Bilet 1.

1. Semnale

- **Definiție:**

Semnalul reprezintă o mărime fizică, care are proprietatea de a se propaga într-un anumit mediu.

Orice semnal are un conținut informațional, un mesaj destinat unui receptor.

Pe lângă componenta utilă (informațională), semnalele din procesele fizice reale, conțin una sau mai multe componente perturbatoare.

Din punct de vedere matematic, un semnal se descrie prin funcții de timp:

$\boxed{x : T \to M}$ cu $\boxed{t \in T}$ și $\boxed{x(t) \in M}$

sau prin funcții de frecvență:

$\boxed{X : \Omega \to N}$ cu $\boxed{\omega \in \Omega}$ și $\boxed{X(\Omega) \in N}$

=> se poate obt. fc. de Ω din fc. de timp și invers.

- **CLASIFICAREA SEMNALELOR**

a) După domeniul de definiție T al funcțiilor de timp.

$x(t)$: - semnale continue în timp (analogice).

$\boxed{T \subset \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}}$ sau $\boxed{T = \mathbb{R}}$

- semnale discrete (eșantionate).

$\boxed{T \subset \mathbb{Z}, t \in \mathbb{Z}}$ sau $\boxed{T = \mathbb{Z}}$ $\quad t = k T_e$

b) După numărul nivelelor în amplitudine:

- semnale continue în amplitudine

$\boxed{M \in \mathbb{R}}$ și $\boxed{x(t) \in \mathbb{R}}$, M - mulțime infinită ca nr. de elemente.

- semnale cuantificate (cuantizate)

↳ discrete în amplitudine

$\boxed{M \in \mathbb{Z}}$ Semnalul are un număr finit de valori finite ale A.

ex: semnal dinamic (0 și 1).

c) După modul în care se poate predetermina evoluția unui semnal:

- semnale deterministe
- semnale nedeterministe (aleatoare).

Într-un semnal determinist se poate calcula evoluția în timp.

Ex: • semnale periodice: armonice, oarecare
• semnale neperiodice: quasi periodice, tranzitorii (speciale).

Semnalele nedeterministe sunt semnale aleatoare (zgomotul).

→ Un semnal armonic este un semnal de forma:

$$\boxed{x(t) = A\sin(\omega t)}$$

A – amplitudinea semnalului armonic
ω – pulsația –"–
t – argument (de timp).

→ Semnalele periodice oarecare au proprietatea:

$$\boxed{x(t) = x(t \pm mT)}, \quad \boxed{m \in N}, \quad \boxed{T \in R}$$

T – perioada

→ Semnalele neperiodice tranzitorii nu îndeplinesc proprietatea de periodicitate, dar sunt descrise analitic.

Ex: Funcții uzuale în automatică:

• impuls Dirac: $\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t=0 \\ 0, & t \neq 0. \end{cases}$ $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) = 1$

cu propr. de filtrare

• treaptă unitară: $1_+(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$ $\frac{d\,1_+(t)}{dt} = \delta(t)$

• rampa unitară: $x(t) = \begin{cases} t, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$ $\frac{dx(t)}{dt} = 1_+(t)$

• semnalul armonic unitar: $x(t) = \begin{cases} \sin \omega t, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases}$

• parabolă unitară: $x(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases}$

② TRANSFORMATA FOURIER CONTINUĂ

Se consideră un semnal continuu $x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, care admite un nr. finit de discontinuități.

$$\boxed{X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \Phi\{x(t)\}} , \quad \omega \in \mathbb{R}$$

$$X(\omega) \in \mathbb{C}$$

$e^{-j\omega t} = \cos \omega t - j \sin \omega t$, $j = \sqrt{-1}$

↳ TFSA se mai poate scrie sub formă complexă algebrică:

$$X(\omega) = A_x(\omega) - j B_x(\omega) =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos \omega t \, dt - j \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin \omega t \, dt$$

Reconstituirea semnalului original $x(t)$ din spectrul său complex de A se realizează cu Transf. Fourier inversă:

