1) se $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}$ si ha $0 \leq x \leq \varepsilon \Rightarrow x = 0$

Dim. x assurdo: sia $x > 0$, poniamo $\varepsilon = \frac{x}{2} > 0$

allora x hp: $0 \leq x \leq \frac{x}{2} \Rightarrow$ (si può dividere per x perché è positivo

$\Rightarrow \frac{x}{x} \leq \frac{x}{2x} \Rightarrow 1 \leq \frac{1}{2}$ ASSURDO

2) Non esiste $x \in \mathbb{Q} : x^2 = 2$

Dim x assurdo:

$$\exists\, x \in \mathbb{Q} \text{ t.c. } x^2 = 2$$

$x = \frac{a}{b}$ $a, b \in \mathbb{Z}$ e primi tra loro

$\Rightarrow a^2$ è pari $(a^2 = 2b^2) \Rightarrow a$ pari

Dim x assurdo a pari:

se a non fosse pari per euclide $a = \varphi_1^{k_1} \cdots \varphi_s^{k_s}$ con

$\varphi_1 \ldots \varphi_s$ primi e $\neq$ da 2

$\Rightarrow a^2 = \varphi_1^{2k_1} \cdots \varphi_s^{2k_s}$, ma se nessun φ_k è 2 a^2 non è pari

ASSURDO

$a^2 = 2b^2 \Rightarrow 4k^2 = 2b^2$ (sostituisco a con 2k, perché è pari)

con $k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow 2k^2 = b^2 \Rightarrow b^2$ è pari $\Rightarrow b$ è pari

ASSURDO PER HP a e b primi tra loro

3) Sia $a>0$, $|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$

Dim $\Rightarrow$ (un verso alla volta)

$$|x| \leq a \implies -a \leq -|x| \implies -a \leq \cancel{-|x|} \leq x \leq \cancel{|x|} \leq a$$

MOLTIPLICO × −1, INVERTO IL VERSO DELLA DISEQUAZIONE

$$\Downarrow$$
$$-a \leq x \leq a$$

Dim $\Leftarrow$

$-a \leq x \leq a$ due casi:

1) $x \geq 0$ $\quad x = |x| \implies |x| \leq a$

SEMPRE MOLT × −1

2) $x<0$ $\quad x = -|x| \implies -a \leq x = -|x| \implies |x| \leq a$

4) $x, y \in \mathbb{R}$ $\quad |x+y| \leq |x| + |y|$

Dim:

AGGIUNGO UN MODULO (TANTO È POSITIVO)

$$|x+y| \leq \big||x|+|y|\big| \implies$$

SOSTITUISCO IL MODULO CON ^2, LA DIS. RIMANE

$$(x+y)^2 \leq (|x|+|y|)^2 \implies$$

$$\cancel{x^2}+\cancel{y^2}+2xy \leq \cancel{|x|^2}+|y|^2+2|x||y| \implies$$

$$2xy \leq 2|x||y| \implies xy \leq |xy|$$

Vero perché $\forall x \in \mathbb{R}$ $-|x| \leq x \leq |x|$

(al posto di x si considera xy)

5) Se esiste un lim è unico

Dim × assurdo

$\exists L_1 \neq L_2 : \lim a_n = L_1$

$\lim a_n = L_2$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_1 : |a_n - L_1| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_1$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_2 : |a_n - L_2| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_2$

$\forall n \geq \underbrace{\max(n_1, n_2)}_{= n_3}$ valgono entrambi

$\pm a_n$

$\overbrace{0 \leq |L_1 - L_2|}^{*} = |L_1 - a_n + a_n - L_2| =$

$|(L_1 - a_n) + (a_n - L_2)| \leq |L_1 - a_n| + |a_n - L_2| < 2\varepsilon$

TRIANGOLARE

entrambi $< \varepsilon$ per $n \geq n_3$

$\overbrace{0 \leq |L_1 - L_2|}^{*} \leq 2\varepsilon \Rightarrow |L_1 - L_2| = 0 \iff L_1 = L_2$

assurdo per ip $L_1 \neq L_2$

6) Permanenza del segno

Sia $(a_n)_n$ una succ con limite L

a) se $L > 0 \Rightarrow \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \Rightarrow a_n > 0$

b) se $L < 0 \Rightarrow \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \Rightarrow a_n < 0$

c) se $L \neq 0 \Rightarrow \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \Rightarrow |a_n| > \left|\frac{L}{2}\right|$

a Dim) $L > 0$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \Rightarrow L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$

pongo $\varepsilon = \frac{L}{2}$ (maggiore di 0) $\Rightarrow 0 < \frac{L}{2} < a_n \Rightarrow a_n > 0$

b dim) $L < 0$

pongo $\varepsilon = -\frac{L}{2}$ ($-\frac{L}{2}$ sarà positivo)

$\exists n_0 : \forall n \geq n_0 \qquad a_n < L - \frac{L}{2} = \frac{L}{2} < 0 \Rightarrow a_n < 0$

c dim) 2 casi (a e b), da un certo n_0:

se $L < 0$: $\qquad a_n < \frac{L}{2} \Rightarrow -|a_n| < -\left|\frac{L}{2}\right| \Rightarrow |a_n| > \left|\frac{L}{2}\right|$
$\Rightarrow a_n < 0$

se $L > 0 \qquad a_n > \frac{L}{2} \Rightarrow |a_n| > \left|\frac{L}{2}\right|$
$\Rightarrow a_n > 0$

