MATHEMATICS

Pure mathematics is, in its way, the poetry of logical ideas.

ΠΡΟΒΛΉΜΑΤΑ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΊΗΣΗΣ

Για την επίλυση προβλημάτων βελτιστοποίησης ακολουθούμε συνήθως τα ακόλουθα βήματα:

1. Σχεδιάζουμε μια εικόνα του σεναρίου αν αυτό είναι δυνατό.
2. Επισημαίνουμε τα μήκη ή τις μεταβλητές στην εικόνα και τυχόν μεταβλητές του προβλήματος.
3. Ξαναδιαβάζουμε το πρόβλημα και γράφουμε τυχόν επιπλέον σχέσεις που συνδέουν τις μεταβλητές.
4. Εντοπίζουμε την ποσότητα που πρέπει να βελτιστοποιήσουμε (μεγιστοποίηση ή ελαχιστοποίηση) και την εκφράζουμε με τη βοήθεια των μεταβλητών.
5. Αν η ποσότητα του βήματος (4) εκφράζεται με παραπάνω από μία μεταβλητές χρησιμοποιούμε τις σχέσεις του βήματος (3) για να την εκφράσουμε σαν συνάρτηση f μίας μεταβλητής.
6. Μελετάμε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Άσκηση 1

Ένας αρχιτέκτονας τοπίου σχεδιάζει να περιφράξει μια ορθογώνια έκταση 2 στρεμμάτων για την κατασκευή ενός βοτανικού κήπου. Στη μία πλευρά της περίφραξης θα χρησιμοποιηθούν θάμνοι που κοστίζουν 15 €/m και στις άλλες τρεις πλευρές θα χρησιμοποιηθεί συρματόπλεγμα που κοστίζει 10 €/m. Να βρεθούν οι διαστάσεις του ορθογωνίου ώστε να ελαχιστοποιείται το κόστος των υλικών της περίφραξης. (1 στρέμμα = 1000 m^2)

Λύση

Στην παρακάτω εφαρμογή δίνεται το ορθογώνιο ΑΒΓΔ που αναπαριστά την έκταση των 2 στρεμμάτων. Η πλευρά $AB=x$ θα περιφραχτεί με θάμνους. Αν $B\Gamma=y$, τότε πρέπει $x\cdot y=2000\,m^2$ άρα $y=2000/x$. Μπορείτε να μετακινήσετε το σημείο B και να δείτε πώς μεταβάλλεται το ορθογώνιο το οποίο έχει σταθερό εμβαδόν. Το κόστος υλικών της πλευράς ΑΒ είναι $15x$ και το κόστος υλικών των υπόλοιπων πλευρών είναι $10\,(x+2y)$ το συνολικό κόστος είναι:

$$K = 15x + 10\left(x + 2y\right) = 25x + 20y.$$

Με αντικατάσταση του $y = 2000/x$ εκφράζουμε το συνολικό κόστος συναρτήσει μόνο της μεταβλητής x, οπότε:

$$K\left(x\right) = 25x + \frac{40000}{x},\ \ x > 0.$$

Θέλουμε να βρούμε τις διαστάσεις του ορθογωνίου ώστε να ελαχιστοποιείται το κόστος, επομένως θα μελετήσουμε την συνάρτηση $K\left(x\right)$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

$$K'(x) = 0 \Rightarrow 25 - \frac{40000}{x^2} = 0 \Rightarrow x = 40.$$

Η αρνητική ρίζα της παραπάνω εξίσωσης απορρίπτεται διότι η μεταβλητή x εκφράζει μήκος ($x > 0$). Για $x = 1 < 40$ έχουμε $K'(1) = 25 - 40000 = -39975 < 0$ και για $x = 100 > 40$ έχουμε $K'(100) = 25 - 4 = 21 > 0$. Επομένως έχουμε τον ακόλουθο πίνακα προσήμων:

x	0	40	$+\infty$
$K'(x)$	$-$		$+$
$K(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Άρα η $K(x)$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο (διότι η εξίσωση $K'(x) = 0$ έχει μία μόνο λύση) στο $x = 40$. Το ελάχιστο κόστος είναι $K(40) = 2000\,E$. Οι διαστάσεις του ορθογωνίου με το ελάχιστο κόστος υλικών περίφραξης είναι $x = 40\,m$ και $y = 2000/40 = 50\,m$.

-Τέλος Λύσης-

Άσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ και το σημείο $A(4, 0)$. Να βρεθεί το σημείο B της C_f το οποίο απέχει την ελάχιστη απόσταση από το σημείο A.

