# 树

> 在KB-P329定义16.1下面提到，这一章的“回路”都会指简单或初级回路，所以后面很多地方课本上写的都是回路不是圈。但是我们不采取这样的方法，我们仍然使用圈（初级回路）这个称呼

# 定义、树判定的充要条件和树叶数量定理

## 定义

连通无圈的无向图就是无向树，简称树。每个连通分支都是树的无向图被称为森林

平凡图被称为平凡树。树中悬挂顶点（也就是度为1的点）被称为树叶；度数大于等于2的顶点被称为分支点

## 树判定的充要条件

注意这里是充要条件，所以这里既是树的性质，也是判断树的方法

设$G=<V,E>$是$n$阶$m$条边的无向图，则

1. $G$是树（也就是说$G$连通没有圈）
2. $G$中任意两点之间存在唯一的路径
3. $G$中无圈，且$m=n-1$
4. $G$连通，且$m=n-1$
5. $G$连通且每一条边都是桥
6. $G$中没有圈，但在任何两个不同顶点之间加一条新边之后所得图有唯一一个含新边的圈

这之中，<1>、<2>、<5>和<6>是很容易相互证明的，<3>和<4>的证明需要用到“$n$阶无向图连通则边数大于等于$n-1$”，并且都可以用归纳法证明，可以翻书查阅

<3><4>给出了一个树边和点的关系，这让树的度和也与点的数量直接相关，这在后面会经常用到

## 树叶数量定理

非平凡树至少有两个叶子结点

证明：对于$n$阶$(n\geq 2)$树，假设有$x$个叶子结点，则有$n-x$个分支点。根据叶子结点和分支点的定义，$x+2(n-x)\leq\sum d$，$\sum d$为度数和。由于$\sum d=2n-2$，所以$2n-x\leq 2n-2$，也就是$x\geq 2$

# 生成树

## 相关定义

对于无向图$G$，若$T \subseteq G$（也就是$T$是$G$的生成子图）且$T$是树，则称$T$是$G$的生成树。生成树并不一定唯一

若$e \in E(G)$且$e \in E(T)$，则称$e$是$T$的树枝。相对的若$e \in E(G)$但是$e \notin E(T)$，则称$e$是$T$的弦

称$T$的所有弦导出的子图为$T$的余树，记作$\overline{T}$。容易看出，$|E(\overline{T})| = m - n + 1$

注意，余树不是树，甚至不一定连通

## 生成树构造方法

定理：无向连通图一定存在生成树；有生成树的图一定是连通图

对于一张连通图$G_0$，生成树$T$的一种构造方法如下：

1. 如果$G_k$没有圈，那么$T = G_k$
2. 如果$G_k$有圈，设为$C_k$，选$\forall e \in E(C_k)$，另$G_{k+1} = G_k - \{e\}$

重复上面两个过程，一定可以得到树

这是因为，首先最后的图一定没有圈，其次删去圈上的边不会影响图的连通性，所以最后的图一定连通。连通无圈，那就是树了

## 生成树导出的点边数量关系

设$G$为$n$阶$m$条边的无向连通图，则$m \geq n - 1$

## 圈与弦

> 后面的讨论在老师的PPT中加了限定语，更好理解区分

下面都是对无向连通图$G = <V, E>$（$n = |V|, m = |E|$）和其某棵生成树$T$讨论

### 无向图的圈中一定有弦

$\forall C \subseteq G$，若$C$为圈，$E(C) \cap E(\overline{T}) \neq \varnothing$

如果圈中没有弦，那么圈的边一定在$T$中，这样$T$有圈，与$T$是树矛盾

### 弦连接在生成树上后产生唯一的圈

设$e'_1, e'_2, \cdots e'_{m-n+1}$是$T$对应的弦，$C_r$是弦$e'_i$和其他树枝构成的圈，其为$T$添加弦$e'_r$后产生的唯一的回路（根据树判定充要条件之<6>）

称$C_r$为$G$的对应弦$e'_r$的基本回路或基本圈，称$\{C_1, C_2, \cdots C_{n-m+1}\}$为$G$对应$T$的基本回路系统，称$m-n+1$为$G$的圈秩，记$\xi(G)$（读作"克西"）

注意$C_r$是由唯一的弦和$T$中其他边连接的，且"$T$中其他边"就是弦连接的两点在树上唯一的路径

$C_r$是回路，应该用路径的表示方法，也就是$e_4e_5e_6$这样的

## 边割集与树枝

下面都是对无向连通图$G=<V,E>$（$n=|V|, m=|E|$）和其某棵生成树$T$讨论

### 无向图的边割集中一定有生成树的树枝

$E' \subseteq E$，若$E'$是边割集，则$E' \cap E(T) \neq \varnothing$

证明和上面一样，都是反证

### 一条生成树的树枝与弦构成唯一的边割集

设$e_1, e_2, \cdots e_{n-1}$是$T$的边（也就是生成树的树枝），$S_i$是树枝$e_i$和其他弦构成的边割集，设$e_i$将树分割成两个子图$T_1$和$T_2$，则这个边割集应该分割$G$成$G[V(T_1)]$和$G[V(T_2)]$两部分，并且是唯一的

称$S_i$为$G$对应树枝$e_i$的基本割集，称$\{S_1, S_2, \cdots S_{n-1}\}$为$G$对应$T$的基本割集系统，称$n-1$为$G$的割集秩，记作$\eta(G)$（读作"依塔"）

这里基本割集的唯一性是这么证明的：假设我们选的树枝是$e$，其将树分割成$T_1$和$T_2$，根据定义，对应割集$S$不能再包括任何树枝了，这样我们知道，无论再选任何边，$T_1$里面的点一定是连通的，$T_2$里面的点也一定是连通的（很明显，如果不连通了一定删了$T$里面的边）。所以我们知道$S$会且只会将树分成$G[V(T_1)]$和$G[V(T_2)]$两部分，记作$G_1, G_2$。如果想要把$G$变成$G_1, G_2$两部分，我们有且仅有一种删法：删去$\forall v_1 \in G_1, v_2 \in G_2$的边$(v_1, v_2)$，也就是$S = \{(v_1, v_2) \mid \forall v_1 \in G_1, v_2 \in G_2\}$。我们很容易

证明$S$中只有一条树枝（如果有两条，就不满足树任意两点之间只有一条路径的性质了）

说起来还是很复杂的。。。如果能画个图就很方便了（~~可惜我懒的画~~）

# 树的枚举

建议：因为$n$阶树的边数确定，根据握手定理，其度总和也确定为$2n-2$，所以可以先枚举度数列，然后对每个度数列枚举。注意要保证连通无圈