7) Carabinieri

3 successioni: $(a_n)_n, (b_n)_n, (c_n)_n$: $\quad a_n \leq c_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

e $\lim a_n = \lim b_n = L \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \lim c_n = L$

<u>Dimostrazione</u>

a) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_1 \ \forall n \geq n_1 \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$

b) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_2 \ \forall n \geq n_2 \Rightarrow |b_n - L| < \varepsilon$

pongo $n_3 = \max(n_1, n_2)$ in modo da valga sia a) che b)

$\forall n \geq n_3$ si ha (per a), b) e hp)

$$L - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < L + \varepsilon$$

$$\Rightarrow L - \varepsilon < c_n < L + \varepsilon \quad \forall n \geq n_3$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_3 : \forall n \geq n_3 \Rightarrow |c_n - L| < \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$\lim c_n = L$$

8) una successione $(a_n)_n$ ha limite finito, allora è limitata

$(a_n)_n$ succ, $\lim a_n = L \in \mathbb{R}$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \Rightarrow L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$

① $\{a_n ; n < n_0\}$ è un insieme con numero finito di elementi

② $\{a_n : n \geq n_0\}$ è limitato tra $L-\varepsilon$ e $L+\varepsilon$

$\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = ① \cup ②$, essendo unione di 2 insiemi limitati è a sua volta limitato

9) Siano $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ 2 succ t.c.

$\lim a_n = 0$ e $|b_n| \leq M$ (M è piccolo purché finito)
↳ $M \in \mathbb{R}$

allora $\lim a_n b_n = 0$

Dim

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 : \forall n \geq n_0 : |a_n b_n| < \varepsilon$ (Tesi)

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \Rightarrow |a_n| < \varepsilon$ (per ipo)

$|a_n \cdot b_n| = |a_n| \cdot |b_n| < \varepsilon \cdot M \quad \forall n \geq n_0$ VERIFICO

10) $\lim (a_n/b_n) = A/B$ e $B \neq 0$

a) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_1 : \forall n \geq n_1 \Rightarrow |a_n - A| < \varepsilon$

b) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_2 : \forall n \geq n_2 \Rightarrow |b_n - B| < \varepsilon$

a) e b) $\Rightarrow \forall n \geq n_3 \doteq \max(n_1, n_2) \Rightarrow$ Verifico sia a) che b)

<u>Dimostro</u> che $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_3 : \forall n \geq n_3 \Rightarrow \left| \dfrac{a_n}{b_n} - \dfrac{A}{B} \right| < \varepsilon$

DEN. COMUNE

$\pm AB$

$$0 \leq \left| \frac{a_n B - A b_n}{b_n B} \right| = \left| \frac{a_n B - AB + AB - A b_n}{b_n B} \right|$$

$$\leq \frac{|a_n B - AB| + |AB - A b_n|}{|b_n||B|}$$

TRIANGOLARE SOPRA, SEPARATO I MODULI NELLA FRAZIONE E AL DENOMINATORE

$$= \frac{|B||a_n - A| + |A||B - b_n|}{|b_n||B|}$$

RACCOLGO A e B, POI SEPARO IL PROD. DEI MODULI

$\forall n \geq n_3$

$$\leq \frac{|B| \cdot \varepsilon + |A| \cdot \varepsilon}{\left|\frac{B}{2}\right| |B|} = \varepsilon \cdot \left| \frac{B + A}{\frac{B}{2} \cdot B} \right|$$

RACCOLGO ε

DATO CHE $B \neq 0$ x PERC. SEGNO $\forall n \geq n_2$

$$\left|\frac{B}{2}\right| < |b_n|$$

COSTANTE $\cdot\, \varepsilon$ QUINDI TENDE A 0 E IL LIMITE È DIMOSTRATO

11) Limite $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} x^k = ?$

$\parallel$

TEOREMA

$\lim_{n\to\infty} (S_n(x))_n$

$$S_n(x)(1-x) = (x+x^2+\dots+x^n)(1-x) \overset{\text{SI SEMPLIFICANO GLI ALTRI}}{=} x - x^{n+1}$$

DIVIDO PER $1-x$ (con $x\neq 1$)

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \frac{x-x^{n+1}}{1-x} \overset{\text{SEPARO X AVERE LA N SOLO A DX}}{=} \frac{x}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x} =$$

$$\frac{x}{1-x} - \lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

Discuto $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{1-x} = \begin{cases} -\infty & x>1 \\ 0 & |x|<1 \\ \nexists & x\leq -1 \end{cases}$ ($x=1$ non c'è per la div. per $1-x$)

RIASSUMENDO

$x>1$ $\quad \lim_n S_n(x) = +\infty$

$x=1$ $\quad S_n(1) = \underbrace{1+1+1+\dots+1}_{n \text{ volte}} = 1\cdot n = \infty$

$|x|<1$ $\quad \dfrac{x}{x-1}$

$x\leq -1$ $\quad \nexists$

12) Bernoulli $(1+a)^n \geq 1+na \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad a \geq 0$

per induzione

$A(1) = \cancel{1+a} \geq 1+a$ Vero

se $A(n)$ vera allora $A(n+1)$ è vera?

$$(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a$$

per hp.

