1) $f(a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$; f continua in x_0

f derivabile $\forall x \in (a,b)$ tranne al limite in x_0

se $\exists \lim_{x \to x_0} f'(x) = L \Rightarrow f'(x_0) = L$

Dim

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

applico de l'Hopital

$$\overset{H}{=} \lim_{x \to x_0} f'(x) = L \qquad \text{c.v.d.} \quad \left(f(x_0) \text{ e } x_0 \text{ sono continue e derivate}\right)$$

2) $f[a,b] \to \mathbb{R}$ derivabile n volte in $0 \in (a,b)$

allora esiste e unico polinomio t.c. $f^{(k)}(0) = P_n^{(k)}(0)$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

Dim

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \dots + a_n x^n$$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

$$a_k = \frac{P_n^{(k)}(0)}{k!}$$

Impongo $P_n^{(k)}(0) = f^{(k)}(0)$

$$\Rightarrow P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \quad \text{c.v.d.}$$

Questo Polinomio è unico! (no dim)

3) $f(x) = P_n(x) + o(x^n)$ per $x \to 0$

$\Leftrightarrow \lim_{x\to 0} \dfrac{f(x) - P_n(x)}{x^n} = 0$ N.B. $f(x) - P_n(x) = E_n(x)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k}{x^n} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

H

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{f^{(1)}(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} k \cdot x^{k-1}}{n x^{n-1}}$$

applicando de l'Hospital j volte:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f^{(j)}(x) - \sum_{k=j}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{(k-j)!} x^{k-j}}{n(n-1)(n-2)\cdots(n-j+1) x^{n-j}}$$

per $j = n-1$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f^{(n-1)}(x) - \sum_{k=n-1}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{(k-n+1)!} x^{k-n+1}}{n(n-1)(n-2)\cdots(k-n+1+1) x^{k-n+1}}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f^{(n-1)}(x) - \frac{f^{(n-1)}(0)}{0!} x^0 - \frac{f^{(n)}(0)}{1!} x}{n! x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0)}{n! x} - \frac{f^{(n)}(0) x}{n! x} = \lim_{x\to 0} \frac{f^{(n)}(0) - f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{0}{n!}$$

4)

- $e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(e^x)^{(k)}\big|_{x=0}}{k!} x^k + o(x^n)$ per $x \to 0$

$(e^x)' = e^x$

$(e^x)'' = e^x \quad \Rightarrow \quad e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$

...

$e^0 = 1$

- $\lg(1+x)$

$(\lg(1+x))' = \frac{1}{1+x}$

$(\lg(1+x))'' = \frac{-1}{(1+x)^2}$

$(\lg(1+x))''' = \frac{+2}{(1+x)^3}$

$(\lg(1+x))^{(k)} = (k-1)!\,(1+x)^{-k} \cdot (-1)^{k-1}$

in $x=0 \Rightarrow (k-1)!\,(-1)^{k-1}$

$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k + o(x^n)$

(Tolgo lo 0 perché la funz. in 0 vale 0)

- $y = \frac{1}{1-x}$

$\sum_{k=1}^{n} x^k = \frac{x - x^{n+1}}{1-x}$

↓ voglio farla partire da 0: $\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + \frac{x - x^{n+1}}{1-x} = \frac{1 - x + x - x^{n+1}}{1-x}$

$= \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x}$, $\frac{x^{n+1}}{1-x} = o(x^n)$ per $x \to 0$

per UNICITÀ del Pol. di McLaurin: $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$

5) Flesso

$$\begin{cases} f(x) > T(x), & x > x_0 \\ f(x) < T(x) & x < x_0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} f(x) < T(x), & x > x_0 \\ f(x) > T(x), & x < x_0 \end{cases}$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2} + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!} + o((x-x_0)^n)$$

$$\Rightarrow f(x) - T(x) = \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \dots$$

se $f^{(k)}(x_0) \neq 0$ e $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(k-1)}(x_0) = 0$

allora

K è dispari c'è flesso

K è pari non c'è flesso

$$\frac{f(x) - T(x)}{(x-x_0)^K} = f^{(K)}(x_0) + \dots + o(x-x_0)^{n-K}$$ [dividendo tutto per $(x-x_0)^K$]

$$\text{Sign}\, \frac{f(x) - T(x)}{(x-x_0)^K} = \text{Sign}\, f^{(K)}(x_0)$$

se K è dispari cambia segno $(f(x) - T(x))$ se x è a dx o sx di x_0 quindi c'è flesso

se K pari è segno uguale quindi non c'è flesso

Nel caso K pari se $f'(x_0) = 0$

un minimo o massimo locale (detto che non può essere flesso)

6) $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua allora $\mathrm{Im}(f) = [\min f, \max f]$

Dim (2 punti)

1) $\mathrm{Im} f \subseteq [\min f, \max f]$

ovvio perché $\exists\, x_m \in [a,b] : \min f = f(x_m)$ x Weierstrass

$\exists\, x_M \in [a,b] : \max f = f(x_M)$

2) $[\min f, \max f] \subseteq \mathrm{Im} f$

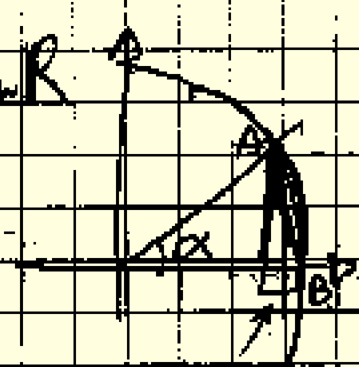
sia $\lambda \in [\min f, \max f] \Longleftrightarrow \exists\, x : f(x) = \lambda$?

