北京交通大学 2016 年非数学专业大学生数学竞赛试题

（2016 年 6 月 25 日晚 7：00—9：30）

学院与班级__________ 学号___________ 姓名____________ 联系方式________

一、填空题（每小题 6 分，满分 30 分）

1．极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{\cos\frac{\pi}{2n}}{n^2+1}+\dfrac{\cos\frac{2\pi}{2n}}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{\cos\frac{n\pi}{2n}}{n^2+n}\right)$=_________________ 。

2．设区间 $(0,+\infty)$ 上的函数 $u(x)$ 定义为 $u(x)=\int_0^{+\infty} e^{-xt^2}dt$，则 $u(x)$ 的初等表达式为______________。

3．曲面 $z=x^2+y^2+1$ 在点 $(1,-1,3)$ 处的切平面与曲面 $z=x^2+y^2$ 所围成的体积为_________________ 。

4．计算定积分 $\int_{-1}^{1}\dfrac{1}{(e^x+1)(1+x^2)}dx=$_______________。

5．设 $f(x)=\begin{cases}\sin x & 0\le x\le 2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$，D 是全平面，则 $\iint\limits_D f(x)f(y-x)dxdy=$_______________。

二、(本题满分 10 分)设 $f(x,y)=Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F$，其中 $AC-B^2>0$，A,B,C,D,E,F 是常数，求证：$f(x,y)$ 有唯一极值 $\dfrac{1}{AC-B^2}\begin{vmatrix}A & B & D\\ B & C & E\\ D & E & F\end{vmatrix}$。

三、（本题满分 10 分）设 $f(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上连续函数，且 $f(0)=0, f'(0)=A$ 。如果 $g(x,y)=\int_0^y f(xt)dt$ 关于 x 的偏导数存在，求 $\dfrac{\partial g}{\partial x}$，并证明 $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ 在 x =0 处关于 x 连续。

四、(本题满分 10 分）设 $f(x)$ 在 x_0 附近有各阶导数且 $f''(x_0)\neq 0$，对 $\forall h\in R$，$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0+\theta h)h$ 成立，求证：$\lim\limits_{h\to 0}\theta=\dfrac{1}{2}$。

五、(本题满分 10 分）计算曲面积分 $I=\oiint\limits_{\Sigma}\dfrac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$，其中 Σ 为任意不经过原点的封闭曲面的外侧。

六、(本题满分 10 分）求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n^3+2}{(n+1)!}(x-1)^n$ 的收敛域与和函数。

七、（本题满分 10 分）设u在$L:r=1+\cos\theta$所围闭区域D上有二阶连续偏导数，且$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=1$，试证：$\int_L \frac{\partial u}{\partial n}ds=|D|$，其中$\frac{\partial u}{\partial n}$是$u$沿$D$的边界曲线$L$的外法线方向的方向导数，$L$方向为逆时针方向，$|D|$为区域$D$的面积，并计算此曲线积分的值。

八、（本题满分 10 分）设数列$v_1=1,v_2,v_3,\cdots$由公式$2v_{n+1}=v_n+\sqrt{v_n^2+u_n}$决定，其中$u_n$是正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$的一般项.证明：级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛的充分必要条件是数列$\{v_n\}$收敛。

参考答案：

一、1．解：$\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\cos\frac{i\pi}{2n}\le n\left(\frac{\cos\frac{\pi}{2n}}{n^2+1}+\frac{\cos\frac{2\pi}{2n}}{n^2+2}+\cdots+\frac{\cos\frac{n\pi}{2n}}{n^2+n}\right)\le\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\cos\frac{i\pi}{2n}$

而$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\cos\frac{i\pi}{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{\pi}\frac{\pi}{2n}\sum_{i=1}^{n}\cos\frac{i\pi}{n}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx=\frac{2}{\pi}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\cos\frac{i\pi}{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{\pi}\frac{n}{n+1}\frac{\pi}{2n}\sum_{i=1}^{n}\cos\frac{i\pi}{n}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx=\frac{2}{\pi}$，故

$\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\frac{\cos\frac{\pi}{2n}}{n^2+1}+\frac{\cos\frac{2\pi}{2n}}{n^2+2}+\cdots+\frac{\cos\frac{n\pi}{2n}}{n^2+n}\right)=\frac{2}{\pi}$。

2．解：由于$u^2(x)=\int_0^{+\infty}e^{-xt^2}dt\int_0^{+\infty}e^{-xs^2}ds=\iint\limits_{D:s\ge0,t\ge0}e^{-x\left(s^2+t^2\right)}dsdt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{+\infty}e^{-xr^2}rdr=\frac{\pi}{4x}$，

故$u(x)=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$。

3．**解**： 曲面$z=x^2+y^2+1$在点$(1,-1,3)$处的切平面：

$2(x-1)-2(y+1)-(z-3)=0$，即$z=2x-2y-1$。

$\begin{cases}z=x^2+y^2\\z=2x-2y-1\end{cases}\Rightarrow D:(x-1)^2+(y+1)^2\le1$，于是所求体积