SVILUPPO

$$(1+a)^n(1+a) \geq (1+na)(1+a) =$$

$$1+a+na+na^2 = 1+(n+1)a+na^2 \geq 1+(n+1)a$$

raccolgo a in $a+na$

na^2 è sempre positivo, quindi maggiore o è 0

13) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} - 1 = 0$ pongo $d = \sqrt[n]{n} - 1$, con $d \geq 0$ dato $\sqrt[n]{n} \geq 1$

$$\sqrt[n]{n} = d+1 \Rightarrow n = (d+1)^n \underset{(*)}{\geq} \frac{n(n-1)}{2} d^2 \Rightarrow$$

$$n \geq \frac{n(n-1)}{2} d^2 \Rightarrow d^2 \leq \frac{2}{n-1} \Rightarrow$$

$$0 \leq d \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{2}{n-1}} = 0$, quindi x i carabinieri $d \to 0$ e $\sqrt[n]{n} \to 1$

(*) $(d+1)^n$ è un binomio di Newton, il coefficiente di $d^{2 \to K}$ è

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$$, quindi non può essere più grande.

14) sia $A \neq \emptyset$, A inf limitato allora $\exists \inf A \in \mathbb{R}$

estremo inferiore

Dim.

sia p_1 minorante di A e $a_1 \in A$

sia $c_1 = \frac{p_1 + a_1}{2}$

se $[p_1, c_1] \cap A \neq \emptyset$	se $[p_1, c_1] \cap A = \emptyset$
$p_2 = p_1$	$p_2 = c_1$
$a_2 \in [p_1, c_1] \cap A$	$a_2 = a_1$

in entrambi i casi $p_2 \leq a_2$ (p_2 minorante)

$a_2 \in A$

$p_1 \leq p_2$

$a_1 \geq a_2$

Continuo con metodo dicotomico e creo una successione (p_n) di minoranti di A, e (a_n) una succ di elementi di A

$p_n \leq p_{n+1}$ $\quad a_{n+1} \leq a_n$ $\quad p_n \leq a_n$

per incastro $\exists\, i \in [p_n, a_n]$ $\forall n$

e i è unico perché $a_n - p_n \leq \frac{a_1 - p_1}{2^{n-1}} \to 0$ ← Dimostro ricorsivamente

Dimostro che $i = \inf A$

1) $i \leq a$ $\forall a \in A$ → minore elementi di A

2) se $p \leq a$ $\forall a \in A \Rightarrow p \leq i$ → maggiore dei minoranti

$p_n \to i$ perché $0 \le |p_n - i| \le |a_n - p_n| \to 0$

$a_n \to i$ perché $0 \le |a_n - i| \le |a_n - p_n| \to 0$

1) $p_n \le a \quad \forall a \in A$ — INTENDO CHE $p_n - a \le 0$ e anche il limite $i - a \le 0$?

$\Big\downarrow$ passo al limite sopra

$i \le a$ per permanenza del segno $(p_n - a)$

$\Rightarrow i$ è minorante

2) se per assurdo $i_1 > i$ fosse minorante

allora $\exists n_0 : |a_n - i| < |i_1 - i| \quad \forall n \ge n_0$ — è un ε

$\Rightarrow a_n - i < i_1 - i$

$\Rightarrow a_n < i_1 \quad \forall n \ge n_0$

i_1 non è minorante $\left(\begin{array}{l} a_n - i \text{ sono positivi,} \\ i_1 - i \text{ si può togliere il valore} \end{array}\right)$

15) Sia $(a_n)_n$ succ. di $\mathbb{R}$ crescente

allora $\exists \lim a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$

2 casi $\lim \in \mathbb{R}$ o $+\infty$

1) $\sup\{a_n\} = S \in \mathbb{R} \quad \lim a_n = S$?

$\{a_n\}$ è superiormente limitato

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 : |a_n - S| < \varepsilon \quad \forall n \ge n_0$

$\Leftrightarrow S - \varepsilon < a_n < S + \varepsilon$

$\Big\downarrow$ Vera sempre perché $a_n \le S < S + \varepsilon$
(S è sup.)

$\Big\downarrow$

$\exists\, a_{n_0}: \; a_{n_0} > S - \varepsilon$ (S è il più piccolo maggiorante)

$\forall n > n_0 \quad a_n \geq a_{n_0} > S - \varepsilon$ (succ. è crescente)

$\Rightarrow \forall n \geq n_0 \quad S - \varepsilon < a_n \leq S + \varepsilon \Rightarrow \lim a_n = S$

2) $\sup\{a_n\} = +\infty$

$\forall M > 0 \; \exists\, n_0 : \forall n \geq n_0 \Rightarrow a_n > M$

se $\sup\{a_n\} = +\infty$ a_n non è limitata superiormente

$\forall M \; \exists\, n_0 : a_{n_0} > M$, ed essendo crescente:

$\forall n \geq n_0 \quad a_n \geq a_{n_0} > M \Rightarrow \lim a_n = +\infty$

16) Sia $(x_n)_n$ una succ. non indeterminata (che limite, finito o no che sia)

allora $\forall\, (x_{n_k})_k$ sottosucc. di (x_n) ha lo stesso limite

Dim: $L \in \mathbb{R}$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists\, n_0 : |x_n - L| < \varepsilon \;\; \forall n \geq n_0$ (def di limite)

$\lim_{k \to \infty} n_k = +\infty$ (è sotto successione)

$\exists\, K_0 : \forall K \geq K_0$ si ha $n_K \geq n_0$

$\Rightarrow |x_{n_K} - L| < \varepsilon \;\; \forall K \geq K_0 \Rightarrow x_{n_K} \to L$

