1) se $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}$ si ha $0 \leq x \leq \varepsilon \Rightarrow x = 0$

Dim. x assurdo: sia $x > 0$, poniamo $\varepsilon = \frac{x}{2} > 0$

allora x Ip: $0 \leq x \leq \frac{x}{2} \Rightarrow$ (si può dividere per x perché è positivo

$\Rightarrow \frac{x}{x} \leq \frac{x}{2x} \Rightarrow 1 \leq \frac{1}{2}$ ASSURDO

2) Non esiste $x \in \mathbb{Q} : x^2 = 2$

Dim x assurdo:
$$\exists\, x \in \mathbb{Q} \text{ t.c. } x^2 = 2$$

$x = \frac{a}{b}$ $a, b \in \mathbb{Z}$ e primi tra loro

$\Rightarrow a^2$ è pari $(a^2 = 2b^2) \Rightarrow a$ pari

Dim x assurdo a pari:

se a non fosse pari per euclide $a = \phi_1^{k_1} \cdots \phi_s^{k_s}$ con

$\phi_1 \ldots \phi_s$ primi e $\neq$ da 2

$\Rightarrow a^2 = \phi_1^{2k_1} \cdots \phi_s^{2k_s}$, ma se nessun ϕ_k è 2 a^2 non è pari

ASSURDO

$a^2 = 2b^2 \Rightarrow 4k^2 = 2b^2$ (sostituisco a con 2k, perché è pari)

con $k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow 2k^2 = b^2 \Rightarrow b^2$ è pari $\Rightarrow$ b è pari

ASSURDO PER IP a e b primi tra loro

3) sia $a>0$, $|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$

Dim $\Rightarrow$ (un verso alla volta)

$$|x| \leq a \Rightarrow -a \leq -|x| \Rightarrow -a \leq \cancel{-|x|} \leq x \leq \cancel{|x|} \leq a$$

moltiplico x -1, inverto il verso della disequazione

$$\Downarrow$$

$$-a \leq x \leq a$$

Dim $\Leftarrow$

$-a \leq x \leq a$ due casi:

1) $x \geq 0$ $\quad x = |x| \Rightarrow |x| \leq a$

sempre molt x -1

2) $x < 0$ $\quad x = -|x| \Rightarrow -a \leq x = -|x| \Rightarrow |x| \leq a$

4) $x, y \in \mathbb{R}$ $\quad |x+y| \leq |x| + |y|$

Dim:

aggiungo un modulo (tanto è positivo)

$$|x+y| \leq \big||x|+|y|\big| \Rightarrow$$

$$(x+y)^2 \leq (|x|+|y|)^2 \Rightarrow$$

sostituisco il modulo con ^2, la dis. rimane

$$\cancel{x^2} + \cancel{y^2} + 2xy \leq \cancel{|x|^2} + \cancel{|y|^2} + 2|x||y| \Rightarrow$$

$$2xy \leq 2|x||y| \Rightarrow xy \leq |xy|$$

Vero perché $\forall x \in \mathbb{R}$ $-|x| \leq x \leq |x|$

(al posto di x si considera xy)

5) Se esiste un lim è unico

Dim x assurdo

$\exists L_1 \neq L_2 : \lim a_n = L_1$

$\lim a_n = L_2$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_1 : |a_n - L_1| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_1$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_2 : |a_n - L_2| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_2$

$\forall n \geq \underset{n_3}{\underset{\shortparallel}{\max(n_1, n_2)}}$ valgono entrambi

$\overbrace{0 \leq |L_1 - L_2|}^{*} = |L_1 \overset{\pm a_n}{-a_n + a_n} - L_2| =$

$|(L_1 - a_n) + (a_n - L_2)| \underset{\text{TRIANGOLARE}}{\leq} |L_1 - a_n| + |a_n - L_2| \underset{\substack{\text{ENTRAMBI} < \varepsilon \\ \text{per } n \geq n_3}}{<} 2\varepsilon$

