MATHEMATICS

Pure mathematics is, in its way, the poetry of logical ideas.

ΣΤΟΙΧΕΊΑ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΊΑΣ ΚΑΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΈΣ ΣΥΝΑΡΤΉΣΕΙΣ

Τριγωνομετρικοί Αριθμοί Γωνίας

Στην τριγωνομετρία χρησιμοποιούμε τα Ακτίνια (rad) ως μονάδα μέτρησης γωνιών. Ορίζουμε $1\ rad$ να είναι η επίκεντρη γωνία που βαίνει σε τόξο ίσο με την ακτίνα του κύκλου. Αν μια γωνία ω είναι μ μοίρες και r rad, τότε ισχύει:

$$\frac{r}{\pi} = \frac{\mu}{180^o}$$

Για τον ορισμό των τριγωνομετρικών αριθμών (*ημ*, *συν*, *εφ* και *σφ*) οποιασδήποτε γωνία χρησιμοποιούμε τον τριγωνομετρικό κύκλο. Ο τριγωνομετρικός κύκλος έχει κέντρο την αρχή των αξόνων $(0, 0)$ και ακτίνα ρ. Θεωρούμε σημείο M του κύκλου το οποίο στρέφουμε κατά τη θετική φορά (αντίθετη των δεικτών του ρολογιού). Αν (x, y) είναι οι συντεταγμένες του M, τότε ορίζουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\omega = A\widehat{O}M$ από τις σχέσεις:

$$\eta\mu\omega = \frac{y}{\rho} \tag{1}$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{x}{\rho} \tag{2}$$

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{y}{x} \tag{3}$$

$$\sigma\varphi\omega = \frac{x}{y} \tag{4}$$

Με τη βοήθεια της παρακάτω εφαρμογής μπορείτε να δείτε δυναμικά, μετακινώντας το σημείο M, τον υπολογισμό των τριγωνομετρικών αριθμών της γωνία ω. Μπορείτε να μεταβάλετε την ακτίνα του τριγωνομετρικού κύκλου μετακινώντας το σημείο A. Παρατηρούμε ότι οι τριγωνομετρικοί αριθμοί δεν εξαρτώνται από την ακτίνα του τριγωνομετρικού κύκλου αλλά μόνο από τη γωνία ω, για το λόγο αυτό θεωρούμε συνήθω $\rho = 1$.

$\eta\mu\left(2\kappa\pi+\omega\right)=\eta\mu\omega$	$\sigma\upsilon\nu\left(2\kappa\pi+\omega\right)=\sigma\upsilon\nu\omega$
$\varepsilon\varphi\left(2\kappa\pi+\omega\right)=\varepsilon\varphi\omega$	$\sigma\varphi\left(2\kappa\pi+\omega\right)=\sigma\varphi\omega$

Στον παρακάτω πίνακα επαναλαμβάνουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς μερικών γωνιών που είχαμε υπολογίσει στο Γυμνάσιο και οι οποίοι είναι ιδιαίτερα χρήσιμοι στις διάφορες εφαρμογές.

Γωνία ω		**Τριγωνομετρικοί Αριθμοί**			
σε μοίρες	***σε rad***	***ημω***	***συνω***	***εφω***	***σφω***
0^o	0	0	1	0	–
30^o	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45^o	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60^o	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90^o	$\frac{\pi}{2}$	1	0	–	0

Για μια εκτενέστερη επανάληψη στους τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνίας, μπορείτε να συμβουλευτείτε το αντίστοιχο κεφάλαιο της Άλγεβρας Β Λυκείου.

Βασικές Τριγωνομετρικές Ταυτότητες

Στην Άλγεβρα της Β Λυκείου διδαχθήκαμε επίσης τις ακόλουθες τριγωνομετρικές ταυτότητες:

$$\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega=1 \tag{7}$$

$$\varepsilon\varphi\omega=\frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} \tag{8}$$

$$\sigma\varphi\omega=\frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega} \tag{9}$$

$$\varepsilon\varphi\omega\cdot\sigma\varphi\omega=1$$

Με ανάλογες τεχνικές αποδεικνύεται ότι αν θ είναι μία λύση της εξίσωσης $\sigma\upsilon\nu\, x = \alpha$, τότε το σύνολο των άπειρων λύσεων της εξίσωσης δίνεται από τους τύπους:

$$\begin{cases} 2k\pi + \theta \\ 2k\pi - \theta \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z} \tag{14}$$