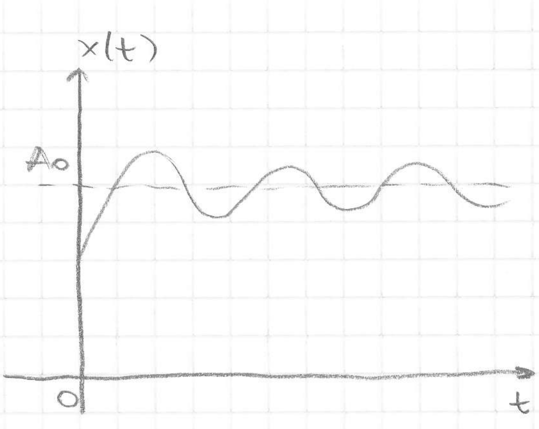
$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{-j\omega t} d\omega = \Phi^{-1}\{X(\omega)\}}$$

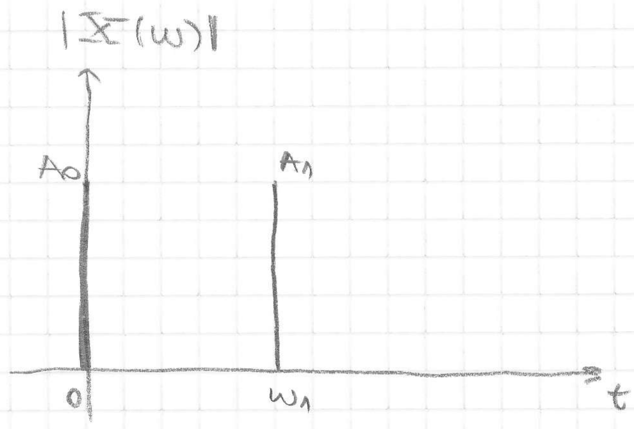
$x(t)$, $X(\omega)$ — descriu același semnal

↓ în dom. timp ↓ în dom. frecvență — formează o pereche Fourier.

$$\boxed{x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega)}$$

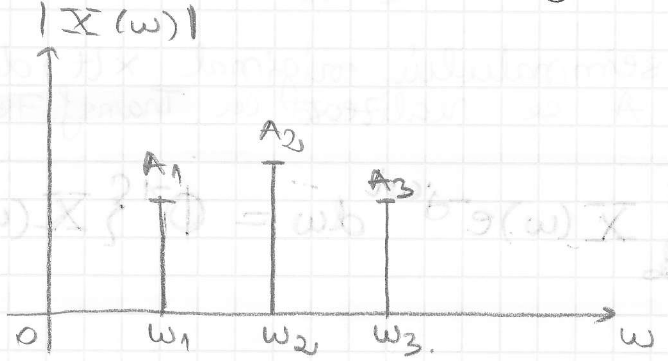
$X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$ → transf. Fourier.





$x(t) = A_0 + A_1 \cos(\omega_1 t)$

- Transf. Fourier se aplică oricărui semnal determinist, nu numai pentru semnale periodice.
- Dacă un semnal are 1 punct de discontinuitate, transf. Fourier a acestuia este o fc. continuă în ω, ceea ce înseamnă că aceasta conține o infinitate de semnale armonice: $A_i \cos(\omega_i t)$.
- Transf. Fourier a unui semnal se folosește la obținerea spectrului semnalului respectiv, deoarece transf. Fourier este o fc. complexă => spectrul de A și spectrul de fază.



③. Filtre Butterworth (filtre prototip).

Caracteristica modul-pulsație $G(j\omega)$ a unui filtru B. trece-jos de ord. n:

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}}}$$

n – ord. filtrului

ω_c – pulsația de frângere de 3dB.

(ω de înjumătățire a puterii).

OBS!

O definiție alternativă ia în considerare o valoare a pulsației de frângere $\omega_c = 1$.

Acest lucru simplifică proiectarea.

Apoi, ω_c poate fi introdusă în fc. de transfer a filtrului ce se obține.

$$|G^N(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^{2n}}}$$

N – face referire la filtrul normalizat.

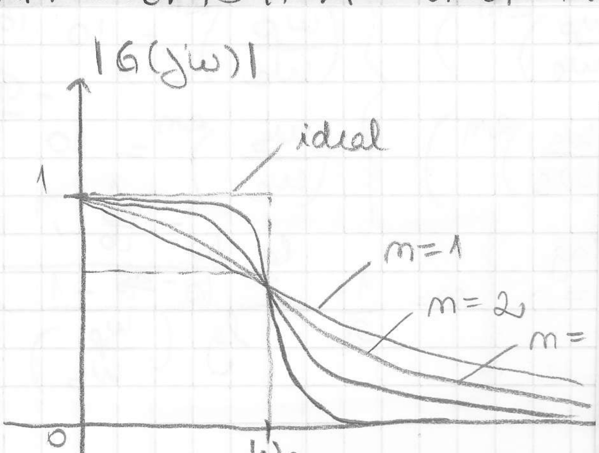
ω_c este acea pulsație, la care puterea unui semnal armonic este înjumătățită la ieșirea filtrului.

