

Comparação da ordem de convergência entre os Métodos de Euler, Euler Implícito e Trapézio Implícito para uma EDO particular

Manuel Esteban Ramírez Carrillo

manuel_ramirez@hotmail.com

Instituto de Matemática e Estatística - Universidade de São Paulo

Neste relatório apresentam-se três métodos de um passo: Euler explícito, Euler Implícito e o método do trapézio implícito, com o intuito de estudar seu comportamento e convergência para vários tamanhos de passo em um intervalo da solução de um sistema de duas equações diferenciais ordinárias lineares de primeira ordem.

I. Introdução

As equações diferenciais ordinárias (EDO's) estão entre as principais ferramentas matemáticas utilizadas na produção de modelos nas ciências físicas, biológicas e de engenharia [?]. Com frequência, não é possível encontrar uma solução explícita para uma EDO. Isto torna importante o recurso a ferramentas computacionais e à teoria dos métodos numéricos. Os métodos numéricos para uma equação de primeira ordem podem ser estendidos a um sistema de equações de primeira ordem. Além disso, uma equação diferencial de maior ordem pode ser reformulado como um sistema de equações de primeira ordem, ver [?].

Dentre os métodos numéricos desenvolvidos para o tratamento de ODEs, pode-se citar, por exemplo, o trabalho de Runge [?], sendo ponto de partida para os métodos modernos de passo único (*one-step methods*).

Este trabalho apresenta alguns resultados da aplicação de três métodos de passo único, aplicados a uma EDO particular, para analisar o comportamento e a convergência das soluções em relação ao tamanho do passo de integração. Uma breve descrição de cada método é dada na seguinte seção, seguida por uma descrição concisa da implementação numérica utilizada para estudar estes métodos. Depois, na seção IV, os resultados numéricos obtidos são mostrados com alguns gráficos e, finalmente, finalmente são apresentados dois procedimentos de estimativa da ordem de convergência a partir dos resultados numéricos.

II. Conceitos gerais

Nesta seção, apresentaremos brevemente os três métodos de uma etapa com os quais trabalharemos neste relatório.

Dado o seguinte problema de valor inicial (PVI) na forma normal:

$$\frac{y(t)}{dt} = f(t, y(t)) \quad \text{com} \quad y(t_0) = y_0, \quad (1)$$

definido em $[t_0, T] \subset \mathbb{R}$. Um método de passo único tem a forma geral:

$$\begin{cases} y_0 = y(x_0) \\ y(t_{k+1}) = y(t_k) + h\phi(t_k, t_{k+1}, y_k, y_{k+1}, h), \end{cases} \quad (2)$$

onde $k = 0, \dots, n-1$; $t_{k+1} = t_k + h$ e $h = (T - t_0)/n$. Sendo n o número de subintervalos de uma partição do intervalo $[t_0, T]$.

A. Método de Euler

O Método de Euler estima uma solução numérica a partir da noção básica de derivada, i. e., podemos aproximar $y'(t)$ por:

$$\frac{y(t)}{dt} \approx \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t}. \quad (3)$$

Como $\dot{y}(t)$ é igual a $f(t, y(t))$, por definição. Então o método de Euler é da seguinte forma:

$$y_{k+1} = y_k + h(t_k, y_k); \quad k = 0, \dots, n-1. \quad (4)$$

Para uma partição do intervalo $[t_0, T]$ em n subintervalos de tamanho $n = (T - t_0)/n$. Neste caso, $\phi(t_k, y_k) = f(t_k, y_k)$.

No método de Euler, cada aproximação da solução em cada passo é feita somente usando valores no instante imediatamente anterior, pelo que este método denomina-se também, método explícito.

Em seguida apresentaremos dois métodos que envolvem não apenas o termo anterior, mas também o termo do instante atual e são chamados de métodos implícitos.