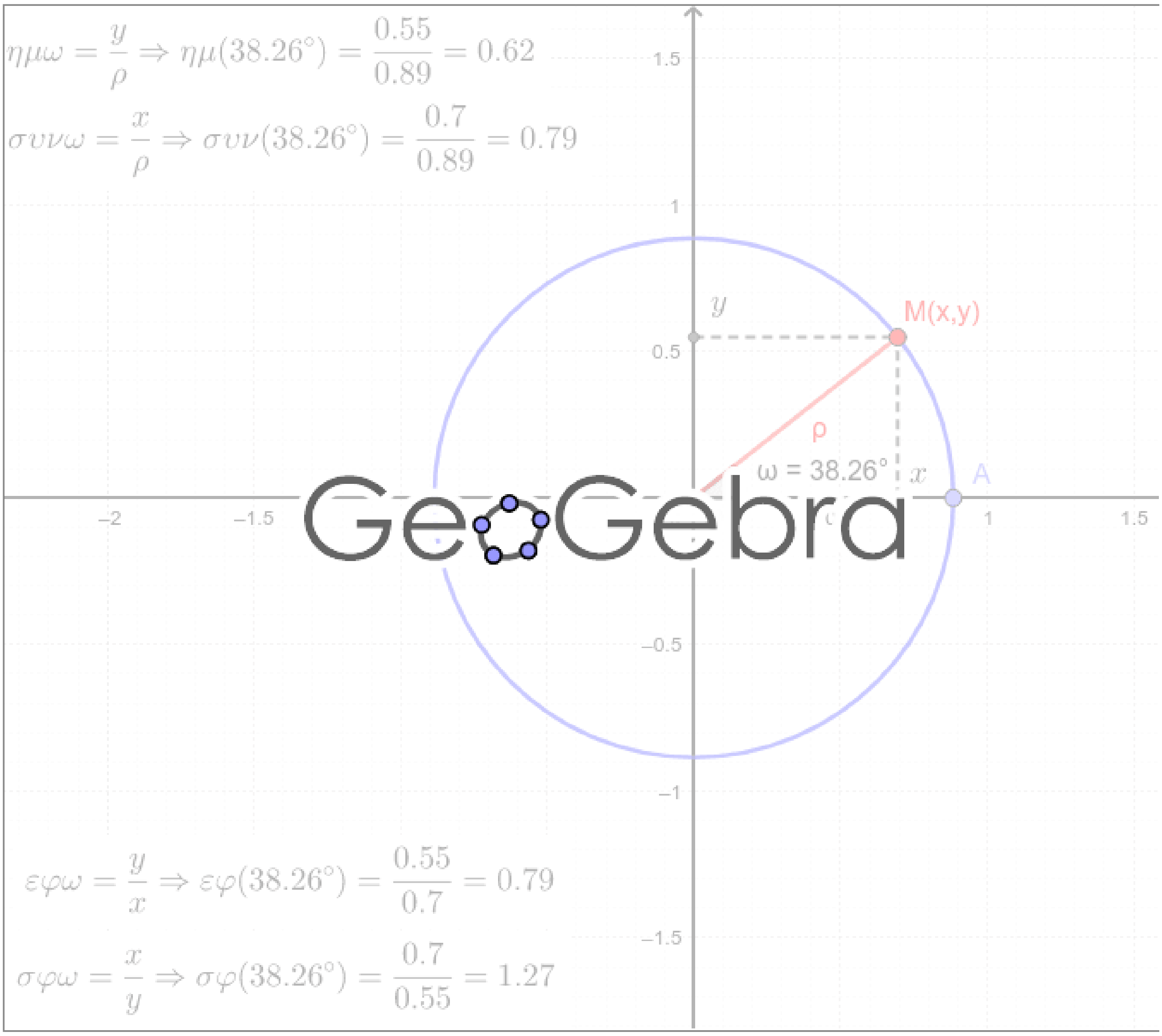
Η Εξίσωση $\varepsilon\varphi\, x = \alpha$

Αν θ είναι μία λύση της εξίσωσης $\varepsilon\varphi\, x = \alpha$, τότε το σύνολο των άπειρων λύσεων της εξίσωσης δίνεται από τον τύπο:

$$\begin{cases} k\pi + \theta \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z} \tag{15}$$

Ο ίδιος τύπος λύσεων ισχύει και για την εξίσωση $\sigma\varphi\, x = \alpha$

Περισσότερες λεπτομέρειες για τις τριγωνομετρικές εξισώσεις καθώς και ασκήσεις μπορείτε να δείτε εδώ.



