar{x} \pm 3s, \bar{x} \pm 2s, \bar{x} \pm s, \bar{x}$ ).

α) Να αποδείξετε ότι  $\bar{x} = 20$  και  $s = 2$ .

β) Να βρείτε το  $a \in \mathbb{N}^*$ , αν είναι γνωστό ότι το διάστημα ( $\bar{x} - as, \bar{x} + as$ ) ανήκει το 95% που των παρατηρήσεων,

γ) Αν  $R$  είναι το εύρος της κατανομής, να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης:

$$f(x) = \frac{R}{2} x^2 - (\bar{x} + 4)x + 9s$$

247.

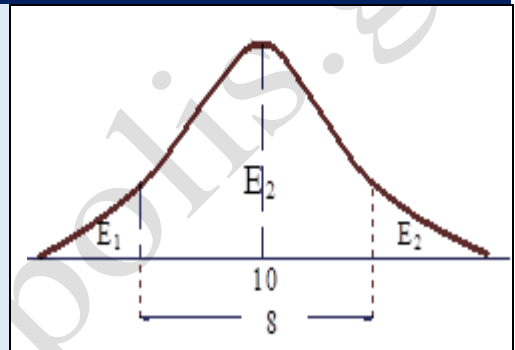
Οι χρόνοι (σε min) που χρειάστηκαν για να προσέλθουν στο σχολείο τους οι μαθητές έχουν ομαδοποιηθεί σε κλάσεις ίσου πλάτους. Το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων  $f_i\%$  της κατανομής  $X$  των χρόνων αυτών, έχει κορυφές τα σημεία  $A(2,0)$ ,  $B(6,5)$ ,  $\Gamma(10,f_2)$ ,  $\Delta(14,f_3)$ ,  $E(18,f_4)$ ,  $Z(22,5)$ ,  $H(26,0)$ . Η κατακόρυφη γραμμή με εξίσωση  $x=11$  διαιρεί το χωρίο που ορίζεται από το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα σε δύο ισεμβαδικά χωρία. Ο μέσος χρόνος προσέλευσης είναι  $\bar{x}=12$  min. Θεωρώντας τα δεδομένα ομοιόμορφα κατανεμημένα:

- α) Να αποδειχθεί  $f_2\%=60$ ,  $f_3\%=20$  και  $f_4\%=10$
- β) Να εξετάσετε αν είναι κανονική η κατανομή.
- γ) Να γίνει ο πίνακας σχ. συχνοτήτων και σχ. αθροιστικών συχνοτήτων.

248.

Το εμβαδό  $E_2$  στη διπλανή καμπύλη συχνοτήτων είναι ίσο με το 95% του ολικού εμβαδού που περικλείεται από την καμπύλη και τον οριζόντιο άξονα.

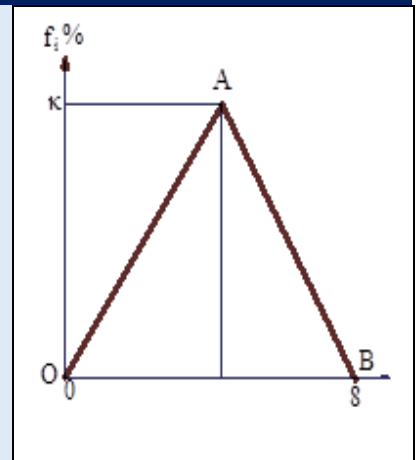
- α) Να βρείτε τη μέση τιμή και την τυπ. απόκλιση του δείγματος
- β) Να βρείτε τον συντελεστή μεταβολής CV και να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.
- γ) Να αποδείξετε ότι  $\frac{E_1}{E_2} = 1$  και  $\frac{E_2}{E_3} = 38$



249.

250. Στο διπλανό τρίγωνο OAB είναι το πολύγωνο συχνοτήτων ενός συνόλου παρατηρήσεων ομαδοποιημένων σε κλάσεις ίσου πλάτους  $c$ .

- i) Να αποδείξετε ότι  $c = 4\kappa$
- ii) Αν  $c=2$ , να υπολογίσετε το πλήθος των κλάσεων και μετά να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα των σχετικών συχνοτήτων αν είναι  $f_1\%=20\%$  και  $f_2 = \kappa$
- iii) Να υπολογίσετε το εύρος, τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση
- iv) Αν  $\sum_{i=1}^n x_i^2 v_i = 2940$  να βρείτε το μέγεθος του δείγματος



251.

Δίνεται η συνάρτηση:  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $x \in (0, +\infty)$ .