Puterea depinde de pătratul modulului fc. de T.

$$P \sim |G(j\omega)|^2$$

$$|G(j\omega_c)|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{\omega_c}{\omega_c}\right)^{2n}} = \frac{1}{2}$$

* CARACTERISTICA UNUI FILTRU BUTTERWORTH.



OBS! 1. Cu cât ordinul filtrului B este mai mare, cu atât caract. modul - pulsație al acestuia se apropie mai mult de caracteristica unui filtru ideal.

2. Indiferent de ordinul filtrului, câștigul acestuia pt. $\omega = \omega_c$ este:

$$|G(j\omega)|_{\omega=\omega_c} = 0,707 = -3dB.$$

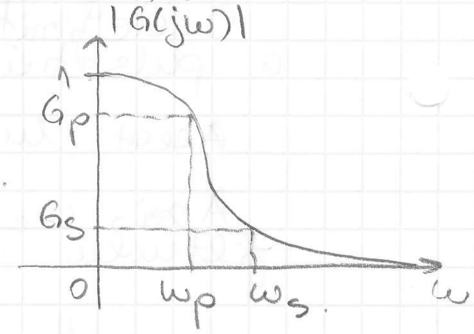
3. Câștigul răsp. în frecvență descrește monoton.

* Determinarea ordinului n al FBN din datele de proiectare.

- Considerăm un FTJ pt. care avem datele de proiectare:

$$BT = [0, \omega_p] \; ; \; |G(j\omega)| \geq G_p$$

$$BO = [\omega_s, \infty] \; ; \; |G(j\omega)| \leq G_s.$$



- Se exprimă în dB: G_p și G_s.

$$\begin{cases} \hat{G_p} = 20 \lg G_p \\ \hat{G_s} = 20 \lg G_s \end{cases}$$

Câștigul în dB a FBN pentru o pulsație oarecare $\omega = \omega_x$:

$$\hat{G_x} = 20 \lg |G^N(j\omega)| = -20 \lg \sqrt{\left[1+\left(\frac{\omega_x}{\omega_c}\right)^2\right]^2} =$$

$$= -10 \lg \left[1+\left(\frac{\omega_x}{\omega_c}\right)^2\right]^2$$

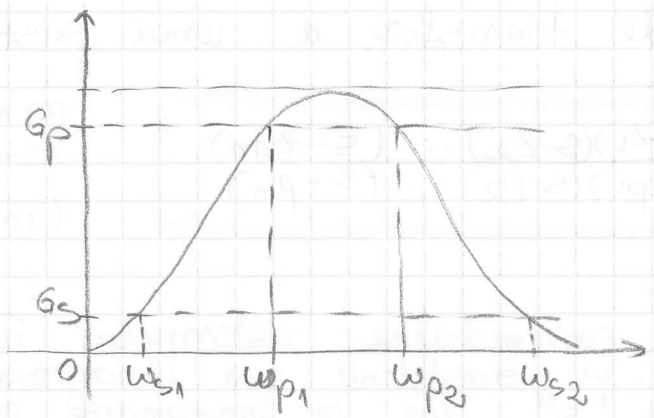
Înlocuind specificațiile de proiectare =>

$$\begin{cases} \hat{G_p} = -10 \lg \left(1+\left(\frac{\omega_p}{\omega_c}\right)^{2n}\right) \\ \hat{G_s} = -10 \lg \left(1+\left(\frac{\omega_s}{\omega_c}\right)^{2n}\right) \end{cases} \quad \begin{cases} \left(\frac{\omega_p}{\omega_c}\right)^{2n} = 10^{-\frac{\hat{G_p}}{10}} - 1 \\ \left(\frac{\omega_s}{\omega_c}\right)^{2n} = 10^{-\frac{\hat{G_s}}{10}} - 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\omega_p}{\omega_s}\right)^{2n} = \frac{10^{-\frac{\hat{G_p}}{10}} - 1}{10^{-\frac{\hat{G_s}}{10}} - 1} \xrightarrow{\log} \boxed{n = \frac{1}{2} \frac{\lg \frac{10^{-\frac{\hat{G_p}}{10}} - 1}{10^{-\frac{\hat{G_s}}{10}} - 1}}{\lg\left(\frac{\omega_p}{\omega_s}\right)}}$$

6. $$\omega_c = \frac{\omega_p}{\left(10^{-\frac{\hat{G_p}}{10}} - 1\right)^{\frac{1}{2n}}}$$

(4) Algoritmul de transformare din FTJ − FTB.



