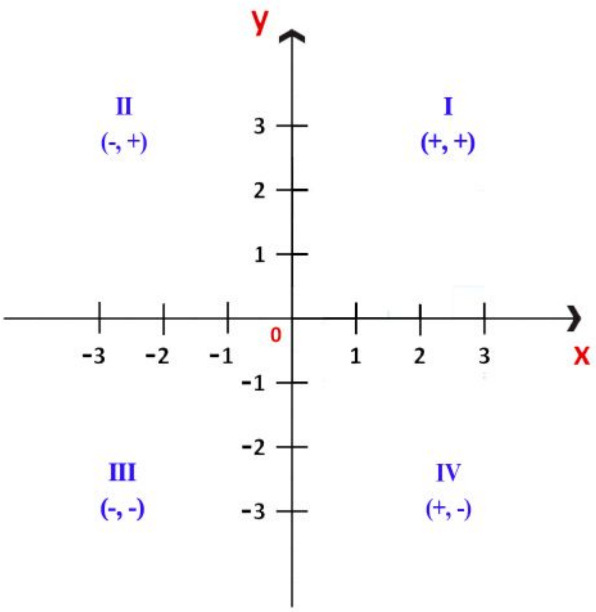
Iniciación a la geometría analítica

Se conoce como plano **cartesiano**, coordenadas cartesianas o sistema cartesiano, a dos rectas numéricas perpendiculares, una **horizontal** (**Abscisa,** “x”) y otra vertical (**Ordenada,** “y”), que se cortan en un punto llamado origen o punto cero.

Se llaman cuadrantes a las cuatro áreas que se forman por la unión de las dos rectas perpendiculares. Los puntos del plano se describen dentro de estos cuadrantes.

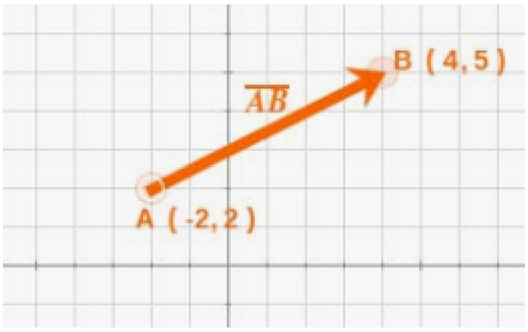
- Cuadrante I: la abscisa y la ordenada son positivas.
- Cuadrante II: la abscisa es negativa y la ordenada positiva.
- Cuadrante III: tanto la abscisa como la ordenada son negativas.
- Cuadrante IV: la abscisa es positiva y el ordenada negativa.



Vectores

En matemáticas se define vector como un elemento de un espacio vectorial. Un vector se representa mediante un segmento de recta, orientado dentro del espacio euclidiano.

Se caracteriza por:



- El módulo es la longitud del segmento.
- La dirección, la de la recta en que se apoya.
- El sentido, el que va del origen al extremo

Podemos expresar el vector mediante sus componentes, que se obtienen restando las coordenadas del destino menos las del origen, siendo estos dos puntos dentro del espacio euclídeo en el que estamos trabajando (actualmente es R^2): $(\overline{AB}) = \left((b_1 - a_1)^2, (b_2 - a_2)^2\right)$

El módulo de un vector se puede calcular mediante la fórmula:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

Dos vectores fijos se dicen equivalentes si tienen el mismo módulo, dirección y sentido. El conjunto de vectores equipolentes se denomina vector libre, y cualquiera de ellos sirve para representarlo. Lo indicaremos mediante $\overline{v}$.

Operaciones con vectores

La suma de vectores libres tiene las propiedades Conmutativa, Asociativa, Elemento Neutro, Y Elemento Opuesto. Se calcula mediante:

$$\bar{u} + \bar{v} = \left(u_1 + v_1, u_2 + v_2\right)$$

Se puede multiplicar y dividir un vector por un número natural, multiplicando o dividiendo cada elemento del vector por la constante.

Un vector $\bar{w}$ es combinación lineal de otros dos $\bar{u}$ y $\bar{v}$, si existen dos números reales, t y s, tales que: $\bar{w} = t \cdot \bar{u} + s \cdot \bar{v}$. Si la **base** $\bar{u}$ y $\bar{v}$ son independientes cualquier otro vector se puede poner como combinación lineal de ellos.

La base más utilizada es la formada por los vectores $\bar{u} = (1,\ 0)$ y $\bar{v} = (0,\ 1)$. Se denomina **base canónica**.

