北 京 交 通 大 学 考 试 试 题

课程名称：概率论与数理统计　学年学期：2017—2018 学年第 2 学期

课程编号：10L240Q　开课学院：电子信息工程　出题教师：课程组

学生姓名：________　学号：________　任课教师：________

学生学院：________　班级：________

题　号	一	二 (1)	二 (2)	二 (3)	二 (4)	二 (5)	二 (6)	二 (7)		总分
得　分										
阅卷人										

一、　选择简算题（24 分，每题 4 分）

1. $P(A\bar{B})=P(A)-P(B)$ 成立的充要条件是某事件的概率为 0，这个事件是（ B ）。

(A) AB　　(B) $\bar{A}B$　　(C) $A\bar{B}\cup\bar{A}B$　　(D) $AB\cup\bar{A}\bar{B}$

2. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$，另一随机变量 $Y=aX$，$a>0$. 则 Y 的概率密度 $g(y)=($ D $)$。

(A) $af(ay)$　　(B) $af\left(\frac{y}{a}\right)$　　(C) $\frac{1}{a}f(ay)$　　(D) $\frac{1}{a}f\left(\frac{y}{a}\right)$

3. 某种设随机变量 (X,Y) 服从二维标准正态分布，且 X 和 Y 不相关，$f_X(x), f_Y(y)$ 分别表示 X 和 Y 的概率密度，则在 $Y=y$ 的条件下，X 的条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)=$ $f_X(x)$。

4. 设随机变量 X 的方差为 3，则由切比雪夫不等式可以估计 $P\{|X-E(X)|\geq 2\}\leq$ 3/4。

5. 已知 X 服从参数为 λ 的泊松分布，λ 未知，X_1,X_2,X_3 是简单随机样本，则下列不是统计量的是(**B**):

(A) X_1+X_2　　(B) $\lambda(X_1X_2X_3)$　　(C) $X_1X_2X_3$　　(D) $X_1^2+X_2^2+X_3^2$

6. $X_1,\ldots,X_n$ 是来自总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本，则对 μ 的最佳估计是 $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，对 σ^2 的一个无偏估计是 $\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\bar{X})^2}{n-1}$，对 σ^2 的最大似然估计是 $\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\bar{X})^2}{n}$。

二、　计算题（76 分）

1. （12 分）有人要赶往机场乘坐飞机，他乘自驾车、公交车、地铁、出租车的概率分别是 0.1、0.2、0.3、0.4。如果他乘自驾车、公交车、地铁、出租车去机场，迟到的概率分别为 0.2、0.1、0.02、0.15，结果他未迟到，试通过计算说明乘坐哪种交通工具的概率最高，该概率值是多少？

解：令 A_1、A_2、A_3 和 A_4 分别表示自驾车、公交车、地铁和出租车，B 表示迟到 ---（2 分）

由 Bayes 公式得：

$$P\left(A_1\middle|\bar{B}\right)=\frac{P(A_1)P\left(\bar{B}\middle|A_1\right)}{P(A_1)P\left(\bar{B}\middle|A_1\right)+P(A_2)P\left(\bar{B}\middle|A_2\right)+P(A_3)P\left(\bar{B}\middle|A_3\right)+P(A_4)P\left(\bar{B}\middle|A_4\right)}$$

$$=\frac{0.1\times(1-0.2)}{0.1\times(1-0.2)+0.2\times(1-0.1)+0.3\times(1-0.02)+0.4\times(1-0.15)}=0.089$$ ---（2 分）

$$P\left(A_2\middle|\bar{B}\right)=\frac{P(A_2)P\left(\bar{B}\middle|A_2\right)}{P(A_1)P\left(\bar{B}\middle|A_1\right)+P(A_2)P\left(\bar{B}\middle|A_2\right)+P(A_3)P\left(\bar{B}\middle|A_3\right)+P(A_4)P\left(\bar{B}\middle|A_4\right)}$$

$$=\frac{0.2\times(1-0.1)}{0.1\times(1-0.2)+0.2\times(1-0.1)+0.3\times(1-0.02)+0.4\times(1-0.15)}=0.201$$ ---（2 分）

