Άσκηση 4
Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:
$$f(x)=\begin{cases} x^3+2x^2\,, & x\neq 1 \\ 3\,, & x=1 \end{cases}$$
είναι συνεχής στο $x_0=1$.
ΛΥΣΗ
Για να είναι συνεχής η συνάρτηση στο x_0=1 πρέπει
$$\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)$$
Παρατηρούμε ότι
f(1)=3
και
$$\lim_{x\to 1} x^3+2x^2=1^3+2*1^2=1+2=3$$

άρα
$$\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)$$

Επομένως η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0=1$.

Άσκηση 5
Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:
$$f(x)=\begin{cases} 2x^2+x+1\,, & x<-1 \\ -3x-2\,, & x\geqslant -1 \end{cases}$$
δεν είναι συνεχής στο $x_0=-1$.
ΛΥΣΗ
Για να είναι συνεχής η συνάρτηση στο x_0=-1 θα πρέπει
$$\lim_{x\to -1} f(x)=f(-1)$$
Παρατηρούμε ότι
f(-1)=-3*(-1)-2=3-2=1

Για x>-1 έχουμε
$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}(-3x-2)=-3*(-1)-2=3-2=1$$

Για x<-1 έχουμε
$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}(2x^2+x+1)=2*(-1)^2+(-1)+1=2-1+1=2$$

άρα
$$\lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f(x)\neq \lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} f(x)$$

Επομένως η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο x_0=-1

Άσκηση 6

Δίνεται η συνάρτηση

$$f\left(x\right)=\begin{cases}2x^2+\alpha x+1\,, & x<1\\ -\alpha x^2+7\,, & x\geqslant 1\end{cases}$$

Να βρεθεί η τιμή του α ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0=1.$

ΛΥΣΗ

Για να είναι συνεχής η συνάρτηση στο $x_0=1$ πρέπει

$$\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)$$

Παρατηρούμε ότι

f(1)=-α*1²+7=-α+7

Για $x>1$ έχουμε

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}(-\alpha x^2+7)=-\alpha*(1)^2+7=-\alpha+7$$

Για $x<1$ έχουμε

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}(2x^2+\alpha x+1)=2*(1)^2+\alpha+1=\alpha+3$$

άρα για να είναι συνεχής στο $x_0=1$ πρέπει

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)\Rightarrow -\alpha+7=\alpha+3\Rightarrow 2\alpha=4\Rightarrow \alpha=2$$

Άσκηση 7

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το $(2,3)$, να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to 2}\frac{f\left(x\right)\left(x-2\right)}{x^2-x-2}$$

ΛΥΣΗ

Η αναφορά ότι η f είναι συνεχής στο R και ότι η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο (2,3) σημαίνουν:

- $Το\,σημείο\,(2,3)\in C_f\Leftrightarrow f(2)=3$
- $\lim_{x\to 2} f(x)=f(2)=3$

Παρατηρούμε ότι $2\notin A$ και αν κάνουμε αντικατάσταση όπου x=2 προκύπτει απροσδιόριστη μορφή 0/0. Για τον υπολογισμό του ορίου θα κάνουμε τους εξής μετασχηματισμούς:

Ας ξεκινήσουμε με τον μετασχηματισμό του παρονομαστή:

$$x^2-x-2=0$$

$$\textit{Με την διακρίνουσα θα βρούμε τις ρίζες}:$$

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-1)^2-4*1*(-2)=1+8=9>0$$

$$\textit{Άρα}$$

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-1)\pm\sqrt{9}}{2*1}=\frac{1\pm3}{2}$$

$$x_1=\frac{1+3}{2}=\frac{4}{2}=2$$

$$x_2=\frac{1-3}{2}=\frac{-2}{2}=-1$$

$$\textit{Και έτσι θα έχουμε τον μετασχηματισμό σε}:$$

$$x^2-x-2=(x-2)(x+1)$$

Πάμε να κάνουμε την αντικατάσταση στο όριο:

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)(x-2)}{x^2-x-2}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)(x-2)}{(x-2)(x+1)}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x+1}=\frac{\lim_{x\to2}f(x)}{\lim_{x\to2}(x+1)}=\frac{f(2)}{2+1}=\frac{3}{3}=1$$

Άρα

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)(x-2)}{x^2-x-2}=1$$