applico il Teo dei valori intermedi tra x_M e x_m

$[x_m, x_M]$, $f(x_m) \le f(x_M)$, f continua

$\Rightarrow \exists\, x \in [x_m, x_M] : f(x) = \lambda$

7) sin e cos continue in 0 e in $\mathbb{R}$



$0 \le \underbrace{\sin^2\alpha + (1-\cos\alpha)^2}_{\overline{AB}^2} \le \alpha^2$ → l'arco è maggiore della corda

con $\alpha \to 0^+$ per i confronti

$\sin^2\alpha + (1-\cos\alpha)^2 \to 0^+$

la somma di 2 quadrati $\to 0^+$ se entrambi $\to 0^+$:

1) $\sin^2\alpha \to 0^+ \Rightarrow \sin\alpha \to 0$

2) $(1-\cos\alpha)^2 \to 0^+ \Rightarrow 1-\cos\alpha \to 0 \Rightarrow \cos\alpha \to 1$

per 0^-:

poiché $\sin\alpha = -\sin(-\alpha)$

$\Rightarrow \lim_{\alpha\to 0^-} \sin\alpha = 0$

e $\cos\alpha = \cos(-\alpha)$

$\Rightarrow \lim_{\alpha\to 0^-} \cos\alpha = 1$

1 de limită dintre 2 funcții cunoscute

$\lim_{x \to 0} \sin x = 0$

$\lim_{\alpha \to 0} \cos \alpha = 1$

Continuitate în $\mathbb{R}$

$$\lim_{h \to 0} \sin(\alpha + h) = \sin\alpha \cos h + \cos\alpha \sin h = \sin\alpha$$

($\cos h \to 1$, $\sin h \to 0$)

$$\lim_{h \to 0} \cos(\alpha + h) = \cos\alpha \cos h - \sin\alpha \sin h = \cos\alpha$$

($\cos h \to 1$, $\sin h \to 0$)

c.v.d.

6) derivabilă în 1 este în 0 ∈ $\mathbb{R}$

Cu $0 \le \alpha < \pi/2$:

$0 \le \sin\alpha \le \alpha \le \operatorname{Tg}\alpha$

Împărțim prin $\sin\alpha$:

$0 \le 1 \le \frac{\alpha}{\sin\alpha} \le \frac{1}{\cos\alpha}$

Pentru $\alpha \to 0$

$1 \le \frac{\alpha}{\sin\alpha} \le \frac{1}{1}$

Prin încadrare

$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$

Cos în 0:

$\lim_{\alpha \to 0} \frac{1 - \cos\alpha}{\alpha} =$

$\lim_{\alpha \to 0} \frac{1 - \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\alpha} =$

$\lim_{\alpha \to 0} \frac{2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\alpha} =$

$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2} \cdot \frac{\alpha}{2} = \lim_{\alpha \to 0} 1 \cdot \frac{\alpha}{2} = 0$

Der. in $\mathbb{R}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(\alpha+h)-\sin\alpha}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin\alpha\cos h+\sin h\cos\alpha-\sin\alpha}{h}$$

rearlgr $\sin\alpha$:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin\alpha(\cos h-1)+\cos\alpha\sin h}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin\alpha\cdot 0}{h}+\cos\alpha\cdot\frac{\sin h}{h}$$

$$=\cos\alpha$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos(\alpha+h)-\cos(\alpha)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos\alpha\cos h-\sin\alpha\sin h-\cos\alpha}{h}$$

rearlgr $\cos\alpha$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos\alpha(\underbrace{\cos h-1}_{\to 0})}{h}-\sin\alpha\underbrace{\left(\frac{\sin h}{h}\right)}_{\to 1}=-\sin\alpha$$

9) Regula Tan: $\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{\cos^2x+\sin^2x}{\cos^2x}=\frac{1}{\cos^2x}=1+\operatorname{tg}^2x$

11 $\arcsin:[-1,1]\to\mathbb{R}$

$[-\pi/2,\pi/2]$ $\quad(\arcsin y)'=\frac{1}{(\sin x)'|_{x=\arcsin y}}$

$$=\frac{1}{\cos(\arcsin y)}=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

11 $\arccos:[-1,1]\to\mathbb{R}$ $\quad(\arccos y)'=\frac{1}{(\cos x)'|_{x=\arccos y}}$

