北 京 交 通 大 学 考 试 试 题（A卷）

课程名称：概率论与数理统计　　学年学期：2016—2017 学年第 2 学期

课程编号：73L168Q　开课学院：电子信息工程　出题教师：《概率》课程组

学生姓名：____________　学号：_____________　任课教师：____________

学生学院：____________　班级：_____________

题　号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
得　分										
阅卷人										

一. 选择简算题（32 分，每题 4 分）

1. A 和 B 是对立事件，A 和 C 是互斥事件，则必有(**D**)

   (A) $A\subset B$　(B) $A\subset C$　(C) $B\subset C$　(D) $C\subset B$

2. 设随机变量 X，Y，Z 相互独立，则下列变量组必定相互独立的是(B)

   (A) $X^2-Z,\ Y,\ Z$　　(B) $\cos(X),\ e^{Y+Z}$

   (C) $Z^2+Y^2,\ \sin(X+Z)$　　(D) $X+3Y,\ Y-2Z$.

3. $f(x)$，$g(x)$ 为概率密度函数，则一**定**符合概率密度函数性质的是(C)

   (A) min(f(x), g(x))

   (B) 0.5f(x)+0.5max(f(x), g(x))

   (C) 3f(x)-g(x)

   (D) 0.1f(x)+0.9g(x)

4. 设 X 服从参数为 $\theta=20$ 的指数分布，则 D(X) = 400 .

5. 随机变量 X，Y 满足 D(X)≠0，D(Y)≠0. 下列条件中与“X，Y 不相关”不等价的是 (A)

   (A) E(X+Y) = E(X) + E(Y)

   (B) E(XY) = E(X)E(Y)

   (C) D(X+Y) = D(X) + D(Y)

   (D) Cov(X,Y) = 0

6. 设 X_1,X_2,X_3,X_4 是来自正态总体 $N(0,1)$ 的样本，令 $Y=(X_1+X_2)^2+(X_3-X_4)^2$,

   则当 $C=$ 0.5 时 $CY\sim\chi^2(2)$。

7. 设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 其中 μ **未知**，σ^2 **已知**，X_1,X_2,X_3 样本，则下列选项中**不是**统计

量的是(C)

(A) $X_1+X_2-X_3$ (B) $\min\{X_1,X_2,X_3\}$ (C) $X_1-\mu$ (D) $\sum_{i=1}^{3}\frac{X_i^2}{\sigma^2}$

8. 无论服从何种分布，总体方差的一个无偏估计是 样本方差 .

二. 证明题（18 分，每题 9 分）

1. 设 X_1,X_2 是来自总体 $N(0,\sigma^2)$ 的样本，试求 $Y=\left(\frac{X_1+X_2}{X_1-X_2}\right)^2$ 服从 $F(1,1)$ 分布.

（提示 $F(n_1,n_2)=\frac{U/n_1}{V/n_2}$, $U\sim\chi^2(n_1), V\sim\chi^2(n_2)$，其中 U 与 V 相互独立）

解:

X_1,X_2是来自总体$N(0,\sigma^2)$的样本，有

$$X_1+X_2\sim N(0,2\sigma^2),\frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}\sigma}\sim N(0,1)$$

$$X_1-X_2\sim N(0,2\sigma^2),\frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\sigma}\sim N(0,1)$$

由正态分布的性质**(X_1+X_2,X_1-X_2)的联合分布是二元正态分布**

$$Cov(X_1+X_2,X_1-X_2)=D(X_1)-D(X_2)=0,$$

所以X_1+X_2与X_1-X_2相互独立。

由 F 分布的定义

$$Y=\left(\frac{X_1+X_2}{X_1-X_2}\right)^2=\frac{\left(\frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2}{\left(\frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2}\sim F(1,1)。$$

2. 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2),(\sigma>0)$. 从该总体中抽取 $2n$ 个样本 $X_1,X_2,\cdots,X_{2n}(n\ge 2)$，其对应的样本均值为 $\bar{X}=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}X_i$，试证：统计量 $Z=\sum_{i=1}^{n}\left(X_i+X_{n+i}-2\bar{X}\right)^2$ 的数学期望 $E(Z)=2(n-1)\sigma^2$.

解：因为$E(X_i)=\mu, E(\bar{X})=\mu, D(\bar{X})=\dfrac{\sigma^2}{2n}$，则$E(X_i+X_{n+i}-2\bar{X})=0$，且

$$\begin{aligned}
&E\left[(X_i+X_{n+i}-2\bar{X})^2\right]=D(X_i+X_{n+i}-2\bar{X})\\
&=D(X_i+X_{n+i})+D(-2\bar{X})-2Cov\left(X_i+X_{n+i},-2\bar{X}\right)\\
&=\sigma^2+\sigma^2+4\frac{\sigma^2}{2n}-2Cov\left(X_i,-2\bar{X}\right)-2Cov\left(X_{n+i},-2\bar{X}\right)\\
&=2\sigma^2+2\frac{\sigma^2}{n}-4\frac{\sigma^2}{2n}-4\frac{\sigma^2}{2n}=\frac{2(n-1)}{n}\sigma^2
\end{aligned}$$

$$E(Z)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i+X_{n+i}-2\bar{X})=\sum_{i=1}^{n}\frac{2(n-1)}{n}\sigma^2=2(n-1)\sigma^2$$

三. 计算题（共 50 分）

1. 甲、乙、丙三台机器生产螺丝钉，它们的产量各占 25%，35%，40%，并且在各自的产品中，废品各占 5%，4%，2%，从它们的产品中任意取出一个恰好是废品，问此废品是甲、乙、丙生产的概率各为多少？（8 分）

解：令A_1,A_2,A_3表示分别为甲、乙、丙三台机器，$B=\{$所取产品为废品$\}$，

已知$P\{A_1\}=0.25, P\{A_2\}=0.35, P\{A_3\}=0.40$，

$$P\{B|A_1\}=0.05, P\{B|A_2\}=0.04, P\{B|A_3\}=0.02$$

$$P\{B\}=P\{B|A_1\}P\{A_1\}+P\{B|A_2\}P\{A_2\}+P\{B|A_3\}P\{A_3\}=0.0345$$

则$P\{A_1|B\}=P\{B|A_1\}P\{A_1\}/P\{B\}=\dfrac{25}{69}\approx 0.3623$；

$P\{A_2|B\}=P\{B|A_2\}P\{A_2\}/P\{B\}=\dfrac{28}{69}\approx 0.4058$；

$P\{A_3|B\}=P\{B|A_3\}P\{A_3\}/P\{B\}=\dfrac{16}{69}\approx 0.2319$。

2. 设随机变量X的概率密度函数为$f(x)=\begin{cases} ax^b, & 0<x<1 \\ 0, & 其它 \end{cases}$，且$P(X\le 1/2)=1/8$，

求：（1）常数a,b;

（2）设$Y=e^{2X}$，求Y的概率密度函数$f_Y(y)$.（9 分）

解：（1）由密度函数的性质

$$\begin{cases} 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^1 ax^b dx = 1 \\ 1/8 = P(X \le 1/2) = \int_0^{1/2} ax^b dx \end{cases}$$

可得 $a = 3, b = 2$ 。

（2）由题意

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{3}{8y} \ln^2 y, & 1 < y < e^2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

3. 已知二维连续型随机变量 (X, Y) 的联合概率密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} 6xy, & 0 < y < 1, y^2 < x < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases},$$

试求：（1）求概率 $P(X \le Y)$；

（2）求出边缘密度函数 $f_X(x), f_Y(y)$，并判断 X, Y 是否相互独立。（9 分）

解：（1）由题意

$$P(X \le Y) = \iint_{\{x \le y\}} f(x, y)dxdy$$

$$= \int_0^1 dy \int_{y^2}^{y} 6xydx = \int_0^1 3(y^3 - y^5)dy$$

$$= \frac{1}{4}$$

（2）由题意

$$f_X(x) = \begin{cases} \int_0^{\sqrt{x}} 6xydy, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} = \begin{cases} 3x^2, & 0 < x < 1 \\ 0, \text{其它} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \int_{y^2}^{1} 6xydx, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} = \begin{cases} 3y(1 - y^4), & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

因 $f(x, y) \ne f_X(x) f_Y(y)$，故 X, Y 不独立。

4. 设二位随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}A\sin(x+y), & 0\le x\le\frac{\pi}{2},0\le y\le\frac{\pi}{2}\\ 0, & 其它\end{cases}$$

（1） 求系数 A；

（2） 求 E(X), E(Y), D(X), D(Y);

（3） 求 ρ_{XY}。(8 分)

解：（1）由题意，X 的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1\\ 0, & 其它\end{cases}$$

于是

$$f(x,y)=f_X(x)*f_{Y|X}(y|x)==\begin{cases}x,\ 0\le x\le 1,0<y<\frac{1}{x}\\ 0,\ x\ge 0\end{cases}$$

（2） $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dx=\begin{cases}\int_0^1 x\,dx=\frac{1}{2},0<y<1\\ \int_0^y x\,dx=\frac{1}{2y^2},1\le y<\infty\\ 0,其它\end{cases}$

（3）$P(X>Y)=\int_0^1\int_0^x x\,dy\,dx=\int_0^1 x^2\,dx=\frac{1}{3}$

5. 设有某天文学家试图观测某星球与他所在天文台的距离 D（单位：光年），他计划做 n 次独立的观测 $X_1,X_2,\ldots,X_n$，设这 n 次独立观测的数学期望 $E(X_i)$ =D, $D(X_i)$ =4（$i=1,2,\ldots,n$），现天文学家用 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 作为 D 的估计，为使对 D 的估计的精度在 ±0.25 光年之间的概率大于 0.98。试问这位天文学家至少要做多少次独立的观测？（提示 $\Phi(2.33)\ge0.99$）.（8 分）

解：题意：由 $P\left\{\left|\overline{X_n}-D\right|\le 0.25\right\}\ge 0.98,$ 求最小 n。

因为做的实验时 n 次独立重复观测，所以可以认为 $X_1, X_2, ..., X_n$ 独立同分布，且

$$E(\overline{X}) = D,\quad D(\overline{X}) = \frac{4}{n}$$

由中心极限定理可知：

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{\text{近似}} N(D, \frac{4}{n})$$

于是

$$P\left\{\left|\overline{X_n}-D\right|\le 0.25\right\}=P\left\{\frac{\left|\overline{X_n}-D\right|}{2/\sqrt{n}}\le \frac{0.25}{2/\sqrt{n}}\right\}\approx 2\Phi(\frac{0.25}{2/\sqrt{n}})-1\ge 0.98,$$

$$\Phi(\frac{0.25}{2/\sqrt{n}})\ge 0.99,\quad \frac{0.25}{2/\sqrt{n}}=2.33,$$

得 n=348。

6. 设总体 X 的概率密度为

$$f(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{x}{\theta^2}e^{-\frac{x}{\theta}}, x>0\\ 0, x\le 0\end{cases}$$，其中 $\theta>0$ 未知，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为 X 的样本。

试求 θ 的极大似然估计量 $\hat{\theta}$，并证明 $\hat{\theta}$ 为 θ 的无偏估计量。（8 分）

解：（1）确定似然函数

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{X_i}{\theta^2}\exp(-\frac{X_i}{\theta})\right]=\left(\prod_{i=1}^{n}X_i\right)\theta^{-2n}\exp\left(-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)$$

则 $\ln(L(\theta))=\ln\left(\prod_{i=1}^{n}X_i\right)-2n\ln(\theta)-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}X_i$

令 $\dfrac{\partial\ln(L(\theta))}{\partial\theta}=0,\ \Rightarrow\ -\dfrac{2n}{\theta}+\dfrac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}X_i=0;$

得 $\hat{\theta} = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{\bar{X}}{2}$ 为 θ 的极大似然估计量。

（2）由

$$E(\hat{\theta}) = \frac{1}{2}E(\bar{X}) = \frac{1}{2}E(X) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,\theta)dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty} x\frac{x}{\theta^2}e^{-\frac{x}{\theta}}dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty} t^2 e^{-t}dx = \frac{\theta}{2}\Gamma(3) = \theta$$

四. 北 京 交 通 大 学 考 试 答 题 纸

课程名称：________________　　学院：_____________　　班级：______________

学生姓名：________________　　学号：______________

题　号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
得　分										
阅卷人										