Οι τιμές του $\sigma\upsilon\nu\omega$ και του $\eta\mu\omega$ μιας γωνίας ω δεν μπορούν να υπερβούν κατ' απόλυτη τιμή την μονάδα. Δηλαδή ισχύει :

$$-1 \leq \eta\mu\omega \leq 1 \tag{5}$$

και

$$-1 \leq \sigma\upsilon\nu\omega \leq 1 \tag{6}$$

Επίσης παρατηρούμε ότι οι συντεταγμένες του σημείου M που αντιστοιχούν στη γωνία ω είναι οι ίδιες με τις συντεταγμένες που αντιστοιχούν στη γωνία $2\pi + \omega$ (ή $360^o + \omega$ αν μετράμε τις γωνίες σε μοίρες), διότι μετά από μία πλήρη περιστροφή επανερχόμαστε στο ίδιο σημείο. Επομένως, οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας $2\pi + \omega$ θα είναι οι ίδιοι με τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω. Αυτό ισχύει, όχι μόνο για μία πλήρη περιστροφή, αλλά και για κ περιστροφές, όπου $\kappa \in \mathbb{Z}$. Έχουμε επομένως το ακόλουθο συμπέρασμα:

$$\sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\omega} \tag{11}$$

$$\eta\mu^2\omega = \frac{\varepsilon\varphi^2\omega}{1+\varepsilon\varphi^2\omega} \tag{12}$$

Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις

Οι γραφικές παραστάσεις των τριγωνομετρικών συναρτήσεων $\eta\mu\, x,\ \sigma\upsilon\nu\, x$ και $\varepsilon\varphi\, x$ παρουσιάζονται στην ακόλουθη εφαρμογή. Παρατηρούμε ότι η $\sigma\upsilon\nu\, x$ προκύπτει από μετατόπιση της $\eta\mu\, x$ κατά $\frac{\pi}{2}$ προς τα δεξιά. Επιπλέον παρατηρούμε ότι η $\varepsilon\varphi\, x$ δεν ορίζεται στα ακέραια πολλαπλάσια του $\frac{\pi}{2}$.

Η γραφική παράσταση της παραμετρικής συνάρτησης $f(x) = A\eta\mu(\omega x + \phi)$ παρουσιάζεται παρακάτω με τη βοήθεια του geogebra. Στα πλαίσια της Μηχανικής η συνάρτηση αυτή εμφανίζεται συνήθως με τη μορφή $x(t) = A\eta\mu(\omega t + \phi)$ και περιγράφει τις γραμμικές αρμονικές ταλαντώσεις. Η ανεξάρτητη μεταβλητή t είναι ο χρόνος και η εξαρτημένη μεταβλητή x η απομάκρυνση. Οι παράμετροι $A,\ \omega$ και ϕ είναι το πλάτος, η γωνιακή συχνότητα και η αρχική φάση της ταλάντωσης. Παρατηρήστε πως μεταβάλλεται η γραφική παράσταση της $f(x) = A\eta\mu(\omega x + \phi)$ καθώς μεταβάλλουμε τις παραμέτρους A, ω και ϕ.

Περισσότερα για τις γραφικές παραστάσεις των τριγωνομετρικών συναρτήσεων μπορείτε να βρείτε στο αντίστοιχο κεφάλαιο της Άλγεβρας Β’ Λυκείου.

Βασικές Τριγωνομετρικές Εξισώσεις

Η Εξίσωση $\eta\mu\, x = \alpha$

Θεωρούμε την τριγωνομετρική συνάρτηση $f\left(x\right) = \eta\mu\, x$ και τη σταθερή συνάρτηση $g\left(x\right) = \alpha$. Η εύρεση των σημείων τομής των C_f και C_g ισοδυναμεί με την επίλυση της εξίσωσης

$$f\left(x\right) = g\left(x\right) \Rightarrow \eta\mu\, x = \alpha$$

Παρατηρούμε ότι αν $\alpha > 1$ ή $\alpha < -1$ δεν υπάρχουν σημεία τομής και η εξίσωση είναι αδύνατη, γεγονός που δικαιολογείται και από τη σχέση (5). Αν $-1 \leq \alpha \leq 1$ παρατηρούμε ότι υπάρχουν άπειρα σημεία τομής και άρα η εξίσωση έχει άπειρες λύσεις.

Αν θ είναι μία λύση της εξίσωσης, τότε το σύνολο των άπειρων λύσεων της $\eta\mu\, x = \alpha$ δίνεται από τους τύπους:

$$\begin{cases} 2k\pi + \theta \\ 2k\pi + \pi - \theta \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z} \tag{13}$$

Η Εξίσωση $\sigma\upsilon\nu\, x = \alpha$