Λύση

Στην παρακάτω εφαρμογή βλέπουμε την γραφική παράσταση της f και τα σημεία A και B. Το σημείο B έχει συντεταγμένες της μορφής $(x, \sqrt{x})$ όπου $x \geqslant 0$. Η απόσταση d των σημείων A και B είναι:

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} \\ &= \sqrt{(4 - x)^2 + \left(0 - \sqrt{x}\right)^2} \\ &= \sqrt{(4 - x)^2 + x} \\ &= \sqrt{x^2 - 7x + 16} \end{aligned}$$

Μπορείτε να μετακινήσετε το σημείο B και να δείτε πώς μεταβάλλεται η απόσταση d. Θα μελετήσουμε τη συνάρτηση

$$d(x) = \sqrt{x^2 - 7x + 16}$$

$$\begin{aligned} d'(x) &= \left(\sqrt{x^2-7x+16}\right)' \\ &= \frac{\left(x^2-7x+16\right)'}{2\sqrt{x^2-7x+16}} \\ &= \frac{2x-7}{2\sqrt{x^2-7x+16}} \end{aligned}$$

Λύνουμε την εξίσωση $d'(x)=0$:

$$\begin{aligned} d'(x) &= 0 \\ \frac{2x-7}{2\sqrt{x^2-7x+16}} &= 0 \\ 2x-7 &= 0 \\ x &= \frac{7}{2} = 3.5 \end{aligned}$$

Για $x=0<3.5$ έχουμε $d'(0)=-7/8<0$ και για $x=4$ έχουμε $d'(4)=1/4>0$. Επομένως έχουμε τον ακόλουθο πίνακα προσήμων:

x	0	$\frac{7}{2}$	$+\infty$
$d'(x)$	$-$		$+$
$d(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Άρα η $d(x)$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο (διότι η εξίσωση $d'(x)=0$ έχει μία μόνο λύση) στο $x=7/2$. Η ελάχιστη απόσταση είναι $d(7/2)=\sqrt{15}/2\approx 1.94$.

-Τέλος Λύσης-

Προσπαθήστε μόνοι σας

Άσκηση 3

Δίνεται η ευθεία $y=x+4$. Να βρεθεί το σημείο της ευθείας που απέχει την ελάχιστη απόσταση από την αρχή των αξόνων.

Άσκηση 4

Από το σύνολο των ευθειών που διέρχονται από το σημείο $(1,2)$ να βρεθεί η ευθεία που σχηματίζει με τους θετικούς ημιάξονες τρίγωνο με το ελάχιστο δυνατό εμβαδόν.

Άσκηση 5

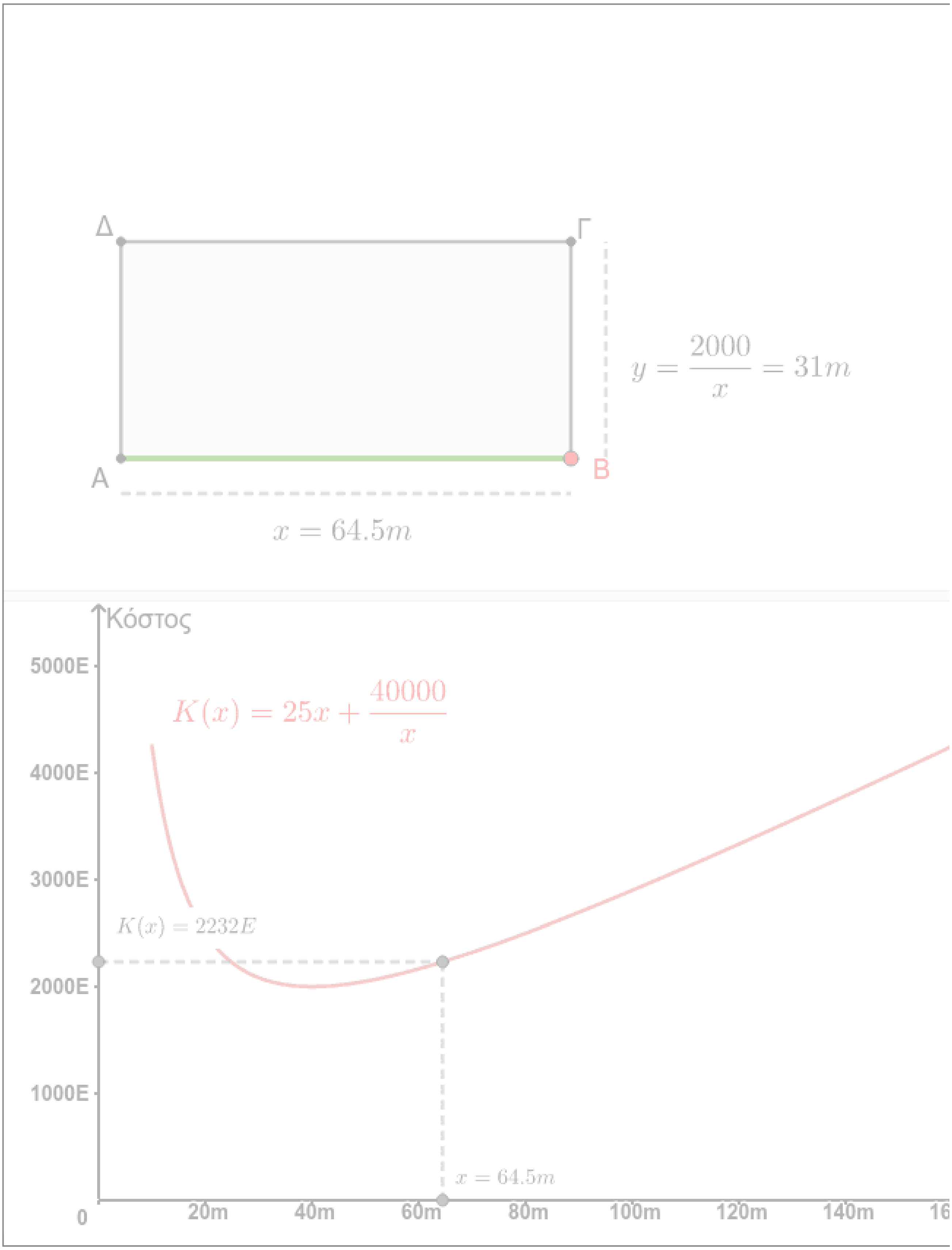
Έστω C_f η γραφική παράσταση της συνάρτηση $f\left(x\right)=9-x^2$ με $x\in\left[-3,3\right]$. Έστω E το εμβαδόν του ορθογωνίου που έχει δύο κορυφές στον άξονα $x'x$ και δύο κορυφές στην C_f. Να βρεθεί η μέγιστη τιμή του εμβαδού E.

