北京交通大学 2019 年非数学专业大学生数学竞赛试题

（2019 年 6 月 22 日晚 7：00—9：30）

学院与班级__________ 学号___________姓名____________ 联系方式________

一、填空题（每小题 6 分，满分 30 分）

1．极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}=$________________ 。

2．定积分 $\int_0^2\left[\tan(x-1)^3+\sqrt{2x-x^2}\right]dx=$______________。

3. 设 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=2x+2z$，则曲面积分 $I=\oiint\limits_{\Sigma}\left[(x+y)^2+z^2+2yz\right]dS=$___________ 。

4．设函数 $f(u)$ 具有二阶连续的导数，$z=f\left(e^x\sin y\right)$，且满足 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=e^{2x}z$，则函数 $f(u)=$_______________。

5．设曲线积分 $I=\oint_L\dfrac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$，其中 L 是椭圆 $3x^2+4y^2=12$ 的边界，方向为逆时针方向，则 $I=$_______________。

二、（本题满分 10 分）设可微函数 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$，求

$$\lim_{t\to 0+}\frac{\int_0^t dx\int_{-\sqrt{t^2-x^2}}^{\sqrt{t^2-x^2}}\left[f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)+2y\right]dy}{t^3}。$$

三、（本题满分 10 分）设函数 $f(x,y,z)$ 在区域 Ω 内可微，且 $\sqrt{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)^2}\le M$，$A\left(x_1,y_1,z_1\right)$，$B\left(x_2,y_2,z_2\right)$ 是 D 内两点，线段 AB 包含在 Ω 内，证明：$\left|f\left(x_1,y_1,z_1\right)-f\left(x_2,y_2,z_2\right)\right|\le M\left|AB\right|$，其中 $\left|AB\right|$ 表示线段 AB 的长度。

四、（本题满分 10 分）计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2\right)dv$，其中 Ω 是由 $x^2+y^2+(z-2)^2\ge 4$，$x^2+y^2+(z-1)^2\le 9$，$z\ge 0$ 所围成的空心立体。

五、（本题满分 10 分）设函数 $f(x)$ 是以 $T(T>0)$ 为周期的连续函数，并且 $\int_0^T f(x)dx=k\ne 0$，若 $\lim\limits_{R\to+\infty}\dfrac{1}{R^\lambda}\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le R^2}f\left[\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]dV=C\ne 0$，求常数 λ，C。

六、（本题满分 10 分）设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有 n 阶连续导数，如果

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xf(x)dx = \cdots = \int_0^1 x^n f(x)dx = 0,$$

证明：存在 $\xi \in (0,1)$，使得 $f^{(n)}(\xi) = 0$。

七、（本题满分 10 分）设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上具有连续导数，且

$\left|f(x)\right| \le 1, f'(x) > 0, \forall x \in (-\infty,+\infty)$，

证明：对于 $0<\alpha<\beta$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_\alpha^\beta f'\left(nx-\dfrac{1}{x}\right)dx = 0$。

八、（本题满分 10 分）已知 $\{a_k\},\{b_k\}$ 是正项数列，且 $b_{k+1}-b_k \ge \delta, k=1,2\cdots$，$\delta$ 为一正常数，证明：若级数 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\dfrac{k\sqrt[k]{(a_1a_2\ldots a_k)(b_1b_2\ldots b_k)}}{b_{k+1}b_k}$ 收敛。

参考答案：

一、1．解：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x+\cos x-\cos x\sqrt{\cos 2x}+\cos x\sqrt{\cos 2x}-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}+\dfrac{\cos x(1-\sqrt{\cos 2x})}{x^2}+\dfrac{\cos x\sqrt{\cos 2x}(1-\sqrt[3]{\cos 3x})}{x^2}$

$=\dfrac{1}{2}+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(1-\sqrt{1+(\cos 2x-1)}\right)}{x^2}+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt[3]{1+(\cos 3x-1)}}{x^2}$

$=\dfrac{1}{2}+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 2x}{2x^2}+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 3x}{3x^2}=\dfrac{1}{2}+1+\dfrac{3}{2}=3$。

2．解：原式$=\int_{-1}^{1}\left[\tan t^3+\sqrt{1-t^2}\right]dt=\dfrac{\pi}{2}$。

3．**解**：$\Sigma: x^2+y^2+z^2=2x+2z \Rightarrow (x-1)^2+y^2+(z-1)^2 \le 2$。可知重心为 $(1,0,1)$，于是

$I=\oiint\limits_{\Sigma}\left[(x+y)^2+z^2+2yz\right]dS=\oiint\limits_{\Sigma}\left[x^2+y^2+z^2+2xy+2yz\right]dS=\oiint\limits_{\Sigma}(2x+2z)dS+2\oiint\limits_{\Sigma}(x+z)ydS$