$\overbrace{0 \leq |L_1 - L_2|}^{*} \leq 2\varepsilon \Rightarrow |L_1 - L_2| = 0 \iff L_1 = L_2$

assurdo per ip $L_1 \neq L_2$

6) Permanenza del segno

Sia $(a_n)_n$ una succ con limite L

a) se $L > 0 \Rightarrow \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \Rightarrow a_n > 0$

b) se $L < 0 \Rightarrow \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \Rightarrow a_n < 0$

c) se $L \neq 0 \Rightarrow \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \Rightarrow |a_n| > \left|\frac{L}{2}\right|$

a Dim) $L > 0$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \Rightarrow L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$

pongo $\varepsilon = \frac{L}{2}$ (maggiore di 0) $\Rightarrow 0 < \frac{L}{2} < a_n \Rightarrow a_n > 0$

b dim) $L < 0$

pongo $\varepsilon = -\frac{L}{2}$ ($-\frac{L}{2}$ sarà positivo)

$\exists n_0 : \forall n \geq n_0 \quad a_n < L - \frac{L}{2} = \frac{L}{2} < 0 \Rightarrow a_n < 0$

c dim) 2 casi (a e b), da un certo n_0:

se $L < 0$: $\quad a_n < \frac{L}{2} \Rightarrow -|a_n| < -\left|\frac{L}{2}\right| \Rightarrow |a_n| > \left|\frac{L}{2}\right|$
$\Rightarrow a_n < 0$

se $L > 0$ $\quad a_n > \frac{L}{2} \Rightarrow |a_n| > \left|\frac{L}{2}\right|$
$\Rightarrow a_n > 0$

7) Carabinieri

3 successioni: $(a_n)_n, (b_n)_n, (c_n)_n$: $a_n \leq c_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

e $\lim a_n = \lim b_n = L \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \lim c_n = L$

Dimostrazione

a) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_1 \ \forall n \geq n_1 \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$

b) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_2 \ \forall n \geq n_2 \Rightarrow |b_n - L| < \varepsilon$

pongo $n_3 = \max(n_1, n_2)$ in modo che valga sia a) che b)

$\forall n \geq n_3$ si ha (per a), b) e hp)

$L - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < L + \varepsilon$

$\Rightarrow L - \varepsilon < c_n < L + \varepsilon \quad \forall n \geq n_3$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_3 : \forall n \geq n_3 \Rightarrow |c_n - L| < \varepsilon$

$\Downarrow$

$\lim c_n = L$

8) Una successione $(a_n)_n$ ha limite finito, allora è limitata

$(a_n)_n$ succ, $\lim a_n = L \in \mathbb{R}$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \Rightarrow L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$

① $\{a_n ; n < n_0\}$ è un insieme con numero finito di elementi

② $\{a_n ; n \geq n_0\}$ è limitato tra $L - \varepsilon$ e $L + \varepsilon$

$\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = ① \cup ②$, essendo unione di 2 insiemi limitati è a sua volta limitato

9) Siano $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ 2 succ t.c.

$\lim a_n = 0$ e $|b_n| \leq M$ (M è piccolo purché finito) $\hookrightarrow M \in \mathbb{R}$

allora $\lim a_n b_n = 0$

Dim

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 : \forall n \geq n_0 : |a_n b_n| < \varepsilon$ (Tesi)

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \Rightarrow |a_n| < \varepsilon$ (per hp)

$|a_n \cdot b_n| = |a_n| \cdot |b_n| < \varepsilon \cdot M \quad \forall n \geq n_0$ verifica

10) $\lim (a_n/b_n) = A/B$ e $B \neq 0$

a) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_1 : \forall n \geq n_1 \Rightarrow |a_n - A| < \varepsilon$

b) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_2 : \forall n \geq n_2 \Rightarrow |b_n - B| < \varepsilon$

a) e b) $\Rightarrow \forall n \geq n_3 \doteq \max(n_1, n_2) \Rightarrow$ Verifica sia a) che b)

Dimostro che $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_3 : \forall n \geq n_3 \Rightarrow \left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B} \right| < \varepsilon$