Dim $+\infty$ (questo era per casa, non ci giurerei)

$\forall M > 0 \; \exists\, n_0 \quad x_n > M \quad \forall n \geq n_0$

$\lim_{K \to +\infty} n_K = +\infty$

$\exists\, K_0 : \forall K \geq K_0$ si ha $n_K \geq n_0 \Rightarrow x_{n_K} > M \;\; \forall K \geq K_0 \Rightarrow x_{n_K} \to +\infty$

Dim $-\infty$ (sempre per sua)

$\forall M>0\ \exists n_0 : x_n < -M \quad \forall n \geq n_0$

$\lim_{K\to\infty} n_K = +\infty$

$\exists K_0 : \forall K \geq K_0$ risulta $n_K \geq n_0 \Rightarrow x_{n_K} < -M \quad \forall K \geq K_0$

$\Rightarrow x_{n_K} \to -\infty$

17) Data $(x_n)_n$ successione

se $\exists (x_{n_K})_K$ sottosucc di $(x_n)_n$ t.c. $x_{n_K} \to L_1$

ed $\exists (x_{n_h})_h$ sottosuc di $(x_n)_n$ t.c. $x_{n_h} \to L_2$

se $L_1 \neq L_2 \Rightarrow \nexists \lim x_n$

Dim se per assurdo esistesse $\lim x_n = L$

$L = L_1$ e $L = L_2$ per unicità del limite

$L_1 = L_2$ ASSURDO

18) $f(x) = x^p \qquad p \in \mathbb{N}$

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^p - x_0}{h}$$

siccome $a^p - b^p = (a-b)(a^{p-1} + a^{p-2}b + \dots + b^{p-1})$

se $a = x_0 + h$ e $b = x_0$

p some di x^{p-1}

$$\lim_{h\to 0} \frac{(\cancel{x_0} + \cancel{h} - \cancel{x_0})}{\cancel{h}} \left((x_0+h)^{p-1} + (x_0+h)^{p-2} x_0 + \dots + x_0^{p-1}\right) =$$

$p x_0^{p-1}$ ovvero

$(x^p)' = p x_0^{p-1}$

con p "negativo" $f(x) = x^{-p}$ $\quad p \in \mathbb{N}$ $\quad x \neq 0 \rightarrow$ O LA FRAZIONE ESPLODE

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{(x_0+h)^p} - \frac{1}{x_0^p}}{h} = \text{(den comune)}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{x_0^p - (x_0+h)^p}{(x_0+h)^p \cdot x_0^p \cdot h} = \lim_{h\to 0} \frac{x_0^p - (x_0+h)^p}{h} \cdot \frac{1}{(x_0+h)^p \cdot x_0^p} =$$

separo il denominatore

$$-p x_0^{p-1-2p} \leftarrow \text{si divide per } (x_0+h)^p \cdot x_0^p$$

il meno perchè il num è al contrario

$$= -p x_0^{-p-1}$$

19) $f(x) = |x|$ non derivabile in $x=0$

$$\lim_{h\to 0} = \frac{f(0-h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$$

2 casi:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

quindi $\nexists f'(0)$ perchè $f'_{dx}(0) \neq f'_{sx}(0)$

20) $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ è derivabile in $x_0 \in (a,b) \Rightarrow f(x)$ continua in x_0

Dim

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \quad \text{def. di continuità}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0) \quad \text{con } h = x - x_0,\ x = x_0 + h$$

$$\Leftrightarrow \lim_{h\to 0} f(x_0+h) - f(x_0) = 0 \quad (*)$$

se $\exists f'(x_0) \Rightarrow \lim_{h\to 0} f(x_0+h)-f(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\cdot h =$

$f'(x_0)\cdot h = 0$ (*)

nel è der per h

21) sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ $x_0\in(a,b)$

se f è derivabile in x_0 la retta tangente è

$$T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

Se $E(h) = T(x_0+h) - f(x_0+h)$ si ha

$$\lim_{h\to 0}\frac{E(h)}{h} = 0$$

Dim

$$\lim_{h\to 0}\frac{T(x_0+h)-f(x_0+h)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0)+f'(x_0)(\cancel{x_0}+h-\cancel{x_0})-f(x_0+h)}{h}$$

sostituisco la x in
sostituisco nel eq. di $T(x)$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0)-f(x_0+h)}{h} + \frac{f'(x_0)h}{h} = -f'(x_0)+f'(x_0) = 0$$

lim $f'(x)$
con num negativo

separo num

22) $$\left(f(x)/g(x)\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$ se $g(x)\neq 0$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x_0+h)}{g(x_0+h)}-\frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)g(x_0)-g(x_0+h)f(x_0)}{g(x_0+h)g(x_0)h}$$

Den comune

$\pm g(x_0)f(x_0)$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)g(x_0)-g(x_0)f(x_0)+g(x_0)f(x_0)-g(x_0+h)f(x_0)}{g(x_0+h)g(x_0)h}$$

siccome $\exists\, g'(x_0)$ $g(x)$ è continua in x_0

quindi $g(x_0) \neq 0 \Rightarrow g(x_0+h) \neq 0$ e $g(x_0+h) \to g(x_0)$

per h piccoli (perm. del segno)

sempre con h piccoli

raccolgo $f(x_0)$ e $g(x_0)$ e sposto l'h

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(x_0)\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right) - f(x_0)\left(\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\right)}{g(x_0+h)\,g(x_0)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{g(x_0)\,f'(x_0) - f(x_0)\,g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