$=2\left(\bar{x}+\bar{z}\right)\oiint\limits_{\Sigma}dS+0=32\pi$。

4、解：$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(f'(u)e^x\sin y\right)=\left[f''(u)e^x\sin y\right]e^x\sin y+f'(u)e^x\sin y$，

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(f'(u)e^x\cos y\right)=\left[f''(u)e^x\cos y\right]e^x\cos y-f'(u)e^x\sin y$；

两式相加得

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''(u)e^{2x}=e^{2x}z=e^{2x}f(u)$，

即满足方程 $f''(u)-f(u)=0\Rightarrow f(u)=C_1e^u+C_2e^{-u}$ 。

5. 解:$P=\frac{-y}{x^2+y^2},Q=\frac{x}{x^2+y^2}$，

注意到$\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{x^2+y^2-y\cdot 2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2},\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{x^2+y^2-x\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$

因此$(x,y)\neq(0,0),\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，因此，设$L^*:x^2+y^2=\varepsilon^2$逆时针方向，则

$$I=\oint_L\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\oint_{L^*}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\oint_{L^*}\frac{xdy-ydx}{\varepsilon^2}=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_D(1+1)\,d\sigma=\frac{1}{\varepsilon^2}2\pi\varepsilon^2=2\pi\text{ 。}$$

二、解：利用奇偶对称性，$\int_{-\sqrt{t^2-x^2}}^{\sqrt{t^2-x^2}}\left[f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)+2y\right]dy=2\int_0^{\sqrt{t^2-x^2}}f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)dy$

令$u=\sqrt{x^2+y^2}$，于是

$$2\int_0^{\sqrt{t^2-x^2}}f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)dy=2\int_x^t\frac{uf(u)}{\sqrt{u^2-x^2}}du$$

所以原式$=\lim\limits_{t\to 0+}\frac{2\int_0^t dx\int_x^t\frac{uf(u)}{\sqrt{u^2-x^2}}du}{t^3}=\lim\limits_{t\to 0+}\frac{2\int_0^t uf(u)du\int_0^u\frac{1}{\sqrt{u^2-x^2}}dx}{t^3}$

$=\lim\limits_{t\to 0+}\frac{\pi\int_0^t uf(u)du}{t^3}=\lim\limits_{t\to 0+}\frac{\pi tf(t)}{3t^2}=\frac{\pi}{3}$。

或者利用极坐标有

$$2\int_0^t\int_0^{\sqrt{t^2-x^2}} f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)dy = 2\int^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^t f(r)rdr = \pi\int_0^t f(r)rdr$$，于是

原式$=\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{\pi\int_0^t f(r)rdr}{t^3}=\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{\pi t f(t)}{3t^2}$

$=\dfrac{\pi}{3}$。

三、证明：方法 1： 设$\varphi(t)=f\left(x_1+t(x_2-x_1),y_1+t(y_2-y_1),z_1+t(z_2-z_1)\right)$，则$\varphi(t)$在$[0,1]$上可导，根据拉格朗日中值定理，存在$c\in(0,1)$，使得

$$\varphi(1)-\varphi(0)=\varphi'(c)(1-0)=\frac{\partial f}{\partial u}(x_2-x_1)+\frac{\partial f}{\partial v}(y_2-y_1)+\frac{\partial f}{\partial w}(z_2-z_1)\text{。}$$

于是

$$\left|\varphi(1)-\varphi(0)\right|=\left|f\left(x_1,y_1,z_1\right)-f\left(x_2,y_2,z_2\right)\right|=\left|\frac{\partial f}{\partial u}(x_2-x_1)+\frac{\partial f}{\partial v}(y_2-y_1)+\frac{\partial f}{\partial w}(z_2-z_1)\right|$$

$$\le\left[\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\left[\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2+\left(z_2-z_1\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\le M\left|AB\right|\text{。}$$

方法 2：

$$\left|f\left(x_1,y_1,z_1\right)-f\left(x_2,y_2,z_2\right)\right|$$

$$=\left|f\left(x_1,y_1,z_1\right)-f\left(x_2,y_1,z_1\right)+f\left(x_2,y_1,z_1\right)-f\left(x_2,y_2,z_1\right)+f\left(x_2,y_2,z_1\right)-f\left(x_2,y_2,z_2\right)\right|$$

$$=\left|\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\xi}(x_2-x_1)+\left.\frac{\partial f}{\partial v}\right|_{\eta}(y_2-y_1)+\left.\frac{\partial f}{\partial w}\right|_{\zeta}(z_2-z_1)\right|$$

$$\le\left[\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\left[\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2+\left(z_2-z_1\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\le M\left|AB\right|\text{。}$$