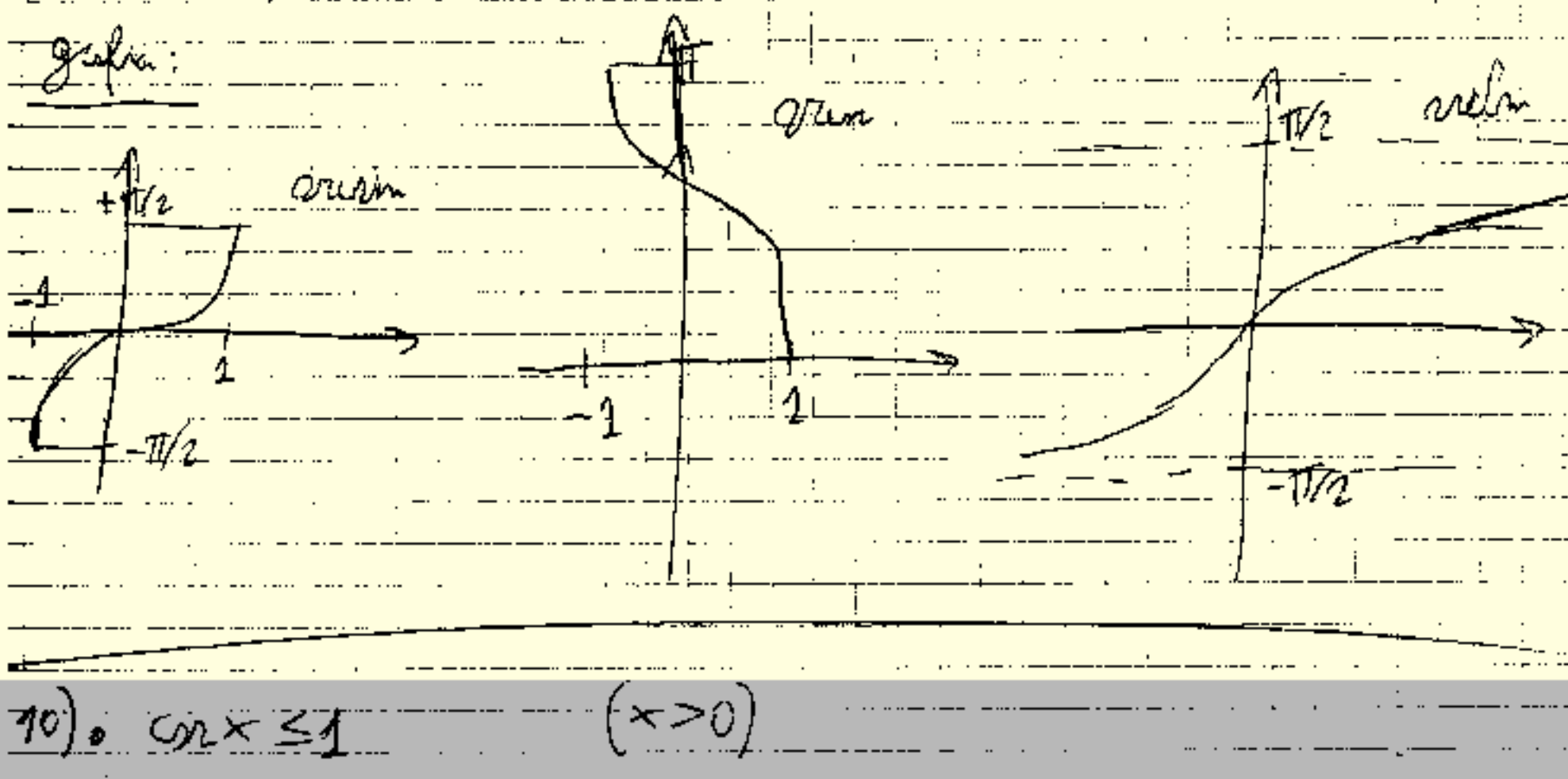
$[0,\pi]$

$$=\frac{1}{-\sin(\arccos y)}=\frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$\arctg : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$(\arctg y)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} x)'\big|_{x=\arctg y}} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x + 1\big|_{x=\arctg y}} = \frac{1}{y^2+1}$$

grafice:



10). $\cos x \leq 1$ $(x>0)$

Integrez $f(x) = \cos x$ $g(x) = x + C$ pentru $f(0) = g(0) \Rightarrow C = 0$

- $\sin x \leq x$

Integrez $f(x) = -\cos x$ $g(x) = \frac{x^2}{2} + C$

pentru $f(0) = g(0)$

(integrez pe -1 și x) $f(0) = -1 = C$

- $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$

Integrez $f(x) = \sin x$ $g(x) = x - \frac{x^3}{3!} + C$

pentru $f(0) = g(0) \Rightarrow C = 0$

- $\sin x \geq x - \frac{x^3}{3!}$

Integrez $C = -1$

$$\cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}$$

Dunque: $\forall x > 0$

$$\sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \le \sin x \le \sum_{k=0}^{2n+2} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \le \cos x \le \sum_{k=0}^{2n+2} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

(per il coseno fare ~~$\forall x \in \mathbb{R}$~~

↓

era lì le fare ~~gira~~ al coseno

c.v.d.

