1) $f:(a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$; $f$ continua in $x_0$

$f$ derivabile $\forall x \in (a,b)$ tranne al limite in $x_0$

se $\exists \lim_{x \to x_0} f'(x) = L \Rightarrow f'(x_0) = L$

Dim

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

applico de l'hopital

$$\overset{H}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{1} = L \qquad \text{c.v.d.}$$

($f(x_0)$ e $x_0$ sono costanti e derivate spariscono)

2) $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ derivabile $n$ volte in $0 \in (a,b)$

allora esiste un unico polinomio t.c. $f^{(k)}(0) = P_n^{(k)}(0)$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

Dim

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \dots + a_n x^n$$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

$$a_k = \frac{P_n^{(k)}(0)}{k!}$$

Impongo $P_n^{(k)}(0) = f^{(k)}(0)$

$$\Rightarrow P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \qquad \text{c.v.d}$$

Questo Polinomio è unico! (no dim)

3) $f(x) = P_n(x) + o(x^n)$ per $x \to 0$

$$\iff \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - P_n(x)}{x^n} = 0 \qquad \underline{\text{N.B.}}\ f(x) - P_n(x) = E_n(x)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k}{x^n} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\overset{H}{\Longrightarrow} \lim_{x\to 0} \frac{f^{(1)}(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} k \cdot x^{k-1}}{n x^{n-1}}$$

applicando de l'hopital $j$ volte:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f^{(j)}(x) - \sum_{k=j}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{(k-j)!} x^{k-j}}{n(n-1)(n-2)\dots(n-j+1)\, x^{n-j}}$$

$j = n-1$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f^{(n-1)}(x) - \sum_{k=n-1}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{(k-n+1)!} x^{k-n+1}}{n(n-1)(n-2)\dots(\cancel{n}-\cancel{n}+1+1)\, x^{\cancel{n-n+1}}}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f^{(n-1)}(x) - \frac{f^{(n-1)}(0)}{0!} x^0 - \frac{f^{(n)}(0)}{1!} x}{n!\, x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0)}{n!\, x} - \frac{f^{(n)}(0)\cancel{x}}{n!\cancel{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{f^{(n)}(0) - \cancel{f^{(n)}(0)}}{n!} = \frac{0}{n!}$$

4)

- $e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(e^x)^{(k)}\big|_{x=0}}{k!} x^k + o(x^n)$ per $x \to 0$

$(e^x)' = e^x$

$(e^x)'' = e^x \iff e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$

$\dots$

$e^0 = 1$

- $\lg(1+x)$

$(\lg(1+x))' = \frac{1}{1+x}$

$(\lg(1+x))'' = \frac{-1}{(1+x)^2}$

$(\lg(1+x))''' = \frac{+2}{(1+x)^3}$

$(\lg(1+x))^{(k)} = (k-1)!\,(1+x)^{-k} \cdot (-1)^{k-1}$

in $x=0 \Rightarrow (k-1)!\,(-1)^{k-1}$

$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k + o(x^n)$

Tolgo lo 0 perché la funz in 0 vale 0

- $y = \frac{1}{1-x}$

$\sum_{k=1}^{n} x^k = \frac{x - x^{n+1}}{1-x}$

voglio farla partire da 0:

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + \frac{x - x^{n+1}}{1-x} = \frac{1 \cancel{-x} \cancel{+x} - x^{n+1}}{1-x}$

$= \frac{1}{1-x} - \underbrace{\frac{x^{n+1}}{1-x}}_{\text{per } x \to 0} = o(x^n)$

per UNICITÀ del Pol di McLaurin: $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$

5) Flessi

$$\begin{cases} f(x) > T(x), & x > x_0 \\ f(x) < T(x) & x < x_0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} f(x) < T(x), & x > x_0 \\ f(x) > T(x), & x < x_0 \end{cases}$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!} + o((x-x_0)^n)$$

$$\Rightarrow f(x) - T(x) = \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \dots$$

se $f^{(k)}(x_0) \neq 0$ e $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(k-1)}(x_0) = 0$

allora

$k$ è dispari c'è flesso

$k$ è pari non c'è flesso

$$\frac{f(x) - T(x)}{(x-x_0)^k} = f^{(k)}(x_0) + \dots + o(x-x_0)^{n-k}$$ [dividendo tutto per $(x-x_0)^k$]

$$\operatorname{Sign} \frac{f(x) - T(x)}{(x-x_0)^k} = \operatorname{Sign} f^{(k)}(x_0)$$

se $k$ è dispari cambia segno $(f(x) - T(x))$ se $x$ è a dx o sx di $x_0$ quindi c'è flesso

se $k$ pari è segno ~~fattore~~ uguale quindi ~~non~~ c'è flesso (?)