$V=\iint\limits_D\left[(2x-2y-1)-\left(x^2+y^2\right)\right]dxdy$，令$\begin{cases}x-1=r\cos\theta\\y+1=r\sin\theta\end{cases}$，

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(1-r^2)rdr=\frac{\pi}{2}$。

4、解：$\int_{-1}^{1}\frac{1}{(e^x+1)(1+x^2)}dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}[\frac{1}{(e^x+1)(1+x^2)}+\frac{1}{(e^{-x}+1)(1+x^2)}]dx$

$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\arctan x\,|_{-1}^{1}=\frac{\pi}{4}\text{。}$$

5. 解: D 是全平面，则

$$\iint_D f(x)f(y-x)dxdy=\int_0^2 dx\int_x^{x+2}\sin x\sin(y-x)dy$$

$$=\int_0^2\sin x(1-\cos 2)dx=(1-\cos 2)^2$$

二、证明： $f_x=2Ax+2By+2D, f_y=2Bx+2Cy+2E$，令 $f_x=0, f_y=0$，注意到 $AC-B^2>0$，则方程组有唯一解 (x_0,y_0)。由多元函数极值判别法知此驻点一定为极值点。

故函数的极值为 $f(x_0,y_0)=Ax_0^2+2Bx_0y_0+Cy_0^2+2Dx_0+2Ey_0+F$

注意到极值点 (x_0,y_0) 满足方程 $\begin{cases}Ax_0+By_0+D=0 & (1)\\ Bx_0+Cy_0+E=0 & (2)\end{cases}$

一方面由克莱姆法则得到 $x_0=-\dfrac{\begin{vmatrix}D & B\\ E & C\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}A & B\\ B & C\end{vmatrix}}, y_0=-\dfrac{\begin{vmatrix}A & D\\ B & E\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}A & B\\ B & C\end{vmatrix}}$

$(1)\times x_0$，得到 $Ax_0^2+Bx_0y_0=-Dx_0$

$(2)\times y_0$，得到 $Bx_0y_0+Cy_0^2=-Ey_0$

于是 $f(x_0,y_0)=Dx_0+Ey_0+F=D\dfrac{\begin{vmatrix}B & D\\ C & E\end{vmatrix}}{AC-B^2}+E\dfrac{\begin{vmatrix}D & A\\ E & B\end{vmatrix}}{AC-B^2}+F$

$$=\frac{1}{AC-B^2}\left(D\begin{vmatrix}B & D\\ C & E\end{vmatrix}+E\begin{vmatrix}D & A\\ E & B\end{vmatrix}+F\begin{vmatrix}A & B\\ B & C\end{vmatrix}\right)$$

$$=\frac{1}{AC-B^2}\begin{vmatrix}A & B & D\\ B & C & E\\ D & E & F\end{vmatrix}\text{。}$$

三、解 当 $x\neq 0$ 时，$g(x,y)=\int_0^y f(xt)dt=\frac{1}{x}\int_0^{xy}f(u)du$，有

$$\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{f(xy)xy-\int_0^{xy}f(u)du}{x^2}$$

当 $x=0$

$$\frac{\partial g}{\partial x}\Big|_{x=0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}\int_0^{xy}f(u)du-g(0,y)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{xy}f(u)du}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(xy)y}{2x}$$

由已知条件有 $f(0)=0$。所以

$$\frac{\partial g}{\partial x}\Big|_{x=0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(xy)-f(0)}{xy-0}\frac{y^2}{2}=\frac{y^2}{2}f'(0)=\frac{y^2}{2}A \quad （y\neq 0）$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}\Big|_{x=0}=0 \quad (y=0)$$

所以 $\frac{\partial g}{\partial x}\Big|_{x=0}=\frac{y^2}{2}A$。

$$\lim_{x\to 0}\frac{\partial g}{\partial x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(xy)xy-\int_0^{xy}f(u)du}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{[f(xy)-f(0)]y^2}{xy}-\frac{\int_0^{xy}f(u)du}{x^2}$$

$$=y^2f'(0)-\lim_{x\to 0}\frac{f(xy)y}{2x}=\frac{y^2}{2}A=\frac{\partial g}{\partial x}\Big|_{x=0} \quad （y\neq 0）$$

$y=0$时，显然有$\lim_{x\to 0}\frac{\partial g}{\partial x}=0=\frac{\partial g}{\partial x}\Big|_{x=0}$。得证。

四、 **证明**：将$f(x)$展成2阶带皮亚诺余项的泰勒公式：

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+\frac{f''(x_0)}{2!}h^2+o(h^2), \qquad （1）$$

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0+\theta h)h \quad . \qquad （2）$$

$(1)-(2)$得：

$$f'(x_0+\theta h)h=f'(x_0)h+\frac{f''(x_0)}{2!}h^2+o(h^2),$$

两边同除以h^2，并求极限得

$$\lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+\theta h)-f'(x_0)}{h}=\frac{f''(x_0)}{2!}+\lim_{h\to 0}\frac{o(h^2)}{h^2},$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+\theta h)-f'(x_0)}{\theta h}\lim_{h\to 0}\theta=\frac{f''(x_0)}{2!}+0,$$

$$f''(x_0)\lim_{h\to 0}\theta=\frac{f''(x_0)}{2},$$

又$\because$ $f^{(n+1)}(x_0)\neq 0$， $\therefore \lim_{h\to 0}\theta=\frac{1}{2}$。