$g(x_0+h)$ tende a $g(x_0)$

23) Se $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ allora $a_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!}$

__Dim__

$$P'(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\, i x^{i-1}\right) = a_1 + 2a_2 x + \dots + n a_n x^{n-1}$$

$$\Rightarrow P'(0) = a_1 \cdot 1$$

$$P'' = \sum_{i=2}^{n} i(i-1)\, a_i x^{i-2} \Rightarrow P''(0) = 2a_2$$

per induzione $P^{(k)}(x) = \sum_{i=k}^{n} i(i-1)\dots(i-k+1)\, a_i x^{i-k}$

$$P^{(k)}(0) = k(k-1)\dots 1\, a_k = k!\, a_k$$

$$\Rightarrow a_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!}$$

24) Formula di Newton

$$p(x) = (1+x)^n$$

$$p'(x) = n(1+x)^{n-1} \cdot 1 \quad \text{(derivata composta)}$$

$$p^{(k)}(x) = n(n-1)\cdots(n-k+1)(1+x)^{n-k}$$

$$\frac{p^{(k)}(0)}{k!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)\cdot 1}{k!} = a_k$$

$$a_k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} \quad \text{Detto coeff. BINOMIALE}$$

Quindi

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \quad \leftarrow x = \left(\frac{b}{a}\right)$$

Binomio di Newton:

$$(a+b)^n = \left(a\left(1+\frac{b}{a}\right)\right)^n = a^n\left(1+\frac{b}{a}\right)^n = a^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{b}{a}\right)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{b^k}{a^k} \cdot a^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b^k a^{n-k}$$

25) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq 3, \ \forall n \in \mathbb{N}$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{\boxed{n(n-1)\cdots(n-k+1)}}{k!\, n^k} \longrightarrow \leq 1$$

k fattori $\leq n$

k fattori $= n$

$$\leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \qquad \text{dato che } \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$$

porto fuori il k=0

porto fuori il 2

$$\leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{2^k} = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} =$$

$$1+2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k} \leq 1+2=3 \quad \forall n$$

serie geometrica con ragione $\frac{1}{2}$

26) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ è crescente:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

per disuguaglianza aritmetico geometrica

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1+a_2+a_3+\ldots a_n}{n}$$

e se ho almeno un termine diverso dagli altri $\leq$ in caso stretto

elevo alla n

$$\Longleftrightarrow a_1 \cdot a_2 \cdots a_n \leq \left(\frac{a_1+\ldots+a_n}{n}\right)^{n}$$

se ho $n+1$ elementi e la applico e pongo con

$a_1 = 1$ e $a_2 \ldots a_{n+1} = 1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ si ha

$$\left(\frac{1+\overbrace{n+1}^{n \text{ volte } \left(1+\frac{1}{n}\right)}}{n+1}\right)^{n+1} \geq 1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

$\left(1+\frac{1}{n}\right)$ moltiplicato n volte

fa 1

1 termine diverso

(1)

quindi $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ verificato

27) sia $f(a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile $\forall x \in (a,b)$

allora

1) f crescente $\Rightarrow f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b)$

2) f decrescente $\Rightarrow f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a,b)$

3) f costante $\Rightarrow f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b)$

dim 1)

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{\overbrace{f(x_0+h) - f(x_0)}^{\text{num} \geq 0}}{\underbrace{h}_{\text{den} > 0}} \geq 0$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{\overbrace{f(x_0+h) - f(x_0)}^{\text{num} \leq 0}}{\underbrace{h}_{\text{den} < 0}} \geq 0$$

dim 2)

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{\overbrace{f(x_0+h) - f(x_0)}^{\leq 0}}{\underbrace{h}_{> 0}} \leq 0$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{\overbrace{f(x_0+h) - f(x_0)}^{\geq 0}}{\underbrace{h}_{< 0}} \leq 0$$

dim 3)

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0^\pm} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{K-K}{h} = 0$$

L'inverso si dimostra dopo e prende anche il zero stretto

↓

LAGRANGE

28) sia $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile in x_0 e x_0 max o min locale
allora $f'(x_0) = 0$

<u>x_0 massimo locale</u>

$$f'(x_0) \;\; \lim_{h \to 0^+} \frac{\overbrace{f(x_0+h) - f(x_0)}^{\leq 0}}{\underbrace{h}_{>0}} \leq 0$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{\overbrace{f(x_0+h) - f(x_0)}^{\leq 0}}{\underbrace{h}_{<0}} \geq 0$$

permanenza del segno

$f'(x_0) = 0$ per unicità del limite

<u>x_0 minimo locale</u>

$$f'(x_0) \;\; \lim_{h \to 0^+} \frac{\overbrace{f(x_0+h) - f(x_0)}^{\geq 0}}{\underbrace{h}_{>0}} \geq 0$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{\overbrace{f(x_0+h) - f(x_0)}^{\geq 0}}{\underbrace{h}_{<0}} \leq 0$$

$f'(x_0) = 0$ per unicità del limite

29) VALORI INTERMEDI

sia $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ continua

e $f(a) < \lambda < f(b)$ allora $\exists$ almeno un $x_0 : f(x_0) = \lambda$

Dim

sia $g(x) = f(x) - \lambda$ $\quad$ $g(x)$ è continua perché lo è $f(x)$

$$g(a) = f(a) - \lambda < 0$$

$$g(b) = f(b) - \lambda > 0$$

per il teorema degli zeri su $g(x)$:

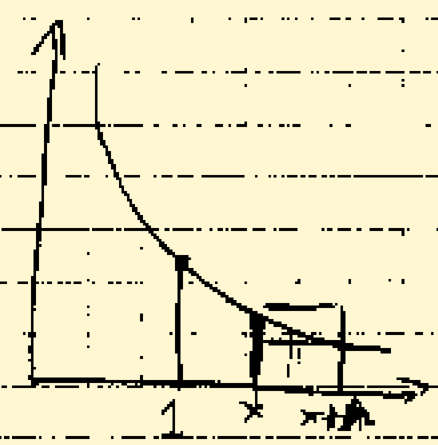
$$\exists\, x_0 : g(x_0) = 0$$

quindi $f(x_0) - \lambda = 0$

e $f(x_0) = \lambda$

30) $L(x)$ è derivabile (caso $x > 1$)

$L(x)$ con $x>1$ è $\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$



$$\lim_{h \to 0^+} = \frac{\int_1^{x+h} \frac{1}{t}\,dt - \int_1^{x} \frac{1}{t}\,dt}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{\int_x^{x+h} \frac{1}{t}\,dt}{h}$$ ← è compreso tra

$R1 = \underset{\uparrow \text{BASE}}{h} \cdot \frac{1}{x}$ ← ALTEZZA

$R2 = h \cdot \frac{1}{x+h}$

moltiplico per $\frac{1}{h}$ e uso i confronti

$\to\ > 0$ $\qquad$ $\frac{\text{AREA}}{\text{BASE}(h)} = \text{ALTEZZA}$

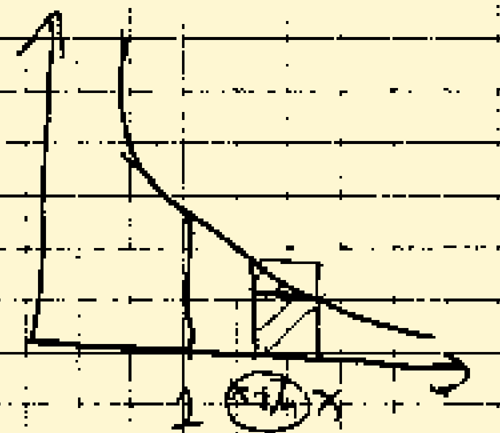
$$\frac{1}{x} < \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \frac{1}{t}\,dt < \frac{1}{x+h}$$

$$\frac{1}{x} < \frac{\int_x^{x+h} \frac{1}{t}\,dt}{h} < \frac{1}{x+h} \quad \text{con } h \to 0^+$$

per continuità

$$\lim_{h\to 0} \int_x^{x+h} \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{x}$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{\int_1^{x+h} \frac{1}{t}\,dt - \int_1^{x} \frac{1}{t}\,dt}{h} =$$



$$\lim_{h\to 0^-} \frac{-\int_{x+h}^{x} \frac{1}{t}\,dt}{h}$$

qui $x+h$ è prima

$$R_2 = -h \cdot \frac{1}{x+h}$$

$$R_1 = -h \cdot \frac{1}{x}$$ moltiplico per $\frac{-1}{h}$ che è >0

$$\frac{1}{x+h} < \frac{\int_{x+h}^{x} \frac{1}{t}\,dt}{h} < \frac{1}{x}$$

per continuità con $h \to 0$ il limite è $\frac{1}{x}$

limite per $h \to 0^+$ e $h \to 0^-$ coincidono quindi il

$$\lim_{h\to 0} \frac{L(x+h) - L(x)}{h} = \frac{1}{x}$$

31) $L(ab) = L(a) + L(b)$ con $a, b > 0$

$G(x) = L(ax)$ con a fisso e $a, x > 0$

G derivabile perché composta di funzioni derivabili

$$G'(x) = L'(ax) \cdot a = \frac{1}{ax} \cdot a = \frac{1}{x}$$

$$G'(x) = L'(x) = \frac{1}{x}$$

$(G(x) - L(x))' = 0$ la derivata è 0, quindi la funzione è costante

$$G(x) - L(x) = K$$

$$L(ax) - L(x) = K$$

se $x = 1$

$L(a) - 0 = K$, quindi $K = L(a)$

$\Rightarrow L(ax) - L(x) = L(a)$

$\Rightarrow L(ax) = L(a) + L(x)$ sostituisco x con b

$\Rightarrow L(ab) = L(a) + L(b)$

32) $\lim_{x\to 0} L(x) = \inf\{L(x) : x>0\}$ e $\lim_{x\to +\infty} L(x) = \sup\{L(x)\ x>0\}$

$L(x)$ è crescente

se A e B sono 2 sotto insiemi di $\mathbb{R}$ e $A \subseteq B$

allora $\begin{cases} \sup A \le \sup B \\ \inf A \ge \inf B \end{cases}$

$$\Rightarrow \sup\{L(x) : x>0\} \ge \sup\{L(2^n)\} = \sup\{n\underset{>0}{L(2)}\} = +\infty$$

e

$$\Rightarrow \inf\{L(x) : x>0\} \le \inf\{L(2^{-n})\} = \inf\{-n\underset{>0}{L(2)}\} = -\infty$$