$BT = [\omega_{p1}, \omega_{p2}]$;

$|G(j\omega)| \geq G_p$.

$BO = [0, \omega_{s1}] \cup [\omega_{s2}, +\infty)$;

$|G(j\omega)| \leq G_s$.

Din datele de proiectare de FTB se obțin datele pt. un FTJ.

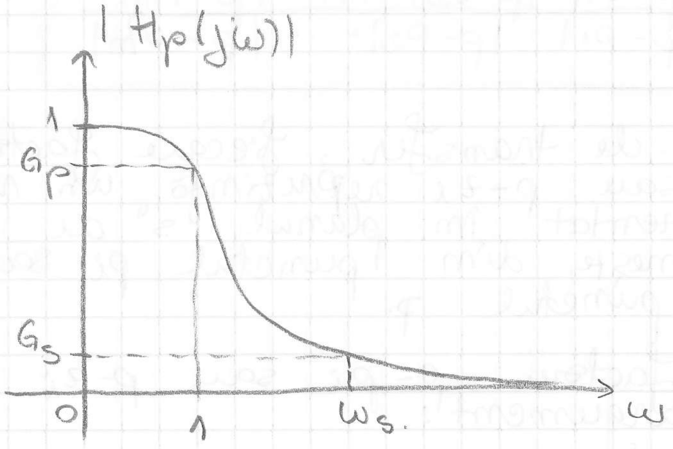
$$\omega_p' = 1$$

$$\omega_s' = \min \begin{cases} \dfrac{\omega_{p1} \cdot \omega_{p2} - \omega_{s1}}{\omega_{s1}(\omega_{p2} - \omega_{p1})} \\ \dfrac{\omega_{s2}^2 - \omega_{p1} \cdot \omega_{p2}}{\omega_{s2}(\omega_{p2} - \omega_{p1})} \end{cases}$$

Pe baza acestora, se pot determina frecvența și ordinul, și apoi fc. de transfer, în care ulterior, se aplică transformarea:

$$\boxed{T(s) = \frac{s^2 + \omega_{p1} \cdot \omega_{p2}}{(\omega_{p2} - \omega_{p1})^2}}$$

=>



⑤ Efectul polilor și al zerourilor.

Considerăm o fc. de transfer a unui sistem:

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = b_m \frac{(s-z_1)(s-z_2)\dots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)}$$

m - zerouri
n - poli
$(n \geq m)$.

Pentru a analiza comandarea sistemului în domeniul frecvenței, se consideră axa imaginară din planul complex "s", ceea ce înseamnă că facem substituția: $s = j\omega$

OBS! Deoarece discutăm de analiza în domeniul ω, ω din substituția anterioară definește un punct care "circulă" pe axa imaginară, de la $0 \to \infty$.

Acest punct imaginar este notat cu p: $s = p$

Fc. de transfer în p:

$$G(s)\Big|_{s=p=j\omega} = b_m \frac{(p-z_1)(p-z_2)\dots(p-z_m)}{(p-p_1)(p-p_2)\dots(p-p_n)}$$

Pt. analiză, se va calcula modulul fc. de frecvență:

$$|G(j\omega)| = b_m \frac{|p-z_1|\cdot|p-z_2|\cdot\dots\cdot|p-z_m|}{|p-p_1|\cdot|p-p_2|\cdot\dots\cdot|p-p_n|}$$

În relația fc. de transfer, fiecare factor de forma: $p-p_i$ sau $p-z_i$ reprezintă un nr. complex, reprezentat în planul "s" de un vector care pornește din punctul p_i sau z_i și ajunge în punctul p.