方法 3：

$$\left|f\left(x_1,y_1,z_1\right)-f\left(x_2,y_2,z_2\right)\right|$$

$$=\left|\int_A^B df\right|=\left|\int_A^B\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz\right|=\left|\int_A^B\left\{\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right\}.\vec{\tau}ds\right|$$，其中$\vec{\tau}$是单位切向量。

$$\le \int_A^B \left| \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right\} . \vec{\tau} \right| ds \le \int_{\overline{AB}} \left| \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right\} . \right| \left| \vec{\tau} \right| ds$$

$$\le \left[\left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial w} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\left(x_2 - x_1 \right)^2 + \left(y_2 - y_1 \right)^2 + \left(z_2 - z_1 \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \le M \left| AB \right| 。$$

四、 解法 **1**：

$$\Omega_1 : \begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta, y = r\sin\varphi\sin\theta, z - 1 = r\cos\varphi \\ 0 \le r \le 3, 0 \le \varphi \le \pi, 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases},$$

$$\iiint_{\Omega_1} \left(x^2 + y^2 \right) dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^3 r^2 \sin^2\varphi r^2 \sin\varphi dr = \frac{8}{15} 3^5 \pi = \frac{648\pi}{5}$$

$$\Omega_2 : \begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta, y = r\sin\varphi\sin\theta, z - 2 = r\cos\varphi \\ 0 \le r \le 2, 0 \le \varphi \le \pi, 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases},$$

$$\iiint_{\Omega_1} \left(x^2 + y^2 \right) dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^2 r^2 \sin^2\varphi r^2 \sin\varphi dr = \frac{8}{15} 2^5 \pi = \frac{256\pi}{15}$$

$$\Omega_3 : \begin{cases} x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, 1 - \sqrt{9 - r^2} \le z \le 0 \\ 0 \le r \le 2\sqrt{2}, 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases},$$

$$\iiint_{\Omega_3} \left(x^2 + y^2 \right) dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\sqrt{2}} r dr \int_0^{1-\sqrt{9-r^2}} r^2 dz = \left(124 - \frac{2}{5} 3^5 + \frac{2}{5} \right) \pi = \frac{136}{5} \pi$$

于是

原式$= \iiint_{\Omega_1} \left(x^2 + y^2 \right) dv - \iiint_{\Omega_2} \left(x^2 + y^2 \right) dv - \iiint_{\Omega_3} \left(x^2 + y^2 \right) dv = \frac{256\pi}{3}$。

解法 2：利用先二后一法

原式$= \int_0^4 dz \iint_{D_z : 4 - (z-2)^2 \le x^2 + y^2 \le 9 - (z-1)^2} x^2 + y^2 dxdy$

$$= \int_0^4 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\sqrt{4-(z-2)^2}}^{\sqrt{9-(z-1)^2}} r^2 r dr$$

$$= \int_0^4 2\pi \frac{1}{4} \left[\left(9 - (z-1)^2 \right)^2 - \left(4 - (z-2)^2 \right)^2 \right] dz$$

$$= 2\pi \int_0^4 16 + 8z - 7z^2 + z^3 dz$$

$=\dfrac{256\pi}{3}$。

五、解：其中 $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le R^2} f\left[\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]dV=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{R}f\left(r^3\right)r^2\sin\varphi dr$，

$=\dfrac{4\pi}{3}\int_0^{R}f(r^3)dr^3=\dfrac{4\pi}{3}\int_0^{R^3}f(t)dt$

注意到 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\int_0^{x}f(t)dt=\dfrac{1}{T}\int_0^{T}f(t)dt=\dfrac{k}{T}$ ，所以 $\lambda=3$。

从而 $\lim\limits_{R\to+\infty}\dfrac{1}{R^3}\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le R^2} f\left[\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]dV=\lim\limits_{R\to+\infty}\dfrac{\frac{4\pi}{3}\int_0^{R^3}f(t)dt}{R^3}=\dfrac{4k\pi}{3T}=C$

即 $\lambda=3, C=\dfrac{4k\pi}{3T}$。

六、证明：先证明函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内至少有 $n+1$ 个不同的零点。反证法，假设 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内不同零点个数少于 $n+1$ 个，则函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内的符号改变不超过 n 次，不妨设 $f(x)$ 在 $x_1,x_2,\cdots x_k$ 处改变符号，其中 $0<x_1<x_2<\cdots<x_k<1, k\le n$，由此可见，函数 $=\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)\cdots\left(x-x_k\right)f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上不变号，于是