$(\sin x)' = \cos x$ $(\cos x)' = -\sin x$

11) $y = \sin(x)$

$y^{(0)}(0) = 0$

$y^{(1)}(0) = 1$

$y^{(2)}(0) = 0$

$y^{(3)}(0) = -1$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$$

e $z = \cos(x)$

$z^{(0)}(0) = 1$

$z^{(1)}(0) = 0$

$z^{(2)}(0) = -1$

$z^{(3)}(0) = 0$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+2})$$

12) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrabile su Riemann

Limitata

1) $m=\inf_{[a,b]} f(x)$ $\quad M=\sup_{[a,b]} f(x)$

$m\le f(x)\le M \quad \forall x\in[a,b]$

↓ monotonia dell'integrale

$$\int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b M\,dx$$

$$\Rightarrow (1)\ (b-a)m \le \int_a^b f(x)\,dx \le (b-a)M \quad \text{c.v.d.}$$

2) x f continua:

Per Weierstrass $\exists \min_{[a,b]} f = \inf_{[a,b]} f = m$

$\exists \max_{[a,b]} f = \sup_{[a,b]} f = M$

Divido @ per $(b-a)$

$$m \le \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{(b-a)} \le M$$

per valori intermedi: $\exists c\in[a,b] : f(c) = \dfrac{\int_a^b f(x)\,dx}{(b-a)}$

$\Rightarrow \exists c\in(a,b) \quad f(c)(b-a) = \int_a^b f(x)\,dx$ c.v.d

13) se $f(t)$ è continua in $[a,b]$

allora F è derivabile e $F'(x) = f(x)$ in (a,b)

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \int_x^{x+h} f(t)\,dt \underset{\text{media integrale}}{=} \lim_{h\to 0^+} \frac{(x+h-x)\,f(c)}{h} \quad \text{con } c \in (x, x+h)$$

$$= \lim_{h\to 0^+} f(c) = f(x)$$

essendo f continua (per Teor. ponte ?)

caso 0^-

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{\int_a^x f(t)\,dt - \int_{x+h}^x f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0^-} - \frac{(x-(x+h))\,f(c)}{h} = \lim_{h\to 0^-} f(c) = f(x)$$

con $c \in [x+h, x]$ per continuità e (T. ponte ?)

14) Barrow $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ cont.

$F(x)$ una qualsiasi primitiva $(F'(x)=f(x))$ allora $\int_a^b f(t)dt = F(b)-F(a)$

Dato che le primitive differiscono di una costante:

$$A(x)=\int_a^x f(t)dt$$

$$A(x) = F(x)+K \quad (\forall x\in[a,b])$$

$$\Rightarrow F(b)+K=\int_a^b f(t)dt$$

$$A(a)=F(a)+K$$

$$0 = F(a)+K \Rightarrow K=-F(a) \Rightarrow \int_a^b f(t)dt = F(b)-F(a) \quad \text{c.v.d.}$$

$$\int_a^a f(t)dt=0$$

15) $G(x)=\int_a^{g(x)} f(t)dt$ g derivab., f cont.

$$A(x)=\int_a^x f(t)dt$$

$$G(x)=A(g(x))$$

$$G'(x)=\left(A(g(x))\right)'=A'(g(x))\cdot g'(x)=f(g(x))\cdot g'(x) \quad \text{c.v.d.}$$

T.F.C.I.

16) Sia f cont., φ derivabile e φ' cont.

$G(x) \in \int f[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x)\, dx$

$F(u) \in \int f(u)\, du$

allora $F(\varphi(x)) = G(x) + K$

Dim

$$\left(F(\varphi(x))\right)' = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = f[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x)$$

$G'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$ per hp.

Siano dunque, differenza di una costante:

$F(\varphi(x)) = G(x) + k$ c.v.d.

Note:

Per gli integrali definiti:

$$\int_a^b f(\varphi(x))\, \varphi'(x)\, dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)\, dy$$

x

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(y)) \cdot \varphi'(y)\, dy$$

Es: Un integrale def. in cui compare $\int_0^x \sqrt{1-t^2}\, dt$

$t = \sin y$

$\int \cos(2y)\, dy = \sin y \cos y \longrightarrow (\sin y \cos y)' = \cos^2 y - \sin^2 y = \cos 2y$

17) $\int f'g\,dx = fg - \int fg'\,dx$

$(fg)' = f'g + fg' \xrightarrow{\text{integro}} \int (fg)' = \int f'g + \int fg'$

$\xrightarrow{\text{quindi}} \int f'g\,dx = fg - \int fg'\,dx$ c.v.d.

18) Serie Telescopica:

sia $a_n = b_n - b_{n+1}$

$S_1 = b_1 - b_2$

$S_2 = b_1 - b_2 + b_2 - b_3$

$S_3 = b_1 - b_3 + b_3 - b_4$

$S_n = b_1 - b_{n-1}$

$\lim_n S_n = \lim_n b_1 - b_{n-1} = b_1 - \lim_n b_{n-1}$

dunque la serie telescopica $\sum_{n=1}^{\infty} b_n - b_{n+1}$ è convergente $\iff \lim_n b_n$ è finito

19) $\sum_{K=1}^{\infty} q^K$ con $q \in \mathbb{R}$ Serie geometrica

diverge per $q \geq 1$

converge per $|q| < 1$

indeterminata per $q < -1$

La dimostrazione l'ho fatta circa 30 volte

20) Serie a Termini positivi non decrescenti o crescenti

$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad a_n \geq 0$$

$(S_n)_n$ è monotona crescente $\Rightarrow \exists \lim_n S_n$ $\begin{cases} \to +\infty \Rightarrow \text{diverge} \\ \to L \Rightarrow \text{converge} \end{cases}$

Sia $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ con $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$

e $a_n \leq b_n$

allora

$\sum a_n$ diverge $\Rightarrow \sum b_n$ diverge

$\sum b_n$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ converge

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_n = S \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = T$$

Tesi della tesi precedente:

$$0 \leq S_n \leq T_n$$

① $S_n \to +\infty \Rightarrow T_n \to +\infty$

② $T_n \to L \Rightarrow \lim_n S_n \leq L$

$\exists$ perché S_n è monotona crescente

21) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge $\Rightarrow a_n \to 0$ per $n \to +\infty$

$\frac{a_n}{}$ $\sum a_n$ converge $\Rightarrow \exists \lim_n S_n$ finito

$a_n = S_n - S_{n-1} = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k$

$\lim a_n = \lim S_n - \lim S_{n-1} = 0$ c.v.d.

non è sufficiente

es: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge

ma $\lim_n \frac{1}{n} = 0$

22) Criteri del confronto asintotico

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ $\quad a_n \geq 0$, $b_n > 0$

se $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = 1$ allora hanno la stessa natura

Dim

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_0 : \forall n \geq N_0$ si ha

$$1-\varepsilon \leq \frac{a_n}{b_n} \leq 1+\varepsilon \qquad \forall n \geq N_0$$

$$(1-\varepsilon) b_n \leq a_n \leq (1+\varepsilon) b_n$$

Dato che se la coda converge converge anche la serie e se diverge diverge anche la serie (i primi addendi della coda sono in numero finito). $S_n = \sum_{k=1}^{n_0-1} a_k + \sum_{k=n_0}^{n} a_k$

q.e.d.

Stessa natura

$a_n \leq b_n \Rightarrow$ ① a_n diverge : $a_n \leq (1+\varepsilon) b_n \Rightarrow b_n$ diverge

② b_n converge : $(1-\varepsilon) b_n \leq a_n \Rightarrow b_n$ converge

$b_n \leq a_n \Rightarrow$ ③ b_n diverge : $(1-\varepsilon) b_n \leq a_n \Rightarrow a_n$ diverge

④ b_n converge : $a_n \leq (1+\varepsilon) b_n \Rightarrow a_n$ converge

c.v.d.

23) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$

confronto con l'integrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{K\to+\infty} \int_1^{K} \frac{1}{x^p}\,dx$

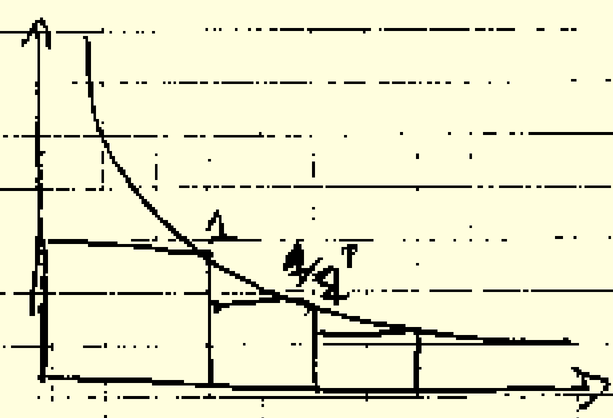
se $p \neq 1$

$$= \lim_K \left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_1^K = \lim_K \frac{K^{-p+1}}{-p+1} + \frac{1}{p-1} = \begin{cases} +\infty & \text{con } p<1 \\ L & \text{con } p>1 \end{cases}$$

per $p=1$

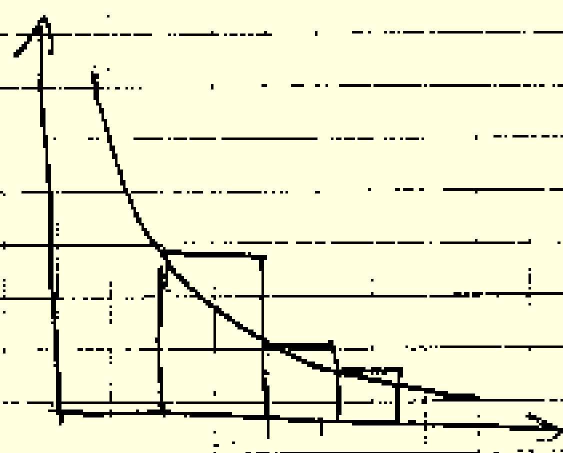
$$\lim_K \log K = +\infty$$

Stima dall'alto



$$\sum_{K=1}^{n} \frac{1}{K^p} \leq 1 + \int_1^{n} \frac{1}{x^p}\,dx$$

Stima dal basso



$$\int_1^{n+1} \frac{1}{x^p}\,dx \leq \sum_{K=1}^{n} \frac{1}{K^p}$$

per ai limiti e per confronto: $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx \leq \sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{K^p} \leq 1 + \int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$

$\Longrightarrow$

se $p \leq 1 \Longrightarrow \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = +\infty \Longrightarrow \sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{K^p}$ diverge

se $p > 1 \Longrightarrow \int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = L \Longrightarrow \sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{K^p}$ converge

4) Leibniz

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$$

① $a_n > 0$

② a_n decresce $\Rightarrow$ allo zero

③ $a_n \to 0$

$S_2 = a_1$

$S_2 = a_1 - a_2$

$S_3 = a_1 - a_2 + a_3 = a_1 - (a_2 - a_3) < S_1$ (0)

$S_4 = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) > S_2$ (0) (0)

la serie $(S_{2n})_n$ cresce $\Rightarrow \exists \lim_n S_{2n} < S_1$

(S_{2n-1}) decresce $\Rightarrow \exists \lim_n S_{2n-1} > S_2$

se $\lim S_{2n} = L_1$ e $\lim S_{2n-1} = L_2$ allora con finiti cresce S_2 e S_2 finiti

$|S_{2n-1} - S_{2n}| = S_{2n-1} - S_{2n} = a_{2n}$

$\lim (S_{2n-1} - S_{2n}) = \lim a_{2n} = 0$

$L_1 - L_2 = 0 \iff L_1 = L_2$

$\Rightarrow \exists \lim_n S_n = L_1 = L_2 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ C.V.d.

