Άσκηση 6

Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων:

i. $f(x) = -2x^4 + 3\alpha x^2 - 5x + \beta$

ΛΥΣΗ

$$f'(x)=(-2x^4+3\alpha x^2-5x+\beta)'=-(2x^4)'+(3\alpha x^2)'-(5x)'+(\beta)'=-8x^3+6\alpha x-5$$

ii. $f(x) = \sqrt[3]{x} - \dfrac{3}{x^3}$

ΛΥΣΗ

Πρέπει το x>0

$$f'(x)=(\sqrt[3]{x}-\frac{3}{x^3})'=(\sqrt[3]{x})'-(\frac{3}{x^3})'=(x^{\frac{2}{3}})'-(3x^{-3})=\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}+9x^{-3-1}=\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}}+9x^{-4}=\frac{2}{3}\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}+\frac{9}{x^4}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}+\frac{9}{x^4}$$

iii. $f(x) = \sqrt{\alpha x} \cdot \eta\mu x$

ΛΥΣΗ

Πρέπει αx>0

$$f'(x)=(\sqrt{\alpha x}*\eta\mu x)'=(\sqrt{\alpha x})'*\eta\mu x+(\sqrt{\alpha x})*(\eta\mu x)'=(\sqrt{\alpha x})'*\eta\mu x+(\sqrt{\alpha x})*\sigma\upsilon\nu x=\sqrt{a}(\sqrt{x})'*\eta\mu x+(\sqrt{\alpha x})*\sigma\upsilon\nu x\Leftrightarrow$$

$$f'(x)=\frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{x}}*\eta\mu x+(\sqrt{\alpha x})*\sigma\upsilon\nu x$$

iv. $f(x) = \dfrac{\eta\mu x}{2x+1}$

ΛΥΣΗ

Πρέπει

$$2x+1\neq 0\Leftrightarrow x\neq\frac{-1}{2}$$

$$f'(x)=(\frac{\eta\mu x}{2x+1})'=\frac{(\eta\mu x)'*(2x+1)-\eta\mu x*(2x+1)'}{(2x+1)^2}=\frac{\sigma\upsilon\nu x*(2x+1)-2\eta\mu x}{(2x+1)^2}=\frac{2x\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu x-2\eta\mu x}{(2x+1)^2}$$

v. $f(x) = (x+1)^8$

ΛΥΣΗ

$$f'(x)=((x+1)^8)'=((x+1)^8)'*(x+1)'=8(x+1)^7$$

vi. $f(x) = \sqrt{\alpha x + 2}$

ΛΥΣΗ

Πρέπει

$$\alpha x+2\geq 0\Leftrightarrow x\geq\frac{-2}{\alpha}\,\alpha\nu\,\alpha\geq 0\,\kappa\alpha\iota\,x\leq\frac{-2}{\alpha}\,\alpha\nu\,\alpha<0$$

$$f'(x)=(\sqrt{\alpha x+2})'=(\sqrt{\alpha x+2})'*(\alpha x+2)'=\frac{\alpha}{2\sqrt{\alpha x+2}}$$

vii. $f(x) = \sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}$

ΛΥΣΗ
Πρέπει

$\alpha x^2+\beta x+\gamma \neq 0$,

$Έστω\, \alpha x^2+\beta x+\gamma=0$

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma\, και\, θα\, βρω\, τις\, λύσεις\,.$

$Θα\, κάνω\, πινακάκι\, τιμών\, και\, θα\, δεχτώ\, μόνο\, τις\, θετικές\, τιμές\,.$

$$f'(x)=(\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma})'=(\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma})'*(\alpha x^2+\beta x+\gamma)'=\frac{1}{2\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}*(2\alpha x+\beta)=\frac{2\alpha x+\beta}{2\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}$$

Άσκηση 7

Αν $f(x)=A\,\eta\mu\,\omega x+B\,\sigma\upsilon\nu\,\omega x$ να δείξετε ότι: $f''(x)+\omega^2 f(x)=0$

ΛΥΣΗ

Θα ξεκινήσω να βρω την πρώτη παράγωγο και στην συνέχεια την δεύτερη.

Έχουμε

$$f'(x)=(A\eta\mu\omega x+B\sigma\upsilon\nu\omega x)'=(A\eta\mu\omega x)'+(B\sigma\upsilon\nu\omega x)'=A(\eta\mu\omega x)'+B(\sigma\upsilon\nu\omega x)'\Leftrightarrow$$
$$f'(x)=A\omega\sigma\upsilon\nu\omega x-B\omega\eta\mu\omega x$$

Ξαναπαραγωγίζουμε

$$f''(x)=(A\omega\sigma\upsilon\nu\omega x-B\omega\eta\mu\omega x)''=A\omega(\sigma\upsilon\nu\omega x)'-B\omega(\eta\mu\omega x)'=A\omega(-\eta\mu\omega x*(\omega x)')-B\omega(\sigma\upsilon\nu\omega x*(\omega x)')$$
$$f''(x)=-A\omega^2\eta\mu\omega x-B\omega^2\sigma\upsilon\nu\omega x$$

Αρα

$$f''(x)+\omega^2 f(x)=-A\omega^2\eta\mu\omega x-B\omega^2\sigma\upsilon\nu\omega x+\omega^2(A\eta\mu\omega x+B\,\sigma\upsilon\nu\omega x)=¿$$
$$-A\omega^2\eta\mu\omega x-B\omega^2\sigma\upsilon\nu\omega x+A\omega^2\eta\mu\omega x+B\omega^2\sigma\upsilon\nu\omega x=0$$

Επομένως ισχύει `f''( x )+ω²f( x )= 0`

Άσκηση 8

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f(x)>0$, $f(1)=3$ και $f'(1)=0$ να δείξετε ότι για τη συνάρτηση

$g(x)=\sqrt{f(x)+x^2}$

ισχύει $g'(1)=\frac{1}{2}$

ΛΥΣΗ

Καταρχήν πρέπει να ισχύει $f(x)+x^2\geq 0$

Ξεκινάμε να παραγωγίσουμε την g(x)

$$g'(x)=(\sqrt{f(x)+x^2})'=\frac{1}{2*\sqrt{f(x)+x^2}}*(f(x)+x^2)'=\frac{f'(x)+2x}{2*\sqrt{f(x)+x^2}}$$

Αφού βρήκαμε την παράγωγο της g(x), πάμε να βρούμε και την τιμή της g’(1)

$g'(1)=\frac{f'(1)+2*1}{2*\sqrt{f(1)+1^2}}$ θα κάνουμε τις αντικαταστάσεις όπου f'(1)=0 και f(1)=3 δηλαδή

$$g'(1)=\frac{0+2}{2*\sqrt{3+1}}=\frac{2}{2*\sqrt{4}}=\frac{1}{2}$$

Επομένως ισχύει

$$g'(1)=\frac{1}{2}$$