Άσκηση 6

Έστω $x,y\in\mathbb{R}$ με $x+y=K$ σταθερό. Να αποδείξετε ότι

$$x\cdot y\leqslant\frac{K^2}{4}$$

Στείλε την προσπάθειά σου

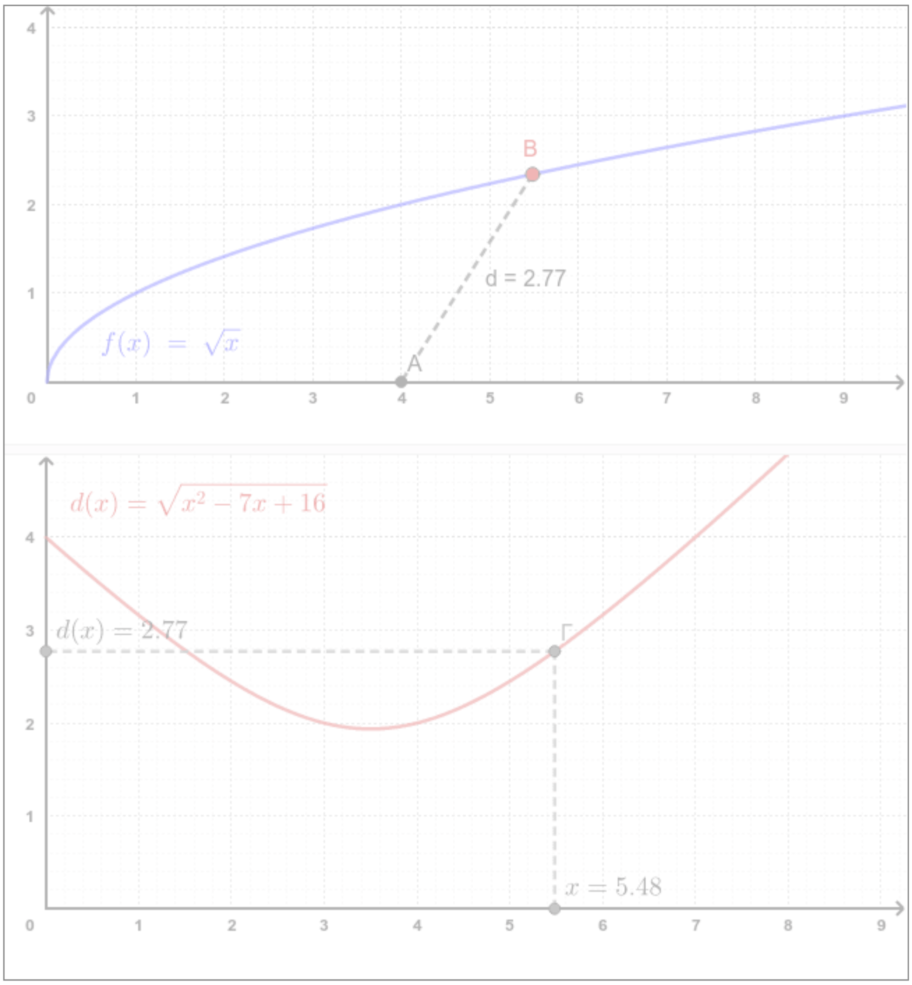


Η παράγωγος της συνάρτησης κόστους είναι:

$$K'(x) = \left(25x + \frac{40000}{x}\right)' = 25 - \frac{40000}{x^2}$$

Λύνουμε την εξίσωση $K'(x) = 0$:

ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. Αρχικά παρατηρούμε ότι το τριώνυμο $x^2-7x+16$ έχει αρνητική διακρίνουσα και άρα είναι θετικό για κάθε $x\in\mathbb{R}$, επομένως το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $d\left(x\right)$ είναι όλο το $\mathbb{R}$. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα μας ενδιαφέρουν τα $x\geqslant 0$ λόγω του ότι $x\geqslant 0$.



Η παράγωγος της $d\left(x\right)$ είναι: