# 2018-2019《概率论与数理统计》期末试题答案：

B 卷

1. （10 分）【解】：令 $A_1$={从甲缸中捞出的两条鱼均为白鱼}，$A_2$={从甲缸中捞出的两条鱼均为黑鱼}，$A_3$={从甲缸中捞出的两条鱼为一黑一白}，B={从乙缸任捞一条鱼是白鱼}。

$P(A_1)=\frac{C_3^2}{C_8^2}=\frac{3}{28}$, ···(1 分)

$P(A_2)=\frac{C_5^2}{C_8^2}=\frac{5}{14}$, ···(1 分)

$P(A_3)=\frac{C_3^1C_5^1}{C_8^2}=\frac{15}{28}$, ···(1 分)

$P(B|A_1)=\frac{C_6^1}{C_8^1}=\frac{3}{4}$, ···(1 分)

$P(B|A_2)=\frac{C_4^1}{C_8^1}=\frac{1}{2}$, ···(1 分)

$P(B|A_3)=\frac{C_5^1}{C_8^1}=\frac{5}{8}$ ···(1 分)

由全概率公式有

$$P(\mathrm{B})=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B|A_i)=\frac{C_3^2}{C_8^2}*\frac{C_6^1}{C_8^1}+\frac{C_5^2}{C_8^2}*\frac{C_4^1}{C_8^1}+\frac{C_3^1C_5^1}{C_8^2}*\frac{C_5^1}{C_8^1}=\frac{133}{224},\qquad (4\text{ 分})$$

2. （15 分）【解】： $X$ 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}, & -2<x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$， （2 分）

先求 $Y$ 的分布函数为 $F_Y(y)$

因 $0<Y=X^2<4$, 故当 $y\le 0$ 时, $F_Y(y)=0$,

当 $0<y<4$ 时, $F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X^2\le y\}=P\{-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y}\}$

$=F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y}).$ （2 分）

将 $F_Y(y)$ 关于 $y$ 求导数得到 $Y$ 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{y}}[f_X(\sqrt{y})+f_X(-\sqrt{y})], & 0<y<4,\\ 0, & 其他.\end{cases}\qquad (3\text{ 分})$$

当 $0<y<1$ 时， $0<\sqrt{y}<1$, $-1<-\sqrt{y}<0$,

于是 $f_X(\sqrt{y})=\frac{1}{3}$, $f_X(-\sqrt{y})=\frac{1}{3}$; （2 分）

当 $1<y<4$ 时， $1<\sqrt{y}<2$, $-2<-\sqrt{y}<-1$,

于是 $f_X(\sqrt{y})=0$, $f_X(-\sqrt{y})=\frac{1}{3}$. （2 分）

因此， $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{y}}\left[\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}\right], & 0<y\le 1,\\ \dfrac{1}{2\sqrt{y}}\left[0+\dfrac{1}{3}\right], & 1<y\le 4,\\ 0, & 其他.\end{cases}$ （2 分）

即， $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{3\sqrt{y}}, & 0<y\le 1,\\ \dfrac{1}{6\sqrt{y}}, & 1<y\le 4,\\ 0, & 其他.\end{cases}$ （2 分）

3. （15 分）【解】:

（1） 由概率性质

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} Ae^{-(3x+4y)}dxdy$$

$$=A\int_0^{+\infty} e^{-3x}dx\cdot\int_0^{+\infty} e^{-4y}dy$$

$$=A(-\frac{1}{3}e^{-3x}\Big|_0^{+\infty})(-\frac{1}{4}e^{-4y}\Big|_0^{+\infty})=\frac{A}{12}=1,$$

得 $A$＝12。 （5 分）

（2） 随机变量$(X,Y)$关于$X$和$X$的边缘概率密度分别为

$f_X(x)=\begin{cases}3e^{-3x}, & x>0\,;\\ 0, & 其他.\end{cases}$ 和$f_Y(y)=\begin{cases}4e^{-4y}, & y>0\,;\\ 0, & 其他.\end{cases}$ （3 分）

对于$(x,y)\in R^2$,因为$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$，故$X$和$Y$为相互独立；（2 分）

（3） 由题意：

$$P\{0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}=\int_0^1\int_0^1 12\,e^{-(3x+4y)}dxdy$$

$$=\int_0^{+\infty} 3e^{-3x}\,dx\cdot\int_0^{+\infty} 4e^{-4y}\,dy$$

$=(-e^{-3x}|_0^1)(-e^{-4y}|_0^1)=(1-e^{-3})(1-e^{-4})$. （5 分）

4. （15 分）【解】: $Cov(Y_1,Y_n)=Cov(X_1-\overline{X},X_n-\overline{X})$

$$=Cov(X_1,X_n)-Cov(X_1,\overline{X})-Cov(\overline{X},X_n)+D(\overline{X})$$ （4 分）

由于 $X_1,X_2,\dots,X_n$ 是来自于总体 X 的简单随机样本, $X_1$和$X_n$ 相互独立, 它们的协方差为 0, 又

$$Cov(X_1,\overline{X})=Cov(X_1,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n}Cov(X_1,\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n}D(X_i)=\frac{4}{n}$$ （6 分）

同理，$Cov(\overline{X},X_n)=\frac{4}{n}$ （2 分）

又 $D(\overline{X})=\frac{4}{n}$ （2 分）

所以 $Cov(Y_1,Y_n)=-\frac{4}{n}$ （1 分）

5. （15 分）【解】：令 X 表示这 3000 人中乘坐某车次的人数，则 $X\sim B(3000,0.1)$，且 $E(X)=300,D(X)=270$，设一列火车上设置 Y 个座位，则由题意 $P(X>Y)\le 0.01$，由中心极限定理可知，$X$ 近似服从 $N(300,270)$， （7 分）
则

$$P(X>Y)=P(\frac{X\text{-}300}{\sqrt{270}}>\frac{Y\text{-}300}{\sqrt{270}})\le 0.01$$ （3 分）

即 $1\text{-}\Phi$（$\frac{Y\text{-}300}{\sqrt{270}})\le 0.01$

$\Phi$（$\frac{Y\text{-}300}{\sqrt{270}})\ge 0.99$

$\frac{Y\text{-}300}{\sqrt{270}}\ge 2.33$

得 $Y\ge 339$ （5 分）

6. （15 分）【解】： 由题意，得

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{x},\ x<0,\\ \frac{1}{2}e^{-x}, x\ge 0,\end{cases}$$

于是 $E(S^2)=D(X)=E(X^2)-E^2(X)$ （3 分）

$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{-|x|}dx=0$ （5 分）

$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2e^{-|x|}dx=\int_{0}^{+\infty}x^2e^{-x}dx=2,$ （5 分）

所以 $E(S^2)=2.$ （2 分）

7. （15 分）【解】：当 $\alpha$=1 时，$f(x,\beta)=F_x^1(x,1,\beta)=\begin{cases}\frac{\beta}{x^{\beta+1}}, & x\ge 1;\\ 0, & x<1.\end{cases}$ （1 分）

当 $\beta$=2 时，$f(x,\alpha)=F_x^1(x,\alpha,2)=\begin{cases}\frac{2\alpha^2}{x^3}, & x\ge\alpha;\dots\\ 0, & x<\alpha.\end{cases}$ （1 分）

（1） $E(X)=\int_1^{+\infty}\frac{\beta}{x^\beta}dx=\frac{\beta}{1-\beta}x^{1-\beta}\Big|_1^{+\infty}=\frac{\beta}{\beta-1}$

令$E(X)=\bar{X}$, 于是$\hat{\beta}=\frac{\bar{X}}{\bar{X}-1}$,

所以$\beta$的矩估计量$\hat{\beta}=\frac{\bar{X}}{\bar{X}-1}$.⋯ （4 分）

(2) 似然函数

$$L=L(\beta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\beta)=\begin{cases}\beta^n\left(\prod_{i=1}^{n}x_i^{-(\beta+1)}\right), & x_i>1,(i=1,2,\cdots,n);\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$\ln L=n\ln\beta-(\beta+1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i,$$

$$\frac{d\ln L}{d\beta}=\frac{n}{\beta}-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0,$$

所以$\beta$的极大似然估计量$\hat{\beta}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$.⋯ （4 分）

(3) 似然函数

$$L=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\alpha)=\begin{cases}\frac{2^n\alpha^{2n}}{\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^3}, & x_i\ge\alpha,(i=1,2,\cdots,n);\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

显然$L=L(\alpha)\uparrow$,

那么当$\hat{\alpha}=\min\limits_{1\le i\le n}\{x_i\}$时, $L=L(\hat{\alpha})=\max\limits_{\alpha>0}L(\alpha)$ ,

所以$\alpha$的极大似然估计量$\hat{\alpha}=\min\limits_{1\le i\le n}\{x_i\}$⋯ (5 分)