五、**解**：令 $P=\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$，$Q=\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$，$R=\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$。

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=\frac{3\left(x^2+y^2+z^2\right)-3x^2-3y^2-3z^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{5}{2}}}=0.$$

（1）原点不在封闭曲面所围的区域内，则由高斯公式知，所求积分 $I=0$；

（2）原点在封闭曲面所围的区域内，

作辅助曲面 Σ_1 为球面 $x^2+y^2+z^2=\varepsilon^2$ 的外则，其中 $0<\varepsilon<1$。则

$$I=\oiint\limits_{\Sigma-\Sigma_1}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}+\iint\limits_{\Sigma_1}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}},$$

其中 $\oiint\limits_{\Sigma-\Sigma_1}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\iiint\limits_{\Omega_1}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

$$=\iiint\limits_{\Omega_1}\frac{3\left(x^2+y^2+z^2\right)-3x^2-3y^2-3z^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{5}{2}}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$$

（Ω_1 为 Σ 与 Σ_1 之间的空间区域）。所以

$$I=\iint\limits_{\Sigma_1}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\varepsilon^3}\iint\limits_{\Sigma_1}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^3}\iint\limits_{\Sigma_1}3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{1}{\varepsilon^3}\cdot 3\cdot\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3=4\pi.$$

六、解：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3+2}{(n+2)(n^3+2)}=0$，故收敛半径 $R=+\infty$，从而收敛域为 $(-\infty,+\infty)$。**注意到**

$$\frac{n^3+2}{(n+1)!}=\frac{(n+1)n(n-1)}{(n+1)!}+\frac{(n+1)}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+1)!}=\frac{1}{(n-2)!}+\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}\quad (n\geq 2),$$

于是 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n^3+2}{(n+1)!}(x-1)^n=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!}(x-1)^n+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(x-1)^n+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}(x-1)^n$

$=(x-1)^2e^{x-1}+e^{x-1}+\frac{1}{x-1}(e^{x-1}-1)$，（$x\neq 1$），当 $x=1$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n^3+2}{(n+1)!}(x-1)^n=2$.

七、解：$\int\limits_L\frac{\partial u}{\partial n}ds=\int\limits_L(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta)ds$，

其中 $\vec{n}=\{\cos\alpha,\cos\beta\}$ 是 L 的外法线的方向余弦，

则 $\vec{T}=\{-\cos\beta,\cos\alpha\}$ 是对应的切线的方向余弦，

$$dx=ds\cdot(-\cos\beta),\ dy=ds\cdot\cos\alpha,$$

$$\therefore\int\limits_L\frac{\partial u}{\partial n}ds=\int\limits_L\frac{\partial u}{\partial x}dy-\frac{\partial u}{\partial y}dx=\iint\limits_D(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})dxdy=\iint\limits_D dxdy=|D|$$

$$= 2\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{1+\cos\theta} r dr = \int_0^{\pi} (1+\cos\theta)^2 d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} (1+2\cos\theta + \frac{1+\cos 2\theta}{2}) d\theta = \frac{3\pi}{2}\text{。}$$

八、由公式 $2v_{n+1} = v_n + \sqrt{v_n^2 + u_n}$，$v_1 = 1$ 及 $u_n > 0$ 用数学归纳法可证得 $v_n > 1$，同时也可得到 $v_{n+1}(v_{n+1} - v_n) = \frac{u_n}{4}$，从而 $v_{n+1} > v_n > 1$，又

$v_{n+1}^2 - v_n^2 = (v_{n+1} + v_n)(v_{n+1} - v_n) > v_{n+1}(v_{n+1} - v_n)$，这样就有

$0 < v_{n+1} - v_n < \frac{u_n}{4} < v_{n+1}^2 - v_n^2$.

必要性：由 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，根据比较判别法知，$\sum_{n=1}^{\infty} (v_{n+1} - v_n)$ 收敛，故其前 n 项部分和 S_n 极限存在，记 $\lim_{n\to\infty} S_n = A$．而 $S_n = (v_2 - v_1) + (v_3 - v_2) + \cdots + (v_{n+1} - v_n) = v_{n+1} - v_1$，故 $\lim_{n\to\infty} v_{n+1} = A + 1$.即数列 $\{v_n\}$ 收敛.

充分性：由数列 $\{v_n\}$ 收敛，记 $\lim_{n\to\infty} v_n = B$，设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (v_{n+1}^2 - v_n^2)$ 的前 n 项部分和为 V_n，则 $V_n = (v_2^2 - v_1^2) + (v_3^2 - v_2^2) + \cdots + (v_{n+1}^2 - v_n^2) = (v_{n+1}^2 - v_1^2)$，$\lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty} (v_{n+1}^2 - 1) = B^2 - 1$，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (v_{n+1}^2 - v_n^2)$ 收敛，由比较判别法，正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛。