符号定义

- $S_1 = \{x \mid 0 < x < 1 \ \wedge \ x \in R\}$
- $S_2 = \{x \mid 0 \le x < 1 \ \wedge \ x \in R\}$
- s_1：一个来自S_1的未知量
- s_2：一个来自S_2的未知量
- z：一个整数未知量
- n：一个自然数未知量

要求

即需要找到一个双射函数$F : N \times S_1 \to R$

构造过程

我们假设有下面这些双射的函数，在之后对于每一个函数我们都会给出一个具体的例子并且证明其是双射的

- $\Psi : Z \times S_2 \to R$
- $f : Z \times S_1 \to Z \times S_2$
- $g : N \times S_1 \to Z \times S_1$

这样一来，因为双射函数的复合还是双射函数，所以我们实质上就已经可以得到$F(< n, s_1 >) = \Psi\{f[g(< n, s_1 >)]\}$这个符合要求的函数了

下面分别给出Ψ, f, g三个函数的实例，并且证明其是双射的

$\Psi : Z \times S_2 \to R$

$\Psi(< z, s_2 >) = z + s_2$

下证其为单射函数：

即证对于$\forall x_1, x_2 \in Z$，$\forall y_1, y_2 \in S_2$，并且$x_1 + y_1 = x_2 + y_2$，有$x_1 = x_2, y_1 = y_2$

证：

不妨假设$x_1 < x_2$

由于x_1, x_2均为整数，所以有$x_1 + 1 \le x_2$

也就是$x_2-x_1\geq 1$，所以有$y_1-y_2=x_2-x_1\geq 1$

但是$y_1,y_2\in S_2$，也就是$0\leq y_1<1$，$0\leq y_2<1$

很容易得出：$y_1-y_2<1$，与$y_1-y_2\geq 1$产生了矛盾

所以假设不成立，也就是$x_1\geq x_2$

同理，有$x_1\leq x_2$，所以$x_1=x_2$，同时$y_1=y_2$

单射得证

下证其为满射函数：

对于$\forall r\in R$，都可以有$z=\lfloor r\rfloor,s_2=r-\lfloor r\rfloor$使$\Psi(<z,s_2>)=z+s_2=r$，其中$\lfloor x\rfloor$表示向下取整

满射得证

所以函数$\Psi(<z,s_2>)=z+s_2$是双射的

$f:Z\times S_1\to Z\times S_2$

我们按照书上的方法可以类似地构造出一个函数

定义集合$S'=\{(\frac{1}{2})^k\mid k=2,3,\cdots\}$

$$f(<z,s_1>)=\begin{cases}<z,2s_1> & s_1\in S'\\ <z,0> & s_1=\frac{1}{2}\\ <z,s_1> & others\end{cases}$$

首先证明这是单射：

假设$<z,y_1>=f(<z,x_1>),<z,y_2>=f(<z,x_2>)$

很容易看出如果$y_1=y_2=0$，那么一定有$x_1=x_2$

下面讨论$y_1y_2\neq 0$时

$0<x_1<x_2<1$但是$y_1=y_2$可以对应的结果有四种：$\begin{cases}2x_1=2x_2 & \wedge x_1\in S' & \wedge x_2\in S'\\ x_1=x_2 & \wedge x_1\notin S' & \wedge x_2\notin S'\\ x_1=2x_2 & \wedge x_1\notin S' & \wedge x_2\in S'\\ 2x_1=x_2 & \wedge x_1\in S' & \wedge x_2\notin S'\end{cases}$

这里前三种很明显有矛盾，而第四种情况，也就是$2x_1=x_2\wedge x_1\in S'\wedge x_2\notin S'$，由于$2x_1\in S'$，所以也是有矛盾的

因此单射得证

下证其为满射

对于任何一个$< z, s_2 >$，我们总可以找到$< z, s_1 >, s_1 = \begin{cases} \frac{1}{2} & s_2 = 0 \\ \frac{1}{2}s_2 & s_2 \in S' \\ s_2 & others \end{cases}$，使得

$f(< z, s_1 >) =< z, s_2 >$

满射得证

因此这个函数也是双射的

$g : N \times S_1 \to Z \times S_1$

定义$N_1' = \{2k+1 \mid k \in N\}$，也就是正奇数的集合

$N_2' = \{2k \mid k \in N_+\}$，也就是正偶数的集合

$g(< n, s_1 >) = \begin{cases} < 0, s_1 > & n = 0 \\ < -\frac{n+1}{2}, s_1 > & n \in N_1' \\ < \frac{n}{2}, s_1 > & n \in N_2' \end{cases}$

这个函数的双射很好看出，就不再证明了

至此，我们成功构造出了一个函数$F(< n, s_1 >) = \Psi\{f[g(< n, s_1 >)]\}$，其为
$N \times \{k \mid k \in R, 0 < k < 1\}$到$R$的双射

其中各个函数已经在前面构造过