- α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $\Lambda(1,1)$
- β) Από τυχαίο σημείο  $M(x, y)$  της γραφικής παράστασης της  $f$  φέρνουμε παράλληλες προς τους άξονες  $x'$  και  $y'$ , οι οποίες σχηματίζουν με τους ημιάξονες  $Ox$ ,  $Oy$  ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου  $M$ , ώστε η περίμετρος του ορθογωνίου παραλληλογράμμου να είναι ελάχιστη
- γ) Οι τετμημένες πέντε διαφορετικών σημείων της εφαπτομένης του ερωτήματος (i) έχουν μέση τιμή  $\bar{x} = 5$  και τυπική απόκλιση  $s_x = 2$ . Να βρείτε τη μέση τιμή  $\bar{y}$  και την τυπική  $s_y$  απόκλιση των τεταγμένων των σημείων αυτών.



**252.**

Δίνονται οι παρατηρήσεις:  $x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 3, x_4 = 4, x_5 = 6, x_6 = 7$

α) Να βρείτε τη μέση τιμή και τη διακύμανση των παρατηρήσεων  $x_i$ , με  $i = 1, 2, \dots, 6$ .

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^3}{3} - \delta x^2 + Rx + a$  όπου  $\delta$  η διάμεσος και  $R$  το εύρος των παρατηρήσεων  $x_i$ , με  $i = 1, 2, \dots, 6$  και  $a > 18$ .

- Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow CV} \frac{f''(x) + 6}{\sqrt{4x^2 + 3} - 2}$ , όπου  $CV$  ο συντελεστής μεταβολής των παρατηρήσεων  $x_i$ , με  $i = 1, 2, \dots, 6$ .
- Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία.
- Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του  $a \in \mathbb{R}$ , ώστε αν σε κάθε παρατήρηση  $x_i$ , με  $i = 1, 2, \dots, 6$ , προσθέσουμε το τοπικό ελάχιστο της  $f$ , τότε το δείγμα των αριθμών που θα προκύψουν να είναι ομοιογενές.

## Γενικά θέματα

**253.**

Σε ένα κυκλικό διάγραμμα παριστάνεται η βαθμολογία των 150 μαθητών ενός Λυκείου σε τέσσερις κατηγορίες: «Άριστα», «Λίαν καλώς», «Καλώς» και «Σχεδόν καλώς». Το 20% των μαθητών έχουν επίδοση «Λίαν καλώς». Η γωνία του κυκλικού τομέα για την επίδοση «Άριστα» είναι  $36^\circ$ . Οι μαθητές με βαθμό «Καλώς» είναι τετραπλάσιοι των μαθητών με «Άριστα».

α) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα στο τετράδιό σας

| $i$ | Χαρακτηρισμός<br>βαθμολογίας<br>$x_i$ | Συχνότητα<br>$v_i$ | Σχετική<br>συχνότητα<br>$f_i$ | Σχετική<br>συχνότητα %<br>$f_i\%$ | Γωνία κυκλικού<br>τομέα σε μοίρες<br>$\alpha_i$ |
|-----|---------------------------------------|--------------------|-------------------------------|-----------------------------------|---|
| 1   | Άριστα                                |                    |                               |                                   |   |
| 2   | Λίαν καλώς                            |                    |                               |                                   |   |
| 3   | Καλώς                                 |                    |                               |                                   |   |
| 4   | Σχεδόν καλώς                          |                    |                               |                                   |   |
|     | Σύνολο                                |                    |                               |                                   |   |

- Να σχεδιάσετε στο τετράδιό σας το ραβδόγραμμα των σχετικών συχνοτήτων ( $f_i\%$ ).

**254.**

Τα βάρη μιας ομάδας, πέντε μαθητών, είναι: 62, 77, 65, 72, 69 κιλά

α) Να αποδείξετε ότι το μέσο βάρος των πέντε μαθητών είναι 69 κιλά.

β) Να υπολογίσετε τη διάμεσο των τιμών των βαρών.

γ) Να υπολογίσετε το εύρος των τιμών των βαρών.

δ) Αν προστεθεί στην ομάδα ένας έκτος μαθητής και το μέσο βάρος των έξι μαθητών γίνει 72 κιλά, να βρείτε το βάρος του έκτου μαθητή που προστέθηκε στην ομάδα.

Για τον έλεγχο της κατανάλωσης καυσίμου (ίδιου τύπου) δυο αυτοκινήτων Α και Β μετρήθηκε η κατανάλωσή τους σε έξι διαδρομές για το Α και σε πέντε διαδρομές για το Β. Η κατανάλωση στις έξι διαδρομές (σε λίτρα ανά 100 χιλιόμετρα) για το αυτοκίνητο Α ήταν 9, 6, 7, 9, 9, 8 ενώ η κατανάλωση στις πέντε διαδρομές για το αυτοκίνητο Β ήταν 8, 10, 7, 8, 12.