DEN. COMUNE

$\pm AB$

$$0 \leq \left| \frac{a_n B - A b_n}{b_n B} \right| = \left| \frac{a_n B - AB + AB - A b_n}{b_n B} \right|$$

$$\leq \frac{|a_n B - AB| + |AB - A b_n|}{|b_n||B|}$$

TRIANGOLARE SOPRA, SEPARATO I MODULI NELLA FRAZIONE E AL DENOMINATORE

$$= \frac{|B||a_n - A| + |A||B - b_n|}{|b_n||B|}$$

RACCOLGO A e B, POI SEPARO IL PROD. DEI MODULI

$\forall n \geq n_3$

$$\leq \frac{|B| \cdot \varepsilon + |A| \cdot \varepsilon}{\left|\frac{B}{2}\right||B|} = \varepsilon \cdot \left| \frac{B+A}{\frac{B}{2} \cdot B} \right|$$

RACCOLGO ε

DATO CHE $B \neq 0$ x PERM. SEGNO $\forall n \geq n_2$

$$\left|\frac{B}{2}\right| < |b_n|$$

COSTANTE $\cdot\ \varepsilon$ QUINDI TENDE A 0 E IL LIMITE È DIMOSTRATO

11) Limite $\sum_{k=1}^{\infty} x^k = ?$

$$\parallel$$

TENGO $\lim_{n\to\infty} (S_n(x))_n$

SI SEMPLIFICANO GLI ALTRI

$$S_n(x)(1-x) = (x+x^2+\dots+x^n)(1-x) = x - x^{n+1}$$

DIVIDO PER $1-x$ (con $x \neq 1$)

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \frac{x-x^{n+1}}{1-x} = \frac{x}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x} =$$

SEPARO X PERCHÉ LA N SOLO A DX

$$\frac{x}{1-x} - \lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

Discuto $\lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{1-x} = \begin{cases} -\infty & x>1 \\ 0 & |x|<1 \\ \nexists & x \leq -1 \end{cases}$ ($x=1$ NON C'È PER LA DIV. PER $1-x$)

RIASSUMENDO

$x>1$ $\quad \lim_{n} S_n(x) = +\infty$

$x=1$ $\quad S_n(1) = \underbrace{1+1+1+\dots+1}_{n \text{ volte}} = 1\cdot n = \infty$

$|x|<1$ $\quad \frac{x}{x-1}$

$x \leq -1$ $\quad \nexists$

12) Bernoulli $(1+a)^n \geq 1+na \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad a \geq 0$

per induzione

$A(1) = \cancel{1+a} \geq 1+a$ Vero

se $A(n)$ vera allora $A(n+1)$ è vera?

$$(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a$$

per ip.

SVILUPPO

$$(1+a)^n(1+a) \geq (1+na)(1+a) =$$

$$1+a+na+na^2 = 1+(n+1)a+na^2 \geq 1+(n+1)a$$

RACCOLGO A in $a+na$

na^2 è sempre positivo, quindi maggiore o è 0

13) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} - 1 = 0$ pongo $d = \sqrt[n]{n} - 1$, con $d \geq 0$ dato che $\sqrt[n]{n} \geq 1$

$$\sqrt[n]{n} = d+1 \Rightarrow n = (d+1)^n \underset{(*)}{\geq} \frac{n(n-1)}{2} d^2 \Rightarrow$$

$$n \geq \frac{n(n-1)}{2} d^2 \Rightarrow d^2 \leq \frac{2}{n-1} \Rightarrow$$

$$0 \leq d \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{2}{n-1}} = 0$, quindi x i carabinieri $d \to 0$ e $\sqrt[n]{n} \to 1$

(*) $(d+1)^n$ è un binomio di Newton, il coefficiente di d^2 è

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$$, quindi non può essere più grande.

