1) se $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}$ si ha $0 \le x \le \varepsilon \Rightarrow x = 0$

Dim. x assurdo: sia $x > 0$, poniamo $\varepsilon = \frac{x}{2} > 0$

allora x hp: $0 \le x \le \frac{x}{2} \Rightarrow$ (si può dividere per x perchè è positivo

$\Rightarrow \frac{x}{x} \le \frac{x}{2x} \Rightarrow 1 \le \frac{1}{2}$ ASSURDO

2) Non esiste $x \in \mathbb{Q} : x^2 = 2$

Dim x assurdo:

$$\exists\, x \in \mathbb{Q} \text{ t.c. } x^2 = 2$$

$x = \frac{a}{b}$ $a, b \in \mathbb{Z}$ e primi tra loro

$\Rightarrow a^2$ è pari $(a^2 = 2b^2) \Rightarrow a$ pari

Dim x assurdo a pari:

se a non fosse pari per euclide $a = \varphi_1^{k_1} \dots \varphi_s^{k_s}$ con

$\varphi_1 \dots \varphi_s$ primi e $\neq$ da 2

$\Rightarrow a^2 = \varphi_1^{2k_1} \dots \varphi_s^{2k_s}$, ma se nessun φ_k è 2 a^2 non è p

ASSURDO

$a^2 = 2b^2 \Rightarrow 4k^2 = 2b^2$ (sostituisco a con 2k, perchè è pari)

con $k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow 2k^2 = b^2 \Rightarrow b^2$ è pari $\Rightarrow$ b è pari

ASSURDO PER HP a e b primi tra loro

3) Sia $a>0$, $|x|\leq a \iff -a\leq x\leq a$

Dim $\Rightarrow$ (un verso alla volta)

$$|x|\leq a \Rightarrow -a\leq -|x| \Rightarrow -a\leq \cancel{-|x|}\leq x\leq \cancel{|x|}\leq a$$

MOLTIPLICO x -1, INVERTO IL VERSO DELLA DISEQUAZIONE

$$\Downarrow$$

$$-a\leq x\leq a$$

Dim $\Leftarrow$

$-a\leq x\leq a$ due casi:

1) $x\geq 0$ $\quad x=|x| \Rightarrow |x|\leq a$

SEMPRE MOLT x -1

2) $x<0$ $\quad x=-|x| \Rightarrow -a\leq x=-|x| \Rightarrow |x|\leq a$

4) $x,y\in\mathbb{R}$ $\quad |x+y|\leq |x|+|y|$

Dim:

AGGIUNGO UN MODULO (TANTO È POSITIVO)

$$|x+y|\leq \big||x|+|y|\big| \Rightarrow$$

SOSTITUISCO IL MODULO CON ^2, LA DIS. RIMANE

$$(x+y)^2\leq (|x|+|y|)^2 \Rightarrow$$

$$\cancel{x^2}+\cancel{y^2}+2xy\leq \cancel{|x|^2}+|y|^2+2|x||y| \Rightarrow$$

$$2xy\leq 2|x||y| \Rightarrow xy\leq |xy|$$ Vero perché $\forall x\in\mathbb{R}$ $-|x|\leq x\leq |x|$ (al posto di x si considera xy)

5) Se esiste un lim è unico

Dim × assurdo

$\exists L_1 \neq L_2 : \lim a_n = L_1$
$\lim a_n = L_2$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_1 : |a_n - L_1| < \varepsilon \ \forall n \geq n_1$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_2 : |a_n - L_2| < \varepsilon \ \forall n \geq n_2$

$\forall n \geq \underbrace{\max(n_1, n_2)}_{n_3}$ valgono entrambi

$$\overbrace{0 \leq |L_1 - L_2|}^{*} = |L_1 \overbrace{- a_n + a_n}^{\pm a_n} - L_2| =$$

$$|(L_1 - a_n) + (a_n - L_2)| \underset{\text{TRIANGOLARE}}{\leq} |L_1 - a_n| + |a_n - L_2| \underset{\substack{\text{ENTRAMBI} < \varepsilon \\ \text{per } n \geq n_3}}{<} 2\varepsilon$$

$$\overbrace{0 \leq |L_1 - L_2|}^{*} \leq 2\varepsilon \Rightarrow |L_1 - L_2| = 0 \iff L_1 = L_2$$

assurdo per ip $L_1 \neq L_2$

6) Permanenza del segno

sia $(a_n)_n$ una succ con limite L

a) se $L > 0 \Rightarrow \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \Rightarrow a_n > 0$

b) se $L < 0 \Rightarrow \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \Rightarrow a_n < 0$

c) se $L \neq 0 \Rightarrow \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \Rightarrow |a_n| > \left|\frac{L}{2}\right|$

a Dim) $L > 0$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \Rightarrow L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$

pongo $\varepsilon = \frac{L}{2}$ (maggiore di 0) $\Rightarrow 0 < \frac{L}{2} < a_n \Rightarrow a_n > 0$

b dim) $L < 0$

pongo $\varepsilon = -\frac{L}{2}$ ($-\frac{L}{2}$ sarà positivo)

$\exists n_0 : \forall n \geq n_0 \quad a_n < L - \frac{L}{2} = \frac{L}{2} < 0 \Rightarrow a_n < 0$

c dim) 2 casi (a e b), da un certo n_0:

se $L < 0$: $\quad a_n < \frac{L}{2} \Rightarrow -|a_n| < -\left|\frac{L}{2}\right| \Rightarrow |a_n| > \left|\frac{L}{2}\right|$
$\Rightarrow a_n < 0$

se $L > 0$ $\quad a_n > \frac{L}{2} \Rightarrow |a_n| > \left|\frac{L}{2}\right|$
$\Rightarrow a_n > 0$

7) Corollario

3 successioni: $(a_n)_n, (b_n)_n, (c_n)_n$: $a_n \leq c_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

e $\lim a_n = \lim b_n = L \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \lim c_n = L$

Dimostrazione

a) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_1 \; \forall n \geq n_1 \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$

b) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_2 \; \forall n \geq n_2 \Rightarrow |b_n - L| < \varepsilon$

pongo $n_3 = \max(n_1, n_2)$ in modo che valgono sia a) che b)

$\forall n \geq n_3$ si ha (per a), b) e hp)

$L - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < L + \varepsilon$

$\Rightarrow L - \varepsilon < c_n < L + \varepsilon \quad \forall n \geq n_3$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_3 : \forall n \geq n_3 \Rightarrow |c_n - L| < \varepsilon$

$\Downarrow$

$\lim c_n = L$

8) una successione $(a_n)_n$ ha limite finito, allora è limitata

$(a_n)_n$ succ, $\lim a_n = L \in \mathbb{R}$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \Rightarrow L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$

① $\{a_n ; n < n_0\}$ è un insieme con numero finito di elementi

② $\{a_n ; n \geq n_0\}$ è limitato tra $L - \varepsilon$ e $L + \varepsilon$

$\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = ① \cup ②$, essendo unione di 2 insiemi limitati è a sua volta limitato

9) Siano $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ 2 succ t.c.

