北京交通大学 2017 年非数学专业大学生数学竞赛试题

（2017 年 6 月 24 日晚 7：00—9：30）

学院与班级__________ 学号___________姓名____________ 联系方式________

一、填空题（每小题 6 分，满分 30 分）

1．极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{2n}}{n^2+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{2n}}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{\sin\frac{n\pi}{2n}}{n^2+n}\right)=$________________ 。

2．求不定积分 $\int\dfrac{1+x^2}{1+x^4}dx=$______________。

3．设 $D: x^2+2y^2\le 2x+4y$，则积分 $I=\iint\limits_D (x+y)dxdy=$________________ 。

4．计算定积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{(e^x+1)}dx=$______________。

5．设曲线积分 $I=\oint_L\dfrac{xdy-ydx}{|x|+|y|}$，其中 L 是以 $(1,0),(0,1),(-1,0),(0,-1)$ 为顶点的正方形的边界曲线，方向为逆时针方向，则 $I=$______________。

二、（本题满分 10 分）求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[n\sin\left(2\pi n!e\right)\right]$。

三、（本题满分 10 分）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明 $2\int_a^b f(x)\left(\int_x^b f(t)dt\right)dx=\left(\int_a^b f(x)dx\right)^2$ 。

四、（本题满分 10 分）设单位圆 Γ 的外切 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 各边与 Γ 分别切于 $B_1B_2\cdots B_n$，令 P_A,P_B 分别表示多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 与 $B_1B_2\cdots B_n$ 的周长，求证：$P_A^{\frac{1}{3}}P_B^{\frac{2}{3}}>2\pi$ 。

五、（本题满分 10 分）设 $P(x,y,z)$ 和 $R(x,y,z)$ 在空间上有连续的偏导数，设上半球面 $S: z=z_0+\sqrt{r^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}$，方向向上，若对任意点 $\left(x_0,y_0,z_0\right)$ 和 $r>0$，第二型曲面积分 $\iint\limits_S Pdydz+Rdxdy=0$，证明：$\dfrac{\partial P}{\partial x}\equiv 0$ 。

六、（本题满分 10 分）求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n^3+2}{(n+1)!}x^n$ 的收敛域与和函数。

七、（本题满分 10 分）计算曲线积分 $I=\int_\Gamma (x^2+y+z^2)\,\mathrm{d}s$，其中 Γ 是曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a \\ x+y+z=\dfrac{3}{2}a \end{cases}\left(a>0\right)$。

八、（本题满分 15 分）设 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n xdx$，其中 n 是正整数，

（1）若 $n\ge 2$，计算 I_n+I_{n-2}；

（2）设 p 为实数，讨论级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n I_n^p$ 的绝对收敛性和条件收敛性。

参考答案：

一、1．解：$\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{2n}\le n\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{n^2+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{2n}}{n^2+2}+\cdots+\frac{\sin\frac{n\pi}{2n}}{n^2+n}\right)\le\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{2n}$

而 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\pi}\frac{\pi}{2n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx=\frac{2}{\pi}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\pi}\frac{n}{n+1}\frac{\pi}{2n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx=\frac{2}{\pi}$，故

$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{n^2+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{2n}}{n^2+2}+\cdots+\frac{\sin\frac{n\pi}{2n}}{n^2+n}\right)=\frac{2}{\pi}$。

2．解：$\int\frac{1+x^2}{1+x^4}dx=\int\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx=\int\frac{1}{2+(x-\frac{1}{x})^2}d\left(x-\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x-\frac{1}{x}\right)+C$ 。

3．**解**： $D:x^2+2y^2\le 2x+4y\Rightarrow(x-1)^2+2(y-1)^2\le 3$。可知重心为 $(1,1)$，于是

$I=\iint_D(x+y)dxdy=\iint_D xdxdy+\iint_D ydxdy=\bar{x}\iint_D dxdy+\bar{y}\iint_D dxdy=2\iint_D dxdy=2\pi\sqrt{3}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}=3\sqrt{2}\pi$ 。

4、解：$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{(e^x+1)(1+x^2)}dx=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[\frac{\cos x}{(e^x+1)}+\frac{\cos x}{(e^{-x}+1)}]dx$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx=\frac{1}{2}\sin x|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=1。$$