14) sia $A \neq \emptyset$, A inf limitato allora $\exists \inf A \in \mathbb{R}$

estremo inferiore

Dim.

sia p_1 minorante di A e $a_1 \in A$

sia $c_1 = \frac{p_1 + a_1}{2}$

se $[p_1, c_1] \cap A \neq \emptyset$

$p_2 = p_1$

$a_2 \in [p_1, c_1] \cap A$

se $[p_1, c_1] \cap A = \emptyset$

$p_2 = c_1$

$a_2 = a_1$

in entrambi i casi $p_2 \leq a_2$ (p_2 minorante)

$a_2 \in A$

$p_1 \leq p_2$

$a_1 \geq a_2$

Continuo con metodo dicotomico e creo una successione (p_n) di minoranti di A, e (a_n) una succ di elementi di A

$p_n \leq p_{n+1}$ $\quad a_{n+1} \leq a_n$ $\quad p_n \leq a_n$

per incastro $\exists i \in [p_n, a_n] \; \forall n$

e i è unico perchè $a_n - p_n \leq \frac{a_1 - p_1}{2^{n-1}} \to 0$

Dimostro che $i = \inf A$

Dimezzo ricorsivamente

1) $i \leq a \; \forall a \in A$ → minore elemento di A

2) se $p \leq a \; \forall a \in A \Rightarrow p \leq i$ → maggiore dei minoranti

$P_n \to i$ perché $0 \le |P_n - i| \le |a_n - P_n| \to 0$

$a_n \to i$ perché $0 \le |a_n - i| \le |a_n - P_n| \to 0$

1) $P_n \le a \quad \forall a \in A$

passo al limite sopra

$i \le a$ per permanenza del segno $(P_n - a)$

INTENDO CHE $P_n - a \le 0$ e anche il limite $i - a \le 0$?

$\Rightarrow i$ è minorante

2) se per assurdo $i_1 > i$ fosse minorante

allora $\exists n_0 : |a_n - i| < |i_1 - i| \quad \forall n \ge n_0$

$|i_1 - i|$ è un ε

$\Rightarrow a_n - i < i_1 - i$

$\Rightarrow a_n < i_1 \quad \forall n \ge n_0$

i_1 non è minorante

($a_n - i$ sono positivi, $i_1 - i$ si può togliere il valore assoluto)

15) Sia $(a_n)_n$ succ. di $\mathbb{R}$ crescente

allora $\exists \lim a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$

2 casi $\lim \in \mathbb{R}$ o $+\infty$

1) $\sup\{a_n\} = S \in \mathbb{R} \quad \lim a_n = S$?

$\{a_n\}$ è superiormente limitato

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 : |a_n - S| < \varepsilon \quad \forall n \ge n_0$

$\Leftrightarrow S - \varepsilon < a_n < S + \varepsilon$

Vera sempre perché $a_n \le S < S + \varepsilon$
(S è sup.)

$\downarrow$

$\exists\, a_{n_0} : a_{n_0} > S - \varepsilon$ (S è il più piccolo maggiorante)

$\forall n > n_0 \quad a_n \geq a_{n_0} > S - \varepsilon$ (succ. è crescente)

$\Rightarrow \forall n \geq n_0 \quad S - \varepsilon < a_n \leq S + \varepsilon \Rightarrow \lim a_n = S$

2) $\sup\{a_n\} = +\infty$

$\forall M > 0 \; \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \Rightarrow a_n > M$

se $\sup\{a_n\} = +\infty$ a_n <u>non</u> è limitata superiormente

$\forall M \; \exists n_0 : a_{n_0} > M$, ed essendo crescente:

$\forall n \geq n_0 \quad a_n \geq a_{n_0} > M \Rightarrow \lim a_n = +\infty$

16) Sia $(x_n)_n$ una succ non indeterminata (ha limite, finito o no che sia)

allora $\forall (x_{n_k})_k$ estratta di (x_n) ha lo stesso limite

<u>Dim</u>: $L \in \mathbb{R}$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 : |x_n - L| < \varepsilon \;\; \forall n \geq n_0$ (def di limite)

$\lim\limits_{K \to \infty} n_K = +\infty$ (è estratta crescente)

$\exists K_0 : \forall K \geq K_0$ si ha $n_K \geq n_0$

$\Rightarrow |x_{n_K} - L| < \varepsilon \;\; \forall K \geq K_0 \Rightarrow x_{n_K} \to L$

<u>Dim</u> $+\infty$ (questo era per caso, non ci giurerei)