El punto medio de un segmento son las coordenadas del punto que está a la misma distancia de los componentes del segmento que lo componen.

$$M\left(\frac{u_1+v_1}{2}, \frac{u_2+v_2}{2}\right)$$

El producto escalar de dos vectores, es una nueva operación entre dos vectores libres cuyo resultado es un número. Se puede calcular de 2 formas:

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2$$

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = |\bar{u}| \cdot |\bar{v}| \cdot cos(\bar{u}\ ,\ \bar{v})$$

Los vectores $\bar{i} = (1,\ 0)$ y $\bar{j} = (0,\ 1)$ tienen módulo 1 y son perpendiculares, por tanto se cumple:

$$\bar{i} \cdot \bar{i} = |\bar{i}| \cdot |\bar{i}| \cdot cos(0º) = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

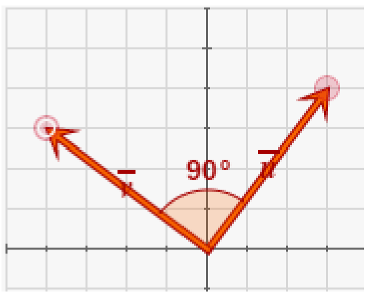
$$\bar{i} \cdot \bar{j} = |\bar{i}| \cdot |\bar{j}| \cdot cos(90º) = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

$$j \cdot \bar{j} = |\bar{j}| \cdot |\bar{j}| \cdot cos(0º) = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

Si el producto escalar es igual a 0 se dice que dice que son ortogonales, es decir, son perpendiculares.

El ángulo entre dos vectores se calcula mediante

$$cos(\bar{i}\ ,\bar{j}) = \frac{\bar{i} \cdot \bar{j}}{|\bar{i}| \cdot |\bar{j}|}$$



Ecuaciones de la recta

Ecuación vectorial

$$(x, y) = (x_1, y_1) + t * (v_x, v_y)$$

Ecuaciones paramétricas

$$x = x_1 + t * v_x$$

$$y = y_1 + t * v_y$$

Ecuación Continua

$$\frac{x - x_1}{v_x} = \frac{y - y_1}{v_y}$$

Ecuación General

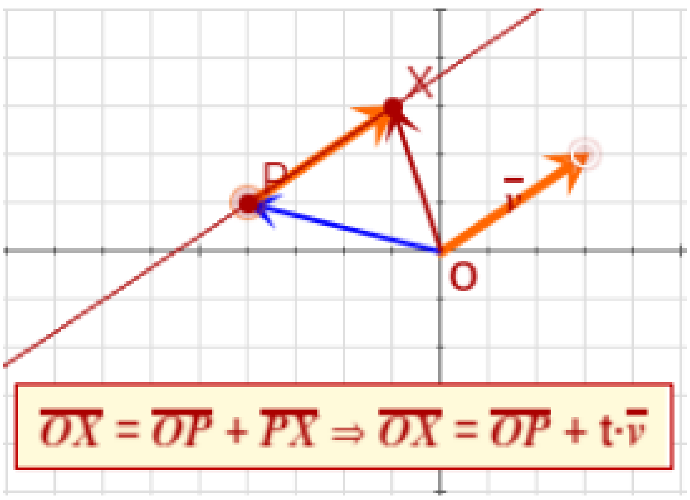
$$Ax + By + C = 0$$

Ecuación Explícita

$$y = mx + n$$

Ecuación de la circunferencia

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$



Problemas de Incidencia

- Secantes si tienen un único punto en común. Tienen distinta dirección y distinta pendiente.
  - $\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$
- Paralelas si no tienen ningún punto en común. Tienen la misma dirección y la misma pendiente pero diferente ordenada en el origen.
  - $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$
- Coincidentes si tienen todos sus puntos comunes. Tienen la misma pendiente y la misma ordenada en el origen.
  - $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$

Recta paralela a otra por un punto

Dos Rectas son paralelas si tienen la misma dirección y por tanto la misma pendiente

Para escribir la ecuación de una recta paralela a otra por un punto P, bastará tomar este punto y el vector direccional, o la pendiente según convenga, de esta otra.

Recta perpendicular a otra por un punto

Dos rectas son perpendiculares si lo son sus vectores direccionales y por tanto su producto escalar es 0.

Si $\overline{v} = (v_x, v_y)$ es el vector direccional de una recta, el de una perpendicular es $\overline{v} = (v_x, v_y)$

En cuanto a las pendientes, si m es la pendiente de una recta y m' la de una perpendicular:

$$m = \frac{v_y}{v_x} \Rightarrow m' = \frac{-v_x}{v_y} = \frac{-1}{m}$$