Nel ~~caso~~ $k$ pari se $f'(x_0) = 0$ per Fermat allora un ~~minimo~~ o massimo locale (dato che non può essere flesso)

6) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua allora $\mathrm{Im}(f)=[\min f, \max f]$

Dim (2 punti)

1) $\mathrm{Im}\, f \subseteq [\min f, \max f]$

ovvio perché $\exists\, x_m \in [a,b]: \min f = f(x_m)$

$\exists\, x_M \in [a,b]: \max f = f(x_M)$ x Weierstrass

2) $[\min f, \max f] \subseteq \mathrm{Im}\, f$

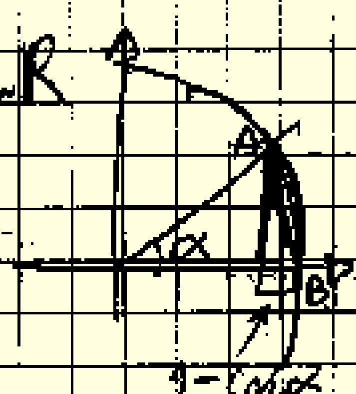
sia $\lambda \in [\min f, \max f] \iff \exists\, x: f(x)=\lambda$ ?

applico il Teo dei valori intermedi tra $x_M$ e $x_m$

$[x_m, x_M]$, $f(x_m)\le f(x_M)$, $f$ continua

$\Rightarrow \exists\, x\in[x_m,x_M]: f(x)=\lambda$

7) Sin e Cos continue in 0 e in $\mathbb{R}$




$0 \le \underbrace{\sin^2\alpha + (1-\cos\alpha)^2}_{\overline{AB}} \le \alpha^2$ → l'arco è maggiore della corda

con $\alpha \to 0^+$ per i confronti

$\sin^2\alpha + (1-\cos\alpha)^2 \to 0^+$

la somma di 2 quadrati $\to 0^+$ se entrambi $\to 0^+$:

1) $\sin^2\alpha \to 0^+ \Rightarrow \sin\alpha \to 0$

2) $(1-\cos\alpha)^2 \to 0^+ \Rightarrow 1-\cos\alpha \to 0 \Rightarrow \cos\alpha \to 1$

per $0^-$:

poiché $\sin\alpha = -\sin(-\alpha)$

$\Rightarrow \lim_{\alpha\to 0^-} \sin\alpha = 0$

e $\cos\alpha = \cos(-\alpha)$

$\Rightarrow \lim_{\alpha\to 0^-} \cos\alpha = 1$

che basta dire e subito concludo

$$\lim_{\alpha\to 0} \sin\alpha = 0$$

$$\lim_{\alpha\to 0} \cos\alpha = 1$$

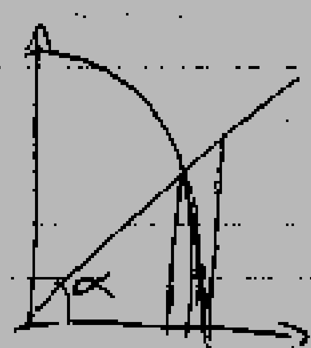
Continuità in $\mathbb{R}$

$$\lim_{h\to 0} \sin(\alpha+h) = \sin\alpha \underbrace{\cos h}_{\to 1} + \cos\alpha \underbrace{\sin h}_{\to 0} = \sin\alpha$$

$$\lim_{h\to 0} \cos(\alpha+h) = \cos\alpha \underbrace{\cos h}_{\to 1} - \sin\alpha \underbrace{\sin h}_{\to 0} = \cos\alpha$$

c.v.d.

8) disuguaglianza sin e cos in $0$ e $\mathbb{R}$



con $0 \leq \alpha < \pi/2$

$0 \leq \sin\alpha \leq \alpha \leq \operatorname{Tg}\alpha$

divido per $\sin\alpha$

$$0 \leq 1 \leq \frac{\alpha}{\sin\alpha} \leq \frac{1}{\cos\alpha}$$

per $\alpha \to 0$

$$1 \leq \frac{\alpha}{\sin\alpha} \leq \frac{1}{1}$$

per i carabinieri

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$$

Cos in 0:

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{1-\cos\alpha}{\alpha} =$$

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{1-\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\alpha} =$$

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\alpha} =$$

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2} \cdot \frac{\alpha}{2} = \lim_{\alpha\to 0} 1 \cdot \frac{\alpha}{2} = 0$$

Der. în $\mathbb{R}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(\alpha+h)-\sin\alpha}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin\alpha\cos h+\sin h\cos\alpha-\sin\alpha}{h}$$

scoatem $\sin\alpha$:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin\alpha(\cos h-1)+\cos\alpha\sin h}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin\alpha\cdot 0}{h}+\cos\alpha\cdot\frac{\sin h}{h}$$

$=\cos\alpha$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos(\alpha+h)-\cos(\alpha)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos\alpha\cos h-\sin\alpha\sin h-\cos\alpha}{h}$$

scoatem $\cos\alpha$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos\alpha(\cos h-1)}{h}-\sin\alpha\frac{\sin h}{h}=-\sin\alpha$$

9) Rezolv. Tan: $\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{\cos^2x+\sin^2x}{\cos^2x}=\frac{1}{\cos^2x}=1+tg^2x$