$$P\left(A_3\middle|\bar{B}\right)=\frac{P(A_3)P\left(\bar{B}\middle|A_3\right)}{P(A_1)P\left(\bar{B}\middle|A_1\right)+P(A_2)P\left(\bar{B}\middle|A_2\right)+P(A_3)P\left(\bar{B}\middle|A_3\right)+P(A_4)P\left(\bar{B}\middle|A_4\right)}$$

$$=\frac{0.3\times(1-0.02)}{0.1\times(1-0.2)+0.2\times(1-0.1)+0.3\times(1-0.02)+0.4\times(1-0.15)}=0.329$$ ---（2 分）

$$P\left(A_4\middle|\bar{B}\right)=\frac{P(A_4)P\left(\bar{B}\middle|A_4\right)}{P(A_1)P\left(\bar{B}\middle|A_1\right)+P(A_2)P\left(\bar{B}\middle|A_2\right)+P(A_3)P\left(\bar{B}\middle|A_3\right)+P(A_4)P\left(\bar{B}\middle|A_4\right)}$$

$$=\frac{0.4\times(1-0.15)}{0.1\times(1-0.2)+0.2\times(1-0.1)+0.3\times(1-0.02)+0.4\times(1-0.15)}=0.380$$ ---（2 分）

$$P\left(A_1\middle|\bar{B}\right)<P\left(A_2\middle|\bar{B}\right)<P\left(A_3\middle|\bar{B}\right)<P\left(A_4\middle|\bar{B}\right)$$

因此，乘坐出租车的概率最高，该概率值为 0.380。 ---（2 分）

2. （12 分）某种型号的电子元件的使用寿命 X（单位：小时）具有以下的密度函数：

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1000}{x^2} & x>1000\\ 0 & x\le 1000\end{cases}.$$

1) 求某只电子元件的使用寿命大于 1500 小时的概率；
2) 已知某只电子元件的使用寿命大于 1500 小时，求该元件的使用寿命大于 2000 小时的概率。

解：⑴ 设 $A=\{电子元件的使用寿命大于1500小时\}$， ---（2 分）

则 $P(A)=P\{X>1500\}=\int_{1500}^{+\infty}p(x)dx=\int_{1500}^{+\infty}\frac{1000}{x^2}dx=-\frac{1000}{x}\Big|_{1500}^{+\infty}=\frac{2}{3}$. ---（2 分）

(2) 设 $B=\{$电子元件的使用寿命大于2000小时$\}$，

则所求概率为 $P(B|A)$. ---（2 分）

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P\{X>1500,\quad X>2000\}}{P(A)}=\frac{P\{X>2000\}}{P(A)}.$$ ---（2 分）

而 $P\{X>2000\}=\int_{2000}^{+\infty}p(x)dx=\int_{2000}^{+\infty}\frac{1000}{x^2}dx=-\frac{1000}{x}\Big|_{2000}^{+\infty}=\frac{1}{2}$, ---（2 分）

所以 $P(B|A)=\dfrac{P\{X>2000\}}{P(A)}=\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}}=\dfrac{3}{4}$. ---（2 分）

3. （14 分）设二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度函数为：

$$f(x,y)=\begin{cases}1, 0<x<1, 0<y<2x\\ 0, \text{其他}\end{cases}$$

1) 求边缘密度 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$；

2) 求 $P\left\{Y\le\frac{1}{2}\mid X\le\frac{1}{2}\right\}$;

3) 令 $Z=2X-Y$，求变量 Z 的概率密度 $f_Z(z)$。

解：1) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^{2x}1dy, 0<x<1\\ 0, \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}2x, 0<x<1\\ 0, \text{其他}\end{cases}$; ---（3 分）

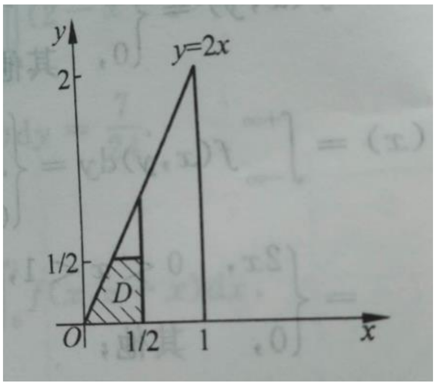
$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{\frac{y}{2}}^{1}1dx, 0<y<2\\ 0, \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}1-\frac{y}{2}, 0<x<1\\ 0, \text{其他}\end{cases}$; ---（3 分）