B. Método de Euler Implícito

Neste método, a função de discretização $\phi(t_{k+1}, y_{k+1}) = f(t_{k+1}, y_{k+1})$ depende também do valor da solução aproximada no instante atual t_{k+1} e tem a forma

$$\begin{cases} y_0 = y(x_0) \\ y_{k+1} = y_k + hf(t_k, t_{k+1}), \end{cases} \quad (5)$$

C. Método do Trapézio Implícito

O processo iterativo do método do trapézio implícito é da forma

$$\begin{cases} y_0 = y(x_0) \\ y_{k+1} = y_k + h \left(\frac{f(t_k, y_k) + f(t_k, t_{k+1})}{2} \right), \end{cases} \quad (6)$$

Os dois últimos métodos implícitos apresentados impõem a necessidade de utilizar algum outro método para aproximar y_{k+1} em cada passo de integração, pois este também está presente no segundo membro da equação do método.

Portanto, neste trabalho, estes dois últimos métodos serão tratados em conjunto com o método do ponto fixo.

D. Método do Ponto Fixo

Um numero $p \in \mathbb{R}$ é um ponto fixo de uma função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, se $g(p) = p$. Além disso, se definirmos a relação de recorrência

$$x_{i+1} = g(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (7)$$

onde x_0 é uma aproximação inicial da raiz da função $f(x) = g(x) - x = 0$.

A expressão anterior pode ser usada para aproximar a raiz da função f , sempre que exista um ponto fixo para g .

Neste artigo não aprofundaremos teoricamente a convergência deste método, mas apenas as provas nos exemplos numéricos que serão apresentados na próxima seção.

III. Implementação dos métodos

O algoritmo para os métodos foi implementado na linguagem *Python* em um arquivo único. Os gráficos foram gerados usando a biblioteca *matplotlib* do *Python*.

A. Funções do programa

Abaixo segue um breve resumo do conteúdo das principais funções do códigos fonte do programa.

Tarefa2.py: Contem todas as funções que realizam os métodos numéricos no programa. Um pedaço de sua interface é apresentado a seguir:

Função do método de Euler

```
# METODO DE EULER
def Euler(vt,vy0,dt):
    Metodo de Euler
    # vt: vetor tempo, vy0: vetor inicial, dt:
    tamanho passo
    ys=vy0.copy()
    #
    # inicializacao vetor solucao
    for i in range(len(vt)-1):
        ys.append(ys[i]+dt*f(vt[i],ys[i]))
    return np.array(ys)
```

Função do Método de Euler Implícito

```
# METODO EULER IMPLICITO
def EulerImp(vt,vy0,dt):
    iteracoes ponto fixo
    # vt: vetor tempo, vy0: vetor inicial, dt:
    tamanho passo
    npf=6
    ys=vy0.copy()
    for i in range(len(vt)-1):
        y0_pf=ys[-1]+dt*f(vt[i],ys[-1])
        chute inicial(usando Euler) para
        usar ponto fixo
        yPonFix=y0_pf.copy()
        #
        Inicio Metodo ponto fixo
```

```
for j in range(npf):
    yPonFix=ys[-1]+dt*f(vt[i]+dt,
        yPonFix)
    ys.append(yPonFix)
    #
    Fim Metodo ponto Fixo
return np.array(ys)
```

Função do Método do Trapézio Implícito

```
# METODO TRAPEZIO IMPLICITO
def TraImp(vt,vy0,dt):
    npf=6
    ys=vy0.copy()
    for i in range(len(vt)-1):
        y0_pf=ys[-1]+dt*f(vt[i],ys[-1])
        chute inicial(usando Euler) para
        usar ponto fixo
        yPonFix=y0_pf.copy()
        #
        Inicio Metodo ponto fixo
        for j in range(npf):
            yPonFix=ys[-1]+dt*(f(vt[i],ys[-1])
                +f(vt[i]+dt,yPonFix))/2
            ys.append(yPonFix)
            # Fim
            Metodo ponto Fixo
        return np.array(ys)
```

B. Parâmetros e execução do programa

O programa inicia, pedindo para escolher o método a ser utilizado e o tempo final T , onde o intervalo de solução é $[t_0, T]$. Em seguida, a saída do programa são dois diagramas que mostram as soluções reais e numéricas para alguns valores de passos de integração e uma tabela com os valores de erro e uma aproximação da ordem de convergência.

Nos métodos Euler e trapezoidal implícito, o número de iterações feitas utilizando o método do ponto fixo foi 6 e como chute inicial usou-se o método de Euler. Vale lembrar, entretanto, que os resultados obtidos usando o método de ponto fixo convergiram somente para valores de h muito pequenos e mais rapidamente para o método do trapézio.