$\lim a_n = 0$ e $|b_n| \leq M$ (M è piacere purché finito)
$\hookrightarrow M \in \mathbb{R}$

allora $\lim a_n b_n = 0$

Dim

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 : \forall n \geq n_0 : |a_n b_n| < \varepsilon$ (Ipi)

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \Rightarrow |a_n| < \varepsilon$ (per Ipi)

$|a_n \cdot b_n| = |a_n| \cdot |b_n| < \varepsilon \cdot M \quad \forall n \geq n_0$

VERIFICO

10) $\lim (a_n/b_n) = A/B$ e $B \neq 0$

a) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_1 : \forall n \geq n_1 \Rightarrow |a_n - A| < \varepsilon$

b) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_2 : \forall n \geq n_2 \Rightarrow |b_n - B| < \varepsilon$

a) e b) $\Rightarrow \forall n \geq n_3 \doteq \max(n_1, n_2) \Rightarrow$ Verifica sia a) che b)

<u>Dimostro</u> che $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_3 : \forall n \geq n_3 \Rightarrow \left| \dfrac{a_n}{b_n} - \dfrac{A}{B} \right| < \varepsilon$

$$0 \leq \underbrace{\left| \frac{a_n B - A b_n}{b_n B} \right|}_{\text{DEN. COMUNE}} = \left| \frac{a_n B \overbrace{- AB + AB}^{\pm AB} - A b_n}{b_n B} \right|$$

$$\leq \frac{|a_n B - AB| + |AB - A b_n|}{|b_n||B|}$$

TRIANGOLARE SOPRA, SEPARATO I MODULI NELLA PRATICA E AL DENOMINATORE

$$= \frac{|B||a_n - A| + |A||B - b_n|}{|b_n||B|}$$

RACCOLGO A e B, POI SEPARO IL PROD. DEI MODULI

$$\overset{\forall n \geq n_3}{\leq} \frac{|B| \cdot \varepsilon + |A| \cdot \varepsilon}{\left|\frac{B}{2}\right||B|} \underset{\text{RACCOLGO } \varepsilon}{=} \varepsilon \cdot \left| \frac{B + A}{\frac{B}{2} \cdot B} \right|$$

DATO CHE $B \neq 0$ x PERM. SEGNO $\forall n \geq n_2$

$$\left|\frac{B}{2}\right| < |b_n|$$

COSTANTE $\cdot\ \varepsilon$ QUINDI TENDE A 0 E IL LIMITE È DIMOSTRATO

11) $\text{Limite}_{m} \sum_{k=1}^{\infty} x^k = ?$

$$\|$$

TENGO $\lim_{n\to\infty} (S_n(x))_n$

SI SEMPLIFICANO GLI ADDENDI

$$S_n(x)(1-x) = (x+x^2+\dots+x^n)(1-x) = x - x^{n+1}$$

DIVIDO PER $1-x$ (con $x \neq 1$)

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \frac{x-x^{n+1}}{1-x} = \frac{x}{1-x} - \frac{x^{n+2}}{1-x} =$$

SEPARO X AVERE LA N SOLO A DX

$$\frac{x}{1-x} - \lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+2}}{1-x}$$

DISCUTO
$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+2}}{1-x} = \begin{cases} -\infty & x>1 \\ 0 & |x|<1 \\ \nexists & x \leq -1 \end{cases}$$

($x=1$ NON C'È PER LA DIV. PER $1-x$)

RIASSUMENDO

$x>1$ $\quad \lim_{n} S_n(x) = +\infty$

$x=1$ $\quad S_n(1) = \underbrace{1+1+1+\dots+1}_{n \text{ VOLTE}} = 1\cdot n = \infty$

$|x|<1$ $\quad \dfrac{x}{x-1}$

$x \leq -1$ $\quad \nexists$

12) Bernoulli $(1+a)^n \geq 1+na \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad a \geq 0$

per induzione

$A(1) = \cancel{1+a} \geq 1+a$ Vero

se $A(n)$ vera allora $A(n+1)$ è vera?

$$(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a$$

per hp.

$$(1+a)^n(1+a) \geq (1+na)(1+a) =$$ ← SVILUPPO

$$1+a+na+na^2 = 1+(n+1)a+na^2 \geq 1+(n+1)a$$

RACCOLGO A in $a+na$

na^2 è sempre positivo, quindi maggiore o è 0

13) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} - 1 = 0$ pongo $d = \sqrt[n]{n} - 1$, con $d \geq 0$ dato che $\sqrt[n]{n} \geq 1$

$$\sqrt[n]{n} = d+1 \Rightarrow n = (d+1)^n \underset{(*)}{\geq} \frac{n(n-1)}{2} d^2 \Rightarrow$$

$$n \geq \frac{n(n-1)}{2} d^2 \Rightarrow d^2 \leq \frac{2}{n-1} \Rightarrow$$

$$0 \leq d \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{2}{n-1}} = 0$, quindi x i carabinieri $d \to 0$ e $\sqrt[n]{n} \to 1$

(*) $(d+1)^n$ è un binomio di Newton, il coefficiente di d^2 è $\binom{n}{2}$ ($2 \to K$)

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$$, quindi non può essere più grande.

14) sia $A \neq \emptyset$, A inf limitato allora $\exists \inf A \in \mathbb{R}$

estremo inferiore

Dim.

sia p_1 minorante di A e $a_1 \in A$

sia $c_1 = \frac{p_1 + a_1}{2}$

se $[p_1, c_1] \cap A \neq \emptyset$	se $[p_1, c_1] \cap A = \emptyset$
$p_2 = p_1$	$p_2 = c_1$
$a_2 \in [p_1, c_1] \cap A$	$a_2 = a_1$

in entrambi i casi $p_2 \leq a_2$ (p_2 minorante)

$a_2 \in A$

$p_1 \leq p_2$

$a_1 \geq a_2$

Continuo con metodo dicotomico e creo una successione (p_n) di minoranti di A, e (a_n) una succ di elementi di A

$p_n \leq p_{n+1}$ $\quad a_{n+1} \leq a_n$ $\quad p_n \leq a_n$

per costruzione $\exists\, i \in [p_n, a_n] \ \forall n$

e i è unico perché $a_n - p_n \leq \frac{a_1 - p_1}{2^{n-1}} \to 0$

Diretto raccomandati

Dimostro che $i = \inf A$

1) $i \leq a \ \forall a \in A$ → minore elemento di A

2) se $p \leq a \ \forall a \in A \Rightarrow p \leq i$ → maggiore dei minoranti

$p_n \to i$ perché $0 \le |p_n - i| \le |a_n - p_n| \to 0$

$a_n \to i$ perché $0 \le |a_n - i| \le |a_n - p_n| \to 0$

1) $p_n \le a \quad \forall a \in A$

passo al limite sopra

$i \le a$ per permanenza del segno $(p_n - a)$

$\Rightarrow i$ è minorante

INTENDO CHE $p_n - a \le 0$ e anche il limite $i - a \le 0$?

