符号约定等

符号约定部分不一定是考试时候允许使用的！

- 对于集合A，$|A|$表示集合的元素数量或者说大小
- $\mathcal{P}(A)$为A的幂集，另外幂集也可以使用2^A来表示
- 这里包括了关系部分的基础内容

集合论基础

一些概念

空集的理解

对于空集$\varnothing$

当出现$\varnothing \in A$时，表示集合A里有一个元素是空集，比如$A = \{\varnothing, \{B\}, C\}$

当出现$\varnothing \subseteq A$时，表示集合A有子集$\varnothing$，但集合A里面不一定有$\varnothing$这个元素

有序对、笛卡尔积、二元关系的理解

有序对：就是两个元素构成的对，注意这里的两个元素本身可以是集合，比如$<\varnothing, \{A\}>$就是一个有序对

笛卡尔积：一个在**集合**上的运算， 得到的是一个**由有序对构成的集合**

二元关系：**一个集合**，并且这个集合**要么是空集**，要么元素只有有序对

对于集合$A \times B$（别忘了这是一个集合），它的任何一个子集都可以被称为从A到B的二元关系

注意这与函数上要求$dom f = A$不同，这里的关系的元素的首项可以不包括A里面的某个元素

特别的，如果$A = B$，那么它的任何一个子集就可以被称为A上的二元关系

由二元关系和笛卡尔积的定义可以知：对于两个集合A和B，其上任何一个的二元关系一定是$\mathcal{P}(A \times B)$的一个元素（这个很重要），因此可以得知定义在A到B的二元关系的数量为：
$|\mathcal{P}(A \times B)| = 2^{|A \times B|} = 2^{|A| * |B|}$

由于笛卡尔积里的有序对可以看作两个集合元素的有顺序结合，所以有时候可以通过笛卡尔积判断集合的关系，但是一定要注意**特判空集**

逻辑与集合的关系

逻辑和集合是有关系的

首先集合命题之间的转换就是利用的逻辑，比如$A \subseteq B \Leftrightarrow A-B=\varnothing$（注意$A \subseteq B$和$A-B=\varnothing$是两个命题）

另外在判断集合相等的时候也可以使用逻辑的方式，比如$A \cup B$可以表示成$x \in A \cup B$，进而推导两个集合的相等关系（具体见“集合运算到逻辑运算的转换和应用”）

集合恒等式

大多数来自课本P100-101，基本和逻辑的类似，这里摘几个

包括了几个定义

一般集合的恒等式

公式名	内容
补交转换律	$A-B=A \cap \overline{B}$
德摩根律	$A-(B \cup C)=(A-B) \cap (A-C)$ $A-(B \cap C)=(A-B) \cup (A-C)$
对称差集定义	$A \oplus B=(A-B) \cup (B-A)$ 可以和“异或”类比，$A \oplus B$里只有A独有或者B独有的元素
对称差集的交换律	$A \oplus B=B \oplus A$ 实际上∪, ∩也具有交换律
对称差集的结合律	$(A \oplus B) \oplus C=A \oplus (B \oplus C)$ 实际上∪, ∩也具有结合律
对称差的自反性	$A \oplus A=\varnothing$ 类比异或，对称差也有自反性
广义交定义	对于集合$A=\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$，$\cap A=A_1 \cap A_2 \cap \cdots A_n$ 于剑班上没说这个（可能不会考）

笛卡尔积的恒等式

公式名	内容
笛卡尔积的分配律	$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$ $(B\cup C)\times A=(B\times A)\cup(C\times A)$ $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$ $(B\cap C)\times A=(B\times A)\cap(C\times A)$ 注意：**交并运算对笛卡尔积没有分配律**
笛卡尔积对空集的运算	$A\times\varnothing=\varnothing,\varnothing\times A=\varnothing$