Putem scrie factorii $p-p_i$ sau $p-z_i$ în forma cu modul și argument:

$$p - p_i = r_i e^{j\gamma_i}$$

$$p - z_i = d_i e^{j\delta_i}$$

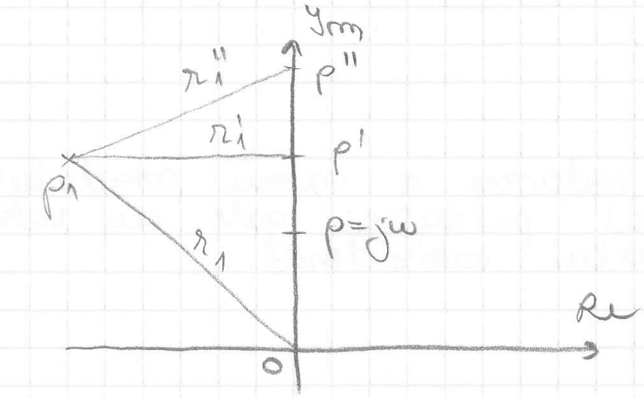
Funcția de transfer se scrie:

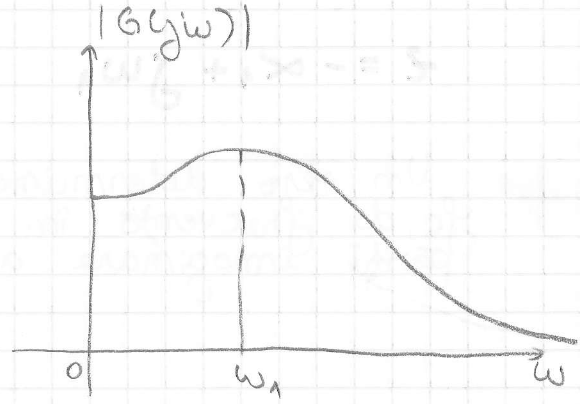
$$G(s)\Big|_{s=p} = b_m \frac{d_1 e^{j\theta_1} \cdot d_2 e^{j\theta_2} \cdot \ldots \cdot d_m e^{j\theta_m}}{r_1 e^{j\varphi_1} \cdot r_2 e^{j\varphi_2} \cdot \ldots \cdot r_m e^{j\varphi_m}}$$

$$\Rightarrow |G(s)|\Big|_{s=p} = |G(j\omega)| = b_m \frac{d_1 \cdot d_2 \cdot \ldots \cdot d_m}{r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_m} =$$

$$= b_m \frac{\text{produsul distanțelor de la zerouri la } p}{\text{—"— de la poli la pct. } p.}$$

a) EFECTUL UNUI POL.





$$|G(j\omega)| = \frac{d_1 \cdot d_2 \cdot \ldots \cdot d_m}{r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_m}$$

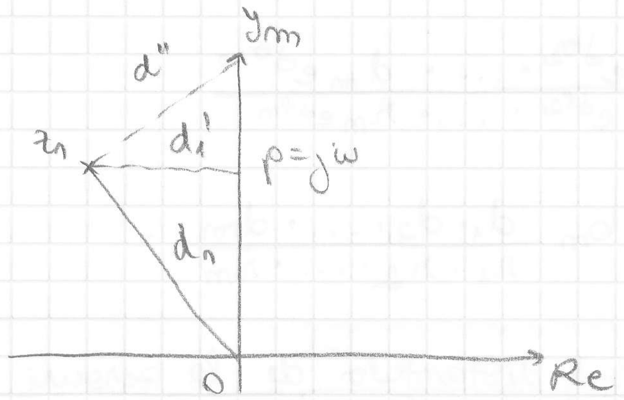
Se consideră $b_m = 1$, adică filtrul nu are amplificare.

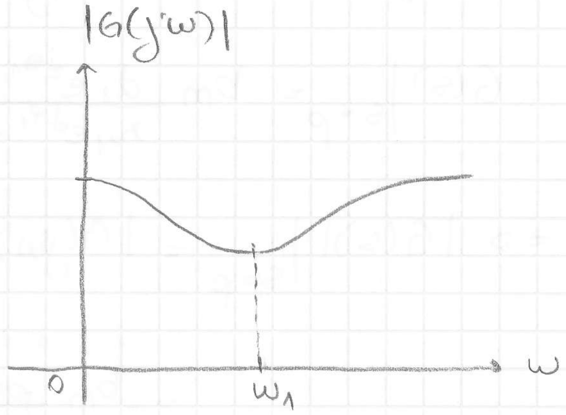
$$p_1 = -\alpha_1 + j\omega_1$$

Un pol determină creșterea modulului fc. de frecvență în dreptul valorii pulsației egală cu valoarea părții imaginare a polului respectiv.