25) $\sum |a_n|$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ converge

$$a_n^+ = \begin{cases} a_n & \text{se } a_n > 0 \\ 0 & \text{se } a_n \le 0 \end{cases}$$

$$a_n^- = \begin{cases} -a_n & \text{se } a_n < 0 \\ 0 & \text{se } a_n \ge 0 \end{cases}$$

$|a_n| = a_n^+ + a_n^-$

$\Rightarrow 0 \le a_n^+ \le |a_n|$

$0 \le a_n^- \le |a_n|$

se $\sum |a_n|$ converge $\Rightarrow$ $\begin{cases} \sum a_n^+ \text{ converge} \\ \sum a_n^- \text{ converge} \end{cases}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - a_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$$

↓ CONVERGONO

quindi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge perché somma di Serie convergenti

26) Rapporto: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ se $L < 1 \Rightarrow$ converge

$L = 1$ nulla si sa

$L > 1 \Rightarrow$ diverge

a_n $L < 1$:

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - L \right| < \varepsilon \quad \Leftarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists p : \forall n \ge p$$

$$L - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < L + \varepsilon$$

Scelgo ε t.c. $L + \varepsilon = \beta < 1$

per $n = p \Rightarrow \frac{a_{p+1}}{a_p} < \beta \Rightarrow a_{p+1} < \beta a_p$

per $n = p+1 \Rightarrow \frac{a_{p+2}}{a_{p+1}} < \beta \Rightarrow a_{p+2} < \beta a_{p+2} \Rightarrow a_{p+2} < \beta^2 a_p$

↳ < di βa_p per prop

per $n = p+K \Rightarrow \frac{a_{p+K+1}}{a_{p+K}} < \beta \Rightarrow a_{p+K+1} < \beta^{K+1} a_p$

per ogni $K \geq 1$

$$a_{p+K} < \beta^K a_p \Rightarrow \sum_{K=1}^{\infty} a_{p+K} < a_p \sum \beta^K$$

↑ serie geometrica, $\beta < 1$ per "ipotesi", converge

la serie converge

Se $L > 1$

ξ t.c. $L - \xi = \beta > 1$

$$\frac{a_{p+1}}{a_p} > \beta \Rightarrow \sum_{K=1}^{\infty} a_{p+K} > a_p \sum_{K=1}^{\infty} \beta^K$$

↑ $\beta > 1$, diverge

la serie diverge

Se $L = 1$

Esempio: $\sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{n} \longrightarrow \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} \to 1$, diverge

$\sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \longrightarrow \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{n^2+2n+1} \to 1$, converge

Quindi nulla si può dire se $L = 1$

27) Criterio dell'integrale

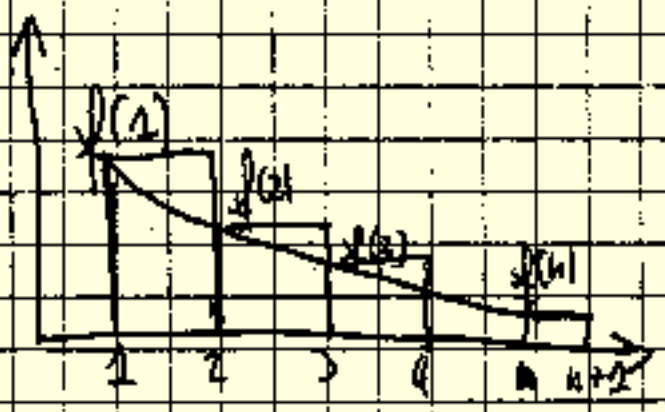
sia $f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ positiva e decrescente

sia $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)$

e $T_n = \int_1^n f(x)\,dx$

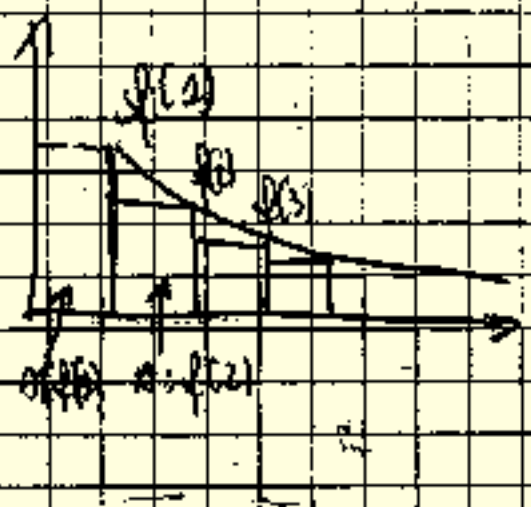
allora $(S_n)_n$ e $(T_n)_n$ hanno la stessa natura

