MATHEMATICS

Pure mathematics is, in its way, the poetry of logical ideas.

ΕΦΑΠΤΟΜΈΝΗ ΓΡΑΦΙΚΉΣ ΠΑΡΆΣΤΑΣΗΣ

Στην παράγραφο Η Έννοια της Παραγώγου είδαμε ότι η κλίση α της εφαμπτομένης της C_f στο σημείο A ισούται με την τιμή της παραγώγου στο x_0, δηλαδή:

$$\alpha = f'\left(x_0\right).$$

Έστω συνάρτηση f, σημείο $A\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ της γραφικής παράστασης C_f και ε η εφαπτομένη της C_f στο A. Για τον προσδιορισμό της εξίσωση $y = \alpha x + \beta$ της ευθείας ε χρησιμοποιούμε:

1. το γεγονός ότι $\alpha = f'\left(x_0\right)$
2. το γεγονός ότι η ευθεία ε διέρχεται από το A και άρα οι συντεταγμένες $\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας.

Άσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση

$$f\left(x\right) = \frac{1}{2}x^2 + x - 1.$$

Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $\left(1, f\left(1\right)\right)$.

Λύση

Έστω $y = \alpha x + \beta$ η εξίσωση της εφαπτομένης ε της C_f στο σημείο $\left(1, f\left(1\right)\right)$. Αρχικά έχουμε:

$$f\left(1\right) = \frac{1}{2}1^2 + 1 - 1 = \frac{1}{2}$$

άρα το σημείο της C_f στο οποίο αναζητούμε την εφαπτομένη είναι το $\left(1, 1/2\right)$. Η παράγωγος της f είναι:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 + x - 1\right)' = \frac{1}{2}\left(x^2\right)' + (x)' - (1)' = \frac{1}{2}2x + 1$$
$$\Rightarrow \boxed{f'(x) = x + 1}$$

άρα ο συντελεστής διεύθυνσης θα είναι:

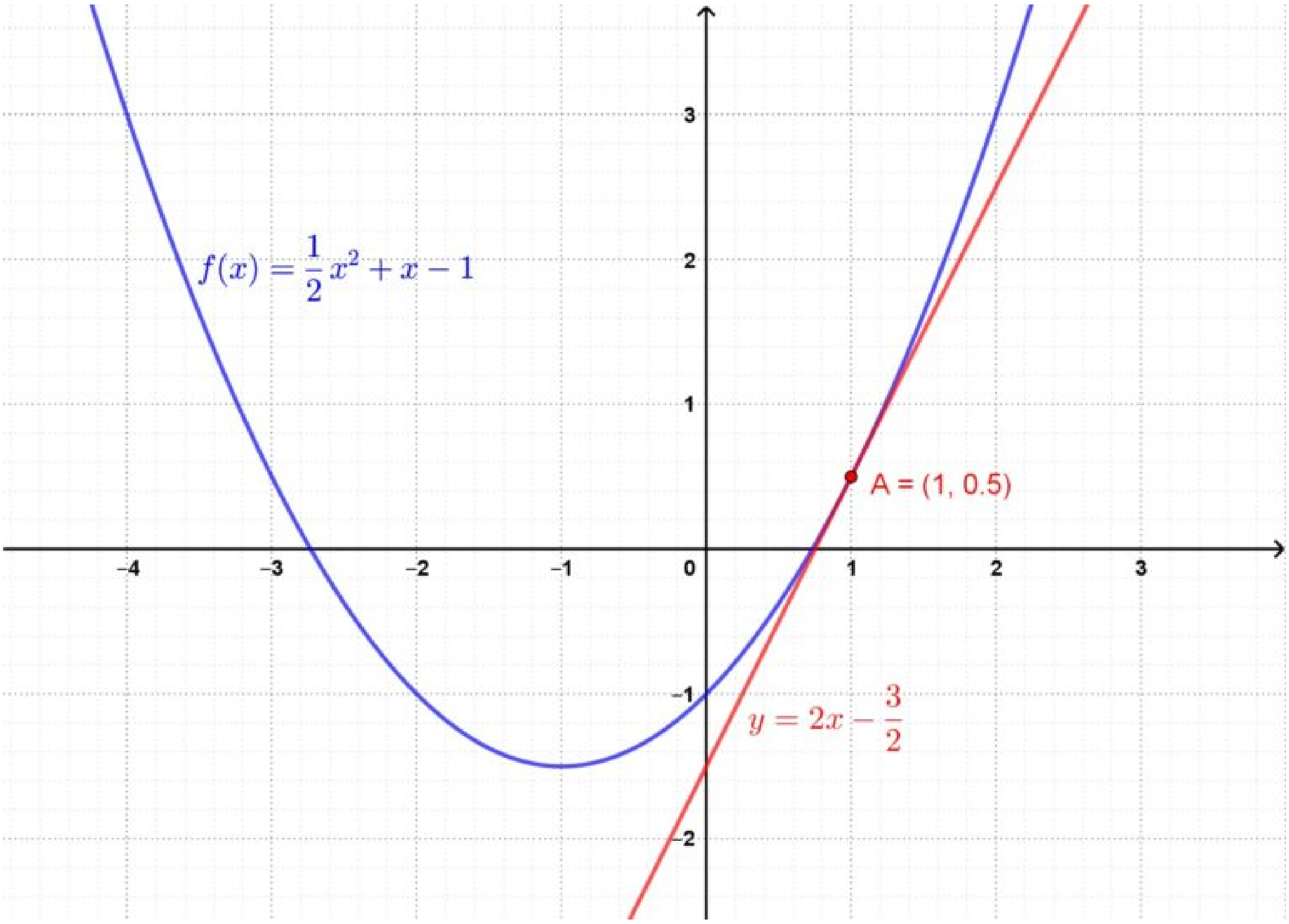
$$\alpha = f'(1) \Rightarrow \boxed{\alpha = 2}.$$

