Άσκηση 7
Να υπολογίσετε τα όρια:
1) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{2x-4}$
ΛΥΣΗ
Παρατηρούμε ότι $2\notin A$ και αν κάνουμε αντικατάσταση όπου x=2 προκύπτει απροσδιόριστη μορφή 0/0. Για τον υπολογισμό του ορίου θα κάνουμε τους εξής μετασχηματισμούς

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{2x-4}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2^2}{2(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{2(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{2}=\frac{2+2}{2}=\frac{4}{2}=2$$

$$\text{Άρα}$$
$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{2x-4}=2$$

2) $\lim_{x\to 4}\frac{2x^2-32}{4-x}$
ΛΥΣΗ
Παρατηρούμε ότι $4\notin A$ και αν κάνουμε αντικατάσταση όπου x=4 προκύπτει απροσδιόριστη μορφή 0/0. Για τον υπολογισμό του ορίου θα κάνουμε τους εξής μετασχηματισμούς

$$\lim_{x\to 4}\frac{2x^2-32}{4-x}=\lim_{x\to 4}\frac{2(x^2-16)}{-(x-4)}=\lim_{x\to 4}\frac{2(x^2-4^2)}{-(x-4)}=\lim_{x\to 4}\frac{2(x-4)(x+4)}{-(x-4)}=\lim_{x\to 4}-2(x+4)=-2(4+4)=-16$$
$$\text{Άρα}$$
$$\lim_{x\to 4}\frac{2x^2-32}{4-x}=-16$$

3) $\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{9-x^2}$
ΛΥΣΗ
Για τον υπολογισμό του ορίου θα κάνουμε αντικατάσταση

$$\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{9-x^2}=\frac{\sqrt{9}-3}{9-9^2}=\frac{3-3}{9-81}=\frac{0}{-72}=0$$

$$\text{Δηλαδή}$$
$$\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{9-x^2}=0$$

4) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}}{x^2-3x+2}$

ΛΥΣΗ
Παρατηρούμε ότι $1 \notin A$ και αν κάνουμε αντικατάσταση όπου x=1 προκύπτει απροσδιόριστη μορφή 0/0. Για τον υπολογισμό του ορίου θα κάνουμε τους εξής μετασχηματισμούς

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}}{x^2-3x+2}$$

Πάμε να μετασχηματίσουμε τον παρονομαστή.

$$x^2-3x+2=0$$
$$\text{Θα βρώ διακρίνουσα}$$
$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-3)^2-4*1*2=9-8=1, \Delta>0$$
$$x_{1,2}=\frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-3)\pm\sqrt{1}}{2*1}=\frac{3\pm 1}{2}$$
$$x_1=\frac{3+1}{2}=\frac{4}{2}=2$$
$$x_2=\frac{3-1}{2}=\frac{2}{2}=1$$
$$\text{Άρα } x^2-3x+2=(x-2)(x-1)$$

Πάμε να κάνουμε μετασχηματισμό στο όριο

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}}{x^2-3x+2}=\lim_{x \to 1} \frac{(\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1})(\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1})}{(x-2)(x-1)(\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1})}=\lim_{x \to 1} \frac{(x+3)-(3x+1)}{(x-2)(x-1)(\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1})}=¿$$
$$\lim_{x \to 1} \frac{-2x+2}{(x-2)(x-1)(\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1})}=-2*\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{(x-2)(x-1)(\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1})}=¿$$
$$-2*\lim_{x \to 1} \frac{1}{(x-2)(\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1})}=-2*(\frac{1}{(1-2)(\sqrt{1+3}+\sqrt{3*1+1})})=-2*(\frac{1}{(-1)(\sqrt{4}+\sqrt{4})})=¿$$
$$\frac{2*1}{4}=\frac{1}{2}$$

Άρα

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}}{x^2-3x+2}=\frac{1}{2}$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Το ανάποδο ερωτηματικό εμφανίζεται γιατί δεν υπάρχει κάτι μετά το =.

5) $\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{6x^2+x-2}{1-\sqrt{2x}}$

ΛΥΣΗ
Παρατηρούμε ότι $\frac{1}{2} \notin A$ και αν κάνουμε αντικατάσταση όπου x=1/2 προκύπτει απροσδιόριστη μορφή 0/0. Για τον υπολογισμό του ορίου θα κάνουμε τους εξής μετασχηματισμούς
Πάμε να μετασχηματίσουμε τον αριθμητή

$$6x^2+x-2=0$$

Θα βρω διακρίνουσα και μετά τις ρίζες που μηδενίζουν .

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=1^2-4*(-2)*6=1+48=49 \text{ άρα } \Delta>0$$

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-1\pm\sqrt{49}}{2*6}=\frac{-1\pm 7}{2*6}=\frac{-1\pm 7}{12}$$

$$x_1=\frac{-1+7}{12}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$$

$$x_2=\frac{-8}{12}=\frac{-2}{3}$$

$$\text{Άρα έχουμε } 6x^2+x-2=6(x-\frac{1}{2})(x+\frac{2}{3})$$

Πάμε να το αντικαταστήσουμε στο όριο και να κάνουμε και τους μετασχηματισμούς

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{6x^2+x-2}{1-\sqrt{2x}}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{6(x-\frac{1}{2})(x+\frac{2}{3})(1+\sqrt{2x})}{(1-\sqrt{2x})(1+\sqrt{2x})}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{6(x-\frac{1}{2})(x+\frac{2}{3})(1+\sqrt{2x})}{1-2x}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{6(x-\frac{1}{2})(x+\frac{2}{3})(1+\sqrt{2x})}{-2(x-\frac{1}{2})}$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{6(x+\frac{2}{3})(1+\sqrt{2x})}{-2}=\frac{6(\frac{1}{2}+\frac{2}{3})(1+\sqrt{2*(\frac{1}{2})})}{-2}=-3(\frac{3}{6}+\frac{4}{6})(1+1)=-6(\frac{7}{6})=-7$$

Άρα

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{6x^2+x-2}{1-\sqrt{2x}}=-7$$