Estudiante: Erick J. Pineda Amézquita Carnet: 17012140

Hoja de trabajo # 5

1. Determine si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas, en cualquier caso, justifique su respuesta.

   a) En general, los algoritmos de optimización nos proveen una expresión matemática *cerrada* para poder resolver un problema de optimización.

R// FALSO: Los algoritmos de optimización brindan una solución estimada, por lo que se tienen rangos o intervalos abiertos para encontrar una solución.

   b) La tasa de convergencia de un algoritmo de optimización describe que tan "rápido" dicho algoritmo converge a la solución del problema.

R// VERDADERO: Es una razón de cambio para encontrar un punto mínimo que resuelve el problema.

   c) En la práctica, un algoritmo con una tasa de convergencia cuadrática se aproxima más rápido a la solución que uno con tasa de convergencia lineal.

R// VERDADERO: Al tener una función cuadrática se acelera el proceso de convergencia en cada epoch, tomar en cuenta que existen otras optimizaciones como Armijo y Curvatura.

   d) En la práctica, un algoritmo con tasa de convergencia superlineal es comparable a uno con tasa de convergencia cuadrática.

R// VERDADERO: Si bine, esto va a depender del valor de la constante C y r (en el caso superlineal), es necesario tomar en cuenta que en función de la cantidad de datos, si se tienen datos exageradamente grandes el modelo cuadrático implicará un costo computacional alto, por lo que no se recomendaría, es decir, en tal caso se utiliza un modelo super lineal.

Estudiante: Erick J. Pineda Amézquita Carnet: 17012140

2. Considere la sucesión definida mediante:

$$x_0 = a > 0 \quad \text{y} \quad x_{k+1} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{a}{x_k}\right).$$

Si $x_k \to \sqrt{a}$ cuando $k \to \infty$, determine la tasa de convergencia (*rate of convergence*) y la constante (*rate constant*) respectiva para la sucesión $\{x_k\}$.

Valores : $a > 0$

$x_0 = a > 0$

$e_{k+1} = x_{k+1} - x^* \Rightarrow e_{k+1} = \frac{1}{2}(x_k + a/x_k) - \sqrt{a}$

$x_{k+1} = \frac{1}{2}(x_k + a/x_k)$

$\Rightarrow e_{k+1} = \frac{x_k^2 + a}{2x_k} - \sqrt{a} \Rightarrow \frac{x_k^2 - 2x_k\sqrt{a} + a}{2x_k}$

$e_{k+1} = \frac{(x_k - \sqrt{a})^2}{2x_k} \Rightarrow \frac{e_{k+1}}{e_k^2} = \frac{1}{2x_k}$

$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^2} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2x_k} = \frac{1}{2} \lim_{k\to\infty} 1/x_k$ (Simplificando)

$= \frac{1}{2}(1/x^*) = 1/2\sqrt{a} \Rightarrow \boxed{C = 1/2\sqrt{a}}$

Tasa de convergencia CUADRÁTICA cuando $a > 0$

Estudiante: Erick J. Pineda Amézquita Carnet: 17012140

3. (*Problema Extra* – 3 puntos netos) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función con primera y segunda derivadas continuas. Sea $x^\star$ una solución de la ecuación no lineal $f(x) = 0$ con $f'(x^\star) \neq 0$. Demuestre que, si $|x_0 - x^\star|$ es suficientemente pequeña, entonces la sucesión $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ producida por el *método de Newton* tiene una *tasa de convergencia cuadrática (quadratic convergence rate)* con constante $C = \left|\frac{f''(x^\star)}{2f'(x^\star)}\right|$. Asuma que $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ converge a $x^\star$.

Método de Newton

$$C = \frac{f''(X_k)}{f'(X_k)}$$ Segunda Derivada / Primera derivada

Para $|X_0 - X^*|$ con valores muy pequeños

$e_n = X^* - X_k$ entonces: $X_{k+1} = X_k - \frac{f(X_k)}{f'(X_k)}$

$$X_k = X_{k+1} + \frac{f(X_k)}{f'(X_k)}$$

Por serie de Taylor:

$$\frac{f(X_k)}{f'(X_k)} + e_k = \frac{-1}{2} \frac{f''(X_k)}{f'(X_k)} * e_k^2$$

Reemplazando términos:

$$\cancel{\frac{f(X_n)}{f'(X_k)}} + X^* - X_{k+1} - \cancel{\frac{f(X_k)}{f'(X_k)}} = Ce_k^2$$

$e_{k+1} = X^* - X_{k+1} \Rightarrow e_{k+1} = Ce^2_k$

$$\therefore C = \left|\frac{f''(X^*)}{2f'(X^*)}\right| \text{ ó } \lim_{k \to \infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^2} = C$$