2) se per assurdo $i_1 > i$ fosse minorante

allora $\exists n_0 : |a_n - i| < |i_1 - i| \quad \forall n \ge n_0$

$\Rightarrow a_n - i < i_1 - i$

$\Rightarrow a_n < i_1 \quad \forall n \ge n_0$

è un ε

i_1 non è minorante

($a_n - i$ sono positivi, $i_1 - i$ si può togliere il valore)

15) Sia $(a_n)_n$ succ. di $\mathbb{R}$ crescente

allora $\exists \lim a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$

2 casi $\lim \in \mathbb{R}$ o $+\infty$

1) $\sup\{a_n\} = S \in \mathbb{R} \quad \lim a_n = S$?

$\{a_n\}$ è superiormente limitato

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 : |a_n - S| < \varepsilon \quad \forall n \ge n_0$

$\Leftrightarrow S - \varepsilon < a_n < S + \varepsilon$

Vera sempre perché $a_n \le S < S + \varepsilon$ (S è sup.)

$\exists a_n : a_{n_0} > S - \varepsilon$ (S è il più piccolo maggiorante)

$\forall n > n_0 \quad a_n \geq a_{n_0} > S - \varepsilon$ (succ. è crescente)

$\Rightarrow \forall n \geq n_0 \quad S - \varepsilon < a_n \leq S + \varepsilon \Rightarrow \lim a_n = S$

2) $\sup\{a_n\} = +\infty$

$\forall M > 0 \ \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \Rightarrow a_n > M$

se $\sup\{a_n\} = +\infty$ a_n non è limitata superiormente

$\forall M \ \exists n_0 : a_{n_0} > M$, ed essendo crescente:

$\forall n \geq n_0 \quad a_n \geq a_{n_0} > M \Rightarrow \lim a_n = +\infty$

16) Sia $(x_n)_n$ una succ non indeterminata (ha limite, finito o no che sia)

allora $\forall (x_{n_k})_k$ sottosucc. di (x_n) ha lo stesso limite

Dim: $L \in \mathbb{R}$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 : |x_n - L| < \varepsilon \ \forall n \geq n_0$ (def di limite)

$\lim_{k \to \infty} n_k = +\infty$ (è sotto successione)

$\exists k_0 : \forall k \geq k_0$ si ha $n_k \geq n_0$

$\Rightarrow |x_{n_k} - L| < \varepsilon \ \forall k \geq k_0 \Rightarrow x_{n_k} \to L$

Dim $+\infty$ (questo era per caso, non ci giurerei)

$\forall M > 0 \ \exists n_0 \quad x_n > M \quad \forall n \geq n_0$

$\lim_{k \to +\infty} n_k = +\infty$

$\exists k_0 : \forall k \geq k_0$ si ha $n_k \geq n_0 \Rightarrow x_{n_k} > M \ \forall k \geq k_0 \Rightarrow x_{n_k} \to +\infty$

Dim $-\infty$ (sempre per assurdo)

$\forall M>0 \ \exists n_0 : x_n < -M \quad \forall n \geq n_0$

$\lim_{K\to\infty} n_K = +\infty$

$\exists K_0 : \forall K \geq K_0$ vale $n_K \geq n_0 \Rightarrow x_{n_K} < -M \ \forall K \geq K_0$

$\Rightarrow x_{n_K} \to -\infty$

17) Data $(x_n)_n$ successione

se $\exists (x_{n_K})_K$ sottosucc di $(x_n)_n$ t.c. $x_{n_K} \to L_1$

ed $\exists (x_{n_h})_h$ sottosuc di $(x_n)_n$ t.c. $x_{n_h} \to L_2$

se $L_1 \neq L_2 \Rightarrow \nexists \lim x_n$

Dim se per assurdo esistesse $\lim x_n = L$

$L = L_1$ e $L = L_2$ per unicità del limite

$L_1 = L_2$ ASSURDO

18) $f(x) = x^p \quad p \in \mathbb{N}$

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^p - x_0}{h}$$

siccome $a^p - b^p = (a-b)(a^{p-1} + a^{p-2}b + \ldots + b^{p-1})$

se $a = x_0 + h$ e $b = x_0$

p somme di x^{p-1}

$$\lim_{h\to 0} \frac{(\cancel{x_0} + \cancel{h} - \cancel{x_0})}{\cancel{h}} \left((x_0+h)^{p-1} + (x_0+h)^{p-2} x_0 + \ldots + x_0^{p-1}\right) =$$

$p x_0^{p-1}$ ovvero

$(x^p)' = p x_0^{p-1}$

Con p "negativo" $f(x) = x^{-p}$ $\quad p \in \mathbb{N}$ $\quad x \neq 0 \rightarrow$ O LA FRAZIONE ESPLODE

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{(x_0+h)^p} - \frac{1}{x_0^p}}{h} = \text{(den comune)}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{x_0^p - (x_0+h)^p}{(x_0+h)^p \cdot x_0^p \cdot h} = \lim_{h\to 0} \frac{x_0^p - (x_0+h)^p}{h} \cdot \frac{1}{(x_0+h)^p \cdot x_0^p} =$$

separo il denominatore

$-p x_0^{p-1-2p} \leftarrow$ si divide per $(x_0+h)^p \cdot x_0^p$

il meno perché il num è al contrario

$$= -p x_0^{-p-1}$$

19) $f(x) = |x|$ non derivabile in $x = 0$

$$\lim_{h\to 0} = \frac{f(0-h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$$

2 casi:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

quindi $\nexists f'(0)$ perché $f'_{dx}(0) \neq f'_{sx}(0)$

20) $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ è derivabile in $x_0 \in (a,b) \Rightarrow f(x)$ continua in x_0

Dim

$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ def. di continua

$\Leftrightarrow \lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$ $\quad$ con $h = x - x_0$, $x = x_0 + h$

$\Leftrightarrow \lim_{h\to 0} f(x_0+h) - f(x_0) = 0$ (*)

se $\exists f'(x_0) \Rightarrow \lim_{h\to 0} f(x_0+h) - f(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \cdot h =$