Para validar o código numérico para aplicações reais, foram usados tamanhos de passo $h = (T - t_0)/2^m$, com $m = 5, 6, 7, \dots, 15$. Conforme este m aumentava, as aproximações melhoravam, mas com um custo no tempo de execução. Portanto, optou-se por utilizar apenas o conjunto de valores mencionados acima. Além disso, foi considerada uma EDO com solução analítica conhecida que se apresentara na seguinte seção.

IV. Exemplos Numéricos

Em todos os exemplos a seguir, é considerado o seguinte problema de Cauchy:

$$\begin{cases} x' = y, & x(\sqrt{\pi}) = 0 \\ y' = y/t - 4t^2x, & y(\sqrt{\pi}) = -2\sqrt{\pi}, \end{cases} \quad (8)$$

com $t \in [\sqrt{\pi}, T]$. Com solução exata dada por

$$(x(t), y(t)) = (\sin(t^2), 2t\cos(t^2)), \quad t \in [\sqrt{\pi}, T]. \quad (9)$$

A. Problema de Cauchy com solução exata conhecida

Neste caso, os instantes $T = 3$ e $T = 5$ foram considerados para calcular a ordem de convergência em cada método. Além disso, a estratégia de verificação por solução manufaturada é usada (ver [?]).

Apresentaremos tabelas com os erros globais variando o tamanho do passo de integração $h = (T - \sqrt{\pi})/2^m$, $m = 5, 6, 7, \dots, 15$.

Para o cálculo do erro global, em todos os exemplos numéricos desta seção (A), foi utilizada a norma do máximo, ou seja, dado $e(t, h) = (e_x(t, h), e_y(t, h))$, então para h e t fixos,

$$\|e(t, h)\| = \max\{|e_x(t, h)|, |e_y(t, h)|\}. \quad (10)$$

1. Resultados do Método de Euler

As Figuras 1 e 2 mostram o comportamento das soluções numéricas para as variáveis x e y , respectivamente, para uma partição de $n = 32, 512, 2048$ do intervalo solução $[\sqrt{\pi}, 5]$. Como se pode ver, à medida que t aumenta, as soluções numéricas começam a ficar piores.

Aplicando o Método Euler e considerando um instante fixo $T = 3$, ver Tabela I, notamos que à medida que n cresce, ou seja, o valor de h diminui, observamos uma diminuição do erro, também o quociente q entre erros considerando um passo de tamanho $2h$ e h , vai para 2, o que nos faz perceber um crescimento linear do tamanho do passo em relação ao erro. Também pela teoria da expansão assintótica do erro, ver [?], temos que a ordem de convergência p deste método pode ser aproximada como

$$p \approx \log_2 \frac{\|e(t, 2h)\|}{\|e(t, h)\|}. \quad (11)$$

As Tabelas I e II mostram uma estimativa do valor de $p \approx 1$ y como os erros variam em função do tamanho de passo de integração h para os instantes $T = 3$ e $T = 5$ respetivamente.

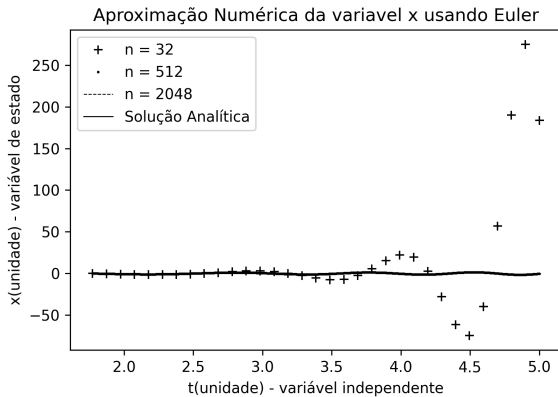


Figura 1: Aproximações numéricas da variável x no intervalo $[\sqrt{\pi}, 5]$ para o Método de Euler.

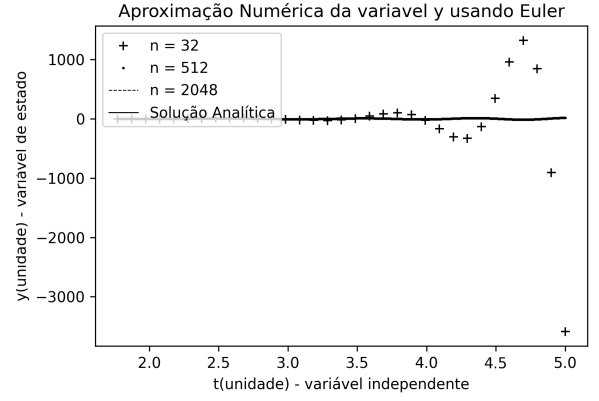


Figura 2: Aproximações numéricas da variável y no intervalo $[\sqrt{\pi}, 5]$ para o Método de Euler.

n	$\ e(t, h)\ $	$q = \frac{\ e(t, 2h)\ }{\ e(t, h)\ }$	$\log_2(q)$
32	2.990645374		
64	1.471219698	2.032765995	1.023444147
128	0.71758463	2.050238587	1.035791807
256	0.353200997	2.031660826	1.022659572
512	0.175091685	2.017234558	1.012378846
1024	0.087156235	2.008940442	1.006434794
2048	0.043479254	2.004547604	1.003276679
4096	0.021714734	2.002292727	1.001652906
8192	0.010851122	2.001151042	1.000830063
16384	0.005423997	2.000576684	1.00041593
32768	0.002711607	2.000288632	1.000208189

Tabela I: Estimação da ordem de convergência do Método de Euler no instante $T = 3$, para o PVI com solução conhecida.

n	$\ e(t, h)\ $	$q = \frac{\ e(t, 2h)\ }{\ e(t, h)\ }$	$\log_2(q)$
32	3595.491729		
64	66.29462666	54.23504	5.761153339
128	49.89709896	1.328626875	0.409936002
256	16.04842414	3.109158788	1.636524298
512	6.281958983	2.554684643	1.353145212
1024	2.779297721	2.260268461	1.176494138
2048	1.307932377	2.124955212	1.087432434
4096	0.634572891	2.061122364	1.043430157
8192	0.312563997	2.030217483	1.021634282
16384	0.155116888	2.015022354	1.010795844
32768	0.077269089	2.007489531	1.005392464

Tabela II: Estimação da ordem de convergência do Método de Euler no instante $T = 5$, para o PVI com solução conhecida.

2. Resultados do Método de Euler Implícito

O método de Euler implícito parece apresentar melhores resultados em comparação com o método Euler, isto pode ser visto nas Figuras 3 e 4. O que pode ser visto mais claramente nas Tabelas III e IV, onde os erros são menores em comparação com o método do Euler para os mesmos instantes fixos $T = 3$ e $T = 5$. Como a análise feita acima, estas tabelas nos permitem fazer uma estimativa da ordem de convergência do método de Euler e implícito, sendo também aproximadamente $p = 1$.

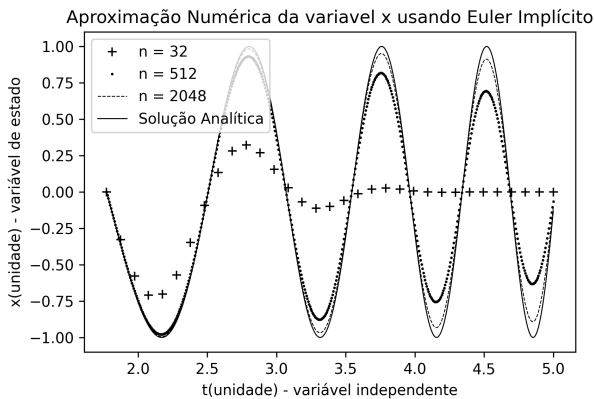


Figura 3: Aproximações numéricas da variável x no intervalo $[\sqrt{\pi}, 5]$ para o Método de Euler Implícito.

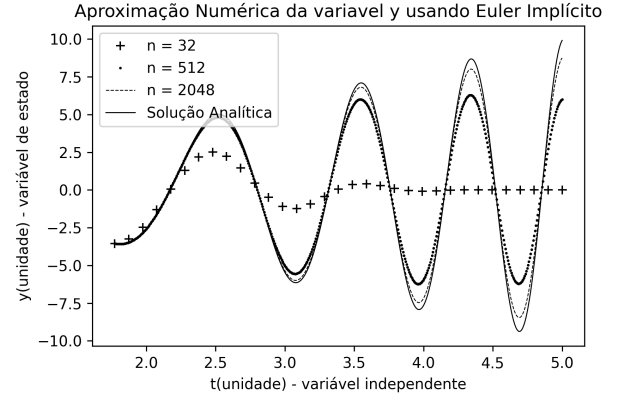


Figura 4: Aproximações numéricas da variável y no intervalo $[\sqrt{\pi}, 5]$ para o Método de Euler Implícito.

n	$\ e(t, h)\ $	$q = \frac{\ e(t, 2h)\ }{\ e(t, h)\ }$	$\log_2(q)$
32	2.303830288		
64	1.274448459	1.807707697	0.854161415
128	0.666786808	1.911328245	0.934575563
256	0.340400628	1.958829548	0.969991864
512	0.171885276	1.980394342	0.985787733
1024	0.086354238	1.99046718	0.993107083
2048	0.04327873	1.995304326	0.996608805
4096	0.021664602	1.997670257	0.998318466
8192	0.010838589	1.998839704	0.99916278
16384	0.005420864	1.999421002	0.999582281
32768	0.002710824	1.999710789	0.999791364

Tabela III: Estimação da ordem de convergência do Método de Euler Implícito no instante $T = 3$, para o PVI com solução conhecida.

n	$\ e(t, h)\ $	$q = \frac{\ e(t, 2h)\ }{\ e(t, h)\ }$	$\log_2(q)$
32	9.912027698		
64	9.765861212	1.014967086	0.021432944
128	8.592104495	1.136608757	0.184735736
256	6.28347663	1.367412501	0.45144852
512	3.90395348	1.609516267	0.686627158
1024	2.189137223	1.783329724	0.834573471
2048	1.160669414	1.886098829	0.915405273
4096	0.597774563	1.941650725	0.957283704
8192	0.303365505	1.970476387	0.978544461
16384	0.152817333	1.985151151	0.989248859
32768	0.076694205	1.992553848	0.994618713

Tabela IV: Estimação da ordem de convergência do Método de Euler Implícito no instante $T = 5$, para o PVI com solução conhecida.

3. Resultados do Método do Trapézio Implícito

O método do trapézio implícito mostrou a maior eficiência na reconstrução da solução. As Figuras 5 e 6 apresentam os diagramas comparando as soluções exatas e aproximadas para $n = 32, 512, 2048$.

No que lhe concerne, as Tabelas V e VI estimam a ordem de convergência deste método, que é aproximadamente $p = 2$, o que explica a maior precisão mostrada nas soluções aproximadas.

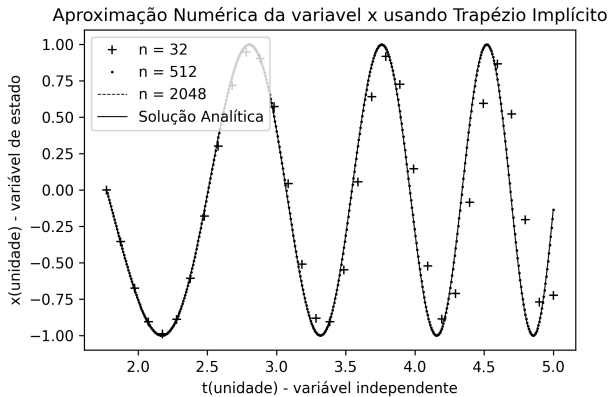


Figura 5: Aproximações numéricas da variável x no intervalo $[\sqrt{\pi}, 5]$ para o Método do Trapézio Implícito.

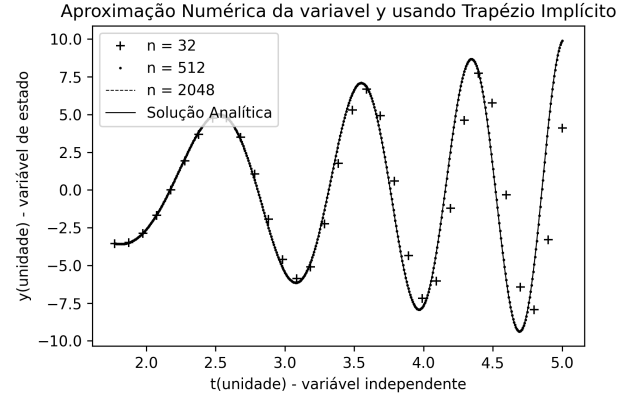


Figura 6: Aproximações numéricas da variável y no intervalo $[\sqrt{\pi}, 5]$ para o Método de Euler Implícito.

n	$\ e(t, h)\ $	$q = \frac{\ e(t, 2h)\ }{\ e(t, h)\ }$	$\log_2(q)$
32	0.077050622		
64	0.019291708	3.993976112	1.997825704
128	0.004824726	3.998508761	1.999462049
256	0.001206293	3.999628791	1.999866108
512	0.00030158	3.999907321	1.999966573
1024	0.000075396	3.999976839	1.999991646
2048	0.000018849	3.999994209	1.999997911
4096	0.000004712	3.999998538	1.999999473
8192	0.000001178	3.999999607	1.999999858
16384	0.000000295	4.000000238	2.000000086
32768	0.000000074	4.000001122	2.000000405

Tabela V: Estimação da ordem de convergência do Método do Trapézio Implícito no instante $T = 3$, para o PVI com solução conhecida.

n	$\ e(t, h)\ $	$q = \frac{\ e(t, 2h)\ }{\ e(t, h)\ }$	$\log_2(q)$
32	5.799582249		
64	1.015490991	5.711111473	2.513771544
128	0.206736202	4.912013372	2.296314488
256	0.048430371	4.268730535	2.093807095
512	0.011899117	4.070080973	2.025057497
1024	0.002961667	4.017709857	2.006373382
2048	0.000739596	4.004439513	2.001600328
4096	0.000184848	4.001110636	2.000400522
8192	0.000046209	4.000277707	2.000100158
16384	0.000011552	4.000069431	2.000025042
32768	0.000002888	4.000017488	2.000006307

Tabela VI: Estimação da ordem de convergência do Método do Trapézio Implícito no instante $T = 5$, para o PVI com solução conhecida.

B. Problema de Cauchy genérico

Nesta seção de exemplos, serão realizadas aproximações numéricas da ordem de convergência dos métodos: Euler, Euler implícito e Trapézio, no problema de Cauchy (8), sem considerar a solução analítica como mostrado na seção 2.3.3 em [?]. Ou seja, dado T fixo e $h2^m = (T - \sqrt{\pi})$, $m = 5, 6, 7, \dots, 15$ o tamanho de passo de integração do método usado. Se $\tilde{y}(t, h2^i)$, $\tilde{y}(t, h2^{i-1})$, $\tilde{y}(t, h/2^{i-2})$ são as soluções numéricas correspondentes aos passos de integração em $h2^i$, $h2^{i-1}$ e $h2^{i-2}$ para $i = 7, 8, 9, \dots, 15$ correspondentemente. Então, uma estimativa para a ordem de convergência do método usado, é dada por:

$$\tilde{p} = \log_2 \left(\frac{\|\tilde{y}(t, h2^i) - \tilde{y}(t, h2^{i-1})\|}{\|\tilde{y}(t, h2^{i-1}) - \tilde{y}(t, h2^{i-2})\|} \right). \quad (12)$$

Onde, $\|\cdot\|$, denota a norma do máximo.

A seguir, os resultados obtidos para cada um dos métodos mencionado são mostrados.

1. Resultados para o Método de Euler

A Tabela VII, mostra estimativas da ordem de convergência do Método de Euler, para o instante fixo $T = 3$, considerando uma partição de $n = 2^m$ subintervalos do intervalo $[\sqrt{\pi}, T]$. Os resultados sugerem que a ordem de convergência do Método de Euler tende para 1, sendo esta, a ordem de convergência prevista pela teoria à medida que o passo de integração se aproxima de zero.

n	h	$\tilde{y}(t, h)$	\tilde{p}
32	0.03836	(0.93586, -8.45743)	
64	0.01918	(0.61651, -6.93800)	
128	0.00959	(0.50189, -6.18437)	1.01E + 00
256	0.0048	(0.45416, -5.81998)	1.05E + 00
512	0.0024	(0.43246, -5.64187)	1.03E + 00
1024	0.0012	(0.42212, -5.55394)	1.02E + 00
2048	0.0006	(0.41708, -5.51026)	1.01E + 00
4096	0.0003	(0.41459, -5.48850)	1.00E + 00
8192	0.00015	(0.41335, -5.47763)	1.00E + 00
16384	0.00007	(0.41273, -5.47221)	1.00E + 00
32768	0.00004	(0.41243, -5.46949)	1.00E + 00

Tabela VII: Estimação da ordem de convergência do Método de Euler no instante $T = 3$, para o PVI genérico.

Por outro lado, a Tabela VIII, considera o instante de tempo $T = 5$, e estima também, uma ordem de convergência de 1. Onde, além disso, podemos perceber que para $n = 256$, obtemos um valor negativo para a estimativa numérica de $\tilde{p} = -1.34 \times 10^{-3}$, o que não é preocupante, uma vez que \tilde{p} tende ao valor esperado 1 à medida que h se aproxima de zero.

Estas estimativas são as mesmas que as obtidas no caso em que se considerou a solução exata para calcular a ordem de convergência p usando a solução exata (seção IV A).

n	h	$\tilde{y}(t, h)$	\tilde{p}
32	0.10086	(183.56335, -3585.57970)	
64	0.05043	(-37.44513, 76.20665)	
128	0.02522	(-3.62784, 59.80913)	6.76E + 00
256	0.01261	(-0.74186, 25.96045)	-1.34E - 03
512	0.0063	(-0.31085, 16.19399)	1.79E + 00
1024	0.00315	(-0.20111, 12.69133)	1.48E + 00
2048	0.00158	(-0.16262, 11.21996)	1.25E + 00
4096	0.00079	(-0.14657, 10.54660)	1.13E + 00
8192	0.00039	(-0.13924, 10.22459)	1.06E + 00
16384	0.0002	(-0.13574, 10.06715)	1.03E + 00
32768	0.0001	(-0.13403, 9.98930)	1.02E + 00

Tabela VIII: Estimação da ordem de convergência do Método de Euler no instante $T = 5$, para o PVI genérico.

2. Resultados para o Método de Euler Implícito

Considerando o instante fixo $T = 3$. Utilizando as soluções numéricas, obtemos uma estimativa da ordem de convergência do método de Euler Implícito, obtemos $\tilde{p} = 1$, ver Tabela IX, como esperado, sendo este valor o mesmo, comparado com o resultado encontrado na Tabela III do exemplo análogo.

n	h	$\tilde{y}(t, h)$	\tilde{p}
32	0.03836	(0.22252, -3.16295)	
64	0.01918	(0.29075, -4.19233)	
128	0.00959	(0.34306, -4.79999)	$7.60E - 01$
256	0.0048	(0.37526, -5.12638)	$8.97E - 01$
512	0.0024	(0.39307, -5.29490)	$9.54E - 01$
1024	0.0012	(0.40244, -5.38043)	$9.78E - 01$
2048	0.0006	(0.40724, -5.42350)	$9.90E - 01$
4096	0.0003	(0.40967, -5.44512)	$9.95E - 01$
8192	0.00015	(0.41089, -5.45594)	$9.97E - 01$
16384	0.00007	(0.41150, -5.46136)	$9.99E - 01$
32768	0.00004	(0.41181, -5.46407)	$9.99E - 01$

Tabela IX: Estimação da ordem de convergência do Método de Euler Implícito no instante $T = 3$, para o PVI genérico.

Entretanto, a Tabela X, também mostra um resultado esperado, $\tilde{p} = 1$, da ordem de convergência do método de Euler Implícito, conforme h tende a zero, para $T = 5$; comparado com o exemplo análogo, veja a Tabela IV.

n	h	$\tilde{y}(t, h)$	\tilde{p}
32	0.10086	(0.00000, 0.00000)	
64	0.05043	(-0.01449, 0.14617)	
128	0.02522	(-0.03067, 1.31992)	$-3.01E + 00$
256	0.01261	(-0.04251, 3.62855)	$-9.76E - 01$
512	0.0063	(-0.06536, 6.00807)	$-4.36E - 02$
1024	0.00315	(-0.09035, 7.72289)	$4.73E - 01$
2048	0.00158	(-0.10871, 8.75136)	$7.38E - 01$
4096	0.00079	(-0.11979, 9.31425)	$8.70E - 01$
8192	0.00039	(-0.12588, 9.60866)	$9.35E - 01$
16384	0.0002	(-0.12906, 9.75921)	$9.68E - 01$
32768	0.0001	(-0.13069, 9.83533)	$9.84E - 01$

Tabela X: Estimação da ordem de convergência do Método de Euler Implícito no instante $T = 5$, para o PVI genérico.