- α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των μετρήσεων που αφορούν το αυτοκίνητο Α.  
β) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των μετρήσεων που αφορούν το αυτοκίνητο Β.  
γ) Αν ένας πωλητής ήθελε να χρησιμοποιήσει τα πιο πάνω δεδομένα για να πείσει έναν υποψήφιο αγοραστή να αγοράσει το αυτοκίνητο Α και όχι το Β, ποιο μέτρο θέσης (μέση τιμή ή διάμεσο) θα χρησιμοποιούσε; Αν αντίστροφα ήθελε να πείσει τον υποψήφιο αγοραστή να αγοράσει το αυτοκίνητο Β και όχι το Α, ποιο μέτρο θέσης (μέση τιμή ή διάμεσο) θα χρησιμοποιούσε;

Μια εταιρεία απασχολεί 20 εργαζόμενους εκ των οποίων οι 10 εργάζονται στο τμήμα Α και οι 10 στο τμήμα Β. Η μέση τιμή των μηνιαίων μισθών του τμήματος Α είναι 720 ευρώ και ο μεγαλύτερος μισθός του τμήματος είναι 900 ευρώ. Οι μισθοί των εργαζομένων στο τμήμα Β είναι : 950, 900, 1060, 980, 920, 945, 975, 930, 900, 940.

Να βρείτε :

- Το άθροισμα των μηνιαίων μισθών του τμήματος Α.
- Τη μέση τιμή, το εύρος και την επικρατούσα τιμή των μισθών του τμήματος Β.
- Τη μέση τιμή και τη διάμεσο των μισθών όλων των εργαζομένων στην επιχείρηση.

Η εξέταση 10 μαθητών στο μάθημα της Στατιστικής έδωσε τους εξής βαθμούς:

Να βρείτε:

- α) τη διάμεσο, β) τη μέση τιμή,  
γ) την επικρατούσα τιμή, δ) το εύρος και  
ε) τη διακύμανση της παραπάνω βαθμολογίας.

Στο παρακάτω δείγμα των 10 παρατηρήσεων: 1, 2, 4, 2, 6, 1, 3, 6, α, 6 όπου α πραγματικός αριθμός, η μέση τιμή είναι  $\bar{x} = 4$ .

- α) Να βρείτε την τιμή του  $\alpha$ .
- β) Για  $\alpha=9$ 
  - i) Να βρείτε τη διάμεσο.
  - ii) Να βρείτε τη διακύμανση.
  - iii) Αν όλες οι παραπάνω παρατηρήσεις αυξηθούν κατά 2008, τότε ποια θα είναι η μέση τιμή των νέων παρατηρήσεων;

Οι βαθμοί ενός μαθητή σε 5 διαγωνίσματα είναι: 15, 17, 19, α, β. Η μέση τιμή των παραπάνω βαθμών είναι 16, ενώ αν τα παραπάνω μαθήματα είχαν συντελεστές βαρύτητας 3, 1, 1, 2, 3 αντίστοιχα, τότε ο σταθμικός μέσος θα ήταν 15,5.

- α) Να αποδείξετε ότι  $\alpha = 13$  και  $\beta = 16$ .  
β) Να εξετάσετε αν το δείγμα των 5 βαθμών είναι ομοιογενές.  
γ) Ο μαθητής έγραψε ένα ακόμη διαγώνισμα και η μέση τιμή των 6 διαγωνισμάτων έγινε 15.  
Να βρείτε τον βαθμό του 6ου διαγωνίσματος.



**260.**

Στον διπλανό πίνακα δίνονται οι τιμές  $x_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  μιας μεταβλητής  $X$  με αντίστοιχες συχνότητες  $v_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . Η συχνότητα  $v_2$  που αντιστοιχεί στην τιμή  $x_2 = 3$  είναι άγνωστη. Δίνεται ότι η μέση τιμή των παρατηρήσεων είναι ίση με  $\bar{x} = 4$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $v_2 = 7$ .

β) Να αποδείξετε ότι η διακύμανση των παρατηρήσεων είναι ίση με 4,9.

γ) Να βρείτε τη μέση τιμή και τη διακύμανση.