Prezența polului determină o scădere a modulului fc. de frecvență pt. valori ale pulsației depărtate de valoarea părții imaginare.

b) EFECTUL UNUI ZERO





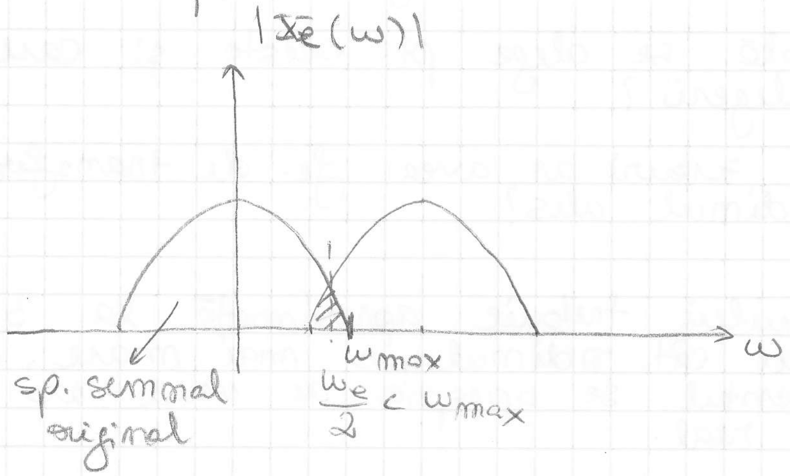
$$|G(j\omega)| = \frac{d_1 d_2 \cdots d_m}{r_1 r_2 \cdots r_n}$$

$$z = -\alpha_1 + j\omega_1$$

Un zero determină o reducere a valorii modulului fc. de frecvență în dreptul pulsației egale cu valoarea părții imaginare a zeroului considerat.

⑥. Fenomenul de aliasing.

Fie spectrul unui semnal eşantionat:



ω_{max} = pulsaţia maximă din spectrul semnalului original, pt. care amplitudinea > 0.

- Dacă $\frac{\omega_e}{2} < \omega_{max}$ => repetările spectrului s. cont. în spectrul s. eşantionat se suprapun. Acest lucru reprezintă fenomenul de aliasing.
- Dacă se doreşte refacerea semnalului cont. din cel eşantionat, atunci zona de spectru dintre $\frac{\omega_e}{2}$ şi ω_{max} se pierde.
- Semnalul original nu se poate reconstrui în mod exact.

★ Teorema lui Shannon ★

Pt. a evita fenomenul de aliasing, la eşantionarea unui semnal, care are pulsaţia ω_{max}, ω_e trebuie să fie de 2 ori mai mare decât ω_{max}.

Majoritatea aplicaţiilor tehnice forţează această condiţie, impunând:

$$\omega_e > 10\,\omega_{max}.$$

OBS! ω_{max} poate fi valoarea max. a pulsaţiei care ne interesează în spectrul semnalului continuu.

⑦ Exercițiu

Se află n, ordinul unui filtru ($n = 2,5$).

Ce valoare finală se alege pt. acesta și care este motivul alegerii?

Câți poli și câte zerouri ar avea fc. de transfer a filtrului cu ordinul ales?

- valoarea filtrului trebuie aproximată la 3, pentru că, cu cât ordinul e mai mare, cu atât randamentul se apropie de unul al unui filtru real.

⑧ Filtre recursive

Un filtru descris printr-o funcție de transfer

$$G(z^{-1}) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_m z^{-n}}$$

OBS: $a_0 = 1$

$$y[k] = -a_1 y[k-1] - a_2 y[k-2] - \dots - a_n y[k-n] + b_0 u[k] + b_1 u[k-1] + \dots + b_m u[k-m].$$

Sunt de 2 feluri:
- recursive
- nerecursive

• Filtrele recursive:

- au cel puțin unul din coef. a_i nenuli
- dacă la intrarea unui filtru recursiv se aplică un semnal de impuls Dirac, ieșirea filtrului este diferită de 0, ∀ eșantion (∞).

  ↳ denumirea de filtru cu răspuns pondere infinit (IIR)