再强调一遍，**交并运算对笛卡尔积没有分配律**，比如$A\cup(B\times C)=(A\cup B)\times(A\times C)$是不对的！

集合运算的重要命题

注意，恒等式和命题是不同的，恒等式表示的是两个集合相等，命题表示一种推理关系

一般集合的重要命题

主要来自课本P102

公式	解释
$A\cap B\subseteq A,A\cap B\subseteq B$	两个集合的交集一定是它们的一个子集
$A\subseteq A\cup B,B\subseteq A\cup B$	一个集合一定是其与另一个集合的并的子集
$A-B\subseteq A$	一个集合与另一个集合的差一定是自身的子集
$A\cup B=B\Leftrightarrow A\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=A\Leftrightarrow A-B=\varnothing$	提供证明集合包含关系的新方法 可以使用Venn图理解
$A\oplus B=A\oplus C\Rightarrow B=C$	可以通过两边左侧同时$\oplus A$，再使用结合律证明（课本P103） 其实这个反向应该也是对的，但是似乎书上没说
$A=B\Rightarrow A\cap C=B\cap C$	这个不是可逆的！

笛卡尔积的重要命题

$A\times B=\varnothing\Leftrightarrow A=\varnothing\ \vee\ B=\varnothing$

公式	解释
在$C \neq \varnothing$时 $A \times C \subseteq B \times C \Leftrightarrow A \subseteq B$ $C \times A \subseteq C \times B \Leftrightarrow A \subseteq B$	笛卡尔积下蕴含关系的不变性
当A, B, C, D均非空时 $A \subseteq C \ \wedge \ B \subseteq D \Leftrightarrow A \times B \subseteq C \times D$	可以理解成：两对蕴含集合对一一笛卡尔积的结果还是蕴含的
$A \subseteq C \ \wedge \ B \subseteq D \Rightarrow A \times B \subseteq C \times D$	上式的前提去掉后就是一个单向的结论

集合运算到逻辑运算的转换与应用

简单集合的转换

在证明命题（比如$A - B \subseteq A$）、证明集合命题之间的推导关系（比如$A \cup B = B \Rightarrow A \subseteq B$）、或者证明集合相等（比如$A - (B \cup C) = (A - B) \cup (A - C)$）时，可以将集合运算转换到逻辑运算来推导/证明

基本的范式：（摘自课本P101）

欲证$P = Q$，即证：$P \subseteq Q \ \wedge \ Q \subseteq P$为真

也就是证对于$\forall x$，有：$x \in P \ \Rightarrow \ x \in Q$以及$x \in Q \Rightarrow x \in P$

而对于恒等式可以将两个方向结合起来，也就是$x \in P \Leftrightarrow x \in Q$

注意这里都是针对$\forall x$，并且不可以写类似 "$A \cup B$得到$\forall x (x \in A \cup B)$" 的语句，并且整个证明过程的变量应当是统一的

正确的写法是：（以证明$P = Q$为例）

对$\forall x$，有

$x \in P \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow x \in Q$

具体见后例

这里注意下，中间不一定都要使用逻辑语言，可以加上一些集合变换

下面写的都是一些常见的等价互换，针对的都是$\forall x$

集合语言	逻辑语言
$A \subseteq B$	$x \in A \Rightarrow x \in B$ 特别的，如果这个语句本身是需要被证明的对象，比如$f(C,D) \Rightarrow A \subseteq B$ 那么它也可以等价成$x \in A \rightarrow x \in B$
$A = B$	$x \in A \Rightarrow x \in B$并且$x \in B \Rightarrow x \in A$ 或者$x \in A \Leftrightarrow x \in B$ 特别的，如果如果这个语句本身是需要被证明的对象，那么可以等价成 $x \in A \leftrightarrow x \in B$
$A \cap B$	$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \ \wedge \ x \in B$
$A \cup B$	$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \ \vee \ x \in B$
$A - B$	$x \in A - B \Leftrightarrow x \in A \ \wedge \ x \notin B$
$A \oplus B$	$x \in (A-B) \cup (B-A)$，后续自己推
$A = \varnothing$	$x \notin A$

举例

证明命题时的转换

证明：$A - B \subseteq A$

证：对$\forall x$

$$\begin{aligned} x \in A - B &\Leftrightarrow x \in A \cap \sim B \\ &\Leftrightarrow x \in A \ \wedge \ x \in \sim B \\ &\Rightarrow x \in A \end{aligned}$$

证毕

证明命题之间的推导关系

证明：$A \cup B = B \Rightarrow A \subseteq B$

证：对$\forall x$

$$x \in A \Rightarrow x \in A \ \vee \ x \in B \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \overset{A \cup B = B}{\Leftrightarrow} x \in B$$

即$x \in A \Rightarrow x \in B$

证明集合相等

证明：$A \cap E = A$

证：对$\forall x$

$x \in (A \cap E) \Leftrightarrow x \in A \ \wedge \ x \in E \Leftrightarrow x \in A$

注意

实际上一般来说能用集合语言证就用集合语言，逻辑语言证明是很复杂的，建议用在基础式子上

没有涉及的部分

注意，鸽巢原理和包容排斥原理要会用！考试会考！

以下内容待补充例题，现在的特别乱，不建议看！

证明题的思路总结

上面其实已经说到了很多使用集合转逻辑证明的方法，下面做一些总结

不过还是那句话，能用集合关系用集合的，毕竟逻辑的挺麻烦的证起来

另外做一个抽象约定：

S_1, S_2表示不同的集合，比如$S_1 = A \cup B$、$S_2 = A \cap B$，但是S里不会出现$\subseteq, =$等符号

F_1, F_2表示不同的命题，比如$F_1 : A \cup B = A$、$F_2 : A \subseteq B$

对于$S_1 = S_2$的类型

- 证$S_1 \subseteq S_2$和$S_2 \subseteq S_1$
- 使用互等，即$S_1 = \cdots = S_2$
- 使用逻辑，即$x \in S_1 \Leftrightarrow x \in S_2$

简单的使用最后一种，而且最好也用集合的内容化简

对于$S_1 = S_2 \Leftrightarrow F_1$

- 用逻辑：$S_1 \leftrightarrow S_2 \Leftrightarrow F_1$，但是这样其麻烦，不建议（当然我觉得大多数人也不知道这个方法）
- 证互推：即证$S_1 = S_2 \Rightarrow F_1$和$F_1 \Rightarrow S_1 = S_2$，注意这两个式子**可以看作一个推理的过程**，所以不需要真的就从$S_1 = S_2$开始推起来
  另外，证$S_1 = S_2$可以使用$x \in S_1 \Leftrightarrow x \in S_2$来证

  以及可以直接从$S_1 = S_2$开始推

举个例子：$A - B = B - A \Leftrightarrow A = B$

先证左推右：$A - B = B - A \Leftrightarrow A \cap \sim B = B \cap \sim A$，之后可以两边同时交$A, B$，得到：$A - B = \varnothing, B - A = \varnothing$，也就是$A \subseteq B, B \subseteq A$，从而$A = B$

再证右推左：$A = B$，且$A - B = A - B \Leftrightarrow A - B = B - A$（直接互换）

得证

对于$S_1 \subseteq S_2 \Rightarrow F_1$

- 用逻辑：$x \in S_1 \rightarrow x \in S_2 \Rightarrow xF_1$，右边指用$x$表示的$F_1$关系，不过还是一样，不推荐
- 直接推，注意$S_1 \subseteq S_2$也可以写成$x \in S_1 \rightarrow x \in S_2$，也可以之后使用逻辑证

举个例子：$A \subseteq B \Leftrightarrow A - B = \varnothing$

对$\forall x$

看成一个推理的过程，前提是$x \in A \rightarrow x \in B$，结论是$x \notin A \cap \sim B$

$x \in A \rightarrow x \in B \Leftrightarrow \neg x \in A \ \vee \ x \in B \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow x \notin A \cap \sim B$

对于$S_1 \subseteq S_2$

- 使用逻辑证$x \in S_1 \rightarrow x \in S_2$
- 集合关系证明$S_1 \subseteq \cdots = \cdots S_2$

小总结

这块其实特别乱，因为这块于剑老师布置的作业也很少，没有办法总结大量经验，但是可以确定的是

- 分清集合和命题：$A = B$、$A \subseteq B$是命题，$A \cup B$是集合
- 注意诸如$F_1 \Rightarrow F_2$是一个推理的过程，推理过程中可以使用各种方法，比如逻辑集合转换、集合恒等式、常见集合命题来做

一些遗留问题

- 欲证$A \Rightarrow B \subseteq C$，可不可以用逻辑语言如下证?

  对$\forall x$，

  $x \in A \Rightarrow \cdots \Rightarrow x \in B \rightarrow x \in C$

  答案：可以

- $A \oplus B = A \oplus C \Leftarrow B = C$正确吗?

  我觉得正确