**261.**

Οι απουσίες των μαθητών της Γ' τάξης ενός ενιαίου λυκείου κατά τους μήνες Ιανουάριο, Φεβρουάριο, Μάρτιο, Απρίλιο του έτους 2006 έχουν ομαδοποιηθεί σε τέσσερις κλάσεις ίσου πλάτους και εμφανίζονται στον παρακάτω πίνακα σχετικών συχνοτήτων:

| Απουσίες μαθητών | Κέντρο κλάσης $x_i$ | Σχετική συχνότητα $f_i$ |
|------------------|---------------------|-------------------------|
| [ ... - ... )    | ...                 | 0,1                     |
| [ ... - 7 )      | ...                 | ...                     |
| [ ... - ... )    | ...                 | 0,3                     |
| [ ... - ... )    | 10                  | ...                     |
| Σύνολο           |                     | 1                       |

Αν επιπλέον δίνεται ότι η σχετική συχνότητα της 4ης κλάσης είναι διπλάσια της σχετικής συχνότητας της 2ης κλάσης  $f_2$ , τότε:

α) να αποδείξετε ότι το πλάτος  $c$  των κλάσεων ισούται με 2,

β) να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα σχετικών συχνοτήτων

γ) i) να βρείτε τη μέση τιμή  $\bar{x}$ ,

ii) να βρείτε την τυπική απόκλιση  $s$ .

**262.**

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας κατανομής συχνοτήτων που αναφέρεται στις παρατηρήσεις μιας μεταβλητής  $X$ , οι οποίες έχουν ομαδοποιηθεί σε 4 κλάσεις ίσου πλάτους.

| Κλάσεις   | $x_i$ | $v_i$ | $f_i$ |
|-----------|-------|-------|-------|
| [...-...) | 6     |       |       |
| [...-...) |       | 14    | 0,35  |
| [...-...) |       |       |       |
| [...-...) | 24    | 18    |       |
| Σύνολο    |       |       |       |

Γνωρίζουμε ότι οι προηγούμενες παρατηρήσεις έχουν μέση τιμή  $\bar{x} = 18$ .

α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα.

β) Να βρείτε τη διάμεσο,

γ) Να αποδείξετε ότι το δείγμα των παρατηρήσεων δεν είναι ομοιογενές,

δ) Να βρείτε το πλήθος των παρατηρήσεων ανήκουν στο διάστημα (9, 23).

**263.**

Δίνονται οι θετικές παρατηρήσεις  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , οι οποίες έχουν συντελεστή μεταβολής  $CV_X = 20\%$ . Θεωρούμε και τις τιμές  $y_i, i=1, 2, \dots, n$  οι οποίες προκύπτουν από τις τιμές  $x_i$ , με  $i=1, 2, \dots, n$ , αν καθεμία από αυτές αυξηθεί κατά  $20\%$  και στη συνέχεια μειωθεί κατά  $4$  μονάδες. Οι τιμές με  $i=1, 2, \dots, n$ , είναι θετικές και έχουν συντελεστή μεταβολής  $CV_Y = 30\%$ .

α) Να βρείτε τη μέση τιμή  $\bar{x}$  και την τυπική κλίση  $s_x$  των τιμών  $x_1, x_2, \dots, x_n$

β) Αν επιπλέον ισχύει ότι  $\sum_{i=1}^n (y_i - 8)^2 = 1152$ , τότε

i) να αποδείξετε ότι  $n = 200$ ,

ii) να βρείτε το άθροισμα  $\sum_{i=1}^{200} x_i^2$

iii) να βρείτε τη μέση τιμή των αριθμών  $x_1, x_2, \dots, x_{200}, y_1, y_2, \dots, y_{200}$

**264.**

Δίνονται τα παρακάτω δείγματα αριθμών.

Δείγμα A: 5, 15, 20, 25, 35, Δείγμα B:  $t_1, t_2, \dots, t_{20}$ .

Τα δείγματα A και B έχουν την ίδια μέση τιμή και ισχύει  $\sum_{i=1}^{20} t_i^2 = 8080$

α) Να εξετάσετε αν το δείγμα A είναι ομοιογενές

β) Να εξετάσετε αν το δείγμα B είναι ομοιογενές

γ) Να βρείτε το άθροισμα  $\sum_{i=1}^{20} (t_i - 20)^2$

**265.**

Έστω  $x_1, x_2, \dots, x_{100}$  οι σημερινές ηλικίες 100 ατόμων, οι οποίες έχουν συντελεστή μεταβολής  $CV = 20\%$  και ισχύει  $\sum_{i=1}^{100} x_i^2 = 41600$

α) Να βρείτε τη μέση τιμή των σημερινών ηλικιών των ατόμων.

β) Να βρείτε το άθροισμα  $\sum_{i=1}^{100} (x_i - 20)^2$

γ) Να βρείτε τον συντελεστή μεταβολής των ηλικιών των παραπάνω ατόμων πριν από 10 χρόνια (με δεδομένο ότι καθένα από τα 100 άτομα είναι άνω των 10 ετών).