" $\arcsin[-1,1]\to\mathbb{R}$
$[-\pi/2,\pi/2]$ : $(\arcsin y)'=\frac{1}{(\sin x)'}\Big|_{x=\arcsin y}$

$$=\frac{1}{\cos(\arcsin y)}=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

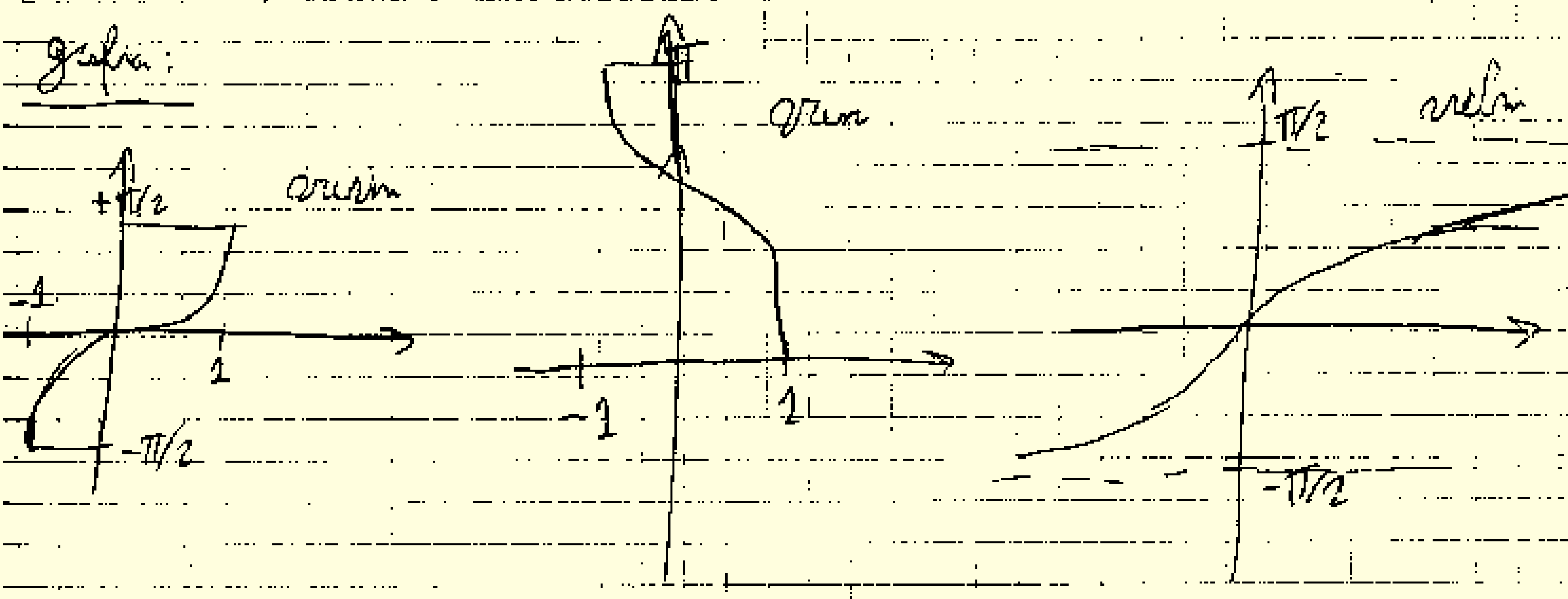
" $\arccos: [-1,1]\to\mathbb{R}$
$[0,\pi]$ $(\arccos y)'=\frac{1}{(\cos x)'}\Big|_{x=\arccos y}$

$$=\frac{1}{-\sin(\arccos y)}=\frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \to \left(-\pi/2, \pi/2\right)$

$$(\operatorname{arctg} y)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} x)'\big|_{x=\operatorname{arctg} y}} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x + 1\big|_{x=\operatorname{arctg} y}} = \frac{1}{y^2+1}$$

grafic:




10) • $\cos x \le 1$ $(x>0)$

Integrăm $f(x)=\sin x$ $g(x) = x + C$ punem $f(0)=g(0) \Rightarrow C=0$

• $\sin x \le x$

Integrăm $f(x) = -\cos x$ $g(x) = \frac{x^2}{2} + c$

punem $f(0)=g(0)$

$f(0) = -1 = C$

(integrăm pe $-1$ e greu)

• $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$

Integrăm $f(x) = \sin x$ $g(x) = x - \frac{x^3}{3!} + C$

punem $f(0)=g(0) \Rightarrow C=0$

• $\sin x \geq x - \frac{x^3}{3!}$

Integrăm $C=-1$

$\cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}$

Dunque: $\forall x > 0$

$$\sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \leq \sin x \leq \sum_{k=0}^{2n+2} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+2)!}$$

$$\sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \leq \cos x \leq \sum_{k=0}^{2n+2} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

(per il coseno però vale ~~$\forall$~~ $x \in \mathbb{R}$

$\downarrow$

seno [illegible] fino ~~[illegible]~~ al coseno

c.v.d.