$\int_0^1\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)\cdots\left(x-x_k\right)f(x)dx\ne 0$，

但根据已知条件 $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 xf(x)dx=\cdots=\int_0^1 x^n f(x)dx=0$，可以推出

$\int_0^1\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)\cdots\left(x-x_k\right)f(x)dx=0$，这显然矛盾！

所以函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内至少有 $n+1$ 个不同的零点，设 $0<x_1<x_2<\cdots<x_{n+1}<1$，$f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)=\cdots=f\left(x_{n+1}\right)=0$，由罗尔定理，存在 $0<\xi_1<\xi_2<\cdots<\xi_n<1$，其中 $x_k<\xi_k<x_{k+1},(k=1,2,\cdots,n)$，即 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内至少有 n 个不同的零点，如此递推，得

到 $f^{(n)}(x)$ 在 $(0,1)$ 内至少有 1 个零点。

七、证明：令 $y=x-\frac{1}{nx}$，$y'=1+\frac{1}{nx^2}>0$，故函数 $y(x)$ 在 $\left[\alpha,\beta\right]$ 上严格单调增加，记 $y(x)$ 的反函数为 $x(y)$，则 $x(y)$ 定义在区间 $\left[\alpha-\frac{1}{n\alpha},\beta-\frac{1}{n\beta}\right]$ 上，且

$x'(y)=y'(x)=\dfrac{1}{1+\frac{1}{nx^2}}>0$，于是

$\int\limits_{\alpha}^{\beta} f'\left(nx-\frac{1}{x}\right)dx=\int\limits_{n\alpha-\frac{1}{\alpha}}^{n\beta-\frac{1}{\beta}} f'\left(ny\right)x'(y)dy$，根据积分中值定理得

$\exists\xi_n\in\left[\alpha-\frac{1}{n\alpha},\beta-\frac{1}{n\beta}\right]$,

使得 $\int\limits_{n\alpha-\frac{1}{\alpha}}^{n\beta-\frac{1}{\beta}} f'\left(ny\right)x'(y)dy=\frac{x'\left(\xi_n\right)}{n}\left[f\left(n\beta-\frac{1}{\beta}\right)-f\left(n\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)\right]$

因此，$\left|\int\limits_{\alpha}^{\beta} f'\left(nx-\frac{1}{x}\right)dx\right|\le\frac{\left|x'\left(\xi_n\right)\right|}{n}\left[\left|f\left(n\beta-\frac{1}{\beta}\right)\right|+\left|f\left(n\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)\right|\right]\le\frac{2\left|x'\left(\xi_n\right)\right|}{n}$

注意到 $0<x'(y)=\dfrac{1}{1+\frac{1}{n\xi_n^2}}<1$，于是 $\left|\int\limits_{\alpha}^{\beta} f'\left(nx-\frac{1}{x}\right)dx\right|\le\frac{2}{n}$，即

$\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{\alpha}^{\beta} f'\left(nx-\frac{1}{x}\right)dx=0$。

八、证明：令 $S_k=\sum\limits_{i=1}^{k}a_ib_i$，则 $a_kb_k=S_k-S_{k-1}$，规定 $S_0=0$，于是 $a_k=\frac{S_k-S_{k-1}}{b_k}$。

$\sum\limits_{k=1}^{N}a_k=\sum\limits_{k=1}^{N}\frac{S_k-S_{k-1}}{b_k}=\sum\limits_{k=1}^{N-1}\left(\frac{S_k}{b_k}-\frac{S_k}{b_{k+1}}\right)+\frac{S_N}{b_N}=\sum\limits_{k=1}^{N-1}\frac{b_{k+1}-b_k}{b_kb_{k+1}}S_k+\frac{S_N}{b_N}\ge\sum\limits_{k=1}^{N-1}\frac{\delta}{b_kb_{k+1}}S_k$，所以

级数 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{S_k}{b_kb_{k+1}}$ 收敛。

由不等式 $\sqrt[k]{\left(a_1a_2\ldots a_k\right)\left(b_1b_2\ldots b_k\right)}\le\frac{a_1b_1+a_2b_2+\cdots a_kb_k}{k}=\frac{S_k}{k}$,

$$\frac{k\sqrt[k]{(a_1a_2\ldots a_k)(b_1b_2\ldots b_k)}}{b_{k+1}b_k}\le\frac{S_k}{b_{k+1}b_k},$$

由比较判别法知，级数$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k\sqrt[k]{(a_1a_2\ldots a_k)(b_1b_2\ldots b_k)}}{b_{k+1}b_k}$收敛。