δ) Να βρείτε μετά από πόσα χρόνια τουλάχιστον οι ηλικίες των 100 ατόμων (με δεδομένο ότι θα ζουν όλοι) θα αποτελούν ένα ομοιογενές δείγμα.

**266.**

Δίνεται η συνάρτηση:  $f(x) = -x^3 + \bar{x} \cdot x^2 - s^2 \cdot x + 2$ , όπου  $\bar{x}$  η μέση τιμή και  $s^2$  η διακύμανση ενός δείγματος  $n$  παρατηρήσεων μιας μεταβλητής  $X$ . Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $M(-1, f(-1))$  έχει εξίσωση  $y = -24x - 6$ .

α) Να βρείτε τη μέση τιμή  $\bar{x}$  και τη διακύμανση  $s^2$ .

β) Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία και ακρότατα.

γ) Να βρείτε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{f''(x)}$

δ) Να αποδείξετε ότι το δείγμα των  $n$  παρατηρήσεων της μεταβλητής  $X$  δεν είναι ομοιογενές.

ε) Να βρείτε τον μικρότερο αριθμό  $c > 0$  που πρέπει να προσθέσουμε σε καθεμία από τις  $n$  παρατηρήσεις της μεταβλητής  $X$ , ώστε το δείγμα των αριθμών που θα προκύψουν να είναι ομοιογενές.

**267.**

Οι χρόνοι σε ώρες (παρατηρήσεις) που έξι από τους επίγειους σταθμούς δεν είχαν επαφή με τον Ελληνοκυπριακό δορυφόρο είναι:  $t_1 = 0, t_2 = 0, t_3 = 1, t_4 = 2, t_5 = 4, t_6 = 5$ .

α) Να βρείτε τη μέση τιμή  $\bar{X}$  και τη διάμεσο  $\delta$  των παρατηρήσεων.

β) Αν  $f(x) = (t_1 - x)^2 + (t_2 - x)^2 + (t_3 - x)^2 + (t_4 - x)^2 + (t_5 - x)^2 + (t_6 - x)^2$ , τότε:

i) να αποδείξετε ότι  $f'(\bar{x}) = 0$

ii) να αποδείξετε ότι  $f(\bar{x}) = 6s^2$ , όπου  $s^2$  είναι η διακύμανση των παρατηρήσεων και

iii) να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στο σημείο  $A(\bar{x}, f(\bar{x}))$ .

**268.**

Θεωρούμε το δείγμα των αριθμών  $x_1, x_2, \dots, x_n$  και τη συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{(x_1 - x)^2 + (x_2 - x)^2 + \dots + (x_n - x)^2}{n}$$

Η  $f$  έχει ελάχιστο το  $f(40) = 16$ .

α) Να αποδείξετε ότι το δείγμα των αριθμών  $x_1, x_2, \dots, x_n$  είναι ομοιογενές,

β) Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο της  $M(0, f(0))$ .

γ) Να βρείτε το άθροισμα:  $f'(x_1) + f'(x_2) + \dots + f'(x_n)$

δ) Αν ισχύει ότι:  $(f'(x_1))^2 + (f'(x_2))^2 + \dots + (f'(x_n))^2 = 640$  να βρείτε το  $n$ .

**269.**

Δίνεται η συνάρτηση:  $f(x) = -x^3 - ax^2 - 9x + \beta$ , με  $a, \beta \in \mathbb{R}$ . Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο της  $M(-2, f(-2))$  έχει εξίσωση  $y = 3x + 16$ .

α) Να βρείτε τις τιμές των  $a$  και  $\beta$ .

β) Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία,

γ) Θεωρούμε τις παρατηρήσεις:  $\alpha, \gamma, \delta, \alpha + \beta, \underbrace{10, 10, \dots, 10}_k$ , όπου  $\gamma$  και  $\delta$  είναι το τοπικό

ελάχιστο και το τοπικό μέγιστο της  $f$ , αντίστοιχα.

i) Να βρείτε τις τιμές των  $\gamma$  και  $\delta$ .

ii) Να βρείτε τη μέση τιμή των παραπάνω παρατηρήσεων.

iii) Να εκφράσετε τη διακύμανση των προηγούμενων αριθμών συναρτήσει του  $k$ .

iv) Να βρείτε τη μικρότερη τιμή του  $k$  για την οποία το δείγμα των παρατηρήσεων είναι ομοιογενές.

v) Για την τιμή του  $k$  που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα, να υπολογίσετε το:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f''(x) + k}{\sqrt{x^2 + 9} - 5}$$

**270.**

Δίνονται 10 παρατηρήσεις, από τις οποίες οι 5 είναι ίσες με 3 και οι υπόλοιπες είναι ίσες με 1 ή 6. Έστω  $k$  το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι ίσες με 6.

α) Να εκφράσετε τη μέση τιμή και τη διακύμανση των 10 παρατηρήσεων συναρτήσει του  $k$ .

β) Να βρείτε για ποια τιμή του  $k$  η διακύμανση γίνεται μέγιστη.

γ) Έστω ότι  $k = 3$ . Συμπληρώνουμε τις αρχικές 10 παρατηρήσεις με άλλες δύο και οι 12 παρατηρήσεις έχουν διακύμανση  $s^2 = 16$  και συντελεστή μεταβολής  $CV = 80\%$ . Να βρείτε:

i) τις δύο παρατηρήσεις που συμπληρώσαμε,

ii) τη μικρότερη τιμή του  $c > 0$  που πρέπει να προσθέσουμε σε καθεμία από τις 12 παρατηρήσεις, ώστε το δείγμα των αριθμών που θα προκύψουν να είναι ομοιογενές.

**271.**

Οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής  $X$  ακολουθούν την κανονική κατανομή. Γνωρίζουμε ότι το 16% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες από 18 και το 2,5% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες από 8.

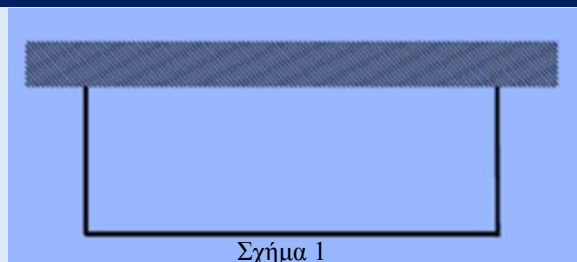
- α) Να εξετάσετε αν το παραπάνω δείγμα παρατηρήσεων είναι ομοιογενές.  
β) Θεωρούμε τη συνάρτηση:  $f(x) = e^x - 2(x-3) + 4x^2 - \delta \cdot x + 967$ , όπου  $\delta$  είναι η διάμεσος των παρατηρήσεων της μεταβλητής  $X$ .  
i) Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία.  
ii) Αν το ελάχιστο της  $f$  ισούται με το των παρατηρήσεων της μεταβλητής ανήκουν στο διάστημα  $(16, 24)$ , να βρείτε το πλήθος των παρατηρήσεων της μεταβλητής  $X$  που ανήκουν στο διάστημα  $(4, 12)$

**272.**

Έχουμε περιφράξει με συρματόπλεγμα μήκους 200 m μια ορθογώνια περιοχή από τις τρεις πλευρές της (Σχήμα 1).

Η τέταρτη πλευρά είναι τοίχος.

Έστω ότι το μήκος του τοίχου που θα χρησιμοποιηθεί είναι  $x$ .



- α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της περιοχής που περιφράξαμε δίνεται από τον τύπο  $f(x) = 100x - \frac{1}{2}x^2$ .  
β) Να βρείτε τη μεγαλύτερη δυνατή επιφάνεια που θα μπορούσαμε να περιφράξουμε με το συρματόπλεγμα των 200 m.  
γ) Να βρείτε τη μέση τιμή των αριθμών  $f'(100), f'(101), f'(102), f'(103)$  και  $f'(104)$ .  
δ) Έστω  $CV$  ο συντελεστής μεταβολής των αριθμών  $f'(100), f'(101), f'(102), f'(103)$  και  $f'(104)$  και  $CV'$  ο συντελεστής μεταβολής που προκύπτει όταν αυξήσουμε καθέναν από τους αριθμούς αυτούς κατά  $c$ , όπου  $c \neq 2$ . Να υπολογίσετε το  $c$ , έτσι ώστε να ισχύει  $CV' = 2CV$ .

**273.**

Δίνονται οι παρατηρήσεις:  $x_1=2, x_2=4, x_3=5, x_4=6, x_5=8$

- α) Να εξετάσετε αν το δείγμα των παραπάνω παρατηρήσεων είναι ομοιογενές.  
β) Δίνεται η συνάρτηση:  $f(x) = -x^3 + Rx^2 - 9x + \delta$ , όπου  $R$  το εύρος και  $\delta$  η διάμεσος των παρατηρήσεων  $x_i$ , με  $i = 1, 2, \dots, 5$ .  
i) Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.  
ii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ( $\epsilon$ ) της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο της  $A(2, f(2))$ .  
iii) Θεωρούμε τα σημεία  $M_i(x_i, y_i)$ , με  $i = 1, 2, \dots, 5$ , της παραπάνω εφαπτομένης ( $\epsilon$ ).  
Να βρείτε τον συντελεστή μεταβολής των τιμών  $y_i$ , με  $i = 1, 2, \dots, 5$ .

**274.**

Δίνεται η συνάρτηση:  $f(x) = \frac{-2x^2 + ax - 10}{x - 1}$ , όπου  $a \in \mathbb{R}$ . Η εφαπτομένη ( $\epsilon$ ) της γραφικής

παράστασης της  $f$  στο σημείο της  $M$ , είναι παράλληλη στην ευθεία  $\zeta: y = 6x - 2012$ .

- α) Να αποδείξετε ότι  $a=10$ .  
β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ( $\epsilon$ ).  
γ) Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία,  
δ) Μια τυχαία μεταβλητή  $X$  ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή  $\bar{x}$  ίση με το

τοπικό ελάχιστο της  $f$  και τυπική απόκλιση  $s$  ίση με το τοπικό μέγιστο της  $f$ .

- Να αποδείξετε ότι το δείγμα των παρατηρήσεων της μεταβλητής  $X$  δεν είναι ομοιογενές.
- Αν γνωρίζετε ότι υπάρχουν 100 παρατηρήσεις με τιμή μεγαλύτερη του 14, να βρείτε το πλήθος των παρατηρήσεων που ανήκουν στο διάστημα  $(4, 12)$ .
- Να βρείτε τον μικρότερο αριθμό  $c > 0$  που πρέπει να προσθέσουμε σε καθεμία από τις παρατηρήσεις της μεταβλητής  $X$ , ώστε το δείγμα των αριθμών που θα προκύψουν να είναι ομοιογενές.

### 275.

Σε έναν πίνακα δίνεται η ομαδοποιημένη κατανομή ενός δείγματος 40 ατόμων.

α) Να βρεθούν οι συχνότητες  $v_1, v_2, v_3, v_4$  των κλάσεων όταν:

i) το  $v_1$  είναι ίσο με το  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 + x - 18}{x - 2}$

| Κλάσεις<br>[ - ) | Συχνότητα |
|------------------|-----------|
| 4 - 10           | $v_1$     |
| 10 - 16          | $v_2$     |
| 16 - 22          | $v_3$     |
| 22 - 28          | $v_4$     |

ii) το  $v_2$  ισούται με την κλίση της γραφικής παράστασης της

συνάρτησης  $f(x) = \frac{x^2 + 7x - 10}{3}$  στο σημείο  $A(7, f(7))$

iii) το  $v_4$  ισούται με την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης

$$g(x) = 3x^2 + 6x + 14$$

β) Να κατασκευασθεί ο πίνακας συχνοτήτων, απολύτων και αθροιστικών.

γ) Να κατασκευασθεί το πολύγωνο σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων  $F_i\%$  από το οποίο να εκτιμηθεί (κατά προσέγγιση) ποιας παρατήρησης η αθροιστική σχετική συχνότητα είναι 50%. Μετά να βρεθεί και ακριβώς η παρατήρηση αυτή.

δ) Αν οι παραπάνω κλάσεις αναφέρονται στα χρήματα που ξοδεύουν οι 40 οικογένειες μιας πολυκατοικίας για ημερήσιο «χαρτζιλίκι» των παιδιών τους να βρεθεί:

i) Ο αριθμός των οικογενειών που δίνει από 24 ευρώ και πάνω την ημέρα.

ii) Ο αριθμός των οικογενειών που δίνει από 16 έως 25 ευρώ την ημέρα.

( Τα δεδομένα θεωρούνται ομοιόμορφα κατανεμημένα)

### 276.

Θεωρούμε την συνάρτηση  $f$  που είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  και την συνάρτηση  $g$  για την οποία ισχύει  $g(x) = f(1 - \bar{x} \cdot x) - f(s_x + 2007)$  όπου  $\bar{x} \neq 0$  και  $s_x \neq 0$ , η μέση τιμή και τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $g$  στο σημείο  $M(0, g(0))$  είναι η ευθεία  $y + 2007 = 0$  και ισχύει ότι  $10f'(1) = f'(2007)$  με  $f'(1) \neq 0$  και  $4f(1) = f(2007)$ .

α) Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

β) Να υπολογίσετε το  $f(2007)$ .