$(\sin x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x$

11) $y = \sin(x)$

$y^{(0)}(0) = 0$

$y^{(1)}(0) = 1$

$y^{(2)}(0) = 0$

$y^{(3)}(0) = -1$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$$

e $z = \cos(x)$

$z^{(0)}(0) = 1$

$z^{(1)}(0) = 0$

$z^{(2)}(0) = -1$

$z^{(3)}(0) = 0$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+2})$$

12) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrabile sec. Riemann

Limitata

1) se $m=\inf\limits_{[a,b]} f(x)$ $\quad M=\sup\limits_{[a,b]} f(x)$

$$m\le f(x)\le M \quad \forall x\in[a,b]$$

$\Downarrow$ MONOTONIA DELL'INTEGRALE

$$\int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b M\,dx$$

$$\Rightarrow \text{①}\ (b-a)m \le \int_a^b f(x)\,dx \le (b-a)M \quad \text{c.v.d.}$$

2) se $f$ continua:

Per Weierstrass $\quad \exists \min\limits_{[a,b]} f = \inf\limits_{[a,b]} f = m$

$$\exists \max\limits_{[a,b]} f = \sup f = M$$

Divido ① per $(b-a)$

$$m \le \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{(b-a)} \le M$$

per valori intermedi: $\exists\, c \in [a,b] : f(c) = \dfrac{\int_a^b f(x)\,dx}{(b-a)}$

$$\Longrightarrow \exists\, c\in[a,b] \quad f(c)(b-a) = \int_a^b f(x)\,dx \quad \text{c.v.d.}$$

13) se $f(t)$ è continua in $[a,b]$

allora $F$ è derivabile e $F'(x)=f(x)$ in $(a,b)$

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\int_a^{x+h}f(t)\,dt-\int_a^x f(t)\,dt}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\int_x^{x+h}f(t)\,dt$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{media}\\ \text{integrale}}}{=}\lim_{h\to 0^+}\frac{(\cancel{x}+h-\cancel{x})f(c)}{\cancel{h}}\quad \text{con } c\in(x,x+h)$$

$$=\lim_{h\to 0^+}f(c)\underset{\substack{\uparrow\\ \text{essendo } f\\ \text{continua (per Teor. ponte?)}}}{=}f(x)$$

Caso $0^-$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{\int_a^{x+h}f(t)\,dt-\int_a^x f(t)\,dt}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^-}\frac{\cancel{\int_a^x f(t)\,dt}-\int_{x+h}^x f(t)\,dt-\cancel{\int_a^x f(t)\,dt}}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{-(\cancel{x}-(\cancel{x}+h))f(c)}{\cancel{h}}=\lim_{h\to 0^-}f(c)\underset{\substack{\uparrow\\ \text{per continuità}\\ \text{e (T. ponte?)}}}{=}f(x)$$

con $c\in[x+h,x]$

14) Barrow $\quad f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua

$F(x)$ una qualunque primitiva $\quad (F'(x)=f(x))\quad$ allora $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = F(b)-F(a)$

Dato che le primitive differiscono di una costante:

$$A(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

$$A(x) = F(x)+K \quad (\forall x\in[a,b])$$

$$\Rightarrow\ F(b)+K = \int_a^b f(t)\,dt$$

$$A(a) = F(a)+K$$

$$\downarrow$$

$$0 = F(a)+K \Rightarrow K=-F(a) \Rightarrow \int_a^b f(t)\,dt = F(b)-F(a) \quad \text{c.v.d.}$$

$$\downarrow$$

$$\int_a^a f(t)\,dt = 0$$

15) $\displaystyle G(x)=\int_a^{g(x)} f(t)\,dt \qquad g$ derivabile, $f$ continua

$$A(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

$$G(x)=A(g(x))$$

$$G'(x) = \left(A(g(x))\right)' = A'(g(x))\cdot g'(x) \underset{\text{T.F.C.I.}}{=} f(g(x))\cdot g'(x) \quad \text{c.v.d.}$$

16) Sia $f$ contin., $\varphi$ derivabile e $\varphi'$ contin.

$$G(x) \in \int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\, dx$$

$$F(u) \in \int f(u)\, du$$

allora $F(\varphi(x)) = G(x) + K$

Dim

$$\left(F(\varphi(x))\right)' = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$$

$$G'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \text{ per ipo.}$$

Stesse derivate, differiscono di una costante:

$$F(\varphi(x)) = G(x) + K \quad \text{c.v.d.}$$

Note:

Per gli integrali definiti:

$$\int_a^b f(\varphi(x))\, \varphi'(x)\, dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)\, dy$$

e

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(y)) \cdot \varphi'(y)\, dy$$

PS: per integrale def. per sostituzione $\int_0^x \sqrt{1-t^2}\, dt$

e $\int \cos(2t)\,dt = \operatorname{sin}t \cos t \xrightarrow{t = \sin y} (\sin t \cos t)' = \cos^2 t - \sin^2 t = \cos 2t$

17) $\int f'g\,dx = fg - \int f g'\,dx$

$(fg)' = f'g + fg' \xrightarrow{\text{integro}} \int (fg)' = \int f'g + \int fg'$

$\xrightarrow{\text{quindi}} \int f'g\,dx = fg - \int f g'\,dx$ c.v.d.