$\forall M > 0 \; \exists n_0 \quad x_n > M \quad \forall n \geq n_0$

$\lim\limits_{K \to +\infty} n_K = +\infty$

$\exists K_0 : \forall K \geq K_0$ si ha $n_K \geq n_0 \Rightarrow x_{n_K} > M \;\; \forall K \geq K_0 \Rightarrow x_{n_K} \to +\infty$

Dim $-\infty$ (sempre per caso)

$$\forall M>0 \ \exists n_0 : x_n < -M \quad \forall n \geq n_0$$

$$\lim_{k\to\infty} n_k = +\infty$$

$$\exists k_0 : \forall k \geq k_0 \text{ vale } n_k \geq n_0 \Rightarrow x_{n_k} < -M \ \forall k \geq k_0$$

$$\Rightarrow x_{n_k} \to -\infty$$

17) Data $(x_n)_n$ successione

se $\exists (x_{n_k})_k$ sottosucc di $(x_n)_n$ t.c. $x_{n_k} \to L_1$

ed $\exists (x_{n_h})_h$ sott suc di $(x_n)_n$ t.c. $x_{n_h} \to L_2$

se $L_1 \neq L_2 \Rightarrow \nexists \lim x_n$

Dim se per assurdo esistesse $\lim x_n = L$

$L = L_1$ e $L = L_2$ per unicità del limite

$L_1 = L_2$ ASSURDO

18) $f(x) = x^p \qquad p \in \mathbb{N}$

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^p - x_0}{h}$$

siccome $a^p - b^p = (a-b)(a^{p-1} + a^{p-2}b + \ldots + b^{p-1})$

se $a = x_0 + h$ e $b = x_0$

p somme di x^{p-1}

$$\lim_{h\to 0} \frac{(\cancel{x_0} + \cancel{h} - \cancel{x_0})}{\cancel{h}} \left((x_0+h)^{p-1} + (x_0+h)^{p-2}x_0 + \ldots + x_0^{p-1}\right) =$$

$p x_0^{p-1}$ ovvero

$$(x^p)' = p x_0^{p-1}$$

con p "negativo": $f(x) = x^{-p}$ $\quad p \in \mathbb{N}$ $\quad x \neq 0 \nearrow$ O LA FRAZIONE ESPLODE

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{(x_0+h)^p} - \frac{1}{x_0^p}}{h} = \text{(den comune)}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{x_0^p - (x_0+h)^p}{(x_0+h)^p \cdot x_0^p \cdot h} = \lim_{h\to 0} \frac{x_0^p - (x_0+h)^p}{h} \cdot \frac{1}{(x_0+h)^p \cdot x_0^p} =$$

separo il denominatore

$$-p\,x_0^{p-1-2p} \leftarrow \text{si divide per } (x_0+h)^p \cdot x_0^p$$

il meno perchè il num è al contrario

$$= -p\,x_0^{-p-1}$$

19) $f(x) = |x|$ non derivabile in $x=0$

$$\lim_{h\to 0} = \frac{f(0-h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$$

2 casi:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

quindi $\nexists\, f'(0)$ perchè $f'_{dx}(0) \neq f'_{sx}(0)$

20) $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ è derivabile in $x_0 \in (a,b) \Rightarrow f(x)$ continua in x_0

Dim

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \quad \text{def. di continua}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0) \quad \text{con } h = x - x_0,\; x = x_0 + h$$

$$\Leftrightarrow \lim_{h\to 0} f(x_0+h) - f(x_0) = 0 \quad (*)$$

se $\exists f'(x_0) \Rightarrow \lim_{h\to 0} f(x_0+h)-f(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\cdot h =$

$f'(x_0)\cdot h = 0$ (*)

mol e div per h

21) sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ $x_0\in(a,b)$

se f è derivabile in x_0 la retta tangente è

$$T(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

Se $E(h) = T(x_0+h)-f(x_0+h)$ si ha

$$\lim_{h\to 0}\frac{E(h)}{h}=0$$

Dim

cioè la x si sostituisce nell'eq. di $T(x)$

$$\lim_{h\to 0}\frac{T(x_0+h)-f(x_0+h)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0)+f'(x_0)(\cancel{x_0}+h-\cancel{x_0})-f(x_0+h)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0)-f(x_0+h)}{h} + \frac{f'(x_0)h}{h} = -f'(x_0)+f'(x_0) = 0$$

separo num

lim $f'(x)$
con num ribaltato

22) $$\left(f(x)/g(x)\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)} \quad \text{se } g(x)\neq 0$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x_0+h)}{g(x_0+h)}-\frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)g(x_0)-g(x_0+h)f(x_0)}{g(x_0+h)g(x_0)h}$$