5. 解: 曲线 L 的方程为 $|x|+|y|=1$，记该曲线所围区域为 D，则

$$I=\oint_L\frac{xdy-ydx}{|x|+|y|}=\oint_L xdy-ydx=\iint_D(1+1)\,d\sigma=2|D|=4$$

二、解：$2\pi n!e=2\pi n!\left[1+1+\frac{1}{2!}+\cdots\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}+o\left(\frac{1}{(n+1)!}\right)\right]$

$= 2\pi a_n + \frac{2\pi}{(n+1)} + o\left(\frac{1}{(n+1)}\right)$，其中 a_n 是自然数。

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[n\sin\left(2\pi n!e\right)\right] = \lim\limits_{n\to\infty}\left[n\sin\left(\frac{2\pi}{n+1} + o\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)\right] = 2\pi$。

三、证明： 由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，令 $F(x) = \int_x^b f(t)dt$，有

$F'(x) = -f(x)$，由此

$$2\int_a^b f(x)\left(\int_x^b f(t)dt\right)dx = 2\int_a^b f(x)F(x)dx = -2\int_a^b F'(x)F(x)dx$$

$$= -2F^2(x)\Big|_a^b = F^2(a) = \left(\int_a^b f(x)dx\right)^2。$$

四、 **证明**：设 Γ 的圆心为 O，$\alpha_i = \frac{1}{2}\angle B_iOB_{i+1}, B_{n+1} = B_1$，则

$P_A = 2\sum\limits_{i=1}^{n}\tan\alpha_i, P_B = 2\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\alpha_i$。

先证明：当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时，有 $\tan^{\frac{1}{3}}x\sin^{\frac{2}{3}}x > x$。（*），

令 $g(x) = \frac{\sin x}{\cos^{\frac{1}{3}}x} - x$，则 $g(0) = 0$，

$$g'(x) = \frac{\cos^{\frac{4}{3}}x + \frac{1}{3}\cos^{-\frac{2}{3}}x\sin^2 x}{\cos^{\frac{2}{3}}x} - 1 = \frac{2\cos^2 x + 1}{3\cos^{\frac{4}{3}}x} - 1 > \frac{3\sqrt[3]{\cos^2 x\cos^2 x\cdot 1}}{3\cos^{\frac{4}{3}}x} - 1 = 0，‘$$

故 $g(x)$ 严格单调递增，因而 $g(x) > g(0) = 0$。

因此 $P_A^{\frac{1}{3}}P_B^{\frac{2}{3}} = 2\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\tan\alpha_i\right)^{\frac{1}{3}}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\alpha_i\right)^{\frac{2}{3}} \geq 2\sum\limits_{i=1}^{n}\tan^{\frac{1}{3}}\alpha_i\sin^{\frac{2}{3}}\alpha_i > 2\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i = 2\pi$。

五、**解**：记上半球面 S 的底平面为 D，方向向下，S 和 D 围成的区域记为 Ω。由高斯公式得

$$\oiint\limits_{S+D} P\mathrm{dydz} + R\mathrm{dxdy} = \iiint\limits_{\Omega}(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial z})dv，$$

由于 $\iint\limits_{D} P\mathrm{dydz} + R\mathrm{dxdy} = -\iint\limits_{D} Rd\sigma$ 和题设条件，则有

$$-\iint\limits_{D} Rd\sigma = \iiint\limits_{\Omega}(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial z})dv \qquad （*）$$

注意到上式对任意$r>0$成立，由此证明$R(x_0,y_0,z_0)=0$。

反证法：若不然，设$R(x_0,y_0,z_0)\neq 0$，注意到$\iint\limits_D R d\sigma = R\left(\xi,\zeta,z_0\right)\pi r^2$，其中$\left(\xi,\zeta,z_0\right)\in D$，而当$r\to 0^+$，$R\left(\xi,\zeta,z_0\right)\to R(x_0,y_0,z_0)$，故（*）左端是一个二阶无穷小；类似地，当$\frac{\partial P(x_0,y_0,z_0)}{\partial y}+\frac{\partial R(x_0,y_0,z_0)}{\partial z}\neq 0$，$\iiint\limits_\Omega (\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial R}{\partial z})dv$是一个 3 阶无穷小；而当$\frac{\partial P(x_0,y_0,z_0)}{\partial y}+\frac{\partial R(x_0,y_0,z_0)}{\partial z}=0$，$\iiint\limits_\Omega (\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial R}{\partial z})dv$的阶高于 3，总之，（*）式右端的阶高于左端，从而当r很小时，有$\left|\iint\limits_D R d\sigma\right| > \left|\iiint\limits_\Omega (\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial R}{\partial z})dv\right|$，这和（*）式矛盾！

故$R(x_0,y_0,z_0)=0$。由(x_0,y_0,z_0)的任意性，知$R(x,y,z)\equiv 0$。代入（*）式，得

$0=\iiint\limits_\Omega \frac{\partial P}{\partial x}dv$，重复前面的证明知$\frac{\partial P}{\partial x}\equiv 0$。

六、解：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3+2}{(n+2)(n^3+2)}=0$，故收敛半径$R=+\infty$，从而收敛域为$\left(-\infty,+\infty\right)$。**注意到**

$$\frac{n^3+2}{(n+1)!}=\frac{(n+1)n(n-1)}{(n+1)!}+\frac{(n+1)}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+1)!}=\frac{1}{(n-2)!}+\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}\quad (n\geq 2)\ ,$$

于是$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n^3+2}{(n+1)!}x^n=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!}x^n+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}x^n$

$=x^2e^x+e^x+\frac{1}{x}(e^x-1)$，（$x\neq 0$），当$x=0$时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n^3+2}{(n+1)!}x^n=2$.

七、**解**： 利用轮换对称性知：

$\int_\Gamma x^2\,\mathrm{d}s=\int_\Gamma y^2\,\mathrm{d}s=\int_\Gamma z^2\,\mathrm{d}s$，$\int_\Gamma x\,\mathrm{d}s=\int_\Gamma y\,\mathrm{d}s=\int_\Gamma z\,\mathrm{d}s$，

于是$I=\int_\Gamma (x^2+y+z^2)\,\mathrm{d}s=I=\frac{2}{3}\int_\Gamma (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}s+\frac{1}{3}\int_\Gamma (x+y+z)\,\mathrm{d}s$

$=\frac{2}{3}a^2\int_\Gamma \mathrm{d}s+\frac{a}{2}\int_\Gamma \mathrm{d}s=\left(\frac{2}{3}a^2+\frac{a}{2}\right)2\pi r$，

因为原点到平面$x+y+z=\frac{3}{2}a$的距离$d=\frac{\frac{3}{2}a}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$，于是$r=\sqrt{a^2-\frac{3}{4}a^2}=\frac{a}{2}$。

所以 $I=\left(\frac{2}{3}a^2+\frac{a}{2}\right)2\pi\cdot\frac{a}{2}=\pi a^2(\frac{2}{3}a+\frac{1}{2})$.

八、解：（1）

$$I_n+I_{n-2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n xdx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n-2} xdx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n-2} xd\tan x=\frac{1}{n-1}\tan^{n-1}x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{n-1};$$

（2）由于 $0<x<\frac{\pi}{4}$，故 $\tan^{n+2}x<\tan^n x<\tan^{n-2}x$，从而 $I_{n+2}<I_n<I_{n-2}$，于是

$\frac{1}{n+1}=I_{n+2}+I_n<2I_n<I_n+I_{n-2}=\frac{1}{n-1}$，故 $\frac{1}{2(n+1)}<I_n<\frac{1}{2(n-1)}$。

因此 $\left(\frac{1}{2(n+1)}\right)^p<I_n{}^p<\left(\frac{1}{2(n-1)}\right)^p$。

当 $p>1$ 时，$\left|(-1)^n I_n{}^p\right|\le I_n{}^p<\frac{1}{2^p(n-1)^p},(n\ge 2)$，由 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)^p}$ 收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n I_n{}^p$ 绝对收敛。

当 $0<p\le 1$ 时，由于 $\left\{I_n^p\right\}$ 单调减少，并趋于 0，由莱布尼兹判别法，知 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n I_n{}^p$ 收敛；

而 $I_n{}^p>\left(\frac{1}{2(n+1)}\right)^p\ge\frac{1}{2^p}\frac{1}{n+1}$，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^p}\frac{1}{n+1}$ 发散，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n I_n{}^p$ 是条件收敛；

当 $p\le 0$ 时，则 $\left|I_n^p\right|\ge 1$，由级数收敛的必要条件，知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n I_n{}^p$ 发散。