18) Serie Telescopica:

Sia $a_n = b_n - b_{n+1}$

$S_1 = b_1 - b_2$

$S_2 = b_1 - \cancel{b_2} + \cancel{b_2} - b_3$

$S_3 = b_1 - \cancel{b_3} + \cancel{b_3} - b_4$

$S_n = b_1 - b_{n-1}$

$\lim_n S_n = \lim_n b_1 - b_{n-1} = b_1 - \lim_n b_{n-1}$

dunque la serie Telescopica $\sum_{n=1}^{\infty} b_n - b_{n+1}$ è convergente $\Longleftrightarrow \lim_n b_n$ è finito

19) $\sum_{K=1}^{\infty} q^K$ con $q \in \mathbb{R}$ Serie geometrica

diverge per $q \geq 1$

converge per $|q| < 1$

indeterminata per $q < -1$

La dim vedi quella fatta ormai 30 volte

20) Serie a termini positivi sono divergenti o convergenti

$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad a_n \geq 0$$

$(S_n)_n$ è monotona crescente $\Rightarrow \exists \lim S_n$

$\to +\infty \Rightarrow$ diverge

$\to L \Rightarrow$ converge

Siano $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ con $a_n \geq 0$ , $b_n \geq 0$

e $a_n \leq b_n$

allora

$\sum a_n$ diverge $\Rightarrow \sum b_n$ diverge

$\sum b_n$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = T$$

Torno ridotte delle somme:

$$0 \leq S_n \leq T_n$$

① $S_n \to +\infty \Rightarrow T_n \to +\infty$

② $T_n \to L \Rightarrow \lim_n S_n \leq L$

$\exists$ perché $S_n$ è monotona crescente

---

21) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge $\Rightarrow a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

non è superiore

Es: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge ma $\lim_n \frac{1}{n} = 0$

Dim. $\sum a_n$ converge $\Rightarrow \exists \lim_n S_n$ finito

$$a_n = S_n - S_{n-1} = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k$$

$\lim a_n = \lim S_n - \lim S_{n-1} = 0$ per $n \to +\infty$

c.v.d.

22) Criterio conf. asintotico

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \, , \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \qquad a_n \geq 0 \, , \; b_n > 0$$

se $\lim_{n} \frac{a_n}{b_n} = 1$ allora hanno lo stesso carattere

Dim

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \, n_0 : \forall n \geq n_0$ si ha

$$1 - \varepsilon \leq \frac{a_n}{b_n} \leq 1 + \varepsilon \qquad \forall n \geq n_0$$

$$(1-\varepsilon) b_n \leq a_n \leq (1+\varepsilon) b_n$$

Noto che se la coda converge converge anche la serie e se diverge diverge anche la serie (i termini prima della coda sono in numero finito).

$$S_n = \sum_{k=1}^{n_0 - 1} a_k + \sum_{k=n_0}^{n} a_k$$

stesso carattere

4 casi

$a_n \leq b_n \Rightarrow$ ① $a_n$ diverge : $a_n \leq (1+\varepsilon) b_n \Rightarrow b_n$ diverge

② $a_n$ converge : $(1-\varepsilon) b_n \leq a_n \Rightarrow b_n$ converge

$b_n \leq a_n \Rightarrow$ ③ $b_n$ diverge : $(1-\varepsilon) b_n \leq a_n \Rightarrow a_n$ diverge

④ $b_n$ converge : $a_n \leq (1+\varepsilon) b_n \Rightarrow a_n$ converge

c.v.d.

23) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$

confronto con l'integrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{K\to+\infty} \int_1^{K} \frac{1}{x^p}\,dx$

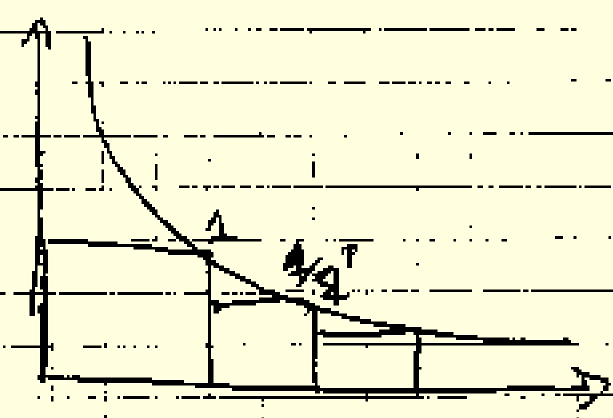
se $p \neq 1$

$$= \lim_K \left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_1^K = \lim_K \frac{K^{-p+1}}{-p+1} + \frac{1}{p-1} = \begin{cases} \nearrow +\infty & \text{con } p<1 \\ \searrow L & \text{con } p>1 \end{cases}$$