2) 由题意

$$P\left\{Y\le\frac{1}{2}\mid X\le\frac{1}{2}\right\}=P\left\{Y\le\frac{1}{2}, X\le\frac{1}{2}\right\}\Big/P\left\{X\le\frac{1}{2}\right\}$$

$$=\iint_{x\le\frac{1}{2}, y\le\frac{1}{2}}f(\mathrm{x,y})dydx\Big/\int_0^{\frac{1}{2}}2xdx=\iint_D 1dydx\Big/\int_0^{\frac{1}{2}}2xdx=\frac{3}{4}$$ ---（5 分）

区域 D 图形：



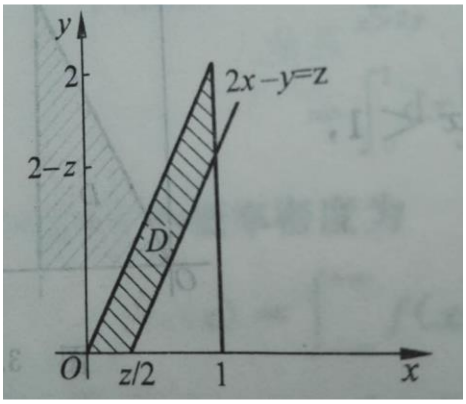
3) 由$Z=\mathbf{2}X-Y$，其分布函数为：

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{\mathbf{2}X-Y\le z\}$$
$$=\iint\limits_{\mathbf{2}x-y\le z} f(\mathrm{x},\mathrm{y})dydx=\begin{cases}\mathbf{0},\text{当}\mathrm{z}\le\mathbf{0}\\ \mathbf{1},\text{当}\mathrm{z}\ge\mathbf{2}\end{cases}$$；　　　　---2 分

当$\mathbf{0}<\mathrm{z}<\mathbf{2}$时，

$$F_Z(z)=\iint\limits_{\mathbf{2}x-y\le z} f(x,y)dydx=\iint\limits_{D} f(x,y)dydx=\mathbf{1}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\mathbf{2}-z)(\mathbf{1}-\frac{z}{\mathbf{2}})$$
$$=z-\frac{z^{\mathbf{2}}}{\mathbf{4}}$$　　　　---2 分

区域 D 图形：



故$f_Z(z)=\left[F_Z(z)\right]_z'=\mathbf{1}-\dfrac{z}{\mathbf{2}}$，所以$f_Z(z)=\begin{cases}\mathbf{1}-\dfrac{z}{\mathbf{2}},\mathbf{0}<z<\mathbf{2}\\ \mathbf{0},\text{其他}\end{cases}$；　　　　---1 分

4. （12 分）设二维随机变量(X,Y)的联合概率密度函数为：

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{6}{7}(x^2+\dfrac{1}{2}xy), 0<x<1, 0<y<2,\\ 0, \qquad\qquad \text{其他}\end{cases}$$

求：变量（X，Y）的协方差矩阵和相关系数。

解：$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\int_0^2\frac{6}{7}x(x^2+\frac{1}{2}xy)\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\frac{12}{7}x^3+\frac{6}{7}x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{5}{7},$

$$E(X^2)=\int_0^1\int_0^2\frac{6}{7}x^2(x^2+\frac{1}{2}xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{39}{70},$$

故 $D(X)=\frac{39}{70}-\left(\frac{5}{7}\right)^2=\frac{23}{490},$ ---（3 分）

因为$E(Y)=\int_0^1\int_0^2\frac{6}{7}y(x^2+\frac{1}{2}xy)\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\frac{8}{7},$

$$E(Y^2)=\int_0^1\int_0^2\frac{6}{7}y^2(x^2+\frac{1}{2}xy)\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\frac{34}{21},$$

故 $D(Y)=\frac{34}{21}-\left(\frac{8}{7}\right)^2=\frac{46}{147},$ ---（3 分）

$$E(XY)=\int_0^1\int_0^2\frac{6}{7}xy(x^2+\frac{1}{2}xy)\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\frac{17}{21},$$ ---(2 分）