$f'(x_0)\cdot h = 0$ (*)

molt e div per h

21) sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ $x_0 \in (a,b)$

se f è derivabile in x_0 la retta tangente è

$$T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

Se $E(h) = T(x_0+h) - f(x_0+h)$ si ha

$$\lim_{h\to 0} \frac{E(h)}{h} = 0$$

Dim

solo la x si sostituisce nel eq di T(x)

$$\lim_{h\to 0} \frac{T(x_0+h) - f(x_0+h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0) + f'(x_0)(\cancel{x_0}+h-\cancel{x_0}) - f(x_0+h)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0) - f(x_0+h)}{h} + \frac{f'(x_0)h}{h} = -f'(x_0) + f'(x_0) = 0$$

separo num

lim $f'(x)$ con num vedilo

22) $$\left(f(x)/g(x)\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \quad \text{se } g(x)\neq 0$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(x_0+h)}{g(x_0+h)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)g(x_0) - g(x_0+h)f(x_0)}{g(x_0+h)g(x_0)h}$$

Den comune

$\pm g(x_0)f(x_0)$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)g(x_0) - g(x_0)f(x_0) + g(x_0)f(x_0) - g(x_0+h)f(x_0)}{g(x_0+h)g(x_0)h}$$

siccome $\exists\, g'(x_0)$ $g(x)$ è continua in x_0

quindi $g(x_0) \neq 0 \Rightarrow g(x_0+h) \neq 0$ e $g(x_0+h) \to g(x_0)$

per h piccoli (perm. del segno)

sempre con h piccoli

raccolgo $f(x_0)$ e $g(x_0)$ e sposto l'h

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(x_0)\dfrac{\left(f(x_0+h)-f(x_0)\right)}{h} - f(x_0)\left(\dfrac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\right)}{g(x_0+h)\,g(x_0)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{g(x_0)f'(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

$g(x_0+h)$ tende a $g(x_0)$

23) Se $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ allora $a_k = \dfrac{P^{(k)}(0)}{k!}$

Dim

$$P'(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\, i x^{i-1}\right) = a_1 + 2a_2 x + \dots + n a_n x^{n-1}$$

$$\Rightarrow P'(0) = a_1 \cdot 1$$

$$P'' = \sum_{i=2}^{n} i(i-1)a_i x^{i-2} \Rightarrow P''(0) = 2a_2$$

per induzione $P^{(k)}(x) = \sum_{i=k}^{n} i(i-1)\dots(i-k+1)a_i x^{i-k}$

$$P^{(k)}(0) = k(k-1)\dots 1\, a_k = k!\, a_k$$

$$\Rightarrow a_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!}$$

24) Formula di Newton

$$P(x) = (1+x)^n$$

$$P'(x) = n(1+x)^{n-1} \cdot 1 \quad \text{(derivata composta)}$$

$$P^{(k)}(x) = n(n-1)\cdots(n-k+1)(1+x)^{n-k}$$

$$\frac{P^{(k)}(0)}{k!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)\cdot 1}{k!} = a_k$$

$$a_k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} \quad \text{Detto coeff. BINOMIALE}$$

Quindi

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \qquad x = \left(\frac{b}{a}\right)$$

Binomio di newton:

$$(a+b)^n = \left(a\left(1+\frac{b}{a}\right)\right)^n = a^n\left(1+\frac{b}{a}\right)^n = a^n \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{b}{a}\right)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{b^k}{a^k}\cdot a^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} b^k a^{n-k}$$

25) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq 3, \ \forall n \in \mathbb{N}$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{\overbrace{n(n-1)\cdots(n-k+1)}^{k \text{ fattori } \leq n}}{k!\,\underbrace{n^k}_{k \text{ fattori } = n}} \longrightarrow \leq 1$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} \qquad \text{dato che } \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$$

porto fuori il k=0

porto fuori il 2

$$\leq 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{2}{2^k} = 1 + 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k} =$$

$$1+2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k} \leq 1+2=3 \quad \forall n$$

serie geometrica con ragione $\frac{1}{2}$

26) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ è crescente:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

per disuguaglianza aritmetico geometrica

$$\sqrt[n]{a_1 \, a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1+a_2+a_3+\dots a_n}{n}$$

e se ha almeno un termine diverso dagli altri $\leq$ è stretto

elevo alla n

$$\iff a_1 \cdot a_2 \cdots a_n \leq \left(\frac{a_1+\dots+a_n}{n}\right)^n$$

se ho $n+1$ elementi e la applico e prima con

$a_1 = 1$ e $a_2 \dots a_{n+1} = 1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ si ha

n volte $\left(1+\frac{1}{n}\right)$

$$\left(\frac{1+n+1}{n+1}\right)^{n+1} > 1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$\left(1+\frac{1}{n}\right)$ moltiplicato n volte

1 termine diverso (1)

fa 1

quindi $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ verificato.

27) sia $f(a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile $\forall x \in (a,b)$

allora

1) f crescente $\Rightarrow f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b)$

2) f decrescente $\Rightarrow f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a,b)$

3) f costante $\Rightarrow f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b)$

dim 1)

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{\overbrace{f(x_0+h) - f(x_0)}^{\text{num} \geq 0}}{\underbrace{h}_{\text{den} > 0}} \geq 0$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{\overbrace{f(x_0+h) - f(x_0)}^{\text{num} \leq 0}}{\underbrace{h}_{\text{den} < 0}} \geq 0$$

dim 2)

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{\overbrace{f(x_0+h) - f(x_0)}^{\leq 0}}{\underbrace{h}_{> 0}} \leq 0$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{\overbrace{f(x_0+h) - f(x_0)}^{\geq 0}}{\underbrace{h}_{< 0}} \leq 0$$

dim 3)

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0^\pm} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{K-K}{h} = 0$$

L'inverso si dimostra dopo e prende anche il caso stretto

↓

LAGRANGE

28) sia $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile in x_0 e x_0 max o min locale

allora $f'(x_0) = 0$

<u>x_0 massimo locale</u>

$$f'(x_0) \; \begin{cases} \displaystyle\lim_{h \to 0^+} \frac{\overbrace{f(x_0+h) - f(x_0)}^{\leq 0}}{\underbrace{h}_{>0}} \leq 0 \\[2ex] \displaystyle\lim_{h \to 0^-} \frac{\overbrace{f(x_0+h) - f(x_0)}^{\leq 0}}{\underbrace{h}_{<0}} \geq 0 \end{cases}$$

permanenza del segno

$f'(x_0) = 0$ per unicità del limite

<u>x_0 minimo locale</u>

$$f'(x_0) \; \displaystyle\lim_{h \to 0^+} \frac{\overbrace{f(x_0+h) - f(x_0)}^{\geq 0}}{\underbrace{h}_{>0}} \geq 0$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{\overbrace{f(x_0+h) - f(x_0)}^{\geq 0}}{\underbrace{h}_{\leq 0}} \leq 0$$

$f'(x_0) = 0$ per unicità del limite

29) VALORI INTERMEDI

sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua

e $f(a) < \lambda < f(b)$ allora $\exists$ almeno un $x_0 : f(x_0) = \lambda$

Dim

sia $g(x) = f(x) - \lambda$ $g(x)$ è continua perché lo è $f(x)$

$$g(a) = f(a) - \lambda < 0$$

$$g(b) = f(b) - \lambda > 0$$

per il teorema degli zeri su $g(x)$:

$$\exists\, x_0 : g(x_0) = 0$$

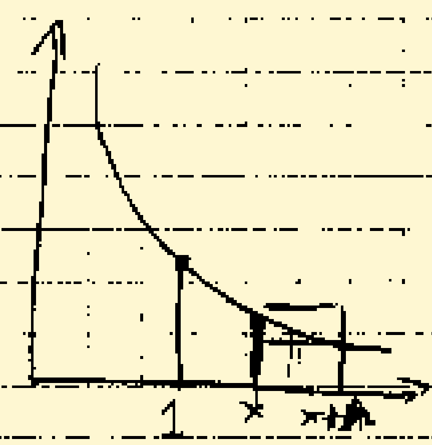
quindi $f(x_0) - \lambda = 0$

e $f(x_0) = \lambda$

30) $L(x)$ è derivabile (caso $x > 1$)

$L(x)$ con $x > 1$ è $\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$

$$\lim_{h \to 0^+} = \frac{\int_1^{x+h} \frac{1}{t}\,dt - \int_1^x \frac{1}{t}\,dt}{h} =$$



$$\lim_{h \to 0^+} \frac{\int_x^{x+h} \frac{1}{t}\,dt}{h}$$ ← è compreso tra

$R1 = \underset{\uparrow \text{BASE}}{h} \cdot \frac{1}{x}$ ← ALTEZZA

$R2 = h \cdot \frac{1}{x+h}$

moltiplico per $\frac{1}{h}$ e uso i carabinieri
$\to > 0$

$\frac{\text{AREA}}{\text{BASE}(h)} = \text{ALTEZZA}$

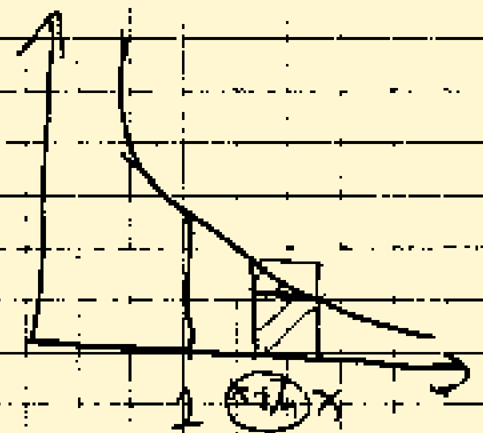
$$\frac{1}{x} < \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \frac{1}{t}\,dt < \frac{1}{x+h}$$

$$\frac{1}{x} < \frac{\int_x^{x+h} \frac{1}{t}\,dt}{h} < \frac{1}{x+h} \qquad \text{con } h \to 0^+$$

per confronto

$$\lim_{h \to 0} \int_x^{x+h} \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{x}$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{\int_1^{x+h} \frac{1}{t}\,dt - \int_1^{x} \frac{1}{t}\,dt}{h} =$$



$$\lim_{h \to 0^-} \frac{-\int_{x+h}^{x} \frac{1}{t}\,dt}{h}$$

qui $x+h$ è prima

$R_2 = -h \cdot \frac{1}{x+h}$

$R_1 = -h \cdot \frac{1}{x}$ moltiplico per $\frac{-1}{h}$ che è >0

$$\frac{1}{x+h} < \frac{\int_{x+h}^{x} \frac{1}{t}\,dt}{h} < \frac{1}{x}$$

per confronto con $h \to 0$ il limite è $\frac{1}{x}$

limite per $h \to 0^+$ e $h \to 0^-$ coincidono quindi il

$$\lim_{h \to 0} \frac{L(x+h) - L(x)}{h} = \frac{1}{x}$$

31) $L(ab) = L(a) + L(b)$ con $a, b > 0$

$G(x) = L(ax)$ con a fissa e $a, x > 0$

G derivabile perché composta di funzioni derivabili

$G'(x) = L'(ax) \cdot a = \frac{1}{ax} \cdot a = \frac{1}{x}$

$G'(x) = L'(x) = \frac{1}{x}$

$(G(x) - L(x))' = 0$ la derivata è 0, quindi la funzione è costante

$G(x) - L(x) = K$

$L(ax) - L(x) = K$

se $x = 1$

$L(a) - 0 = K$, quindi $K = L(a)$

$\Rightarrow L(ax) - L(x) = L(a)$

$\Rightarrow L(ax) = L(a) + L(x)$ sostituisco x con b

$\Rightarrow L(ab) = L(a) + L(b)$

32) $\lim_{x\to 0} L(x) = \inf\{L(x) : x>0\}$ e $\lim_{x\to+\infty} L(x) = \sup\{L(x) : x>0\}$

$L(x)$ è crescente

se A e B sono 2 sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ e $A \subseteq B$

allora $\begin{cases} \sup A \le \sup B \\ \inf A \ge \inf B \end{cases}$

$$\Rightarrow \sup\{L(x) : x>0\} \geq \sup\{L(2^n)\} = \sup\{n\underbrace{L(2)}_{>0}\} = +\infty$$

e

$$\Rightarrow \inf\{L(x) : x>0\} \le \inf\{L(2^{-n})\} = \inf\{-n\underbrace{L(2)}_{>0}\} = -\infty$$

33) $L(e)=1$ con teorema ponte

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0) = f\left(\lim_{n\to+\infty} x_n\right)$$

$$L(e) = L\left(\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) \overset{\text{teorema parte sopra}}{=}$$

$$\lim_{n\to+\infty} L\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) = \lim_{n\to+\infty} n\,L\left(1+\frac{1}{n}\right) - \overset{0}{L(1)} =$$

porto fuori da $L(x)$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{L\left(1+\frac{1}{n}\right) - L(1)}{\frac{1}{n}}$$

porto al den

pongo $h = \frac{1}{n} \to 0$

ovvero $L'(1)$

$$\lim_{h\to 0} \frac{L(1+h) - L(1)}{h} = \left.\frac{1}{x}\right|_{x=1} = \frac{1}{1} = 1$$

34) Teorema ponte: sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ $\quad x_0\in(a,b)$

$$\lim_n x_n = x_0 \quad (x_n\to x_0) \quad x_n\neq x_0$$

allora $\forall (x_n)_n$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=L \iff \lim_n f(x_n)=L$$

Dim $\Rightarrow$

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta:\ 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon \quad \left(\text{Def di limite } f(x)\right)$$

sicuramente $x_n\to x_0$ $\quad \forall\varepsilon'>0\ \exists n_0:\ \forall n\ge n_0 \Rightarrow |x_n-x_0|<\varepsilon'$ $\left(\text{def di lim succ}\right)$

quando il δ è uguale a ε' il primo è verificato essendo l'intervallo in cui il limite vale >

Pongo $\varepsilon'=\delta \Rightarrow \exists n_0:\ \forall n\ge n_0 \Rightarrow |x_n-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x_n)-L|<\varepsilon$

Dim $\Leftarrow$

x ASSURDO $\lim_{x\to x_0} f(x)\neq L$

↓

essendo diverso nego la definizione

$$\exists \varepsilon>0\ \forall\delta:\ 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-L| \ge \varepsilon$$

pongo $\delta=\frac{1}{n}$ e ottengo:

è su ε

$$|x-x_0|<\frac{1}{n} \Rightarrow |f(x_n)-L|>\varepsilon$$

ASSURDO: $x_n\to x_0$ quindi $f(x_n)\to L$ (per dim sopra)

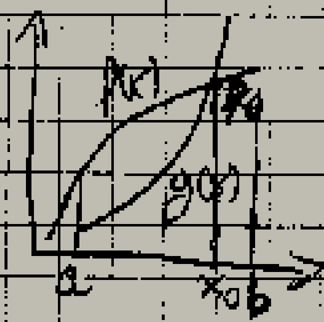
35) <u>Es importante</u> Siano $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ <u>derivabili</u>

e $x_0 \in (a,b)$

se $\begin{cases} f(x_0) = g(x_0) \\ f'(x) < g'(x) \quad \forall x \in (a,b) \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} f(x) < g(x) \quad \forall x > x_0 \\ f(x) > g(x) \quad \forall x < x_0 \end{array}$

<u>Dim</u>

sia $h(x) = f(x) - g(x)$



$h(x_0) = f(x_0) - g(x_0) = 0$

$h' = f'(x) - g'(x) < 0 \Rightarrow h(x)$ è <u>decrescente</u>

$\Rightarrow \begin{cases} h(x) > 0 & x < x_0 \\ h(x) < 0 & x > x_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) & x < x_0 \\ f(x) < g(x) & x > x_0 \end{cases}$

36) $E(x)$ inversa del lg è derivabile

$E'(x) = E(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

<u>Teorema</u> l'inversa di una funzione monotona e cresc. strettam. e continua è e sua valori continua

$E(x)$ è continua $\Longleftarrow$

$$\lim_{h \to 0} \frac{E(x+h) - E(x)}{h} = E(x)$$

<u>Dim</u>

Pongo $E(x+h) = b \Longleftrightarrow x+h = \lg b$

$E(x) = a \Longleftrightarrow x = \lg a$

$$\lim_{b \to a} \frac{b-a}{\lg b - \lg a} = \frac{1}{\frac{\lg b - \lg a}{b-a}} = \frac{1}{(\lg x)'|_a} = \frac{1}{\frac{1}{a}} = a = E(x)$$

è continua

$\boxed{b-a \to h}$

quindi $E'(x) = E(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

37) $E(a+b)=E(a)\cdot E(b) \quad \forall a,b \in \mathbb{R}$

pongo $x = E(a) \iff a = \lg x$

$y = E(b) \iff b = \lg b$

$E(a+b) = E(a)\cdot E(b) \iff E(\lg x + \lg y) = xy$

$\iff E(\lg(xy)) = xy \iff xy = xy$

38) $E\left(\frac{m}{n}\right) = e^{\frac{m}{n}} \quad \forall \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ (5 dim successive)

1) $E(1) = e^1 = e \iff \lg(E(1)) = \lg e \iff 1 = 1$

2) $E(n) = e^n \iff E(\underbrace{1+1+\dots+1}_{n \text{ volte}}) = \underbrace{E(1)\cdot E(1)\cdot E(1)\dots E(1)}_{n \text{ volte}} = e^n$

3) $E\left(\frac{1}{n}\right) = e^{\frac{1}{n}}$

$E(1) = E\left(n\cdot\frac{1}{n}\right) = E\left(\overbrace{\frac{1}{n}+\dots\frac{1}{n}}^{n \text{ VOLTE}}\right) = \overbrace{E\left(\frac{1}{n}\right)\dots E\left(\frac{1}{n}\right)}^{n \text{ VOLTE}} = E\left(\frac{1}{n}\right)^n$

$\iff e = E\left(\frac{1}{n}\right)^n \iff e^{1/n} = E\left(\frac{1}{n}\right)$

4) $E\left(\frac{m}{n}\right) = e^{\frac{m}{n}}, \quad \frac{m}{n} > 0$

$E\left(\frac{m}{n}\right) = E(\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\dots+\frac{1}{n}}_{m \text{ VOLTE}}) = E\left(\frac{1}{n}\right)^m = \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^m = e^{\frac{m}{n}}$

5) $E\left(\frac{m}{n}\right) = e^{\frac{m}{n}}, \quad \frac{m}{n} < 0$

$E\left(\frac{m}{n} - \frac{m}{n}\right) = E(0) = 1 \quad (\lg 1 = 0)$

$\frac{m}{n} < 0 \iff -\frac{m}{n} > 0$

$E\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{1}{E\left(-\frac{m}{n}\right)} = \frac{1}{e^{-\frac{m}{n}}} = e^{\frac{m}{n}}$

37) Def di $E(x)$ per $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

dato che ① $E(n) = e^n$

② $E\left(\frac{n}{m}\right) = e^{\frac{n}{m}}$

③ $E(x)$ è continua

se $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ e $x_n \to x$ $x_n \in \mathbb{Q}$

allora Ⓐ $E(x_n) = e^{x_n}$

Ⓑ $\lim E(x_n) = E(x)$

$\Rightarrow E(x) = \lim e^{x_n}$

e quindi definiamo $e^x := E(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

che è cosa calcolabile in tutto $\mathbb{R}$, e derivabile in tutto $\mathbb{R}$

$\left((E(x))' = e^x\right)$

40) $e^x \geqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \quad \forall x \geqslant 0 \quad \forall n$

1) $e^x \geqslant 1+x$ Vero per il criterio di convessità: $(e^x)^{(2)} = e^x > 0 \quad \forall x$

2) $f' = e^x \qquad g' = 1+x$

$$f(x) = e^x \qquad g(x) = x + \frac{x^2}{2} + c$$

pongo $f(0) = g(0) \Rightarrow c = 1$

per ip. induttiva: $f' \geq g' \Rightarrow f(x) \geq g(x) \quad \forall x \geq 0$

$$\Rightarrow e^x \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2} \quad \forall x \geqslant 0$$

3) Continuo con

$$f' = e^x \qquad g' = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

$$f(x) = e^x \qquad g(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3 \cdot 2} + c$$

pongo $f(0) = g(0) \Rightarrow c = 1$

per ip. induttiva

$$e^x \geqslant x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + 1$$

Concludendo con per induzione:

$$e^x \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \geqslant 0$$

$$e^x \geqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \quad \forall x \geqslant 0 \quad \left(\text{in } k=0 = \frac{x^0}{0!} = \frac{1}{1} = 1\right)$$

41) limiti importanti (4)

① $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ $\quad n>0$, fisso

Dim $e^x \geq 1+x+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} > \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$

$\Rightarrow \frac{e^x}{x^n} > \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{x^n} = \frac{x}{(n+1)!} = +\infty$

n fisso

② $\lim_{x\to-\infty} e^x x^n = 0$

Dim pongo $y=-x \longrightarrow \lim_{y\to+\infty} e^{-y}(-y)^n = \frac{(-y)^n}{e^y}$

n pari $= \frac{y^n}{e^y} = 0$

n dispari $= \frac{-y^n}{e^y} = 0$

③ $\lim_{x\to+\infty} \frac{\lg x}{x^n} = 0$

Dim $y = \lg x \quad x = e^y$

$\lim_{y\to+\infty} \frac{y}{e^{ny}} = \frac{1}{n}\cdot\frac{y'}{e^{y'}} = 0$

pongo $y' = ny$

④ $\lim_{x\to0^+} \lg x\cdot x^n = 0$

Dim $x = \frac{1}{y}$

$\lim_{y\to+\infty} \lg\left(\frac{1}{y}\right)\cdot\frac{1}{y^n} = \frac{\lg 1 - \lg y}{y^n} = -\frac{\lg y}{y^n} = 0$

5) $\lim_{x\to 0} \frac{\lg(1+x)}{x} = 1$

Dim $\lim_{h\to 0} \frac{\lg(1+h)-\lg(1)}{h} = (\lg(x))'\Big|_{x=1} = \frac{1}{1} = 1$

$h=x$

6) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$

Dim

$h=x$ $\quad \frac{e^{0+h}-e^0}{h} = e^x\Big|_{x=0} = 1$

42) Sia $f(a,b)\to\mathbb{R}$ continua in x_0

$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-(ax+b)}{x-x_0} = 0 \Rightarrow y = ax+b = T(x)$ tangente in $(x_0, f(x_0))$

Dim

essendo continua: ~~...~~ $\lim_{x\to x_0}(x-x_0) = 0$

$\lim_{x\to x_0} f(x)-(ax+b) = \lim_{x\to x_0} f(x_0)-(ax_0+b) = 0$

$f(x_0)-ax_0-b=0 \Leftrightarrow b = f(x_0)-ax_0$

$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-ax+ax_0-f(x_0)}{x-x_0} = 0$

$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)-a(x-x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - \frac{a\cancel{(x-x_0)}}{\cancel{x-x_0}}$

$= f'(x_0) - a = 0 \Rightarrow a = f'(x_0)$

$y = ax+b = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0 = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

$= T(x)$

43) ROLLE

Sia $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ CONTINUA in $[a,b]$, DERIVABILE in (a,b) e $f(a)=f(b) \Rightarrow \exists\, c \in (a,b) : f'(c)=0$

Dim f è continua, per Weierstrass $\Rightarrow \exists \max\limits_{[a,b]} f, \min\limits_{[a,b]} f$

1) se $\max f = f(a) = f(b) = \min f$ è una retta orizzontale e costante:

$f(x)$ costante $f'(x)=0 \;\forall x \in (a,b)$

NON ESTREMI

2) se almeno il massimo o il minimo appartengono ad (a,b)

allora:

M) se $x_M \in (a,b) \Rightarrow f'(x_M)=0$ per Fermat

m) se $x_m \in (a,b) \Rightarrow f'(x_m)=0$ per Fermat

$\Big\}\; x_M$ o $x_m = c$

44) LAGRANGE $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ se $f(x)$ cont. in $[a,b]$, der in (a,b)

$g(x) = f(x) - r(x)$

$r(x)$ è secante tra a, b

$f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$

$g(a) = f(a) - r(a) = 0$

$g(b) = f(b) - r(b) = 0$

g continua in $[a,b]$, derivabile (a,b), $\Rightarrow \exists\, c \in (a,b)$

x ROLLE

$g'(c) = 0 \iff f'(c) - r'(c) = 0 \iff f'(c) = r'(c)$

$= \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

al coeff. angolare di $r(x)$

45) APPLICAZIONI LAGRANGE

sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$ derivab. in (a,b)

1) $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a,b) \Rightarrow f(x)$ crescente in senso stretto

$f'(x) < 0 \quad \forall x \in (a,b) \Rightarrow f(x)$ dec. " " "

2) $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b) \Rightarrow f(x)$ crescente

$f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a,b) \Rightarrow f(x)$ decresc.

3) $f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b) \Rightarrow f(x)$ costante

Dim 1) $\forall x_1, x_2 \in (a,b) \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$?

USO LAGRANGE TRA $[x_1, x_2] \Rightarrow \exists\, c \in (x_1, x_2)$: $0 < f'(c) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$

quindi se $f'(c) > 0$ il NUM è $> 0 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$ $\quad > 0$

$\forall x_1, x_2 \in (a,b)$

al contrario se $f'(c) < 0$ il NUM è $< 0 \to f(x_2) < f(x_1)$

$\forall x_1, x_2 \in (a,b)$

Dim 2) Come 1, ma il MIN può essere 0

Dim 3) $f'(x)=0 \Rightarrow$ costante APPLICO LAGRANGE IN $[a,x]$ $\forall\, \underset{x>a}{x\leq b}$

$\Rightarrow \exists\, c\in(a,x) : f'(c) = \dfrac{f(x)-f(a)}{\underset{>0}{x-a}}$

~~per~~ $f'(c)=0$ allora $f(x)=f(a)$ $\forall\, \underset{x>a}{x\leq b} \Rightarrow f(x)=f(a)\ \forall x\, [a,b]$

$\Rightarrow f(x) =$ costante $= f(a)$

$\Delta 1)$ $\lim a_n + b_n = A + B$

a) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_1 : \forall n \geq n_1 \Rightarrow |a_n - A| < \varepsilon$

b) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_2 : \forall n \geq n_2 \Rightarrow |b_n - B| < \varepsilon$

pongo $n_3 = MAX(n_1, n_2)$ e $\forall n \geq n_3 \Rightarrow$

$$|a_n + b_n - A - B| = |a_n - A + b_n - B| \underset{\text{triangolare}}{\leq} |a_n - A| + |b_n - B| = 2\varepsilon$$