Stima 1



$$S_n \geq \int_1^{n+2} f(x)\,dx \iff S_{n+1} \geq T_{n+1} \iff T_n \leq S_{n-1}$$

Stima 2



$$\sum_{k=2}^{n} f(k) \leq \int_1^n f(x)\,dx$$

$$\iff S_n - f(1) \leq T_n$$

Conclusione

$$S_n - f(1) \leq T_n \leq S_{n-1}$$

- se S_n converge T_n converge
- se S_n diverge T_n diverge
- se T_n converge S_n converge
- se T_n diverge S_n diverge

28) $a(x)$ definita e continua $\forall x \in I$ e $A(x)$ primitiva di $a(x)$

$y'(x) = a(x) \cdot y(x)$ le soluzioni (tutte e sole) sono $y(x) = c e^{A(x)}$, $c \in \mathbb{R}$

① $y(x) = c e^{A(x)}$ è soluzione:

$$y'(x) = c e^{A(x)} \cdot a(x) = c e^{A(x)} \cdot a(x) = y(x)\, a(x)$$

② ogni sol è di questo tipo?

$$y'(x) = a(x)\, y(x) \iff y'(x) - a(x) y(x) = 0$$

moltiplico per $e^{-A(x)}$

$$y' e^{-A(x)} - e^{-A(x)} a(x) y(x) = 0$$

$$\left(y(x) e^{-A(x)} \right)' = 0$$

$$\Rightarrow y(x) e^{-A(x)} = c$$

$$y(x) = c e^{A(x)} \quad \text{c.v.d.}$$

---

29) $L(y) = y'(x) - a(x) y(x)$

L è lineare: $L(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha L(y_1) + \beta L(y_2)$

$$\| $$

$$(\alpha y_1 + \beta y_2)' - a(x)(\alpha y_1 + \beta y_2)$$

$$= \alpha y_1' + \beta y_2' - a(x) \alpha y_1 - a(x) \beta y_2$$

$$= \alpha [y_1' - a(x) y_1] + \beta [y_2' - a(x) y_2]$$

$$= \alpha L(y_1) + \beta L(y_2)$$

2e $y' - a(x)y = 0$

$y(x)$ è soluzione $\iff L(y(x)) = 0$

e dato che L è lineare $\alpha y_1 + \beta y_2$ è soluzione se y_1 e y_2 lo sono:

$$0 = \alpha L(y_1) + \beta L(y_2) = L(\alpha y_1 + \beta y_2) \quad \text{c.v.d.}$$

0 0

3o) NON OMOGENEA:

$$y' = a(x)\,y(x) + b(x)$$

$y' - a(x)\,y(x) = b(x)$ moltiplico per $e^{-A(x)}$

$$e^{-A(x)}y' - e^{-A(x)}a(x)y(x) = e^{-A(x)}b(x)$$

$$\left(y(x)e^{-A(x)}\right)' = e^{-A(x)}b(x)$$

INTEGRO.

$$y(x)e^{-A(x)} = \int e^{-A(x)}b(x)$$

Se $K(x) \in \int e^{-A(x)}b(x)$

$$y(x)e^{-A(x)} = K(x) + C$$

$$y(x) = e^{A(x)}\left(K(x) + C\right)$$

Che è soluzione ∀ funz., con $y(x) = e^{A(x)}(K(x)+c)$ è soluzione

$$y' = e^{A(x)} \cdot a(x)\,(K(x)+c) + e^{A(x)} \cdot e^{-A(x)} b(x)$$

$\underbrace{e^{-A(x)} b(x)}_{(K(x))'}$

$$= e^{A(x)} a(x)(K(x)+c) + b(x) \quad c.v.d$$

31) VAR. SEPARABILI

$$y'(x) = a(x)\, g(y(x))$$

$a : I \to \mathbb{R}$ continua

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua

① Soluzioni costanti

$y'(x) = 0 \quad \forall x \in I \Rightarrow 0 = a(x) \cdot g(y_0)$

se $a(x) \neq 0$

$y(x) = y_0$ è sol. $\Leftrightarrow g(y_0) = 0$

② non costanti

se $y(x) \neq y_0$ ∃ un intorno in cui $g(y(x)) \neq 0$

divido per $g(y(x))$:

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = a(x)$$

integro

cambio diff.

$y(x) = z$

$y'(x)\,dx = dz$

$$\int \frac{dz}{g(z)} = \int a(x)\,dx$$

Sia $G(z) \in \int \frac{1}{g(z)}\,dz$ e $A(x) \in \int a(x)\,dx$

allora $G(y(x)) = A(x) + c$ è soluzione insieme a $y(x) = y_0$ costanti

↑ INTEGRALE GENERALE

32) (PC) $\begin{cases} y' = a(x)\, g(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ A VAR. SEP

con $a : I \to \mathbb{R}$ funz di x

$g : D \to \mathbb{R}$ funz di y

- ∃ almeno una soluzione se a cont su I e g cont
- ∃ un UNICA soluzione se anche $g \in C^1(D)$