故 $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$

$=\frac{17}{21}-\frac{5}{7}\times\frac{8}{7}=-\frac{1}{147},$ ---（2 分）

于是 (X,Y) 的协方差矩阵为 $\begin{pmatrix}\frac{23}{490} & -\frac{1}{147}\\ -\frac{1}{147} & \frac{46}{147}\end{pmatrix}.$ ---（2 分）

5. （12 分）某种汽车氧化氮的排放量的数学期望为 $E(X)=0.9\,g/km$，标准差为 $\sqrt{D(X)}=1.9\,g/km$，某汽车公司有这种小汽车 100 辆，以 $\overline{X}$ 表示这些车辆氧化氮排放量的算术平均，问当 L 为何值时 $\overline{X}>L$ 的概率不超过 0.01.（提示：$\Phi(2.33)=0.99$）

解：设以 $X_i\left(i=1,2,\cdots,100\right)$ 表示第 i 辆小汽车氧化氮的排放量，

则由已知条件 $E\left(X_i\right)=0.9$，$D\left(X_i\right)=1.9^2$ 得 ---（2 分）

$E\left(\overline{X}\right)=0.9$，$D\left(\overline{X}\right)=\frac{1.9^2}{100}$ ---（1 分）

各辆汽车氧化氮的排放量相互独立，故可以认为近似地有

$\overline{X}\sim N\left(0.9,\frac{1.9^2}{100}\right)$ ----（1 分）

需要计算的是满足：$P\left\{\overline{X}>L\right\}\le 0.01$ 的最小值 L.

由中心极限定理

$P\left\{\overline{X}>L\right\}=P\left\{\frac{\overline{X}-0.9}{0.19}>\frac{L-0.9}{0.19}\right\}\le 0.01$ ----（3 分）

L 应为满足：$1-\Phi\left(\frac{L-0.9}{0.19}\right)\ge 0.99=\Phi(2.33)$ 的最小值，即

$$\Phi\left(\frac{L-0.9}{0.19}\right)\ge 0.99=\Phi(2.33)$$ ---（3 分）

即 $\frac{L-0.9}{0.19}\ge 2.33$，故 $L\ge 0.9+0.19\times 2.33=1.3427$，

应取 $L=1.3427\,g/km$。 ---（2 分）

6. （14 分）设总体 X 的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\lambda^2 xe^{-\lambda x}, x>0\\ 0, \quad\quad 其他\end{cases}$，其中参数 $\lambda>0$ 且未知，

$X_1,X_2,...,X_n$ 是来自于总体 X 的简单随机样本，试分别求出参数 λ 的矩估计量和最大似然估计量。

解: $E(X)=\int_0^{+\infty}\lambda^2x^2e^{-\lambda x}dx=\frac{1}{\lambda}\int_0^{+\infty}(\lambda x)^2e^{-\lambda x}d(\lambda x)=\frac{2}{\lambda}$, ---（2 分）

由矩估计法，令 $E(X)$ 由 $\bar{X}$ 代替即，$\overline{X}=\frac{2}{\lambda}$, 则 λ 的矩估计量 $\hat{\lambda}=\frac{2}{\overline{X}}$. ---（4 分）

样本 $X_1,X_2,...,X_n$ 的观察值为 $x_1,x_2,...,x_n$，则似然函数为

$$L(\lambda)=\lambda^{2n}\prod_{i=1}^n x_ie^{-\lambda x_i}\text{, 则 }\ln L(\lambda)=\sum_{i=1}^n\ln x_i+2n\ln\lambda-\lambda\sum_{i=1}^n x_i$$ ---（4 分）

令 $\frac{d\ln L(\lambda)}{d\lambda}=\frac{2n}{\lambda}-\sum_{i=1}^n x_i=0$ ---（2 分）

得 $\lambda=\frac{2n}{\sum_{i=1}^n x_i}=\frac{2}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i}=\frac{2}{\overline{X}}$

所以则 λ 的最大似然估计量 $\hat{\lambda}=\frac{2}{\overline{X}}$ ---（2 分）