$\Delta 2)$ $\lim a_n \cdot b_n = A \cdot B$

a) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_1 : \forall n \geq n_1 \Rightarrow |a_n - A| < \varepsilon$

b) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_2 : \forall n \geq n_2 \Rightarrow |b_n - B| < \varepsilon$

pongo $n_3 = MAX(n_1, n_2)$ e $\forall n \geq n_3 \Rightarrow$

$$|a_n b_n - AB| \overset{\pm b_n A}{=} |a_n b_n - Ab_n + Ab_n - AB|$$

$$\leq |b_n||a_n - A| + |A||b_n - B| < 2\varepsilon$$

triangolare e [illegible]

successione infinitesima per limitata tende a 0 per n grande

$\Delta 3)$ Somma limiti

a) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_1 : 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - \lambda_1| < \varepsilon$

b) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_2 : 0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - \lambda_2| < \varepsilon$

pongo $\delta_3 = MIN(\delta_1, \delta_2)$ e se $0 < |x - x_0| < \delta_3 \Rightarrow$

con δ il minimo

$$|f(x) + g(x) - \lambda_1 - \lambda_2| = |f(x) - \lambda_1 + g(x) - \lambda_2| \underset{\text{Triangolare}}{\leq} |f(x) - \lambda_1| + |g(x) - \lambda_1| = 2\varepsilon$$

$\Delta 4)$ prodotto dei limiti

a) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_1 : 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - \lambda_1| < \varepsilon$

b) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_2 : 0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - \lambda_2| < \varepsilon$

prendo $\delta_3 = \min(\delta_1, \delta_2)$ e per $0 < |x - x_0| < \delta_3 \Rightarrow$

$$|f(x)g(x) - \lambda_1\lambda_2| \underset{\pm\lambda_1 g(x)}{=} |f(x)g(x) - \lambda_1 g(x) + \lambda_1 g(x) - \lambda_1\lambda_2|$$

raccolgo

$$= |g(x)(f(x) - \lambda_1) + \lambda_1(g(x) - \lambda_2)| \overset{\text{triangolare}}{\leq} |g(x)||f(x) - \lambda_1| + |\lambda_1||g(x) - \lambda_2|$$

siccome $g(x)$ e λ_1 sono finiti e gli altri infinitesimi

è tutto $\leq \varepsilon + \varepsilon$ quindi è confermato

$\Delta 5)$ divisione dei limiti

a) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_1 : 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - \lambda_1| < \varepsilon$

b) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_2 : 0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - \lambda_2| < \varepsilon$

c) $\lambda_2 \neq 0 \Rightarrow \exists \delta_3 : 0 < |x - x_0| < \delta_3 \Rightarrow |g(x)| > \left|\frac{\lambda_2}{2}\right|$

permanenza del segno

e δ è il $\min(\delta_1, \delta_2, \delta_3) \Rightarrow$

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right| \overset{\text{comune}}{=} \left|\frac{f(x)\lambda_2 - \lambda_1 g(x)}{g(x)\lambda_2}\right| \overset{\pm\lambda_2\lambda_1}{=} \frac{|f(x)\lambda_2 - \lambda_2\lambda_1 + \lambda_2\lambda_1 - \lambda_1 g(x)|}{|g(x)||\lambda_2|}$$

raccolgo e triangolare

$$\leq \frac{|\lambda_2||f(x) - \lambda_1| + |\lambda_1||g(x) - \lambda_2|}{|g(x)||\lambda_2|} \leq \frac{\varepsilon \cdot (|\lambda_1| + |\lambda_2|)}{\left|\frac{\lambda_2}{2}\right||\lambda_2|} = c \cdot \varepsilon$$

permanenza

costante

Δ6) CARABINIERI

sia $f, g, h \; (a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$

e $f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \forall x \in (a,b)$

se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = \lambda$

allora $\lim_{x \to x_0} g(x) = \lambda$

a) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta_1 : 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - \lambda| < \varepsilon$

b) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta_2 : 0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |h(x) - \lambda| < \varepsilon$

$\delta_3 = \min(\delta_1, \delta_2)$

$\forall x \; 0 < |x - x_0| < \delta_3$ si ha $\lambda - \varepsilon \leq f(x) \leq g(x) \leq h(x) \leq \lambda + \varepsilon$

$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} g(x) = \lambda$

Δ7) SEGNO

se $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda$

1) $\lambda > 0 \Rightarrow \exists \delta : f(x) > \frac{\lambda}{2} > 0 \quad \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta$

Di $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \lambda - \varepsilon < f(x) < \lambda + \varepsilon$

pongo $\varepsilon = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \quad \lambda - \frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda}{2} < f(x)$

2) $\lambda < 0 \Rightarrow \exists \delta : f(x) < \frac{\lambda}{2} < 0 \quad \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta$

Dim pongo $\varepsilon = -\frac{\lambda}{2}$ $\quad f(x) < \lambda - \frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda}{2}$

che è positivo

3) $\lambda \neq 0 \Rightarrow \exists \delta : |f(x)| > \left|\frac{\lambda}{2}\right| \quad \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta$

se $\lambda > 0$ per prima $\Rightarrow$ $f(x) > \frac{\lambda}{2} \Rightarrow |f(x)| > \left|\frac{\lambda}{2}\right|$

se $\lambda < 0$ per prima $\Rightarrow$ $f(x) < \frac{\lambda}{2} \Rightarrow -|f(x)| < -\left|\frac{\lambda}{2}\right| \overset{\cdot(-1)}{\Rightarrow} |f(x)| > \left|\frac{\lambda}{2}\right|$ inverte

al contrario $\times$ per assurdo

se $f(x) \geq 0$ ed $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda$ allora $\lambda \geq 0$

se λ fosse < 0 allora $f(x) < \frac{\lambda}{2} < 0$ ASSURDO

se $f(x) \leq 0$ e $\exists \lim f(x) = \lambda$ allora $\lambda \leq 0$

se $\lambda > 0$ allora $f(x) > \frac{\lambda}{2} > 0$ ASSURDO

18) Derivata somma

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= f'(x) + g'(x)$$

19) Derivata prodotto

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \overset{+f(x)g(x+h)}{=} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= g(x+h)\left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right] + f(x)\left[\frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right]$$

siccome $g(x+h)$ tende a $g(x) \Rightarrow g(x)f'(x) + f(x)g'(x)$

10) $\lim \frac{a^n}{n^p}$ con $a>1$, $p>0$

CRITERIO DEL RAPPORTO: se $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$

- $L > 1$ $\lim a_n = +\infty$
- $0 \leq L < 1$ $\lim a_n = 0$
- $L = 1$ non si può dire

$$\lim \frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)^p}}{\frac{a^n}{n^p}} = \frac{\cancel{a^{n+1}}}{(n+1)^p} \cdot \frac{n^p}{\cancel{a^n}} = a\left(\frac{n}{n+1}\right)^p \text{ che se } n \to \infty =$$

$a \cdot 1^p$ con $a>1$ è >1 e quindi $\lim \frac{a^n}{n^p} = +\infty$