Η εξίσωση της ε έχει τότε τη μορφή: $y = 2x + \beta$. Το σημείο $(1, 1/2)$ είναι σημείο της ευθείας, άρα για $x = 1$ πρέπει $y = 1/2$. Οπότε θα έχουμε:

$$y = 2x + \beta \Rightarrow \frac{1}{2} = 2 + \beta \Rightarrow \boxed{\beta = -\frac{3}{2}}$$

επομένως η εξίσωση της εφαπτομένης είναι η:

$$y = 2x - \frac{3}{2}$$



-Τέλος Λύσης-

Άσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση

$$f\left(x\right)=\lambda x^2+2x+1.$$

Να βρεθεί η τιμή του λ ώστε η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $\left(1,f\left(1\right)\right)$ να τέμνει τον άξονα τον $x'x$ στο σημείο σημείο $x=1/4$.

Λύση

Έστω $y=\alpha x+\beta$ η εξίσωση της εφαπτομένης ε της C_f στο σημείο $\left(1,f\left(1\right)\right)$. Αρχικά έχουμε:

$$f\left(1\right)=\lambda\cdot 1^2+2\cdot 1+1=\lambda+3$$

άρα το σημείο της C_f στο οποίο αναζητούμε την εφαπτομένη είναι το $\left(1,\lambda+3\right)$. Η παράγωγος της f είναι:

$$\begin{aligned} f'\left(x\right)&=\left(\lambda x^2+2x+1\right)'=\lambda\left(x^2\right)'+2\left(x\right)'+\left(1\right)'=2\\ &\Rightarrow\boxed{f'\left(x\right)=2\lambda x+2}\end{aligned}$$

επομένως ο συντελεστής διεύθυνσης θα είναι:

$$\alpha=f'\left(1\right)\Rightarrow\boxed{\alpha=2\lambda+2}.$$

Η εξίσωση της ε έχει τότε τη μορφή: $y=\left(2\lambda+2\right)x+\beta$. Το σημείο $\left(1,\lambda+3\right)$ είναι σημείο της ευθείας, δηλαδή για $x=1$ πρέπει $y=\lambda+3$. Οπότε θα έχουμε:

$$y=\left(2\lambda+2\right)x+\beta\Rightarrow\lambda+3=2\lambda+2+\beta\Rightarrow\boxed{\beta=-\lambda+1}$$

άρα η εξίσωση της εφαπτομένης έχει τη μορφή:

$$y=\left(2\lambda+2\right)x-\lambda+1.$$

Επιπλέον, απαιτείται η παραπάνω ευθεία να τέμνει τον άξονα $x'x$ στο $x=\frac{1}{4}$, δηλαδή θα πρέπει για $x=\frac{1}{4}$ να είναι $y=0$. Με αντικατάσταση στην εξίσωση ευθείας παίρνουμε:

Λύση

Αρχικά παρατηρούμε ότι το σημείο A δεν είναι σημείο της C_f διότι $f\left(1\right)=1^2-2+2=1\neq 0$. Έστω $B\left(x_0,f\left(x_0\right)\right)$ σημείο της C_f και $y=\alpha x+\beta$ η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο B. Αρχικά έχουμε:

$$f\left(x_0\right)=x_0^2-2x_0+2$$

άρα το σημείο της C_f στο οποίο αναζητούμε την εφαπτομένη είναι το $B\left(x_0,x_0^2-2x_0+2\right)$. Η παράγωγος της f είναι:

$$f'\left(x\right)=\left(x^2-2x+2\right)'=\left(x^2\right)'-2\left(x\right)'+\left(2\right)'\Rightarrow\boxed{f'\left(x\right)=2x-2}.$$

άρα ο συντελεστής διεύθυνσης στο τυχαίο σημείο B θα είναι:

$$\alpha=f'\left(x_0\right)\Rightarrow\boxed{\alpha=2x_0-2}.$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης έχει τότε τη μορφή: $y=\left(2x_0-2\right)x+\beta$. Το σημείο $B\left(x_0,x_0^2-2x_0+2\right)$ είναι σημείο της ευθείας, άρα για $x=x_0$ πρέπει $y=x_0^2-2x_0+2$. Οπότε θα έχουμε:

$$\begin{aligned}&y=\left(2x_0-2\right)x+\beta\\&\quad\Rightarrow x_0^2-2x_0+2=\left(2x_0-2\right)x_0+\beta\\&\quad\Rightarrow x_0^2-2x_0+2=2x_0^2-2x_0+\beta\\&\quad\Rightarrow\boxed{\beta=-x_0^2+2}\end{aligned}$$

επομένως η εξίσωση της εφαπτομένης στο τυχαίο σημείο B εκφράζεται ως εξής:

$$y=\left(2x_0-2\right)x-x_0^2+2.$$

Η παραπάνω ευθεία θέλουμε να διέρχεται από το σημείο $A\left(1,0\right)$, άρα για $x=1$ πρέπει $y=0$. Με αντικατάσταση στην εξίσωση ευθείας παίρνουμε:

$$\begin{aligned}\left(2x_0-2\right)\cdot 1-x_0^2+2&=0\\-x_0^2+2x_0&=0\\x_0\left(2-x_0\right)&=0\\\boxed{x_{01}=0}&\\ \acute{\eta}&\\\boxed{x_{02}=2}&\end{aligned}$$

Δίνεται η συνάρτηση

$$f\left(x\right)=\sqrt{2x-1}$$

Να βρεθεί η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A\left(5,f\left(5\right)\right)$ καθώς και τα σημεία τομής της εφαπτομένης με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

Άσκηση 6

Δίνεται η συνάρτηση

$$f\left(x\right)=\frac{1}{x}$$

και το σημείο $A\left(-1,1\right)$. Να βρεθούν οι εφαπτομένες της C_f που διέρχονται από το σημείο A.

Στείλε την προσπάθειά σου

$$
\begin{aligned}
y &= (2\lambda + 2)\,x - \lambda + 1 \\
&\Rightarrow (2\lambda + 2)\,\frac{1}{4} - \lambda + 1 = 0 \\
&\Rightarrow 2\lambda + 2 - 4\lambda + 4 = 0 \\
&\Rightarrow -2\lambda + 6 = 0 \\
&\Rightarrow \boxed{\lambda = 3}
\end{aligned}
$$

οπότε για $\lambda = 3$ η εφαπτομένη της C_f στο $(1, f\,(1))$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στο $x = \frac{1}{4}$.