Den comune

$\pm g(x_0)f(x_0)$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)g(x_0)-g(x_0)f(x_0)+g(x_0)f(x_0)-g(x_0+h)f(x_0)}{g(x_0+h)g(x_0)h}$$

siccome $\exists\, g'(x_0)$ $g(x)$ è continua in x_0

quindi $g(x_0) \neq 0 \Rightarrow g(x_0+h) \neq 0$ e $g(x_0+h) \to g(x_0)$

per h piccoli (perm. del segno)

sempre con h piccoli

raccolgo $f(x_0)$ e $g(x_0)$ e sposto l'h

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(x_0)\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right) - f(x_0)\left(\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\right)}{g(x_0+h)\,g(x_0)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{g(x_0)f'(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

$g(x_0+h)$ tende a $g(x_0)$

23) Se $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ allora $a_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!}$

Dim

$$P'(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\, i x^{i-1}\right) = a_1 + 2a_2 x + \dots + n a_n x^{n-1}$$

$$\Rightarrow P'(0) = a_1 \cdot 1$$

$$P'' = \sum_{i=2}^{n} i(i-1)a_i x^{i-2} \Rightarrow P''(0) = 2a_2$$

per induzione $P^{(k)}(x) = \sum_{i=k}^{n} i(i-1)\dots(i-k+1)a_i x^{i-k}$

$$P^{(k)}(0) = k(k-1)\dots 1\, a_k = k!\, a_k$$

$$\Rightarrow a_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!}$$

24) Formula di Newton

$$P(x) = (1+x)^n$$

$$P'(x) = n(1+x)^{n-1} \cdot 1 \quad \text{(derivata composta)}$$

$$P^{(k)}(x) = n(n-1)\cdots(n-k+1)(1+x)^{n-k}$$

$$\frac{P^{(k)}(0)}{k!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)\cdot 1}{k!} = a_k$$

$$a_k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} \quad \text{Detto coeff. BINOMIALE}$$

Quindi

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \qquad x = \left(\frac{b}{a}\right)$$

Binomio di newton:

$$(a+b)^n = \left(a\left(1+\frac{b}{a}\right)\right)^n = a^n\left(1+\frac{b}{a}\right)^n = a^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{b}{a}\right)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{b^k}{a^k} \cdot a^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b^k a^{n-k}$$

25) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq 3, \ \forall n \in \mathbb{N}$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{\boxed{\overset{k \text{ fattori} \leq n}{n(n-1)\cdots(n-k+1)}}}{k! \underbrace{n^k}_{k \text{ fattori} = n}} \longrightarrow \leq 1$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \underset{\text{porto fuori il } k=0}{1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \qquad \text{dato che } \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$$

porto fuori il 2

$$\leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{2^k} = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} =$$

$$1 + 2\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{k} \le 1+2 = 3 \quad \forall n$$

serie geometrica
con ragione $\frac{1}{2}$

26) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ è crescente:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

per disuguaglianza aritmetico geometrica

$$\sqrt[n]{a_1 \, a_2 \cdots a_n} \le \frac{a_1+a_2+a_3+\dots+a_n}{n}$$

e se ho almeno un termine diverso allora vale $<$ in senso stretto

elevo alla n

$$\iff a_1 \cdot a_2 \cdots a_n \le \left(\frac{a_1+\dots+a_n}{n}\right)^{n}$$

se ho $n+1$ elementi e la applico e pongo con

$a_1 = 1$ e $a_2 \dots a_{n+1} = 1 \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ si ha

n volte $\left(1+\frac{1}{n}\right)$

$$\left(\frac{1+n+1}{n+1}\right)^{n+1} > 1 \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

$\left(1+\frac{1}{n}\right)$ moltiplicato n volte

fa 1

1 termine diverso

(1)

quindi $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ verificato.