3. Resultados para o Método do Trapézio Implícito

Como último caso, mostramos nas Tabelas XI e VIII, uma estimativa da ordem de convergência do método do Trapézio para os instantes $T = 3$ e $T = 5$, sendo esta ordem $\tilde{p} = 2$, quando h tende a zero; o que se enquadra nos resultados obtidos nos respectivos casos análogos da seção anterior IV A, ver Tabelas V e VI.

n	h	$\tilde{y}(t, h)$	\tilde{p}
32	0.03836	(0.42495, -5.38973)	
64	0.01918	(0.41537, -5.44749)	
128	0.00959	(0.41293, -5.46196)	$2.00E + 00$
256	0.0048	(0.41232, -5.46558)	$2.00E + 00$
512	0.0024	(0.41217, -5.46648)	$2.00E + 00$
1024	0.0012	(0.41213, -5.46671)	$2.00E + 00$
2048	0.0006	(0.41212, -5.46676)	$2.00E + 00$
4096	0.0003	(0.41212, -5.46678)	$2.00E + 00$
8192	0.00015	(0.41212, -5.46678)	$2.00E + 00$
16384	0.00007	(0.41212, -5.46678)	$2.00E + 00$
32768	0.00004	(0.41212, -5.46678)	$2.00E + 00$

Tabela XI: Estimação da ordem de convergência do Método do Trapézio Implícito no instante $T = 3$, para o PVI genérico.

n	h	$\tilde{y}(t, h)$	\tilde{p}
32	0.10086	(-0.72337, 4.11245)	
64	0.05043	(-0.36173, 8.89654)	
128	0.02522	(-0.19405, 9.70529)	$2.56E + 00$
256	0.01261	(-0.14803, 9.86360)	$2.35E + 00$
512	0.0063	(-0.13629, 9.90013)	$2.12E + 00$
1024	0.00315	(-0.13334, 9.90907)	$2.03E + 00$
2048	0.00158	(-0.13260, 9.91129)	$2.01E + 00$
4096	0.00079	(-0.13241, 9.91184)	$2.00E + 00$
8192	0.00039	(-0.13237, 9.91198)	$2.00E + 00$
16384	0.0002	(-0.13236, 9.91202)	$2.00E + 00$
32768	0.0001	(-0.13235, 9.91203)	$2.00E + 00$

Tabela XII: Estimação da ordem de convergência do Método do Trapézio Implícito no instante $T = 5$, para o PVI genérico.

V. Conclusões

O objetivo deste trabalho foi estudar a convergência de três métodos numéricos (Euler, Euler Implícito e Tra-

p  zio Implícito), aplicados a um determinado problema com soluço analítica.

Mediante exemplos numéricos, estes métodos foram comparados para um intervalo contendo a soluço e também os erros para os instantes $T = 3$ e $T = 5$. Primeiro, as ordens de convergência foram estimadas considerando

a soluço exata e depois, outro procedimento foi realizado sem considerar a soluço analítica. Em todos os casos, comportamentos similares foram obtidos   medida que o tamanho do passo de integra  o se aproximava de zero.

-
- [1] Alexandre Megiorin Roma, Joyce Da Silva Bevilacqua, and Rudimar Luiz Nós. *Métodos para a soluço numérica de equa  es diferenciais ordinárias a valores iniciais-Notas de Aula*. Br, IME- USP, 2020.
 - [2] C. Runge. Ueber die numerische Aufl  sung von Differentialgleichungen. *Mathematische Annalen*, 46:1432–1807, 1895.
 - [3] Richard L. WBurden and J. Douglas Faires. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. PWS-Kent Publishing Company, Boston,USA, 1989.
 - [4] Douglas B. Meade William E. Boyce, Richard C. Di-Prima. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. Wiley, Hoboken, NJ, 2011.