per $p=1$

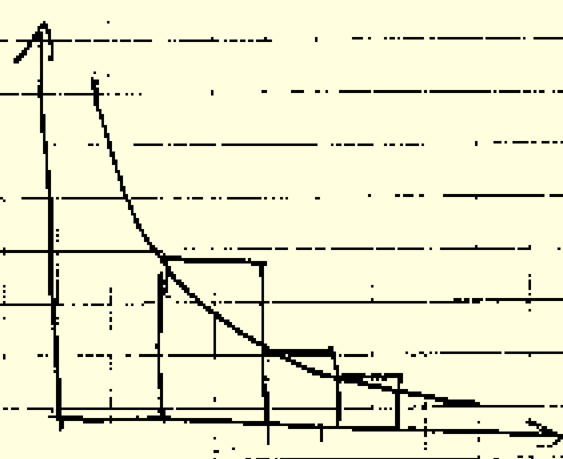
$$\lim_K \log K = +\infty$$

Stima dall'alto




$$\sum_{K=1}^{n} \frac{1}{K^p} \leq 1 + \int_1^{n} \frac{1}{x^p}\,dx$$

Stima dal basso



$$\int_1^{n+1} \frac{1}{x^p}\,dx \leq \sum_{K=1}^{n} \frac{1}{K^p}$$

per i limiti e per confronto: $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx \leq \sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{K^p} \leq 1 + \int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$

$\Rightarrow$

se $p \leq 1 \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = +\infty \Rightarrow \sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{K^p}$ diverge

se $p > 1 \Rightarrow \int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = L \Rightarrow \sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{K^p}$ converge

## 24) Leibniz

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$$

① $a_n > 0$

② $a_n$ decrescente $\Longrightarrow$ allora converge

③ $a_n \to 0$

$S_1 = a_1$

$S_2 = a_1 - a_2$

$S_3 = a_1 - a_2 + a_3 = a_1 - \overset{>0}{(a_2 - a_3)} < S_1$

$S_4 = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 = \underset{\geq 0}{(a_1 - a_2)} + \underset{\geq 0}{(a_3 - a_4)} > S_2$

In generale $(S_{2n})_n$ crescente $\Longrightarrow \exists \lim_n S_{2n} < S_1$

$(S_{2n-1})$ decrescente $\Longrightarrow \exists \lim S_{2n-1} > S_2$

Sia $\lim S_{2n} = L_1$ e $\lim S_{2n-1} = L_2$ entrambi sono finiti essendo $S_1$ e $S_2$ finiti

$|S_{2n-1} - S_{2n}| = S_{2n-1} - S_{2n} = a_{2n}$

$\lim (S_{2n-1} - S_{2n}) = \lim a_{2n} = 0$

$L_1 - L_2 = 0 \iff L_1 = L_2$

$\Longrightarrow \exists \lim_n S_n = L_1 = L_2 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ c.v.d.

25) $\sum |a_n|$ converge $\Rightarrow$ $\sum a_n$ converge

$$a_n^+ = \begin{cases} a_n & \text{se } a_n > 0 \\ 0 & \text{se } a_n \leq 0 \end{cases}$$

$$a_n^- = \begin{cases} -a_n & \text{se } a_n < 0 \\ 0 & \text{se } a_n \geq 0 \end{cases}$$

$|a_n| = a_n^+ + a_n^-$

$\Rightarrow$ $0 \leq a_n^+ \leq |a_n|$

$0 \leq a_n^- \leq |a_n|$

se $\sum |a_n|$ converge $\Rightarrow$ $\begin{cases} \sum a_n^+ \text{ converge} \\ \sum a_n^- \text{ converge} \end{cases}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - a_n^- = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-}_{\text{convergono}}$$

quindi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge essendo impolo di somme convergenti

26) Rapporto: $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ se $L < 1 \Rightarrow$ converge

$L = 1$ nulla si sa

$L > 1 \Rightarrow$ diverge

Dim $L < 1$:

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - L \right| < \varepsilon$$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists p : \forall n \geq p$

$$L - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < L + \varepsilon$$

Scelgo un $\varepsilon$ t.c. $L + \varepsilon = \beta < 1$

per $n = p \Rightarrow \frac{a_{p+1}}{a_p} < \beta \Rightarrow a_{p+1} < \beta a_p$

per $n = p+1 \Rightarrow \frac{a_{p+2}}{a_{p+1}} < \beta \Rightarrow a_{p+2} < \beta \underbrace{a_{p+1}}_{< \text{ di } \beta a_p \text{ per prima}} \Rightarrow a_{p+2} < \beta^2 a_p$

per $n = p+K \Rightarrow \frac{a_{p+K+1}}{a_{p+K}} < \beta \Rightarrow a_{p+K+1} < \beta^{K+1} a_p$

per ogni $K \geq 1$

$$a_{p+K} < \beta^K a_p \Rightarrow \sum_{K=1}^{\infty} a_{p+K} < a_p \sum \beta^K$$

serie geometrica, $\beta < 1$ per "hp", converge

la serie converge

**per $L > 1$**

$\varepsilon$ t.c. $L - \varepsilon = \beta > 1$

$$\frac{a_{p+1}}{a_p} > \beta \Rightarrow \sum_{K=1}^{\infty} a_{p+K} > a_p \sum_{K=1}^{\infty} \beta^K$$

