《微积分 B》下册辅导讲座

Dulbert 2020.06.06

微分看结构、积分看图形

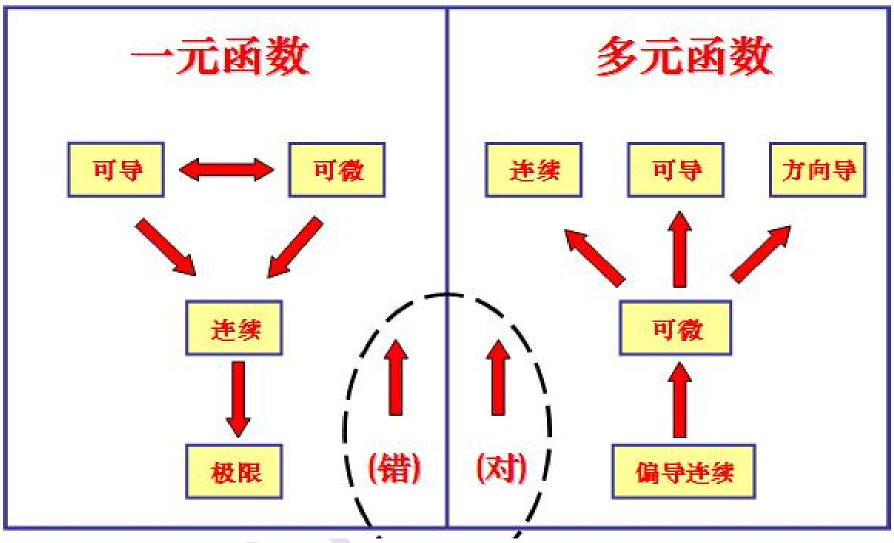
多元微分学 35、重积分 25、线面积分 25、无穷级数 20

一、多元微分学

关键：定义与极限、连续与间断 偏导与全微、一阶与高阶

显函与隐函、方向导梯度 曲线的切线、曲面的切面

极值与最值、有或无条件？



1、设 $z=\sqrt{y}+f(\sqrt{x}-1)\quad(x\ge 0, y\ge 0)$，如果当 $y=1$ 时 $z=x$，试确定函数 f 和 z.

解：$\because\quad x=\sqrt{1}+f(\sqrt{x}-1)\quad\Rightarrow f(\sqrt{x}-1)=(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-1+2)$

$\therefore\quad f(t)=t(t+2),\qquad z=\sqrt{y}+x-1.$

2、函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2+4y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\ne(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 点【 B 】.

（A）连续　　（B）极限不存在　　（C）极限存在但不连续　　（D）无定义

解： $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+4k^2x^2}{x^2+k^2x^2}=\dfrac{1+4k^2}{1+k^2}$．　　——极限值与 k 有关

【注】关于极限的计算：

多元函数的极限，是在$\boxed{\text{任意方向}}$、$\boxed{\text{任意路径}}$、$\boxed{\text{任意形式}}$下的极限都存在且相等

1．一元函数的极限方法，几乎都适用　　（**洛必达法则**，为什么不可以？）

2．在有极限情况下，求极限，常用 ρ　　（$x=\rho\cos\theta$，　$y=\rho\sin\theta$）

3．若证明无极限时，常寻找两条路线的极限不同　　（尤其常令 $y=kx^a$）

3、$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin xy}{y(1+x^2)} & y\neq 0\\ 0 & y=0\end{cases}$，则函数在 $(0,0)$ 点（　A　）．

（A）连续　　（B）极限不存在

（C）极限存在但不连续　　（D）无定义．

解： $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin xy}{y(1+x^2)}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{y(1+x^2)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{(1+x^2)}=0$．

4、有且仅有一个间断点的二元函数是（　B　）．

（A）$\dfrac{y}{x}$　　（B）$e^{-x}\ln\left(x^2+y^2\right)$　　（C）$\dfrac{x}{x+y}$　　（D）$\arctan xy$．

解：（A）$x=0$，间断线；　　（B）$x^2+y^2=0$，间断点

（C）$x+y=0$，间断线；　　（D）无间断点．

5、设 $z=f(x,y)$为二元函数，在下图所示方框间，用“⇒”将 $f(x,y)$ 在 (x,y)处的连续性、可微性等关系表示出来：

$$\begin{tikzcd}
f\text{连续} & f'_x,f'_y\text{连续} \arrow[l] \arrow[d] \arrow[dl] \\
f'_x,f'_y\text{存在} & df\text{存在} \arrow[l] \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

6、设 $z=f(x,y)$，有 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\equiv 2$ 且 $f(x,0)=1, f_y'(x,0)=x$，则 $f(x,y)$ 为（　C　）．

（A）$1-x^2y+y^2$ （B）$1+x^2y+y^2$ （C）$1+xy+y^2$ （D）$1-xy+y^2$

7、设函数 $u(x,y)=\varphi(x+y)+\varphi(x-y)+\int_{x-y}^{x+y}\psi(t)dt$，其中函数 φ 具有二阶导数，ψ 具有一阶导数，则必有（ B ）.

（A）$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ （B）$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ （C）$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ （D）$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

解：$\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi'(x+y)+\varphi'(x-y)+\psi(x+y)-\psi(x-y)$；

$\frac{\partial u}{\partial y}=\varphi'(x+y)-\varphi'(x-y)+\psi(x+y)+\psi(x-y)$；

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\varphi''(x+y)+\varphi''(x-y)+\psi'(x+y)-\psi'(x-y)$

$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\varphi''(x+y)+\varphi''(x-y)+\psi'(x+y)-\psi'(x-y)$；

$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\varphi''(x+y)-\varphi''(x-y)+\psi'(x+y)+\psi'(x-y)$. 因此，有 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

8、证 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$ 在点(0,0)不连续，但一阶偏导存在.

解：$\because \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=ky^2}} f(x,y)=\lim\limits_{y\to 0}\frac{ky^2y^2}{(ky^2)^2+y^4}=\frac{k}{k^2+1}$， ——极限值，随 k 变化.

$\therefore \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=$ 不存在 $\neq f(0,0)$，$\Rightarrow f$ 在 (0,0) 不连续.

但 $f_x'(0,0)=[f(x,0)]_x'|_{x=0}=[0]_x'=0$，同理，$f_y'(0,0)=0$.

9、已知 $(axy^3-y^2\cos x)dx+(1+by\sin x+3x^2y^2)dy$ 为某一函数 $z=f(x,y)$ 的全微分，则 $a=$ __2__，$b=$ __-2__.

解： 由全微分定义，有

$$f_x=axy^3-y^2\cos x,\quad f_y=1+by\sin x+3x^2y^2$$

因此，$f(x,y)=\frac{a}{2}x^2y^3\quad -y^2\sin x+\varphi(y)$ ——由 f_x 得

$=\quad x^2y^3+\frac{b}{2}y^2\sin x+\quad y\quad+\psi(x)$ ——由 f_y 得

于是，$a=2$，$b=-2$，$\varphi(y)=y+C$，$\psi(x)=0+C$.

10、设 $u=\arctan\frac{x}{y}$，求 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$． 答：0．

解：令 $\boldsymbol{F(x,y,u)=y\tan u-x=0}$，

则 $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_u}=-\frac{-1}{y\sec^2 u}=\frac{y}{x^2+y^2}$；$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_u}=-\frac{\tan u}{y\sec^2 u}=\frac{-x}{x^2+y^2}$，

于是，$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)_x^{/}=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$；

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)_y^{/}=-\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

因此，$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$． ——注意 $\tan u=\frac{x}{y}$，$\sin u=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$\cos u=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$．

11、设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $z-y-x-xe^{z-y-x}=0$ 所确定的二元函数，求 dz.

法一：隐函数法：令 $F(x,y,z)=z-y-x-xe^{z-y-x}$，则

$$dz=-\frac{F_x}{F_z}dx-\frac{F_y}{F_z}dy,$$

易得 $dz=\left(1-\frac{e^{z-y-x}}{1+xe^{z-y-x}}\right)dx+dy.$

法二：直接微分法：$d(z-y-x-xe^{z-y-x})$

$$=dz-dy-dx-e^{z-y-x}dx-xe^{z-y-x}(dz-dy-dx)=0$$

整理，得 $dz=\left(1-\frac{e^{z-y-x}}{1+xe^{z-y-x}}\right)dx+dy.$

【注】这里就要注意结构，法一中，x,y,z 同为 F 的自变量；法二中，z 是 x,y 的函数.

12、设 $u=f(x,y,z)=x^3y^2z^2$，其中 $z=z(x,y)$ 由方程 $x^3+y^3+z^3-3xyz=0$ 所确定，求 $\frac{\partial u}{\partial x}$.

解：$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2y^2z^2+2x^3y^2z\frac{\partial z}{\partial x}$， ——此时，$z=z(x,y)$ 是 $\boldsymbol{x,y}$ 的函数.

由 $x^3+y^3+z^3-3xyz=0$，得 $3x^2+3z^2\frac{\partial z}{\partial x}-3yz-3xy\frac{\partial z}{\partial x}=0$，

所以，$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yz-x^2}{z^2-xy}$， 因此，$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2y^2z^2+2x^3y^2z\frac{yz-x^2}{z^2-xy}$.

13、设 $u=\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}}$，求 $du|_{(1,1,1)}$.

解： $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{zy}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}-1};\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x}{zy^2}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}-1};\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{1}{z^2}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}}\ln\frac{x}{y};$

所以，$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,1,1)}=1;\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1,1,1)}=-1;\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(1,1,1)}=0;$

于是，$du|_{(1,1,1)}=dx-dy.$

【注】一般情况，对 x 求导时，先把 $y=1,z=1$ 代入，再求，会更简便一些.

14、设 $f(x,y)=\begin{cases} xy\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$，求证：

(1) $f_x'(x,y),f_y'(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点不连续；(2) $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点可微.

证：(1) 当 $x^2+y^2\neq 0$ 时，$f_x'(x,y)=y\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x^2y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

当 $x^2+y^2=0$ 时，$f_x'(0,0)=\left.\frac{df(x,0)}{dx}\right|_{x=0}=0.$

【 或用定义求偏导：$f_x'(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{0-0}{x}=0$. 】

沿着 $y=x$，即 $f_x'(x,y)=x\sin\frac{1}{\sqrt{2}|x|}-\frac{x^3}{|x|^3}\cos\frac{1}{\sqrt{2}|x|}$,

注意到 $f_x'(x,y)$ 趋于 $(0,0)$ 的极限不存在，所以 $f_x'(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点不连续；

由对称性，$f_y'(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点也不连续.

(2) 因 $\Delta f(0,0)-\left[f_x'(0,0)\Delta x+f_y'(0,0)\Delta y\right]=xy\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$，

而 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim\limits_{r\to 0}r\cos\theta\sin\theta\sin\frac{1}{r}=0$，

所以，$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点可微.

【注】很多同学经常把可微与可导混为一谈：

一元函数可导等价于可微，但多元函数中可导是不一定可微的.

对于多元函数，即使在某点(x_0,y_0)处有偏导数，但是

$\left[f_x'(x_0,y_0)\Delta x+f_y'(x_0,y_0)\Delta y\right]$是否为该点的全微分要看：

$\Delta z-\left[f_x'(x_0,y_0)\Delta x+f_y'(x_0,y_0)\Delta y\right]$是否为$\rho$的高阶无穷小.

即： $\left[f_x'(x_0,y_0)\Delta x+f_y'(x_0,y_0)\Delta y\right]$是$dz$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\Delta z-\left[f_x'(x_0,y_0)\Delta x+f_y'(x_0,y_0)\Delta y\right]}{\rho}\to 0.$$

15、函数$u=\ln\left(x+\sqrt{y^2+z^2}\right)$在点$A(1,\ 0,\ 1)$处，沿$A$指向$B(3,\ -2,\ 2)$方向的方向导数.

解： $\overrightarrow{AB}=\{3-1,\ -2-0,\ 2-1\}=\{2,\ -2,\ 1\}$.

因此，$\overrightarrow{AB}^\circ=\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}=\left\{\dfrac{2}{3},\ -\dfrac{2}{3},\ \dfrac{1}{3}\right\}$.

又 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_A=\left.\dfrac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}}\right|_{(1,\ 0,\ 1)}=\dfrac{1}{2}$， $\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_A=\left.\dfrac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}}\cdot\dfrac{y}{\sqrt{y^2+z^2}}\right|_{(1,\ 0,\ 1)}=0$，

$\left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_A=\left.\dfrac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}}\cdot\dfrac{z}{\sqrt{y^2+z^2}}\right|_{(1,\ 0,\ 1)}=\dfrac{1}{2}$，

所以，$\left.\dfrac{du}{dl}\right|_A=gradu\cdot\overrightarrow{AB}^\circ=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{2}\times 0+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{2}$.

16、设$\vec{A}=y\vec{i}+z\vec{j}+x\vec{k}$，则$\text{rot}\,\vec{A}=$ ______________ .

（A） $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$； （B） $-\left(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}\right)$；（C） $\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$； （D） $\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$.

解：令 $\nabla=\left\{\dfrac{\partial}{\partial x},\dfrac{\partial}{\partial y},\dfrac{\partial}{\partial z}\right\}$，

$u=f(x,y,z)$， $\vec{A}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{\mathrm{i}}+Q(x,y,z)\vec{\mathrm{j}}+R(x,y,z)\vec{\mathrm{k}}$，

则 $gradu=\nabla u=\left\{\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial z}\right\}$； $div\vec{A}=\nabla\bullet\vec{A}=\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}$；

$$rot\vec{A}=\nabla\times\vec{A}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial x}\\ P & Q & R\end{vmatrix}.$$

17、椭球面$\Sigma: x^2+2y^2+z^2=1$上求一点，使Σ在该点的切平面平行于平面$\pi: x-y+2z=0$.

解： Σ 上一点 (x,y,z) 处的法向量为 $\{2x,4y,2z\}$，

故所求点应满足：$\dfrac{2x}{1}=\dfrac{4y}{-1}=\dfrac{2z}{2}$，（显然，$x=-2y$，$z=2x$）

代入原曲面方程 $\Sigma: x^2+2y^2+z^2=1$，求得切点为：

$$\pm\frac{1}{\sqrt{22}}(2,\ -1,\ 4).$$

18、求球面 $x^2+y^2+z^2=6$ 与抛物面 $z=x^2+y^2$ 的交线在 $(1,1,2)$ 处切线方程.

解：方程组 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6 \\ z=x^2+y^2 \end{cases}$ 两端对 x 求导，得

$$\begin{cases} 2x+2y\dfrac{dy}{dx}+2z\dfrac{dz}{dx}=0 \\ 2x+2y\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{dz}{dx}=0 \end{cases}$$

解得 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+2xz}{-y-2yz}=-\dfrac{x}{y}$，$\dfrac{dz}{dx}=0$，因此，$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{(1,1,2)}=-1$，$\left.\dfrac{dz}{dx}\right|_{(1,1,2)}=0$.

切向量 $\vec{T}=(1,-1,0)$，所求切线方程为 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-2}{0}$.

【注】由 $\begin{cases} F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-6=0, \\ G(x,y,z)=x^2+y^2-z=0 \end{cases}$

也可以得到切线方程：

$$\frac{x-1}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}}=\frac{y-1}{\begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}}=\frac{z-2}{\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}}.$$

——底下偏导后，代入 $(1,1,2)$ 即可

19、求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=9 \\ z=xy \end{cases}$ 在点 $(1,2,2)$ 处的切线方程.

解：由 $\begin{cases} F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-9=0, \\ G(x,y,z)=xy-z=0 \end{cases}$ 可得切线方程为

$$\frac{x-1}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}}=\frac{y-2}{\begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}}=\frac{z-2}{\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}}.$$

即 $\dfrac{x-1}{\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}=\dfrac{y-2}{\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}=\dfrac{z-2}{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}$ 或 $\dfrac{x-1}{-8}=\dfrac{y-2}{10}=\dfrac{z-2}{-6}$，

整理，得所求切线方程为 $\frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{-5}=\frac{z-2}{3}$.

20、曲线$\begin{cases}x^2+y^2=5\\ z=x^2-y^2\end{cases}$ 在点 (1, 2, -3) 处的切线方程为【 $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+3}{8}$ 】.

分析：曲线在某一点的切向量 $\vec{s}=(1,\quad y'_x,\quad z'_x)$，自然知切线、法平面方程.

21、曲面 $\arctan\frac{x}{1+yz}=\frac{\pi}{4}$ 在点(1,-2, 0)处的法线方程为【 $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-0}{2}$ 】.

分析：曲面 $F(x,y,z)=0$ 在某一点的法向量 $\vec{n}=(F'_x,\quad F'_y,\quad F'_z)$，自然知切面、法线.

22、求 $z=x^2+y^2$ 到平面 $x+y+z+1=0$ 的距离.

解：令 $F(x,y,z,\lambda)=(x+y+z+1)^2+\lambda(x^2+y^2-z)$，则

$$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x}=2(x+y+z+1)+2\lambda x=0,\\ \frac{\partial F}{\partial y}=2(x+y+z+1)+2\lambda y=0,\\ \frac{\partial F}{\partial z}=2(x+y+z+1)-\lambda=0,\\ \frac{\partial F}{\partial \lambda}=x^2+y^2-z=0\end{cases}$$

解得唯一驻点 $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，再根据实际性，得距离 $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

【注】1、注意目标函数 $f(x,y,z)$、约束函数 $\varphi(x,y,z)=0$；

2、为方便，构造 $F(x,y,z,\lambda)=f+\lambda\varphi$ 时，常用 f 的等价函数；

3、利用几何法，亦可：如 $z=x^2+y^2$ 的法向量 $\{2x,2y,-1\}//\{1,1,1\}$.

23、在 $\Sigma:2x^2+y^2+z^2=1$ 上求距离平面 $\pi:2x+y-z=6$ 的最近点、最远点及距离.

解：因为椭球，所以最近点、最远点的切面平行于已知平面.

故有

$$\vec{n}=(4x,2y,2z)//(2,1,-1)\quad\Rightarrow\frac{4x}{2}=\frac{2y}{1}=\frac{2z}{-1},\quad 2x^2+y^2+z^2=1,$$

得 $(x,y,z)=\frac{\pm1}{2}(1,1,-1)$,

$$d\left((\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}),\quad\pi\right)=\frac{|2x+y-z-6|}{\sqrt{2^2+1+1}}=\frac{4}{\sqrt{6}};$$

$$d\left((-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}),\quad \pi\right)=\frac{|2x+y-z-6|}{\sqrt{2^2+1+1}}=\frac{8}{\sqrt{6}},$$

因此，最近点$(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$，最近距$\frac{4}{\sqrt{6}}$；最远点$(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，最远距$\frac{8}{\sqrt{6}}$.

二、重积分

关键：几何意义（长度、面积、体积）

物理意义（质量、质心、惯量）

积分次序、对称性、极坐标

先后次序：先从简单的积分变量开始积分

二重：X-型、Y-型、θ-型

三重：先一后二（简内的上、下面$z_{下}(x,y), z_{上}(x,y)$）

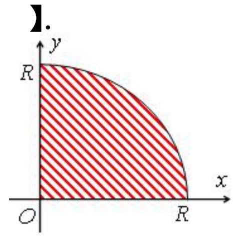
先二后一（截面的面积D_z）

直角坐标、柱面坐标、球面坐标

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\longleftrightarrow\begin{pmatrix}\rho\\\theta\\z\end{pmatrix}\longleftrightarrow\begin{pmatrix}r\\\theta\\\varphi\end{pmatrix},\quad \begin{cases}x=\rho\cos\theta\\y=\rho\sin\theta\\z=z\end{cases};\quad \begin{cases}\rho=r\sin\varphi\\z=r\cos\varphi\\\theta=\theta\end{cases}$$

1、根据几何意义，则$\iint_D\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy=$【 $\frac{2\pi}{3}$ 】，其中D：$x^2+y^2\le 1$.

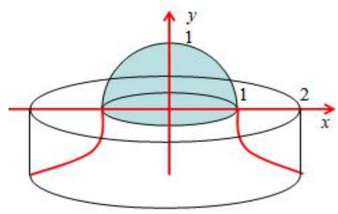
2、设$R>0, f(x,y)$连续，则二次积分$\int_0^R dx\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f\left(x^2+y^2\right)dy=$【 C 】.



(A) $\pi\int_0^R f\left(r^2\right)rdr.$　　(B) $2\pi\int_0^R f\left(r^2\right)rdr.$

(C) $\frac{\pi}{2}\int_0^R f\left(r^2\right)rdr.$　　(D) $\frac{\pi}{2}\int_0^R f\left(r\right)rdr.$

3、设$I=\iint\limits_{x^2+y^2\le 4}\sqrt[3]{1-x^2-y^2}\,dxdy$，则必有【 B 】.



(A) $I>0$　　(B) $I<0$

(C) $I=0$　　(D) $I\ne 0$，但符号无法判定.

4、设$f(x,y)$连续，则$\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x,y)dy+\int_1^2 dx\int_0^{2-x} f(x,y)dy$经交换积分次序为【 B 】.

(A) $\int_0^1 dy\int_0^y f(x,y)dx+\int_1^2 dy\int_0^{2-y} f(x,y)dx$； (B) $\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)dx$；

(C) $\int_0^1 dy\int_0^{x^2} f(x,y)dx+\int_1^2 dy\int_0^{2-x} f(x,y)dx$； (D) $\int_0^1 dy\int_{x^2}^{2-x} f(x,y)dx$.

5、设 $f(x)$ 为连续函数，$F(t)=\int_1^t dy\int_y^t f(x)dx$，则 $F'(2)=$【 B 】.

(A) $2f(2)$ (B) $f(2)$ (C) $-f(2)$ (D) 0.

解：因为，$F(t)=\int_1^t dy\int_y^t f(x)dx=\int_1^t f(x)dx\int_1^x dy=\int_1^t (x-1)f(x)dx$，

所以，$F'(t)=(t-1)f(t)$. ——上学期，积分上限函数求导.

6、设函数 $f(u)$ 可微，且 $f(0)=0$，证明：$\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{\iint_{x^2+y^2\le t^2} f(\sqrt{x^2+y^2})dxdy}{\frac{2}{3}\pi t^3}=f'(0)$.

解：等式左端 $=\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^t f(r)\cdot rdr}{\frac{2}{3}\pi t^3}=\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{2\pi\int_0^t f(r)\cdot rdr}{\frac{2}{3}\pi t^3}=\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{f(t)\cdot t}{t^2}$

$=\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{f(t)}{t}=\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{f(t)-f(0)}{t-0}=f'(0)$.

7、设 $f(x,y)$ 是有界闭域 D：$x^2+y^2\le a^2$ 上的连续函数，则当 $a\to 0^+$ 时，

$\dfrac{1}{\pi a^2}\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ 的极限【 B 】.

(A)不存在 (B)等于 $f(0,0)$ (C) 等于 $f(1,1)$ (D) 等于 $f(1,0)$

解：$\lim\limits_{a\to 0^+}\dfrac{1}{\pi a^2}\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\lim\limits_{a\to 0^+}\dfrac{1}{\pi a^2}\left[f(\xi,\eta)\cdot\pi a^2\right]=\lim\limits_{a\to 0^+} f(\xi,\eta)=f(0,0)$.

8. 求极限 $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{1}{t^6}\int_0^t dx\int_x^t \sin[(xy)^2]dy$.

解：因为二次积分里面，嵌着变量 t，所以不能直接使用洛必达法则.

因此，对二次积分要改变积分次序，才可以使用洛必达法则.

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t^6}\int_0^t dx\int_x^t \sin[(xy)^2]dy=\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t^6}\int_0^t dy\int_0^y \sin[(xy)^2]dx$$

$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{6t^5}\int_0^t \sin[(xt)^2]dx$$ ——第一次洛必达

$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{6t^6}\int_0^{t^2} \sin u^2du$$ ——令 $u=xt$

$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{\sin t^4\cdot 2t}{36t^5}=\frac{1}{18}.$$ ——第二次洛必达

9、利用对称性问题，计算 $\iint\limits_{D}(x^2+3y-4x+9)d\sigma$， $D: x^2+y^2\le 1$.

解：由对称性，有 $\iint\limits_{D} x dxdy=\iint\limits_{D} y dxdy=0$， $\iint\limits_{D} x^2 dxdy=\iint\limits_{D} y^2 dxdy=\frac{1}{2}\iint\limits_{D}(x^2+y^2)dxdy$，

所以，

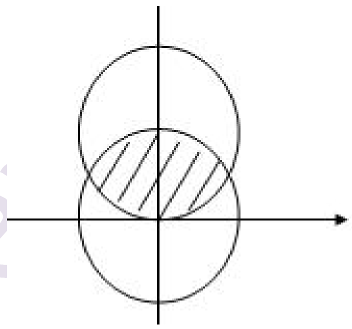
$$\iint\limits_{D}(x^2+3y-4x+9)dxdy=\iint\limits_{D} x^2 dxdy+\iint\limits_{D} 9dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\iint\limits_{D}(x^2+y^2)dxdy+9\iint\limits_{D} dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^3dr+9\cdot\sigma \quad =\frac{\pi}{4}+9\pi=\frac{37\pi}{4}.$$

10. 计算积分 $I=\iint\limits_{D}\sqrt{4-x^2-y^2}\,dxdy$， D 是由 $x^2+y^2=1$ 的上半圆与 $x^2+y^2=2y$ 的下半圆围成的区域.

解： $I=\iint\limits_{D}\sqrt{4-x^2-y^2}\,dxdy=\int_0^{\pi/6}d\theta\int_0^{2\sin\theta}\sqrt{4-r^2}\,rdr+\int_{\pi/6}^{\pi/2}d\theta\int_0^{2}\sqrt{4-r^2}\,rdr$.



$$=-\frac{1}{3}\int_0^{\pi/6}\left(\left(\sqrt{4-r^2}\right)^3\right)\Big|_0^{2\sin\theta}d\theta-\frac{1}{3}\int_{\pi/6}^{\pi/2}\left(\left(\sqrt{4-r^2}\right)^3\right)\Big|_0^{2}d\theta$$

$$=\frac{8}{3}\int_0^{\pi/6}\left(1-\cos^3\theta\right)d\theta+\frac{8}{3}\int_{\pi/6}^{\pi/2}d\theta$$

$$=\frac{4\pi-11}{9}+\frac{8}{3}\cdot\frac{\pi}{3}$$

$$=\frac{4}{3}\pi-\frac{11}{9}.$$

11、计算二重积分 $\iint\limits_{D}\min\left(x^2+y^2,1\right)dxdy$，其中 D 为 $0\le x\le 1, 0\le y\le 1$.

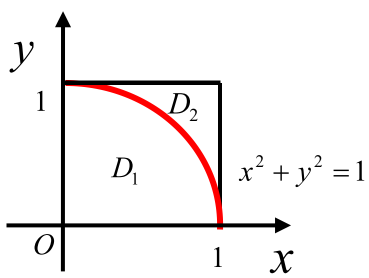
解： $\iint\limits_{D}\min\left(x^2+y^2,1\right)dxdy=\iint\limits_{D_1}\left(x^2+y^2\right)dxdy+\iint\limits_{D_2}1dxdy$，

其中 D_1 为单位圆盘 $\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 1\right\}$ 在第一象限的部分， $D_2=D\setminus D_1$.

所以， $\iint\limits_{D_1}\left(x^2+y^2\right)dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 r^3dr=\frac{\pi}{8}$.

按几何意义， $\iint\limits_{D_2}1dxdy$ 为 D_2 的面积，即 $1-\frac{\pi}{4}$，所以，

$$\iint\limits_{D}\min\left(x^2+y^2,1\right)dxdy=\frac{\pi}{8}+1-\frac{\pi}{4}=1-\frac{\pi}{8}.$$



12、计算二重积分 $\iint\limits_{D}|x^2+y^2-1|\,d\sigma$，其中 $D=\{(x,y)|0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$.

解：$\iint\limits_{D}|x^2+y^2-1|\,\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D_1}(1-x^2-y^2)\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D_2}(x^2+y^2-1)\mathrm{d}\sigma$

由于 $\iint\limits_{D_1}(1-x^2-y^2)\mathrm{d}\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1(1-r^2)r\mathrm{d}r=\frac{\pi}{8}$

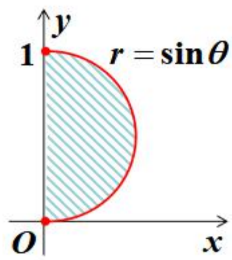
$$\iint\limits_{D_2}(x^2+y^2-1)\mathrm{d}\sigma=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{\sqrt{1-x^2}}^1(x^2+y^2-1)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\left[x^2y+\frac{y^3}{3}-y\right]\Bigg|_{\sqrt{1-x^2}}^1\mathrm{d}x=\int_0^1[x^2-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}]\mathrm{d}x=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{3},$$

所以，$\iint\limits_{D}|x^2+y^2-1|\,\mathrm{d}\sigma=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}$.

13．设 $\boldsymbol{f(x,y)}$ 在闭区域 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le y,x\ge0\right\}$ 上连续，求 $\boldsymbol{f(x,y)}$，使得

$$\boldsymbol{f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}-\frac{8}{\pi}\iint\limits_{D}f(x,y)dxdy}\ .$$



解：令 $\boldsymbol{A=\iint\limits_{D}f(x,y)dxdy}$，则 $\boldsymbol{f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}-\frac{8}{\pi}A}$，于是

$$\boldsymbol{A=\iint\limits_{D}(\sqrt{1-x^2-y^2}-\frac{8}{\pi}A)dxdy=\iint\limits_{D}\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy-\frac{8A}{\pi}\cdot\sigma}$$

$$\boldsymbol{=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\sin\theta}r\sqrt{1-r^2}dr-A}$$

$$\boldsymbol{=-\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\sin\theta}\sqrt{1-r^2}d(1-r^2)}$$

$$\boldsymbol{=-\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2}{3}\left[(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\sin\theta}d\theta=-\frac{1}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\cos^3\theta-1\right]d\theta=\frac{3\pi-4}{36}},$$

所以，$\boldsymbol{f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}+\frac{8}{9\pi}-\frac{2}{3}}$.

14、设 $\Omega=\left\{(x,y,z)\middle|x^2+y^2+z^2\le1,z\ge0\right\}$，则以下等式错误的是【 C 】.

(A) $\iiint\limits_{\Omega}x\,\mathrm{d}V=0$； (B) $\iiint\limits_{\Omega}y\,\mathrm{d}V=0$； (C) $\iiint\limits_{\Omega}z\,\mathrm{d}V=0$； (D) $\iiint\limits_{\Omega}xy\,\mathrm{d}V=0$.

15、$f(t)$ 可微，$F(t)=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le t^2}f\left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz,t>0$，则 $F'(t)=$【 C 】.

(A) $\pi tf\left(t^2\right)$. (B) $4\pi tf\left(t^2\right)$. (C) $4\pi t^2f\left(t^2\right)$. (D) $4\pi t^2f\left(t\right)$.

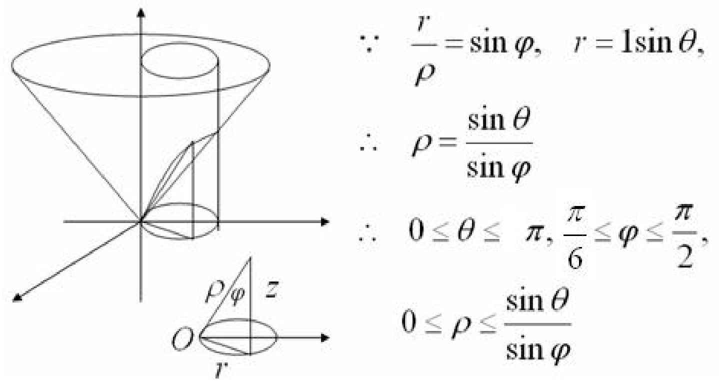
解：$F(t)=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^t f(r^2)r^2\sin\varphi dr$

$$=2\pi\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\int_0^t f(r^2)r^2dr=4\pi\int_0^t f(r^2)r^2dr,$$

故，$F'(t)=4\pi t^2f\left(t^2\right)$.

16、将三次积分 $I=\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} dx\int_0^{\sqrt{3(x^2+y^2)}} f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)dz$，化为柱面坐标系下的三次积分为【　$I=\int_0^{\pi} d\theta\int_0^{\sin\theta} dr\int_0^{\sqrt{3}r} f\left(\sqrt{r^2+z^2}\right)rdz$　】；化为球面坐标系下的三次积分为【　$I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int_0^{\pi} d\theta\int_0^{\frac{\sin\theta}{\sin\varphi}} f(\rho)\rho^2\sin\varphi d\rho$　】.

注：关于球坐标图形如下：



17、求三重积分 $I=\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2+z\right)dxdydz$，其中 Ω 是由曲线 $\begin{cases}y^2=2z\\x=0\end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周所成的曲面与平面 $z=4$ 所围成的立体.

解：作柱坐标变换 $x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,\quad z=z$，则有

$$I=\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2+z\right)dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{8}}rdr\int_{\frac{r^2}{2}}^{4}\left(r^2+z\right)dz$$

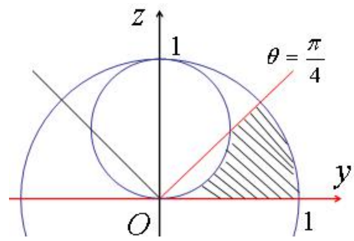
$$=2\pi\int_0^{\sqrt{8}}(4r^3+8r-\frac{5}{8}r^5)dr\ =\frac{256}{3}\pi\ .$$

18、设 Ω 由 $0\le z\le\sqrt{x^2+y^2}$ 以及 $z\le x^2+y^2+z^2\le 1$ 所确定的闭区域，计算

$$I=\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}v.$$

解：$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\,d\varphi\int_{\cos\varphi}^{1}r^3dr$

$$=\frac{\pi}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^4\varphi)\sin\varphi\,d\varphi=\frac{19\sqrt{2}}{80}\pi\ .$$

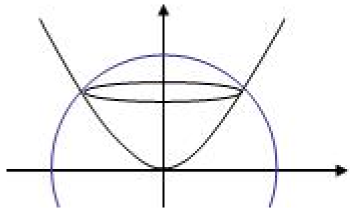


19、计算 $I=\iiint\limits_{V}(x+y+z)^2dxdydz$，其中 V 为 $z=x^2+y^2$ 与 $x^2+y^2+z^2=2$ 围成的区域.

解：$I=\iiint\limits_{V}(x+y+z)^2dxdydz=\iiint\limits_{V}\left(x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz\right)dxdydz$，

由对称性，$\iiint\limits_{V}(2xy+2xz+2yz)dxdydz=0,$

所以， $I=\iiint\limits_{V}\left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz$ ，



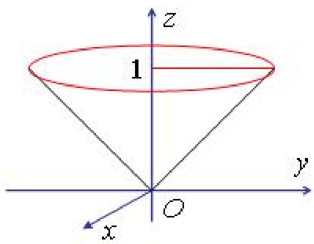
由 $\begin{cases} z=x^2+y^2, \\ x^2+y^2+z^2=2 \end{cases}$ 解得， $z=1.$

故 V 在 xOy 面上的投影为： $\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 1\right\}$ ，所以

$$I=\iiint\limits_{V}\left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz$$
$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 dr\int_{r^2}^{\sqrt{2-r^2}}\left(r^2+z^2\right)rdz$$
$$=\left(\frac{8\sqrt{2}}{5}-\frac{89}{60}\right)\pi.$$

20、设 Ω 是由 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及 $z=1$ 所围的有界闭区域，求 $\iiint_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}dv$.

解： $I=\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int\limits_0^{\frac{1}{\cos\varphi}}r^3\sin\varphi\,\mathrm{d}r$

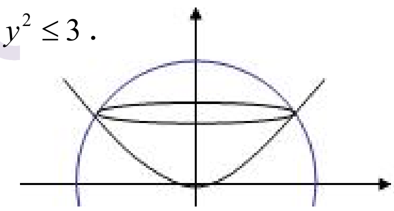


$$=\frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin\varphi}{\cos^4\varphi}d\varphi$$
$$=\frac{\pi}{6}(2\sqrt{2}-1).$$

21、计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}zdxdydz$ ， Ω 是由 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 与 $x^2+y^2=3z$ 围成的立体.

解：由 $\begin{cases} z=\sqrt{4-x^2-y^2} \\ x^2+y^2=3z \end{cases}$ 得 $z^2+3z-4=0$ ，解得 $z=1$ ， $z=-4$ （舍去）.

因此，得空间区域 Ω 在 xOy 面上的投影区域为 D ： $x^2+y^2\le 3$.



$$I=\iiint\limits_{\Omega}zdxdydz=\iint\limits_{D}dxdy\int\limits_{\frac{r^2}{3}}^{\sqrt{4-r^2}}zdz$$
$$=\int\limits_0^{2\pi}d\theta\int\limits_0^{\sqrt{3}}rdr\int\limits_{\frac{r^2}{3}}^{\sqrt{4-r^2}}zdz$$
$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}d\theta\int\limits_0^{\sqrt{3}}r\left(4-r^2-\frac{r^4}{9}\right)dr=\frac{13}{4}\pi.$$

注：如利用“先二后一”：

$$I=\int_0^1 zdz\iint\limits_{x^2+y^2\le 3z}dxdy+\int_1^2 zdz\iint\limits_{x^2+y^2\le 4-z^2}dxdy$$
$$=\int_0^1 z(3z\pi)dz+\int_1^2 z(4-z^2)\pi dz=\frac{13}{4}\pi.$$

22．设 $\boldsymbol{\Omega: x^2+y^2+z^2\le 2x+4y+4z}$ ，计算 $\boldsymbol{I=\iiint\limits_{\Omega}(x+2y+3z)dv}$.

解： 因为$\Omega:(x-1)^2+(y-2)^2+(z-2)^2\le 9=3^2$，

$$I=\iiint\limits_{\Omega}(x+2y+3z)dv$$
$$=\iiint\limits_{\Omega}[(x-1)+2(y-2)+3(z-2)+11]dv \quad \text{—— 利用对称性}$$
$$=\iiint\limits_{\Omega}11dv=11\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot 3^3$$
$$=396\pi .$$

23、设$f(x)$在区间$[0,+\infty)$上连续，$F(t)=\iiint\limits_{D_t}\left[z^2+f\left(x^2+y^2\right)\right]dxdydz$，其中

$D_t:0\le z\le h,x^2+y^2\le t^2$，求$\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{F(t)}{t^2}$.

解：$F(t)=\iiint\limits_{D_t}\left[z^2+f\left(x^2+y^2\right)\right]dxdydz$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^t rdr\int_0^h\left[z^2+f\left(r^2\right)\right]dz$$
$$=2\pi\int_0^t\left[\frac{1}{3}h^3+f\left(r^2\right)h\right]rdr$$
$$=\frac{\pi}{3}h^3t^2+2\pi h\int_0^t f\left(r^2\right)rdr$$

所以，$\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{F(t)}{t^2}=\frac{\pi}{3}h^3+\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{2\pi h\int_0^t f\left(r^2\right)rdr}{t^2}$

$$=\frac{\pi}{3}h^3+2\pi h\lim_{t\to 0^+}\frac{f\left(t^2\right)t}{2t}$$
$$=\frac{\pi}{3}h^3+\pi hf(0)$$

25、球体$x^2+y^2+z^2\le 2Rz$内，各点处的密度的大小等于该点到坐标原点的距离的平方，试求球体的质心.

解：由对称性，$\bar{x}=\bar{y}=0$，

$$\bar{z}=\frac{\iiint\limits_{\Omega}z\left(x^2+y^2+z^2\right)dv}{\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2+z^2\right)dv}=\frac{\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2R\cos\varphi}\rho^5\cos\varphi\sin\varphi d\rho}{\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2R\cos\varphi}\rho^4\sin\varphi d\rho}=\frac{\frac{8}{3}\pi R^6}{\frac{32}{15}\pi R^5}=\frac{5}{4}R$$

所以，质心为$\left(0,0,\frac{5}{4}R\right)$.

三、线面积分

3.1 曲线积分：第一类（几何应用），下限小、上限大；

第二类（物理应用），下限起、上限终.

$$\overrightarrow{ds}=(dx,dy)=(\cos\alpha,\cos\beta)ds\ ,\quad ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$$

1、L 为下半圆周 $x^2+y^2=R^2\quad(y\le 0)$，将曲线积分 $I=\int_L(x+2y)ds$ 化为定积分**正确结果**

(A) $\int_0^{-\pi}R^2(\cos t+2\sin t)\mathrm{d}t$.　　(B) $\int_\pi^0 R^2(\cos t+2\sin t)\mathrm{d}t$.

(C) $\int_{-\pi}^0 R^2(\sin t+2\cos t)\mathrm{d}t$　　(D) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}R^2(\sin t+2\cos t)\mathrm{d}t$.

解：注意第一类曲线积分中，上、下限的大小关系（为什么？）.

- 因为利用常规参数方程（x 轴正半轴作为起始轴，逆时针动），有

$$x=R\cos t\ ,\quad y=R\sin t\qquad(-\pi\le t\le 0)$$

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{(-R\sin t)^2+(R\cos t)^2}\cdot|dt|=R\cdot|dt|\qquad\text{——绝对值}$$

因此，$I=\int_{-\pi}^0 R^2(\cos t+2\sin t)dt$，

所以，A，C，明显不对．其实就答案而言 B 也对．

- 若将 y 轴正半轴作为起始轴，顺时针动，答案就是 D．此时，

$$x=R\sin t\ ,\quad y=R\cos t\qquad(\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{3\pi}{2})$$

- 或利用轮换对称性，原题可等价表示为：

【 设 L 为左半圆周 $x^2+y^2=R^2\ \ (x\le 0)$，将曲线积分 $I=\int_L(2x+y)ds$ 化为定积分的正确结果是 $I=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}R^2(2\cos t+\sin t)dt$ 】.

- 也可以利用积分换元法：

令 $u+t=\dfrac{\pi}{2}$，则 $dt=-du$，且 $t=-\pi\Leftrightarrow u=\dfrac{3\pi}{2}$，$t=0\Leftrightarrow u=\dfrac{\pi}{2}$.

$$x=R\cos t=R\sin u\ ,\quad y=R\sin t=R\cos u$$

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{(R\cos u)^2+(-R\sin u)^2}\cdot|du|$$

所以，$\boldsymbol{I=\int_{-\pi}^0 R^2(\cos t+2\sin t)dt=-\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}R^2(\sin u+2\cos u)du}$.

注：这里的 du 是带有绝对值的！

2、曲线 L 为圆周 $x^2+y^2=1$，则 $\oint_L x^2ds=$【 π 】.

解：利用对称性，有 $\oint_L x^2ds=\dfrac{1}{2}\oint_L(x^2+y^2)ds=\dfrac{1}{2}\oint_L ds=\pi$.

3、计算空间曲线积分 $\int_\gamma(ax^2+by^2-cz)ds$，其中 γ 是圆周 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=R^2\\x+y+z=0\end{cases}$

解：由 $\int_{\gamma} x^2 \mathrm{d}s = \int_{\gamma} y^2 \mathrm{d}s = \int_{\gamma} z^2 \mathrm{d}s$

$$= \frac{1}{3}\int_{\gamma}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s = \frac{R^2}{3}\int_{\gamma} 1 \mathrm{d}s = \frac{2}{3}\pi R^3.$$

故 $\int_{\gamma}(ax^2+by^2)\mathrm{d}s = (a+b)\frac{2}{3}\pi R^3$.

再由 $\int_{\gamma} x \mathrm{d}s = \int_{\gamma} y \mathrm{d}s = \int_{\gamma} z \mathrm{d}s = \frac{1}{3}\int_{\gamma}(x+y+z)\mathrm{d}s = 0$，

因此，原式 $=(a+b)\frac{2}{3}\pi R^3$.

4、**设 L 是从 $A(1,0)$ 沿 $x^2+\frac{y^2}{2}=1$ 到点 $B(0,\sqrt{2})$ 的曲线段，则**

$I=\int_L 2xe^{x^2y}dx + ye^{x^2y}dy =$ 【 0 】

解：利用椭圆参数方程最佳．设 $\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sqrt{2}\sin t \end{cases}$ $t:0\to\frac{\pi}{2}$，则

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2\cos te^{\sqrt{2}\cos^2 t\sin t}(-\sin t)+\sqrt{2}\sin te^{\sqrt{2}\cos^2 t\sin t}(\sqrt{2}\cos t)\right)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 0dt = 0.$$

5、在过点 $O(0,0)$ 和 $A(\pi,0)$ 的曲线族 $y=a\sin x\,(a>0)$ 中，求一条曲线 L，使沿该曲线从 O 到 A 的积分 $\int_L (1+y^3)dx+(2x+y)dy$ 的值为最小．

解：
$$I(a)=\int_L (1+y^3)dx+(2x+y)dy$$
$$=\int_0^{\pi}\left[1+a^3\sin^3 x+(2x+a\sin x)a\cos x\right]dx$$
$$=\pi+\frac{4}{3}a^3-4a$$

$I'(a)=4a^2-4$，所以，$a=1$ 时取最小值，曲线为 $y=\sin x$．

6、计算曲线积分 $\oint_L \frac{-ydx+xdy}{2x^2+y^2}$，式中 L 是正向椭圆 $x^2+\frac{y^2}{2}=1$.

解： D： $x^2+\frac{y^2}{2}\leqslant 1$

在 L 上： $2x^2+y^2=2$

$$原式=\frac{1}{2}\oint_L -ydx+xdy$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 2\iint_D dxdy$$
$$=\sqrt{2}\pi.$$

注：利用 Green 公式，会遇到麻烦——$P(x,y)$、$Q(x,y)$ 在原点无意义.

7、设积分 $\int_L f(x+y)dx+f(x-y)dy$ 在全平面上与路径无关，$f(t)$ 具有一阶连续导数，且满足 $f'(0)=2, f(0)=1$，又试确定 $f(t)$．

解： $P=f(x+y)$， $Q=f(x-y)$

积分与路径无关，故 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，

即 $f'(x+y)=f'(x-y)$

取 $x=y=\dfrac{t}{2}$. 则 $f'(t)=f'(0)=2$

故 $f(t)=2t+c$.

由 $f(0)=1$， 可知 $C=1$，

故 $f(t)=2t+1$.

8、计算积分 $\oint\limits_L\dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$，其中（1）$L$ 是圆周 $(x+2)^2+(y-3)^2=1$，逆时针方向；（2）L 是圆周 $x^2+y^2=1$，逆时针方向．

解：(1) 令 $P=\dfrac{-y}{x^2+x^2}$，$Q=\dfrac{x}{x^2+x^2}$，这两个函数都在圆域 $D:(x+2)^2+(y-3)^2\le 1$ 具有连续的一阶偏导数，

且 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$，利用格林公式，得

$$\oint\limits_L\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\oint\limits_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

(2) 由于 L 围成区域 $x^2+y^2<1$ 中，被积函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 在原点处无定义、偏导数亦不存在，不能用格林公式，故直接积分：$\oint\limits_L\dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\int_0^{2\pi}(\cos^2 t+\sin^2 t)\mathrm{d}t\ =2\pi.$

9、计算曲线积分 $\int_\Gamma \boldsymbol{ydx+zdy+xdz}$，式中 $\boldsymbol{\Gamma}$ 是 $\boldsymbol{z=xy}$ 与 $\boldsymbol{x^2+y^2=1}$ 之交线，从上往下看是逆时针方向的．

解：$\boldsymbol{\Gamma}$ 的参数方程：$\begin{cases}x=\cos t\\ y=\sin t\\ z=\cos t\sin t\end{cases}$ $0\leqslant t\leqslant 2\pi$

原式 $=\int_0^{2\pi}(-\sin^2 t+\cos^2 t\sin t+\cos t\cos 2t)\,\mathrm{d}t$

$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\sin^2 t+\cos^2 t\sin t+\cos t-2\cos t\sin^2 t)\,\mathrm{d}t=-\pi$

10、试确定λ的值，使得 $\int_c\dfrac{x}{y}(x^2+y^2)^\lambda\mathrm{d}x-\dfrac{x^2}{y^2}(x^2+y^2)^\lambda\mathrm{d}y$ 的值与路径无关，其中 C 为与 X 轴不相交(或不相接触)；并计算 $I=\int_{(1,1)}^{(0,2)}\dfrac{x}{y}(x^2+y^2)^\lambda\mathrm{d}x-\dfrac{x^2}{y^2}(x^2+y^2)^\lambda\mathrm{d}y$.

解：利用积分与路径无关． $\boldsymbol{P=\dfrac{x}{y}(x^2+y^2)^\lambda}$，$\boldsymbol{Q=-\dfrac{x^2}{y^2}(x^2+y^2)^\lambda}$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{x}{y^2}(x^2+y^2)^{\lambda-1}[2\lambda y^2-(x^2+y^2)]$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{x}{y^2}(x^2+y^2)^{\lambda-1}[-2\lambda x^2-2(x^2+y^2)]$$

由 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，推出 $2\lambda y^2-(x^2+y^2)=-2\lambda x^2-2(x^2+y^2)$，即 $\lambda=-\frac{1}{2}$

即当 $\lambda=-\frac{1}{2}$ 时，曲线积分与路径无关.

$$I=\int_{(1,1)}^{(0,2)}\frac{x}{y}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x+\frac{x^2}{y^2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}y$$

$$=\int_1^0\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x+\int_1^2\frac{o^2}{y^2}(o^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}y=\sqrt{1+x^2}\Big|_1^0=1-\sqrt{2}\ .$$

3.2 曲面积分：几何意义、对称性、极坐标；

第一类（几何应用），根据函数，定投影面；

第二类（物理应用），正侧取正、负侧取负.

$$\overrightarrow{dS}=(dydz,\ dzdx,\ dxdy)=(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)dS$$

1、Σ 是平面 $x+y+z=4$ 被柱面 $x^2+y^2=1$ 截出的有限部分，则 $\iint\limits_{\Sigma}ydS=$【 A 】.

（A）0 （B）$\frac{4}{3}\sqrt{3}$ （C）$4\sqrt{3}$ （D）π .

2、设 $\Sigma:x^2+y^2+z^2=a^2(z\ge 0)$, Σ_1 为 Σ 在第一卦限中的部分，则有【 C 】.

(A) $\iint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}S=4\iint\limits_{\Sigma_1}x\mathrm{d}S.$ (B) $\iint\limits_{\Sigma}y\mathrm{d}S=4\iint\limits_{\Sigma_1}y\mathrm{d}S.$

(C) $\iint\limits_{\Sigma}z\mathrm{d}S=4\iint\limits_{\Sigma_1}x\mathrm{d}S.$ (D) $\iint\limits_{\Sigma}xyz\mathrm{d}S=4\iint\limits_{\Sigma_1}xyz\mathrm{d}S.$

3、求双曲抛物面 $z=x^2-y^2$ 包含在两椭圆抛物面 $z=3x^2+y^2-2$ 和 $z=3x^2+y^2-4$ 之间的那部分曲面块∑的面积 S.

解：Σ 的方程为 $z=x^2-y^2$，Σ 在 xoy 面上的投影域为 D：$1\le x^2+y^2\le 2$.

面积元素 $dS=\sqrt{1+(2x)^2+(2y)^2}dxdy=\sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy$

$$\therefore\ S=\iint\limits_{\Sigma}dS=\iint\limits_{D}\sqrt{1+4(x^2+y^2)}dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^{\sqrt{2}}r\sqrt{1+4r^2}dr=2\pi\cdot\frac{1}{12}(27-5\sqrt{5})=\frac{1}{6}(27-5\sqrt{5})\pi$$

4、求半球面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 被 $x^2+y^2=z$ 所截而适合 $z\ge x^2+y^2$ 的一部分曲面∑的面积 S .

解：$S=\oiint\limits_{\Sigma}dS$，$\Sigma$ 在 xoy 面上的投影域为 D：$x^2+y^2\le 1$.

面积元素 $dS=\sqrt{1+(\frac{-x}{2-x^2-y^2})^2+(\frac{-y}{2-x^2-y^2})^2}dxdy=\frac{\sqrt{2}dxdy}{\sqrt{2-x^2-y^2}}$，

$$\therefore\quad S=\sqrt{2}\oiint\limits_{D}\frac{dxdy}{\sqrt{2-x^2-y^2}}$$
$$=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}d\theta\cdot\int_0^1\frac{rdr}{\sqrt{2-r^2}}$$
$$=\sqrt{2}\cdot 2\pi\cdot(\sqrt{2}-1)=2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)\pi$$

5、设 $f(x,y)=x\iint\limits_{\Sigma}f(x,y)dS+y^2$，其中 Σ 为 $x^2+y^2+z^2=1$，则 $f(x,y)=$?

解：设 $A=\iint\limits_{\Sigma}f(x,y)dS$，则 $f(x,y)=Ax+y^2$，

两边求积分得

$$A=\iint\limits_{\Sigma}f(x,y)dS=\iint\limits_{\Sigma}Ax+y^2dS=0+\iint\limits_{\Sigma}y^2dS$$
$$=\frac{1}{3}\iint\limits_{\Sigma}x^2+y^2+z^2dS=\frac{1}{3}\iint\limits_{\Sigma}1dS=\frac{4\pi}{3}$$

于是，$f(x,y)=\frac{4\pi}{3}x+y^2$.

6、计算第一型曲面积分 $\iint\limits_{S}(xy+yz+zx)dS$，其中 S 是圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被圆柱面 $x^2+y^2=2ax(a>0)$ 所割下的部分.

解：注意对称性：

$$\iint\limits_{S}(xy+yz+zx)dS$$
$$=\iint\limits_{S}zxdS$$
$$=\sqrt{2}\iint\limits_{D}x\sqrt{x^2+y^2}dxdy$$
$$=2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta\int_0^{2a\cos\theta}r^3dr$$
$$=\frac{64}{15}\sqrt{2}a^4.$$

7、计算曲面积分 $\oiint_S xdydz+ydzdx+zdxdy$，其中 S 为椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的外侧.

解：$\oiint_S zdxdy=2c\iint_{D_{xy}}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}dxdy$

$$=2abc\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\sqrt{1-r^2}rdr$$

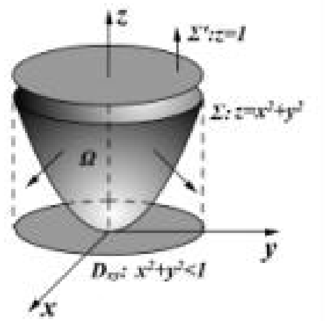
$$= 4abc\pi\int_0^1 \sqrt{1-r^2}\,rdr = \frac{4abc\pi}{3},$$

由轮换对称性，得 $\oiint_S xdydz = \oiint_S ydzdx = \oiint_S zdxdy = \dfrac{4abc\pi}{3}$

因此，$\oiint_S xdydz + ydzdx + zdxdy = 4abc\pi$.

8、计算 $I = \iint_\Sigma (y-z)dzdx + (x+2z)dxdy$，$\Sigma$ 是抛物面 $z = x^2 + y^2$,（$0 \le z \le 1$），取下侧.

解：【高斯公式】添加平面片



"$\Sigma': z=1,\ x^2+y^2 \le 1$，取上侧"

与 Σ 围成区域 Ω，

由高斯公式可得：

$$\oiint_{\Sigma+\Sigma'} = \iiint_\Omega [\frac{\partial}{\partial x}(0) + \frac{\partial}{\partial y}(y-z) + \frac{\partial}{\partial z}(x+2z)]dv$$

$$= 3\iiint_\Omega dv = 3\int_0^1 \pi z dz = \frac{3\pi}{2}.$$ —— 先二后一

或 $$= 3\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 rdr \int_{r^2}^1 dz = 6\pi\int_0^1 r(1-r^2)dr = \frac{3\pi}{2}.$$ —— 柱坐标

而 $$\iint_{\Sigma'} = 2\iint_D 1dxdy = 2\pi .$$

于是，$$I = \oiint_{\Sigma+\Sigma'} - \iint_{\Sigma'} = \frac{3\pi}{2} - 2\pi = -\frac{\pi}{2}.$$

9、Σ 为曲面 $z = x^2 + y^2 (z \le 1)$，取上侧，计算积分 $I = \iint\limits_\Sigma (x-1)^3 \mathrm{d}y\mathrm{d}z + (y-1)^3 \mathrm{d}z\mathrm{d}x + (z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解：设 Σ_1 为平面 $z=1$ 上被 $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=1 \end{cases}$ 所围部分，取下侧，

Σ_1 与 Σ 所围成的空间区域计为 Ω . 则

$$\oiint_{\Sigma+\Sigma_1} = -\iiint_\Omega [\frac{\partial (x-1)^3}{\partial x} + \frac{\partial (y-1)^3}{\partial y} + \frac{\partial (z-1)}{\partial z}]dv$$

$$= -\iiint_\Omega [3x^2 + 3y^2 - 6x - 6y + 7]dv .$$

又 $\iint_{\Sigma_1} = 0$，$\iiint_\Omega xdv = \iiint_\Omega ydv = 0$.

所以，$$I = -\iiint_\Omega [3x^2 + 3y^2 + 7]dv = -\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 rdr \int_{r^2}^1 (3r^2+7)dz = -4\pi .$$

10、$\oiint_\Sigma xy^2dydz + yz^2dzdx + zx^2dxdy$ 其中 Σ 为椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ 的外侧.

解：$\oiint_{\Sigma} xy^2dydz + yz^2dzdx + zx^2dxdy$

$$= \iiint_{\Omega}(y^2+z^2+x^2)dxdydz$$

$$= abc\iiint_{\Omega_1}(a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2)dudvdw \qquad \text{——let } x=au,\ y=bv,\ z=cw$$

$$= \frac{abc(a^2+b^2+c^2)}{3}\iiint_{\Omega_1}(u^2+v^2+w^2)dudvdw \qquad \text{——轮换对称，}\Omega_1\text{是单位球面}$$

$$= \frac{abc(a^2+b^2+c^2)}{3}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1\rho^2\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho \qquad \text{——单位球面，自然用球坐标}$$

$$= \frac{4\pi abc(a^2+b^2+c^2)}{15}.$$

四、无穷级数

关键：几何级数与中学等比数列求和

常数项：正项、交错、任意项

正项敛散性：比较（几何、P-、调和）、比值、根值

幂级数：收敛半径、收敛域、和函数

三角级数：级数公式、间断点、奇偶性、周期性

1、设 $0\le a_n<\frac{1}{n}(n=1,2,\cdots)$，则下列级数中可断定收敛的是(D).

A. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$； B. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$； C. $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n}$； D. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n^2$.

解：关于（B）为什么不对，如令 $a_n=\begin{cases}\frac{1}{n+1}, & n\text{为偶数}\\ 0, & n\text{为奇数}\end{cases}$

则，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2m+1}$ 显然发散.

2、下列级数中，条件收敛的是：

（A）$\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{\sqrt{2n^3+4}}$ （B）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^n$

（C）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$ （D）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n2^n}$

解：B、C、D 显然都是绝对收敛的. 且

$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt{2n^3+4}}\Big/\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}=1$，因此，$\sum_{1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{2n^3+4}}$ 与 $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ 有同敛散性.

3、求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ 的收敛区间及和函数.

解：$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ 的收敛区间为 $(-1,\ 1)$，

设 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty} nx^n \ (-1<x<1)$，

而 $s(x)=x\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}=x\sum_{n=1}^{\infty}(x^n)'=x(\sum_{n=1}^{\infty}x^n)'$

$=x(\frac{x}{1-x})'=\frac{x}{(1-x)^2} \qquad -1<x<1$.

4、试求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}$ 的和.

解：设幂级数 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$，此幂级数的收敛域是 $[-1,\ 1]$，

当 $x\in(-1,\ 1)$ 时，有：

$$s(x)=\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}\right)dx$$

$$=\int_0^x\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x.$$

由于 $s(x)$ 在 $[-1,\ 1]$ 上连续，故在 $[-1,\ 1]$ 上，有 $s(x)=\arctan x$，

从而，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=s(1)=\frac{\pi}{4}$.

5、求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3n-2}x^{3n-2}$ 的收敛域及和函数的导数，并求数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{3n}}$ 的和.

解：$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+2}}{3n+1}x^{3n+1}\Big/\frac{(-1)^{n+1}}{3n-2}x^{3n-2}\right|=|x|^3$，

令 $|x|^3<1$，得 $|x|<1$，于是幂级数的收敛半径为 $R=1$.

易判别知，当 $x=-1$ 时，级数发散，当 $x=1$ 时，级数收敛，故收敛域为 $(-1,1]$.

令 $\quad S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3n-2}x^{3n-2}, x\in(-1,1)$ 则有

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{3n-3}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{3n}=\frac{1}{1+x^3}$$

从而 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{3n}}=S'(\frac{1}{2})=\frac{1}{1+(1/2)^3}=\frac{8}{9}$.

6、将函数 $f(x)=\frac{1}{x^2-x-6}$ 展开为 x 幂级数.

解：$f(x)=\dfrac{1}{x^2-x-6}=\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x+2}\right)$

$$\frac{1}{x-3}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{3}}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}-\frac{1}{3^{n+1}}x^n,\quad |x|<3$$

$$\frac{1}{x+2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{2}}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}x^n,\quad |x|<2$$

$$\therefore f(x)=\frac{1}{5}\left(\sum_{n=0}^{\infty}-\frac{1}{3^{n+1}}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}x^n\right)=\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)x^n,\quad |x|<2.$$

7、$f(x)$ 以 2π 为周期，且在 $(-\pi,\ \pi]$ 上有表达式 $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x\le 0,\\ x, & 0<x\le\pi\end{cases}$ $S(x)$ 是 $f(x)$ 的傅立叶级数的和函数，则 $S(\pi)$=($\dfrac{\pi}{2}$).

解：对于**连续点 x**：$S(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=f(x)$，

其中，$a_n=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx,\ b_n=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx$；

对于**间断点 x_0**：$S(x_0)=\dfrac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$，

因此，$S(\pi)=\dfrac{f(\pi-0)+f(\pi+0)}{2}=\dfrac{\pi+0}{2}=\dfrac{\pi}{2}$.

8、设 $f(x)=\begin{cases}0, & 0\le x<\dfrac{\pi}{2}\\ x, & \dfrac{\pi}{2}\le x\le\pi\end{cases}$，已知 $S(x)$ 是 $f(x)$ 的以 2π 为周期的**余弦级数**展开式的和函数，则 $S(-3\pi)$=________ $S(-3\pi)=S(\pi)=\boldsymbol{\pi}$.

9、$f(x)=\begin{cases}e^x, & 0<x\le 1\\ x, & 1<x\le 2\end{cases}$ 的**正弦级数** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin\dfrac{n\pi x}{2}$ 的和函数为 $S(x)$，则 $S(-1)=$

(A)0 ； (B)-1 ； (C)$\dfrac{1+e}{2}$ ； $\boxed{\text{(D)}-\dfrac{1+e}{2}}$.

10、将函数 $f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x<1\\ x+1, & 1\le x<\pi\end{cases}$ 在区间 $[0,\ \pi]$ 展开成**余弦级数**：

$S(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$，则 $S(1)=$【 $\dfrac{3}{2}$ 】.

● 其他积分 ------以往一些题型.

1、设二元函数 $Q(x,y)$ 具有一阶连续偏导，且使 $\int_L 2xydx+Q(x,y)dy$ 与积分路径无关，又对于任意实数 t，恒有 $\int_{(0,\ 0)}^{(t,\ 1)}2xydx+Q(x,y)dy=\int_{(0,\ 0)}^{(1,\ t)}2xydx+Q(x,y)dy$ 成立，试求 $Q(x,y)$.

解：利用积分与路径无关的等价定理.

令 $P(x,y)=2xy$，由 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}=2x$，得

$$Q(x,y)=x^2+C(y)\text{，其中 } C(y) \text{ 为待定函数.}$$

再由 $\int_{(0,\ 0)}^{(t,\ 1)} 2xydx+Q(x,y)dy=\int_0^1\left[t^2+C(y)\right]dy=t^2+\int_0^1 C(y)dy$，

$\int_{(0,\ 0)}^{(1,\ t)} 2xydx+Q(x,y)dy=\int_0^t\left[1^2+C(y)\right]dy=t+\int_0^t C(y)dy$，

及题设 $\int_{(0,\ 0)}^{(t,\ 1)} 2xydx+Q(x,y)dy=\int_{(0,\ 0)}^{(1,\ t)} 2xydx+Q(x,y)dy$，得

$$t^2+\int_0^1 C(y)dy=t+\int_0^t C(y)dy.$$

上式两端对 t 求导，得 $2t=1+C(t)$.

故，$C(t)=2t-1$，因此，$Q(x,y)=x^2+2y-1$.

2、验证 $(2x\cos y-y^2\sin x)dx+(2y\cos x-x^2\sin y)dy$ 是某个函数的全微分，并求出它的一个原函数.

$$P=2x\cos y-y^2\sin x\,,\ Q=2y\cos x-x^2\sin y$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-2x\sin y-2y\sin x\,,\ \frac{\partial Q}{\partial x}=-2y\sin x-2x\sin y$$

$\because \dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，**故表达式是某函数的全微分.**

$$\begin{aligned}\mu(x,y)&=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(2x\cos y-y^2\sin x)dx+(2y\cos x-x^2\sin y)dy\\&=\int_0^x 2x\,dx+\int_0^y(2y\cos x-x^2\sin y)dy\\&=x^2+y^2\cos x+x^2\cos y-x^2+c\\&=y^2\cos x+x^2\cos y+C.\end{aligned}$$

其中一个为 $\mu(x,y)=x^2\cos y+y^2\cos x$.

3、设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)>0$，试用二重积分证明：

$$\int_a^b f(x)dx\int_a^b\frac{1}{f(x)}dx\ge(b-a)^2.$$

证：$\int_a^b f(x)dx\int_a^b\dfrac{1}{f(x)}dx=\int_a^b f(x)dx\int_a^b\dfrac{1}{f(y)}dy$

（根据对称性） $=\iint_D\dfrac{f(x)}{f(y)}dxdy=\iint_D\dfrac{f(y)}{f(x)}dxdy$

$=\dfrac{1}{2}\iint_D\left[\dfrac{f(x)}{f(y)}+\dfrac{f(y)}{f(x)}\right]dxdy$

$$=\frac{1}{2}\iint_D\left[\frac{f^2(x)+f^2(y)}{f(x)f(y)}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\geq\frac{1}{2}\iint_D\frac{2f(x)f(y)}{f(x)f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=(b-a)^2.$$ 即得证.

4、计算三重积分 $I=\iiint\limits_{\Omega}\left(3x^2+5y^2+7z^2\right)dxdydz$，其中 $\Omega:0\leq z\leq\sqrt{R^2-x^2-y^2}$.

解： 设 Ω_1： $x^2+y^2+z^2\leq R^2$，则

$$I=\iiint\limits_{\Omega}\left(3x^2+5y^2+7z^2\right)dxdydz=\frac{1}{2}\iiint\limits_{\Omega_1}\left(3x^2+5y^2+7z^2\right)dxdydz$$

而

$$\iiint\limits_{\Omega_1}x^2dxdydz=\iiint\limits_{\Omega_1}y^2dxdydz=\iiint\limits_{\Omega_1}z^2dxdydz$$

$$=\frac{1}{3}\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\int_0^{R}\rho^4d\rho=\frac{4}{15}\pi R^5.$$

所以，

$$I=\iiint\limits_{\Omega}\left(3x^2+5y^2+7z^2\right)dxdydz=\frac{1}{2}\iiint\limits_{\Omega_1}\left(3x^2+5y^2+7z^2\right)dxdydz$$

$$=\frac{1}{2}\left(3\iiint\limits_{\Omega_1}x^2dxdydz+5\iiint\limits_{\Omega_1}y^2dxdydz+7\iiint\limits_{\Omega_1}z^2dxdydz\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot15\iiint\limits_{\Omega_1}x^2dxdydz$$

$$=2\pi R^5.$$

5、在过点 $O(0,0)$ 和 $A(\pi,0)$ 的曲线族 $y=a\sin x\,(a>0)$ 中,求一条曲线 L,使沿该曲线从 O 到 A 的积分 $\int_L\left(1+y^3\right)dx+(2x+y)dy$ 的值为最小.

解：

$$I(a)=\int_L\left(1+y^3\right)dx+(2x+y)dy$$

$$=\int_0^{\pi}\left[1+a^3\sin^3x+(2x+a\sin x)a\cos x\right]dx$$

$$=\pi+\frac{4}{3}a^3-4a$$

$I'(a)=4a^2-4$， 所以， $a=1$ 时取最小值，曲线为 $y=\sin x$.

6、设 $\varphi(x)\in C^2$，且 $\int_L\varphi'(x)(y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y)$ 与积分路径无关，求 $\varphi(x)$.

解：由曲线积分与路径无关的条件，得 $\varphi'(x)=\dfrac{\mathrm{d}[x\varphi'(x)]}{\mathrm{d}x}$；

令 $u=x\varphi'$，则上述方程化为 $\dfrac{\mathrm{d}u}{u}=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$.

积分，得 $u = C_1 x$ ，即 $\varphi'(x) = C_1$，

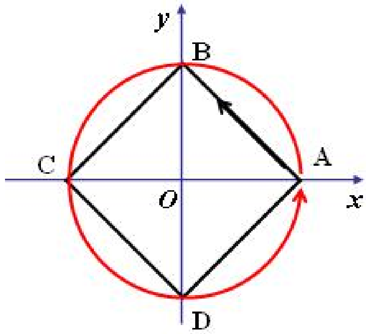
再积分，得：$\varphi(x) = C_1 x + C_2$.

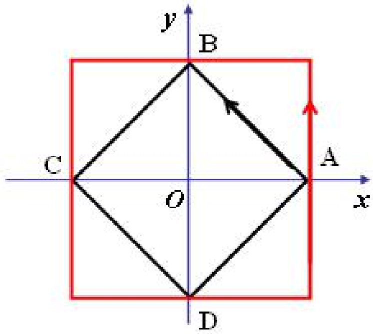
7、计算积分 $\oint_L \dfrac{-y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y}{x^2 + y^2}$. 其中 L 为曲线 $|x| + |y| = 1$ 所围区域的正向边界.

解：因为 $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ 　　$(x^2 + y^2 \neq 0)$，

利用与路径无关，均可以选取更易于计算的等价路径，方向逆时针.

注意不能包含奇点 $(0, 0)$ 即可：





所以，原式 $= \int_{左} -ydx + xdy = \int_0^{2\pi} -\sin\theta d\cos\theta + \cos\theta d\sin\theta$

$= \int_0^{2\pi} (\sin^2\theta + \cos^2\theta) d\theta = 2\pi$.

8、设 $u_n \neq 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{u_n} = 1$，求证：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\left(\dfrac{1}{u_n} + \dfrac{1}{u_{n+1}}\right)$ 条件收敛.

解： $\because \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{u_n} = 1, \therefore u_n \to +\infty \ (n\to\infty),\ \exists N \in N_+, \forall n > N, u_n > 0;\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{u_n}\dfrac{1}{n} = 0.$

$\because \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\dfrac{1}{u_n} + \dfrac{1}{u_{n+1}}}{\dfrac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{u_n} + \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{u_{n+1}} = 1 + \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1}\dfrac{n+1}{u_{n+1}} = 2;$ $\therefore$ 级数不绝对收敛.

$\because S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\left(\dfrac{1}{u_k} + \dfrac{1}{u_{k+1}}\right) = \left(\dfrac{1}{u_1} + \dfrac{1}{u_2}\right) - \left(\dfrac{1}{u_2} + \dfrac{1}{u_3}\right) + \cdots + (-1)^{n-1}\left(\dfrac{1}{u_n} + \dfrac{1}{u_{n+1}}\right)$

$= \dfrac{1}{u_1} + (-1)^{n-1}\dfrac{1}{u_{n+1}},$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{1}{u_1}.$ 　　故级数收敛且为条件收敛.