(PC) $\begin{cases} y' = a(x)\, y(x) + b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ LINEARE

nell'intervallo I

se a e b sono cont V allora la soluzione è UNICA

33) RADICI N-ESIME

Dato $w \in \mathbb{C}$ esiste esattamente n radici n-esime

$$\sqrt[n]{w} = \{ z : z^n = w \}$$

$$w = \rho(\cos\theta + i \sin\theta)$$

$$z^n = w$$

$$z^n = \left(\rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)\right)^n = \rho^n(\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha)) = w$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho^n = \rho \iff \rho = \sqrt[n]{\rho}, & \rho > 0 \\ n\alpha = \theta + 2k\pi \quad \forall k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\alpha_0 = \frac{\theta}{n} \quad / \quad \alpha_1 = \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n} \quad / \quad \alpha_2 = \frac{\theta}{n} + \frac{2\cdot 2\pi}{n}$$

$$\alpha_{n-2} = \frac{\theta}{n} + 2(n-2)\frac{\pi}{n} \qquad \alpha_n = \frac{\theta}{n} + 2n\frac{\pi}{n} = \frac{\theta}{n} = \alpha_0$$

per determinare tutte le radici ci consideriamo n angoli:

$$\alpha_K = \frac{\theta}{n} + \frac{2K\pi}{n} \quad / \quad K = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

$$\boxed{z = \sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\theta + 2K\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2K\pi}{n}\right)\right) \quad \text{con } K = 0, 1, \ldots, n-1}$$

34) se $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0$, $a_n \in \mathbb{R}$

e $w \in \mathbb{C}$ è zero di $P(z)$ allora $\overline{w}$ è anch'esso zero

$$P(w) = 0 \iff \overline{P(w)} = \overline{0} = 0$$

$$= \overline{a_n w^n + a_{n-1} w^{n-1} + \ldots + a_0}$$

$$= \overline{a_n w^n} + \overline{a_{n-2} w^{n-1}} + \ldots + \overline{a_0}$$

$$= \overline{a_n}\,\overline{w^n} + \overline{a_{n-1}}\,\overline{w^{n-1}} + \ldots + a_n$$

$$= a_n (\overline{w})^n + a_{n-1} (\overline{w})^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

$$\Rightarrow P(\overline{w}) = 0 \quad c.v.d.$$

$\overline{zw} = \overline{z}\cdot\overline{w}$

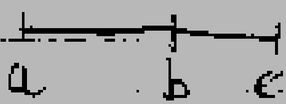
$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 - y_1y_2 - i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

e $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$ $\quad x_1 - iy_1 + x_2 - iy_2 = x_1 + x_2 - i(y_1 + y_2)$

11) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \qquad c \in \mathbb{R}$

Dato che per definizione $\int_a^b f(x)\,dx := -\int_b^a f(x)\,dx$

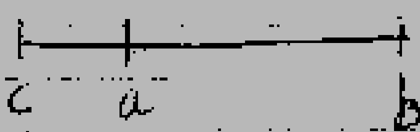
anche il caso <u>c>b</u>



$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

il caso <u>a>c</u>

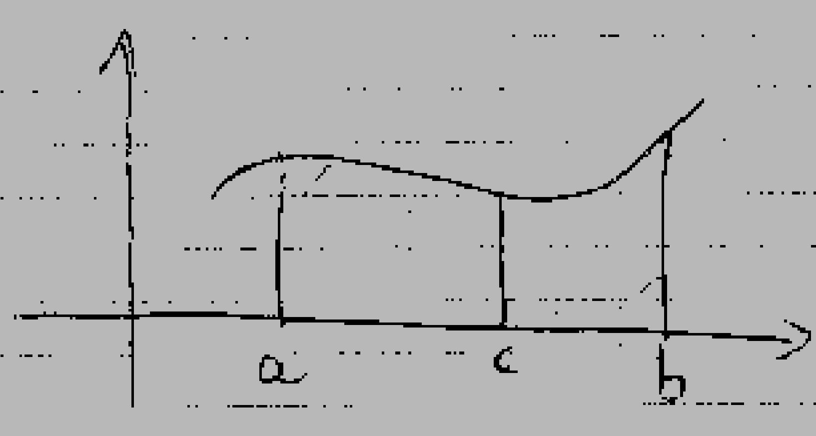


$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^b f(x)\,dx - \int_c^a f(x)\,dx$$

$$= \int_c^b f(x)\,dx + \int_a^c f(x)\,dx$$

<u>Caso base</u> $a < c < b$ (meglio farlo prima T.B.A.)

(seguito come mai dim?)



$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Δ2)

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

$$-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$$

monotonia dell'integrale $\Rightarrow$

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

$$\Leftrightarrow \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Δ3)

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx \qquad p>0 \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx \longrightarrow \text{SI VEDE SERIE ARMONICA}$$

$p=1 \longrightarrow \lim_{x\to 0} \ln|x| \Big]_0^1 = +\infty$

$p\neq 1 \longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \Big]_0^1 = \frac{1}{-p+1} + \lim_{x\to 0} \frac{x^{-p+1}}{p-1}$

$p>1 \to +\infty$

$p<1 \to 0$

quindi $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$ è finito per $p<1$ e vale

Δ4) Ruffini $P(z)$, w è zero di $P(z) \Leftrightarrow (z-w) \mid P(z)$ (è fattore di)

$P(z) = Q(z)(z-w) + R(z)$ (i gradi)

$P(z) = Q(z)(z-w) + 0$

$P(w) = Q(w)(w-w) + R(w) = 0 \Leftrightarrow R(w) = 0$

0