27) sia $f(a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile $\forall x \in (a,b)$

allora

1) f crescente $\Rightarrow f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b)$

2) f decrescente $\Rightarrow f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a,b)$

3) f costante $\Rightarrow f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b)$

dim 1)

num ≥ 0

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geq 0$$

den > 0

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geq 0$$

$\leftarrow$ num ≤ 0

den < 0

dim 2)

≤ 0

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leq 0$$

> 0

≥ 0

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leq 0$$

$\leftarrow < 0$

dim 3)

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0^\pm} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{K-K}{h} = 0$$

L'inverso si dimostra dopo e perché anche il zero stretto

$\downarrow$

LAGRANGE

28) sia $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile in x_0 e x_0 max o min locale

allora $f'(x_0)=0$

<u>x_0 massimo locale</u>

$$f'(x_0) \quad \lim_{h\to 0^+} \frac{\overset{\leq 0}{f(x_0+h)-f(x_0)}}{\underset{>0}{h}} \leq 0$$

permanenza del segno

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{\overset{\leq 0}{f(x_0+h)-f(x_0)}}{\underset{<0}{h}} \geq 0$$

$f'(x_0)=0$ per unicità del limite

<u>x_0 minimo locale</u>

$$f'(x_0) \quad \lim_{h\to 0^+} \frac{\overset{\geq 0}{f(x_0+h)-f(x_0)}}{\underset{>0}{h}} \geq 0$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{\overset{\geq 0}{f(x_0+h)-f(x_0)}}{\underset{<0}{h}} \leq 0$$

$f'(x_0)=0$ per unicità del limite

29) VALORI INTERMEDI

sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua

e $f(a)<\lambda<f(b)$ allora $\exists$ almeno un x_0: $f(x_0)=\lambda$

Dim

sia $g(x)=f(x)-\lambda$ $\quad$ $g(x)$ è continua perché lo è $f(x)$

$$g(a)=f(a)-\lambda<0$$

$$g(b)=f(b)-\lambda>0$$

per il teorema degli zeri su $g(x)$:

$$\exists\, x_0 : g(x_0)=0$$

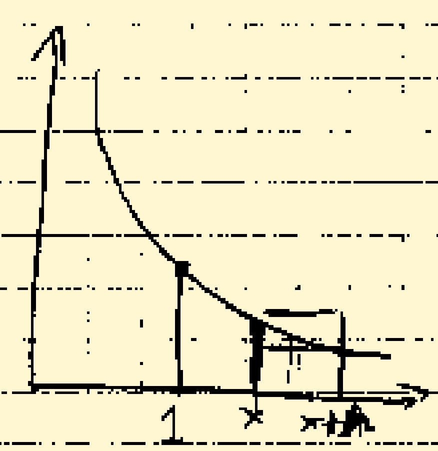
quindi $f(x_0)-\lambda=0$

e $f(x_0)=\lambda$

30) $L(x)$ è derivabile (caso $x>1$)

$L(x)$ con $x>1$ è $\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$

$$\lim_{h\to0^+}=\frac{\int_1^{x+h}\frac{1}{t}\,dt-\int_1^{x}\frac{1}{t}\,dt}{h}=$$



$$\lim_{h\to0^+}\frac{\int_x^{x+h}\frac{1}{t}\,dt}{h}$$

$\leftarrow$ è compreso tra

$R1=\underset{\substack{\uparrow\\ \text{BASE}}}{h}\cdot\frac{1}{x}$ $\leftarrow$ ALTEZZA