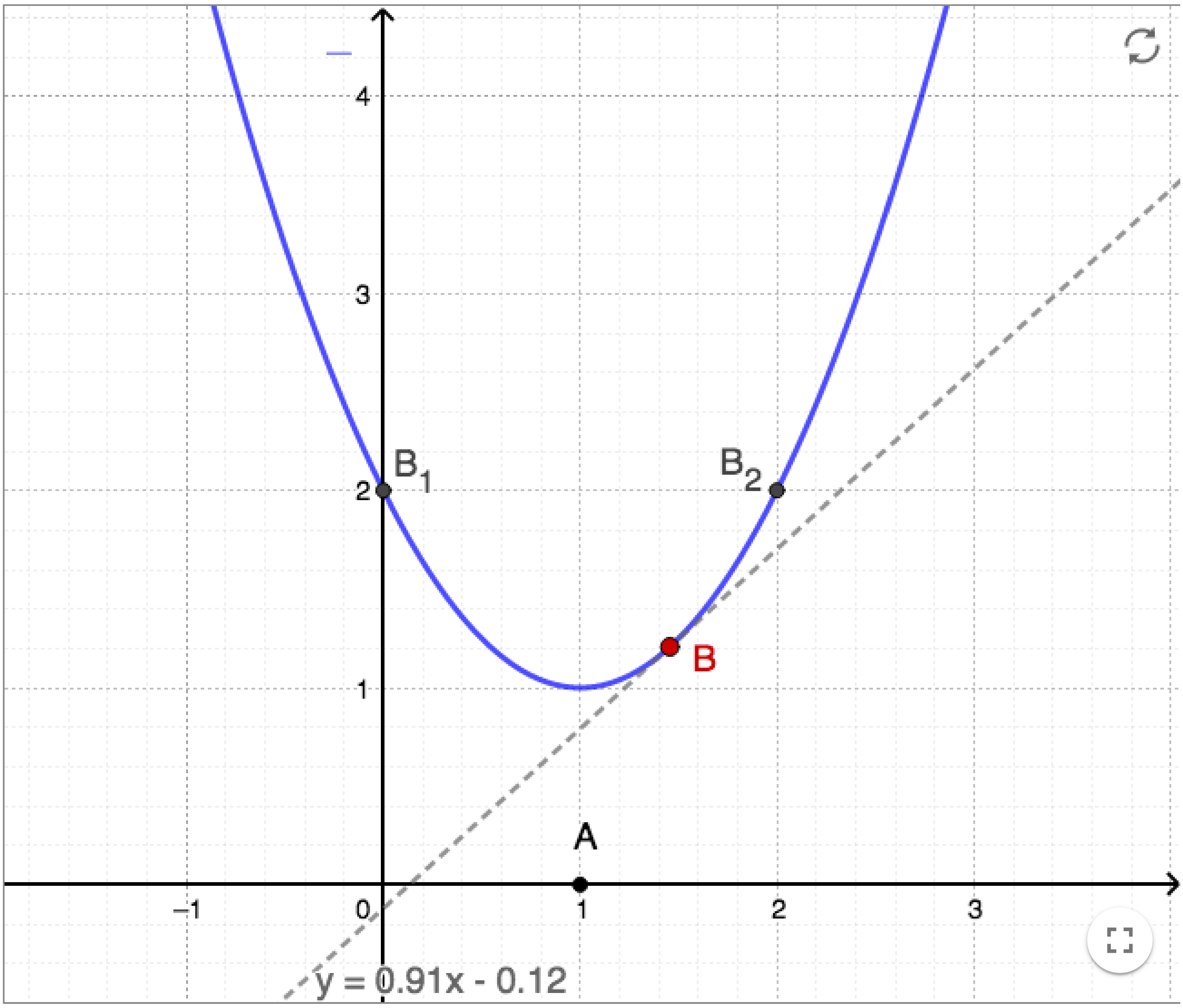
-Τέλος Λύσης-

Άσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση

$$f\,(x) = x^2 - 2x + 2$$

και το σημείο $A\,(1, 0)$. Να βρεθούν οι εφαπτομένες της C_f που διέρχονται από το σημεί οπότε υπάρχουν δύο σημεία της C_f των οποίων η εφαπτομένη διέρχεται από το σημείο A, το $B_1\left(0, f\left(0\right)\right) = \left(0, 2\right)$ και το $B_2\left(2, f\left(2\right)\right) = \left(2, 2\right)$. Οι εξισώσεις των εφαπτόμενων ευθειών στα σημεία B_1 και B_2 είναι η $y = -2x + 2$ και η $y = 2x - 2$ αντίστοιχα.



-Τέλος Λύσης-

Προσπαθήστε μόνοι σας

Άσκηση 4

Δίνεται η συνάρτηση

$$f\left(x\right) = x^3 - 2x + 1$$

Να βρεθεί η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A\left(0, f\left(0\right)\right)$

Άσκηση 5