33) $L(e)=1$ con teorema ponte

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0) = f\left(\lim_{n\to+\infty} x_n\right)$$

$$L(e) = L\left(\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) \overset{\text{TEOREMA PONTE SOPRA}}{=}$$

$$\lim_{n\to+\infty} L\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) = \lim_{n\to+\infty} n L\left(1+\frac{1}{n}\right) - \underbrace{L(1)}_{0} =$$

porto fuori dal $L(x)$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{L\left(1+\frac{1}{n}\right) - L(1)}{\frac{1}{n}}$$

porto al den

pongo $h = \frac{1}{n} \to 0$

ovvero $L'(1)$

$$\lim_{h\to 0} \frac{L(1+h) - L(1)}{h} = \left.\frac{1}{x}\right|_{x=1} = \frac{1}{1} = 1$$

34) Teorema ponte: sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ $\quad x_0\in(a,b)$

$\lim_n x_n = x_0$ $\quad (x_n \to x_0)$ $\quad x_n \neq x_0$

allora $\forall (x_n)_n$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \iff \lim_n f(x_n) = L$$

<u>Dim</u> $\Rightarrow$

$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta: 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$ (Def di lim $f(x)$)

siccome $x_n\to x_0$ $\forall \varepsilon'>0\ \exists n_0: \forall n\geq n_0 \Rightarrow |x_n-x_0|<\varepsilon'$ (def di lim succ)

quando il δ è uguale a ε' il primo è verificato essendo l'intervallo in cui il limite vale $\Rightarrow$

Pongo $\varepsilon'=\delta \Rightarrow \exists n_0: \forall n\geq n_0 \Rightarrow |x_n-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x_n)-L|<\varepsilon$

<u>Dim</u> $\Leftarrow$

x ASSURDO $\lim_{x\to x_0} f(x)\neq L$

$\downarrow$ essendo diverso nego la definizione

$\exists \varepsilon>0\ \forall \delta: 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|\geq\varepsilon$

pongo $\delta=\frac{1}{n}$ e ottengo:

è su ε

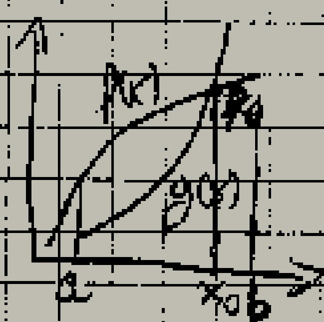
$|x-x_0|<\frac{1}{n} \Rightarrow |f(x_n)-L|>\varepsilon$

ASSURDO: $x_n\to x_0$ quindi $f(x_n)\to L$ (per dim sopra)

35) Es importante: siano $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabili e $x_0 \in (a,b)$

se $\begin{cases} f(x_0) = g(x_0) \\ f'(x) < g'(x) \quad \forall x \in (a,b) \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} f(x) < g(x) \quad \forall x > x_0 \\ f(x) > g(x) \quad \forall x < x_0 \end{array}$

Dim



sia $h(x) = f(x) - g(x)$

$h(x_0) = f(x_0) - g(x_0) = 0$

$h' = f'(x) - g'(x) < 0 \Rightarrow h(x)$ è decrescente

$\Rightarrow \begin{cases} h(x) > 0 & x < x_0 \\ h(x) < 0 & x > x_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) & x < x_0 \\ f(x) < g(x) & x > x_0 \end{cases}$

36) $E(x)$ inversa del lg è derivabile

$E'(x) = E(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Teorema: l'inversa di una funzione monotona e strettamente e continua è a sua volta continua

$E(x)$ è continua $\Leftarrow$

$$\lim_{h \to 0} \frac{E(x+h) - E(x)}{h} = E(x)$$

Dim

Pongo $E(x+h) = b \Longleftrightarrow x+h = \lg b$

$E(x) = a \Longleftrightarrow x = \lg a$

$$\lim_{b \to a} \frac{b-a}{\lg b - \lg a} = \frac{1}{\frac{\lg b - \lg a}{b-a}} = \frac{1}{(\lg x)'|_a} = \frac{1}{\frac{1}{a}} = a = E(x)$$

è continua

$\boxed{b - a \to h}$

quindi $E'(x) = E(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

39) $E(a+b) = E(a)\cdot E(b) \quad \forall a,b \in \mathbb{R}$

pongo $x = E(a) \iff a = \lg x$

$y = E(b) \iff b = \lg b$

$$E(a+b) = E(a)\cdot E(b) \iff E(\lg x + \lg y) = xy$$

$$\iff E(\lg(xy)) = xy \iff xy = xy$$

38) $E\left(\frac{m}{n}\right) = e^{\frac{m}{n}} \quad \forall \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ (5 dim successive)

1) $E(1) = e^{1} = e \iff \lg(E(1)) = \lg e \iff 1 = 1$

2) $E(n) = e^{n} \iff E(\underbrace{1+1+\dots+1}_{n \text{ volte}}) = \underbrace{E(1)\cdot E(1)\cdot E(1)\dots E(1)}_{n \text{ volte}} = e^{n}$

3) $E\left(\frac{1}{n}\right) = e^{\frac{1}{n}}$

$$E(1) = E\left(n\cdot\frac{1}{n}\right) = E\Big(\overbrace{\tfrac{1}{n}+\dots\tfrac{1}{n}}^{n \text{ volte}}\Big) = \overbrace{E\left(\tfrac{1}{n}\right)\cdot\dots E\left(\tfrac{1}{n}\right)}^{n \text{ volte}} = E\left(\frac{1}{n}\right)^{n}$$

$$\iff e = E\left(\frac{1}{n}\right)^{n} \iff e^{1/n} = E\left(\frac{1}{n}\right)$$