$\beta > 1$, diverge

la serie diverge

**per $L = 1$**

~~Esempio~~

$$\sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{n} \longrightarrow \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} \Rightarrow 1 \text{ , diverge}$$

$$\sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \longrightarrow \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{n^2+2n+1} \Rightarrow 1 \text{ , converge}$$

quindi nulla si può dire se $L = 1$

27) Criterio dell'integrale

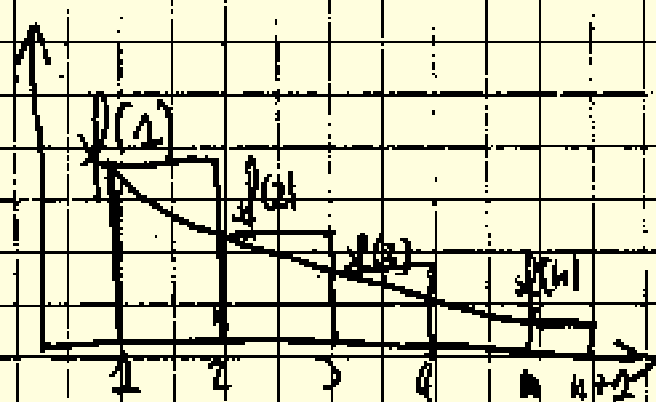
Sia $f: [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ positiva e decrescente

Sia $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)$

e $T_n = \int_1^n f(x)\,dx$

allora $(S_n)_n$ e $(T_n)_n$ hanno lo stesso carattere

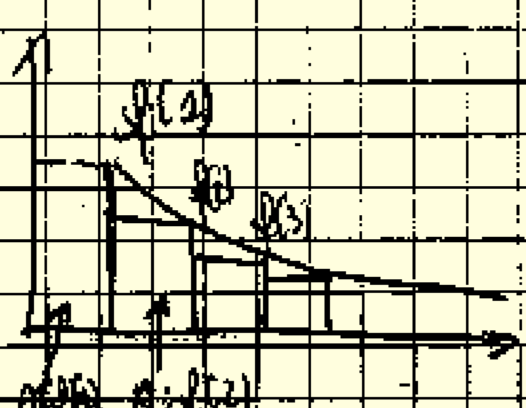
Stima 1




$$S_n \geq \int_1^{n+1} f(x)\,dx \iff S_n \geq T_{n+1} \iff T_n \leq S_{n-1}$$

Stima 2

$$\sum_{k=2}^{n} f(k) \leq \int_1^{n} f(x)\,dx$$




$$\iff S_n - f(1) \leq T_n$$

Conclusione

$$S_n - f(1) \leq T_n \leq S_{n-1}$$

+ se $S_n$ converge $T_n$ converge + se $T_n$ converge $S_n$ converge

+ se $S_n$ diverge $T_n$ diverge + se $T_n$ diverge $S_n$ diverge

28) $a(x)$ definita e continua $\forall x \in I$ e $A(x)$ primitiva di $a(x)$

$y'(x) = a(x) \cdot y(x)$ le soluzioni (tutte e sole) sono $y(x) = Ce^{A(x)}$, $C \in \mathbb{R}$

① $y(x) = Ce^{A(x)}$ è soluzione:

$$y'(x) = Ce^{A(x)} \cdot a(x) = Ce^{A(x)} \cdot a(x) = y(x)\, a(x)$$

② ogni sol è di questo tipo?

$$y'(x) = a(x)\, y(x) \iff y'(x) - a(x)\, y(x) = 0$$

moltiplico per $e^{-A(x)}$

$$y' e^{-A(x)} - e^{-A(x)} a(x) y(x) = 0$$

$$\left(y(x) e^{-A(x)}\right)' = 0$$

$$\Rightarrow y(x)\, e^{-A(x)} = c$$

$$y(x) = Ce^{A(x)} \quad \text{c.v.d.}$$

29) $L(f) = f'(x) - a(x) f(x)$

$L$ è lineare: $L(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha L(y_1) + \beta L(y_2)$

$$\| $$

$$(\alpha y_1 + \beta y_2)' - a(x)(\alpha y_1 + \beta y_2)$$

$$= \alpha y_1' + \beta y_2' - a(x)\, \alpha y_1 - a(x)\, \beta y_2$$

$$= \alpha\left[y_1' - a(x)\, y_1\right] + \beta\left[y_2' - a(x)\, y_2\right]$$

$$= \alpha L(y_1) + \beta L(y_2)$$

se $y' - a(x)y = 0$

$y(x)$ è soluzione $\iff L(y(x)) = 0$

e dato che $L$ è lineare $\alpha y_1 + \beta y_2$ è soluzione se $y_1$ e $y_2$ lo sono.

$$0 = \alpha \underset{0}{L(y_1)} + \beta \underset{0}{L(y_2)} = L(\alpha y_1 + \beta y_2) \quad \text{c.v.d.}$$