$R2=h\cdot\frac{1}{x+h}$

moltiplico per $\frac{1}{h}$ e uso i confronti

$\rightarrow >0$

$\frac{\text{AREA}}{\text{BASE}(h)}=\text{ALTEZZA}$

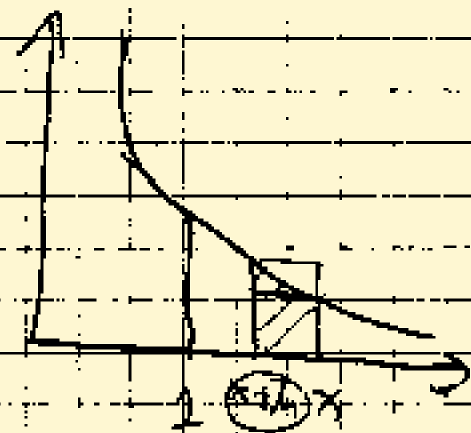
$$\frac{1}{x}<\frac{1}{h}\int_x^{x+h}\frac{1}{t}\,dt<\frac{1}{x+h}$$

$$\frac{1}{x} < \frac{\int_x^{x+h} \frac{1}{t}\,dt}{h} < \frac{1}{x+h} \qquad \text{con } h \to 0^+$$

per confronto

$$\lim_{h\to 0} \int_x^{x+h} \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{x}$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{\int_1^{x+h} \frac{1}{t}\,dt - \int_1^{x} \frac{1}{t}\,dt}{h} =$$



$$\lim_{h\to 0^-} \frac{-\int_{x+h}^{x} \frac{1}{t}\,dt}{h}$$

qui $x+h$ è prima

$R_2 = -h \cdot \frac{1}{x+h}$

$R_1 = -h \cdot \frac{1}{x}$ moltiplico per $\frac{-1}{h}$ che è >0

$$\frac{1}{x+h} < \frac{\int_{x+h}^{x} \frac{1}{t}\,dt}{h} < \frac{1}{x}$$

per confronto con $h \to 0$ il limite è $\frac{1}{x}$

limite per $h\to 0^+$ e $h \to 0^-$ coincidono quindi il

$$\lim_{h\to 0} \frac{L(x+h) - L(x)}{h} = \frac{1}{x}$$

31) $L(ab) = L(a) + L(b)$ con $a, b > 0$

$G(x) = L(ax)$ con a fisso e $a, x > 0$

G derivabile perché composta di funzioni derivabili

$$G'(x) = L'(ax) \cdot a = \frac{1}{ax} \cdot a = \frac{1}{x}$$

$$G'(x) = L'(x) = \frac{1}{x}$$

$\left(G(x) - L(x)\right)' = 0$ la derivata è 0, quindi la funzione è costante

$G(x) - L(x) = K$

$L(ax) - L(x) = K$

se $x = 1$

$L(a) - 0 = K$, quindi $K = L(a)$

$\Rightarrow L(ax) - L(x) = L(a)$

$\Rightarrow L(ax) = L(a) + L(x)$ sostituisco x con b

$\Rightarrow L(ab) = L(a) + L(b)$

32) $\lim_{x\to 0} L(x) = \inf\{L(x) : x>0\}$ e $\lim_{x\to+\infty} L(x) = \sup\{L(x) : x>0\}$

$L(x)$ è crescente

se A e B sono 2 sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ e $A \subseteq B$

allora $\begin{cases} \sup A \leq \sup B \\ \inf A \geq \inf B \end{cases}$

$$\Rightarrow \sup\{L(x) : x>0\} \geq \sup\{L(2^n)\} = \sup\{n \underset{>0}{L(2)}\} = +\infty$$

e

$$\Rightarrow \inf\{L(x) : x>0\} \leq \inf\{L(2^{-n})\} = \inf\{-n \underset{>0}{L(2)}\} = -\infty$$

33) $L(e) = 1$ con teorema ponte

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0) = f\left(\lim_{n\to+\infty} x_n\right)$$

$$L(e) = L\left(\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) \overset{\text{TEOREMA PONTE SOPRA}}{=}$$

porto fuori dai $L(x)$

$$\lim_{n\to+\infty} L\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) = \lim_{n\to+\infty} nL\left(1+\frac{1}{n}\right) - \overset{0}{L(1)} =$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{L\left(1+\frac{1}{n}\right) - L(1)}{\frac{1}{n}}$$

porto al den

pongo $h = \frac{1}{n} \to 0$

ovvero $L'(1)$

$$\lim_{h\to 0} \frac{L(1+h) - L(1)}{h} = \frac{1}{x}\Big|_{x=1} = \frac{1}{1} = 1$$