### 277.

Έστω  $t_1, t_2, t_3, \dots, t_{100}$  ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής  $T$  με μέση τιμή  $\bar{t}$  και τυπική

απόκλιση  $s \neq 0$  και η συνάρτηση  $F$  με  $F(x) = \begin{cases} \frac{(\bar{t} - 2s)(x - 4)}{\sqrt{x} - 2}, & \alpha \nu \ x \geq 0 \text{ και } x \neq 4 \\ -24s, & \alpha \nu \ x = 4 \end{cases}$  η οποία είναι

συνεχής στο διάστημα  $A = (0, +\infty)$

α) Να δείξετε ότι για  $x \neq 4$  ο τύπος της συνάρτησης είναι  $F(x) = (\bar{t} - 2s)(\sqrt{x} + 2)$

β) Να εξετάσετε αν το δείγμα  $t_1, t_2, t_3, \dots, t_{100}$  της μεταβλητής  $T$  είναι ομοιογενές

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $g$  με τύπο  $g(x) = \frac{F(x)}{(\bar{t} - 2s)}$  στο σημείο  $M(\frac{1}{4}, g(\frac{1}{4}))$

**278.**

Έστω  $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5$  οι παρατηρήσεις ενός δείγματος,  $\bar{x}$  η μέση τιμή τους,  $s^2$  η διακύμανση και η συνάρτηση  $f(x) = (t_1 - x)^3 + \dots + (t_5 - x)^3$

α) Να μελετήσετε την  $f$  ως προς την μονοτονία

β) Να δείξετε ότι  $f'(\bar{x}) = -15s^2$

γ) Να δείξετε ότι  $f''(\bar{x}) = 30(\bar{x} - x)$

δ) Αν οι παρατηρήσεις είναι 0, 2, 4, 4, 5 να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f'$  στο  $x_0 = \bar{x}$

**279.**

Έστω η συνάρτηση  $f(x) = x^3 - \sqrt{s} \cdot x^2 + \frac{1}{30} \bar{x} \cdot x + 2010$ , όπου  $\bar{x}, s$  η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση ενός δείγματος με  $\bar{x} > 0$ .

α) Αν είναι γνωστό ότι η  $f$  δεν παρουσιάζει ακρότατα να δείξετε ότι το δείγμα είναι ομοιογενές.

β) Αν είναι επίσης γνωστό ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο της με τετμημένη 0 είναι παράλληλη στην ευθεία  $y = \frac{1}{3}x + 2$ , και το άθροισμα όλων των παρατηρήσεων του δείγματος είναι 200, τότε να βρείτε το μέγεθος του δείγματος.

**280.**

Οι βαθμοί των φοιτητών στο μάθημα της Στατιστικής ακολουθούν την κανονική κατανομή με μέση τιμή ίση με το  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^3 - 6x^2 - 6x + 4}{x^2 - x - 2}$  και τυπική απόκλιση που είναι ίση με την ελάχιστη τιμή του συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f(x) = \ln(x-1) + \frac{x^2}{2} - 2x$

α) Να υπολογισθούν η μέση τιμή  $\bar{x}$  και η τυπική απόκλιση  $s$  του δείγματος  $A$ , όπου  $A$  οι βαθμοί των φοιτητών.

β) Να υπολογισθούν η διάμεσος  $\delta$  και το εύρος  $R$  (κατά προσέγγιση) του δείγματος  $A$ .

γ) Να βρεθεί ο συνολικός αριθμός των φοιτητών εάν γνωρίζουμε ότι 163 φοιτητές έχουν βαθμό τουλάχιστον 5 και το πολύ 8.

δ) Ο καθηγητής αποφάσισε να μειώσει κατά  $k$  μονάδες,  $k \in \mathbb{N}$ , τους βαθμούς όλων των φοιτητών λόγω αντιγραφής. Αν το ποσοστό των φοιτητών που δεν πέρασε το μάθημα (βαθμός κάτω από 5) αυξήθηκε κατά 34% :

i) Να βρεθεί ο  $k$ .

ii) Αν υποθέσουμε ότι  $B$  είναι το δείγμα της νέας βαθμολογίας των φοιτητών να βρεθεί εάν το δείγμα  $B$  είναι ομοιογενές, καθώς επίσης και πιο από τα δύο δείγματα έχει μεγαλύτερη ομοιογένεια

281.

Έστω  $t_1, t_2, \dots, t_n$  οι παρατηρήσεις ενός δείγματος μεγέθους  $n$ ,  $\bar{x}$  η μέση τιμή τους,  $s^2$  η διακύμανση και η συνάρτηση  $f(x) = -\frac{1}{3}[(t_1-x)^3 + \dots + (t_n-x)^3]$ ,  $x \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι  $s^2 = \frac{f'(\bar{x})}{n}$

β) Αν ισχύει  $f''(2\bar{x}) = 100$  να βρείτε το άθροισμα  $\sum_{i=1}^n t_i$

γ) Να αποδείξετε ότι  $s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i^2 - (\bar{x})^2$

δ) Αν  $\sum_{i=1}^n t_i^3 = 6030$  να δείξετε ότι εφαπτομένη της  $C_f$  στο σημείο  $A(0, f(0))$  είναι η  $y = n[(\bar{x})^2 + s^2]x - 2010$