30) NON OMOGENEO:

$$y' = a(x)\, y(x) + b(x)$$

$y' - a(x)\, y(x) = b(x)$ moltiplico per $e^{-A(x)}$

$$e^{-A(x)} y' - e^{-A(x)} a(x) y(x) = e^{-A(x)} b(x)$$

$$\left(y(x)\, e^{-A(x)}\right)' = e^{-A(x)} b(x)$$

INTEGRO

$$y(x)\, e^{-A(x)} = \int e^{-A(x)} b(x)$$

Sia $K(x) \in \int e^{-A(x)} b(x)$

$$y(x)\, e^{-A(x)} = K(x) + c$$

$$y(x) = e^{A(x)} \left(K(x) + c\right)$$

— Che ~~sia~~ soluzione $\forall$ costante fissa, cioè ~~dire~~ che $y(x) = e^{A(x)}(K(x)+c)$ è soluzione

$$y' = e^{A(x)} \cdot a(x)\left(K(x)+c\right) + \cancel{e^{A(x)}} \cdot \underbrace{\cancel{e^{-A(x)}} b(x)}_{(K(x))'}$$

$$= e^{A(x)} a(x)\left(K(x)+c\right) + b(x) \quad \text{c.v.d.}$$

31) VAR. SEPARABILI

$$y'(x) = a(x)\, g(y(x))$$

~~$a, g$ continue~~

$a : I \to \mathbb{R}$ continua

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua

① Soluzioni costanti

$y'(x) = 0 \quad \forall x \in I \implies 0 = a(x) \cdot g(y_0)$

se $a(x) \neq 0$

$y(x) = y_0$ è sol. $\iff g(y_0) = 0$

② non costanti

se $y(x) \neq y_0$ $\exists$ un intorno in cui $g(y(x)) \neq 0$

divido per $g(y(x))$:

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = a(x) \qquad \begin{array}{l}\text{integro} \\ \text{cambio diff.} \\ y(x) = z \\ y'(x)\,dx = dz\end{array} \qquad \int \frac{dz}{g(z)} = \int a(x)\,dx$$

Sia $G(z) \in \int \frac{1}{g(z)}\,dz$ e $A(x) \in \int a(x)\,dx$

allora $\underline{G(y(x)) = A(x) + C}$ è soluzione ~~insieme~~ a $\underline{y(x) = y_0}$ costanti

INTEGRALE GENERALE

32) (PC) $\begin{cases} y' = a(x)\, g(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ A VAR. SEP

con $a: I \to \mathbb{R}$ funz di $x$

$g: D \to \mathbb{R}$ funz di $y$

- $\exists$ almeno una soluzione se $a$ continua in $I$ e $g$ continua
- $\exists$ un UNICA soluzione se inoltre $g \in C^1(D)$

(PC) $\begin{cases} y' = a(x)\, y(x) + b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ LINEARI

nell'intervallo $I$

se $a$ e $b$ sono continue $\forall$ allora la soluzione è unica

33) RADICI N-esime

Dato $w \in \mathbb{C}$ esistono esattamente $n$ radici $n$-esime

$$\sqrt[n]{w} = \{ z : z^n = w \}$$

$$w = r(\cos\theta + i \sin\theta)$$

$$z^n = w$$

$$z^n = \left(\rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)\right)^n = \rho^n\left(\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha)\right) = w$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho^n = r \Leftrightarrow \rho = \sqrt[n]{r}, \quad r>0 \\ n\alpha = \theta + 2k\pi \quad \forall k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$\alpha_0 = \frac{\theta}{n}$ , $\alpha_1 = \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}$ , $\alpha_2 = \frac{\theta}{n} + \frac{2 \cdot 2\pi}{n}$

$\alpha_{n-1} = \frac{\theta}{n} + 2(n-1)\frac{\pi}{n}$ $\quad \alpha_n = \frac{\theta}{n} + 2\cancel{n}\frac{\pi}{\cancel{n}} = \frac{\theta}{n} = \alpha_0$

per determinare tutte le radici si considerano n argomenti:

$$\alpha_K = \frac{\theta}{n} + \frac{2K\pi}{n} , \quad K = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

$$z = \sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta + 2K\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta + 2K\pi}{n}\right)\right)$$

con $K = 0, 1, \dots, n-1$

34) se $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$ , $a_n \in \mathbb{R}$

e $w \in \mathbb{C}$ è zero di $P(z)$ allora $\overline{w}$ è uno zero

$P(w) = 0 \iff \overline{P(w)} = \overline{0} = 0$

$= \overline{a_n w^n + a_{n-1} w^{n-1} + \dots + a_0}$

$= \overline{a_n w^n} + \overline{a_{n-1} w^{n-1}} + \dots + \overline{a_0}$

$= a_n \overline{w^n} + a_{n-1} \overline{w^{n-1}} + \dots + a_n$

$= a_n (\overline{w})^n + a_{n-1} (\overline{w})^{n-1} + \dots + a_n = 0$

$\Rightarrow P(\overline{w}) = 0$ c.v.d.

$\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 - y_1 y_2 - i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$

e $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$ $\quad x_1 - iy_1 + x_2 - iy_2 = x_1 + x_2 - i(y_1 + y_2)$