4) $E\left(\frac{m}{n}\right) = e^{\frac{m}{n}}, \quad \frac{m}{n} > 0$

$$E\left(\frac{m}{n}\right) = E\Big(\underbrace{\tfrac{1}{n}+\tfrac{1}{n}\dots+\tfrac{1}{n}}_{m \text{ volte}}\Big) = E\left(\frac{1}{n}\right)^{m} = \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^{m} = e^{\frac{m}{n}}$$

5) $E\left(\frac{m}{n}\right) = e^{\frac{m}{n}}, \quad \frac{m}{n} < 0$

$$E\left(\frac{m}{n} - \frac{m}{n}\right) = E(0) = 1 \quad (\lg 1 = 0)$$

$$\frac{m}{n} < 0 \iff -\frac{m}{n} > 0$$

$$E\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{1}{E\left(-\frac{m}{n}\right)} = \frac{1}{e^{-\frac{m}{n}}} = e^{\frac{m}{n}}$$

37) Def di $E(x)$ per $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

dato che ① $E(n) = e^n$

② $E\left(\frac{n}{m}\right) = e^{\frac{n}{m}}$

③ $E(x)$ è continua

se $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ e $x_n \to x$ $x_n \in \mathbb{Q}$

allora Ⓐ $E(x_n) = e^{x_n}$

Ⓑ $\lim E(x_n) = E(x)$

$\Rightarrow E(x) = \lim e^{x_n}$

e quindi definisco $e^x := E(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

che è così calcolabile in tutto $\mathbb{R}$, e derivabile in tutto $\mathbb{R}$

$((E(x))' = e^x)$

40) $e^x \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \quad \forall x \geq 0 \quad \forall n$

1) $e^x \geq 1+x$ Vero per il criterio di convessità: $(e^x)^{(2)} = e^x > 0 \quad \forall x$

2) $f' = e^x \qquad g' = 1+x$

$$f(x) = e^x \qquad g(x) = x + \frac{x^2}{2} + c$$

pongo $f(0) = g(0) \Rightarrow c = 1$

per es. ipotesi: $f' > g' \Rightarrow f(x) > g(x) \quad \forall x > 0$

$$\Rightarrow e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2} \quad \forall x \geq 0$$

3) Continuo con

$$f' = e^x \qquad g' = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

$$f(x) = e^x \qquad g(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3 \cdot 2} + c$$

pongo $f(0) = g(0) \Rightarrow c = 1$

per es. ipotesi

$$e^x \geq x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + 1$$

Concludendo con per induzione:

$$e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \geq 0$$

$$e^x \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \quad \forall x \geq 0 \quad \left(\text{in } k=0 = \frac{x^0}{0!} = \frac{1}{1} = 1\right)$$

41) limiti importanti (b)

(1) $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ $n > 0$, fisso

Dim $e^x \geq 1 + x + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} > \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$

$\Rightarrow \frac{e^x}{x^n} > \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{x^n} = \frac{x}{(n+1)!} = +\infty$

n fisso

(2) $\lim_{x \to -\infty} e^x x^n = 0$

Dim pongo $y = -x \longrightarrow \lim_{y \to +\infty} e^{-y}(-y)^n = \frac{(-y)^n}{e^y}$

n pari $= \frac{y^n}{e^y} = 0$

n dispari $= \frac{-y^n}{e^y} = 0$

(3) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\lg x}{x^n} = 0$

Dim $y = \lg x$ $x = e^y$

$\lim_{y \to +\infty} \frac{y}{e^{ny}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{y'}{e^{y'}} = 0$

pongo $y' = ny$

(4) $\lim_{x \to 0^+} \lg x \cdot x^n = 0$

Dim $x = \frac{1}{y}$

$\lim_{y \to +\infty} \lg\left(\frac{1}{y}\right) \cdot \frac{1}{y^n} = \frac{\lg 1 - \lg y}{y^n} = -\frac{\lg y}{y^n} = 0$

5) $\lim_{x \to 0} \frac{\lg(1+x)}{x} = 1$

Dim $\quad h = x \quad \lim_{x \to 0} \frac{\lg(1+h) - \lg(1)}{h} = (\lg(x))' \Big|_{x=1} = \frac{1}{1} = 1$

6) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

Dim $\quad h = x \quad \frac{e^{0+h} - e^0}{h} = e^x \Big|_{x=0} = 1$

42) Sia $f(a,b) \to \mathbb{R}$ continua in x_0

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - (ax+b)}{x - x_0} = 0 \implies y = ax + b = T(x) \text{ tangente in } (x_0, f(x_0))$$

Dim

essendo continua: $\lim_{x \to x_0} (x - x_0) = 0$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) - (ax+b) = \lim_{x \to x_0} f(x_0) - (ax_0 + b) = 0$$

$$f(x_0) - ax_0 - b = 0 \iff b = f(x_0) - ax_0$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - ax + ax_0 - f(x_0)}{x - x_0} = 0$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - a(x - x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \frac{a\cancel{(x - x_0)}}{\cancel{x - x_0}}$$

$$= f'(x_0) - a = 0 \implies a = f'(x_0)$$

$$y = ax + b = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0 = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$= T(x)$$