Aula 5: Análise de Fourier

UNIFEI – Universidade Federal de Itajubá

1º semestre de 2022

Prof. Fernando H. D. Guaracy
ECAC11 – Introdução à Análise de Sinais

Problema 1 *Um sinal periódico $x(t)$ com período fundamental T_0 pode ser representado por sua **série trigonométrica de Fourier***

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$$

em que

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

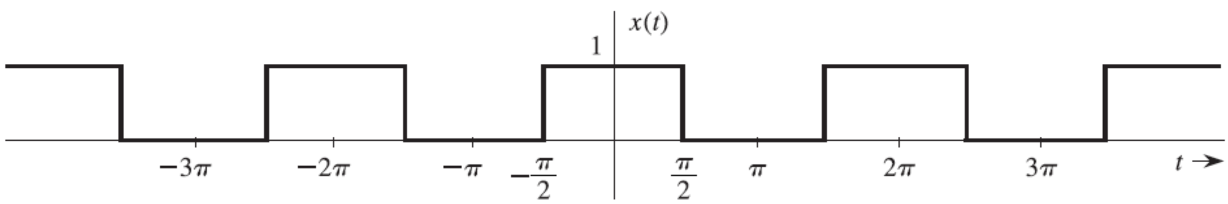
$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cos n\omega_0 t \; dt$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \sin n\omega_0 t \; dt$$

Um sinal pulso quadrado de amplitude unitária e período $T_0 = 2\pi[s]$, conforme ilustrado na figura abaixo, é descrito pela série de Fourier com coeficientes

$$a_0 = \frac{1}{2}\,, \qquad a_n = \frac{2}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\,, \qquad b_n = 0\,.$$



Faça um script que calcule $x(t)$ pela sua série de Fourier no intervalo $t \in (-2\pi,\ 2\pi)$ dado um determinado valor limite finito de $n = n_{\lim}$. Plote o resultado em um gráfico e compare o resultado para diferentes $n_{\lim}$.

Problema 2 *Quando $x(t)$ é real, a série trigonométrica de Fourier pode ser expressa em uma forma compacta*

$$x(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$$

em que

$$C_0 = a_0$$

$$C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

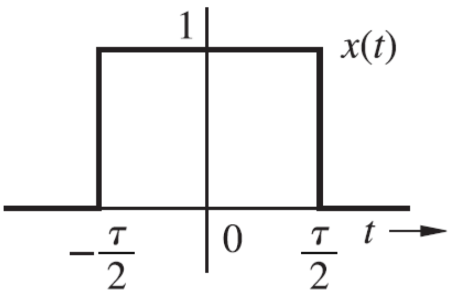
$$\theta_n = \tan^{-1}\left(\frac{-b_n}{a_n}\right)$$

Faça um script para plotar a amplitude C_n em função de n (o espectro de amplitude) e a fase θ_n em função de n (o espectro de fase) para o sinal pulso quadrado do problema anterior (obs: use a função `atan2`).

Problema 3 *A Transformada de Fourier pode ser entendida como uma extensão da série de Fourier para sinais não periódicos, sendo calculada por*

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

A Transformada de Fourier para o sinal pulso ilustrado na figura abaixo



é dada por

$$X(\omega) = \tau sinc\left(\frac{\omega\tau}{2\pi}\right) \ ,$$

na qual

$$sinc(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x}. \tag{1}$$

Faça um script que plote o espectro de amplitude e espectro de fase de $X(\omega)$ considerando $\tau = \pi$ e $\omega \in (-10,\ 10)$.

Problema 4 *Como um computador pode trabalhar apenas com dados discretos, para o processamento digital de um sinal tem-se disponível apenas valores amostrados do mesmo. Para um* *sinal em tempo discreto $x[n]$ com N amostras, a Transformada Discreta de Fourier é dada por*

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j(2\pi k/N)n} \, , \qquad k = 0, ..., N-1 \, .$$

Algoritmos rápidos e eficientes, conhecidos como Transformada Rápida de Fourier (ou Fast Fourier Transform – FFT), estão disponíveis para a computação da Transformada Discreta de Fourier.

Nesse contexto, reproduza o exemplo a seguir (adaptado da documentação do MATLAB), que ilustra o uso da função `fft` (também disponível no Octave) para o cálculo do espectro de amplitude de um sinal:

```
Fs = 1000;              % Frequência de amostragem  (Hz)
T = 1/Fs;               % Período de amostragem
N = 1500;               % Número de amostras
t = (0:N-1)*T;          % Vetor de tempo

%Sinal com senoide de 100Hz com amplitude 0,7 e senoide de 200Hz com amplitude 1
s = 0.7*sin(2*pi*100*t) + sin(2*pi*200*t);

%Corrompe o sinal com ruído
x = s + 2*randn(size(t));

%Plota o gráfico do sinal corrompido por ruído
figure, plot(t(1:50),x(1:50))
title('Sinal corrompido por ruído')
xlabel('t (s)'), ylabel('x(t)')

Y = fft(x);                      %Cálculo da FFT

P2 = abs(Y/N);                   %Espectro bilateral
P1 = P2(1:N/2+1);
P1(2:end-1) = 2*P1(2:end-1);    %Espectro unilateral

f = Fs*(0:(N/2))/N;              %Define o domínio de frequência

%Plota o gráfico do espectro de amplitude unilateral do sinal
figure, plot(f,P1)
title('Espectro de amplitude unilateral de x(t)')
xlabel('f (Hz)'), ylabel('|P1(f)|')
```