15 Дискретные случайные величины (биномиальное распределение, распределение Пуассона, равномерное распределение) и их характеристики

дискретная случайная величина

рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega,\ \mathfrak{A},\ P)$.
ℵ случайная величина ξ — функция, ставящая в соответствие каждому элементарному исходу ω число $\xi = \xi(\omega)$.
для того, чтобы такое определение было математически корректным, необходимо добавить следующее требование: для любого числа x множество $\{\omega : \xi(\omega) < x\}$ элементарных исходов ω, для которых $\xi(\omega) < x$, является событием, или, иными словами, принадлежит σ-алгебре $\mathfrak{A}$. это свойство называется измеримостью функции $\xi = \xi(\omega)$ относительно σ-алгебры $\mathfrak{A}$.

получается, что случайная величина — это просто какая-то функция, заданная на пространстве элементарных исходов Ω и измеримая относительно σ-алгебры $\mathfrak{A}$. случайные величины принято обозначать греческими буквами $(\xi,\ \eta,\ \mu)$ и при необходимости добавлять индексы. также для краткости вместо $\{\omega : \xi(\omega) < x\}$ пишут $\{\xi(\omega) < x\}$, если необходимо подчеркнуть связь случайной величины с пространством элементарных исходов Ω, или даже просто $\{\xi < x\}$, если ничего подчеркивать не надо.

ℵ функция распределения случайной величины ξ — такая функция $F(x)$, значение которой в точке x равно

вероятности события $\{\xi < x\}$, т. е. события, состоящего только из тех элементарных исходов ω, для которых $\xi(\omega) < x$
:

$$F(x) = P(\xi < x)$$

рассмотрим дискретное вероятностное пространство: множество элементарных исходов Ω — дискретное, т. е. счетное или конечное.

$(\Omega,\ \mathfrak{A},\ P)$
$\Omega = \{\omega_i\}_{i \in I}$
$\{X_i\}_{i \in I}$ — возможные значения случайной величины.
$\xi(\omega_i)$ — случайная величина.

ℵ дискретной называется случайная величина, которая каждому элементарному исходу ω ставит в соответствие одно из конечного (в общем случае счетного) набора чисел $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n$.

ℵ $\{X_i,\ P_i\}_{i \in I}$ — закон распределения дискретной случайной величины. закон распределения характеризует случайную величину. его также можно представить в виде таблицы.

вот определение из учебника:
ℵ рядом распределения (вероятностей) случайной величины называется таблица, состоящая из двух строк: в верхней строке перечислены все возможные значения случайной величины, а в нижней — вероятности $p_i = P\{\xi = X_i\}$ того, что случайная величина примет эти значения.

ξ	X_1	X_2	$\dots$	X_i	$\dots$	X_n
P	p_1	p_2	$\dots$	p_i	$\dots$	p_n

еще одно определение дискретной случайной величины:

пусть задано дискретное вероятностное пространство (множество элементарных исходов дискретно): $\Omega = \{\omega_i\}_{i\in I}$

$P(x_i) = \sum\limits_{j\in I} P(\omega_j : \xi(\omega_j) = x_i) \neq 0$ - несколько событий могут отобразиться в один x_i

Тогда СВ **дискретна** и задаётся парами $\{x_i, P_i\}_{i\in I}$

Пример задания ДСВ:

ξ	0	1
P	0.5	0.5

матожидание

ℵ математическое ожидание (среднее значение) M_ξ дискретной случайной величины ξ — сумма произведений значений X_i случайной величины на вероятности $p_i = P(\xi = X_i)$, с которыми величина принимает эти значения:

$$M(\xi) = \sum_i X_i p_i$$

при этом, если случайная величина ξ принимает счетное число значений, то необходимо, чтобы

$$\sum_{i=1}^{\infty} |X_i| p_i < \infty$$

то есть ряд должен сходиться абсолютно. в ином случае говорят, что матожидания не существует.

математическое ожидание — это такое среднее значение случайной величины. в физике это центр тяжести какого-то объекта или набора объектов.

для биномиального распределения $M(\xi) = np$, для пуассоновского — $M(\xi) = \lambda$.

дисперсия

ℵ дисперсия — числовая характеристика случайной величины, показывающая «разброс» этой величины вокруг ее среднего значения.

здесь, несмотря на порядок вопросов в билетах, нужно понятие второго (начального) момента дискретной случайной величины:

$$\alpha_2 = M(\xi^2) = \sum_i X_i^2 p_i$$

дисперсия дискретной случайной величины определяется по формуле:

$$D(\xi) = M(\xi - M(\xi))^2 = \sum_i (X_i - M(\xi))^2 p_i$$

равномерное распределение

ℵ случайная величина ξ имеет равномерное распределение на множестве $\{1, \ldots, n\}$, если вероятность всех значений равна $\frac{1}{n}$.

$$P(\xi = k) = \frac{1}{n}, \quad \text{где } k = 1, \ldots, n$$

биномиальное распределение

ℵ дискретная случайная величина ξ распределена по биномиальному закону, если она принимает значения $0,\ 1,\ \ldots,\ n$ в соответствии со следующим правилом:
$0 < p < 1, \quad k \in \{0,\ 1,\ \ldots,\ n\}$

$$P(\xi = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

биномиальное распределение — распределение числа успехов в испытаниях Бернулли с вероятностью успеха p и неудачи $1-p$.

математическое ожидание для биномиального распределения:

$$M_\xi = np$$

распределение Пуассона

ℵ дискретная случайная величина ξ распределена по закону Пуассона с параметром пуассоновского распределения $\lambda > 0$, если она принимает целые неотрицательные значения по следующему правилу:
$\xi \in \{0,\ 1,\ \ldots,\ n\}$

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$$

доказательство того, что это выражение является законом распределения. для этого нужно доказать, что сумма вероятностей случайных величин равна 1 (т. е. что $\sum P = 1$).
$P_k \geq 0$, т. к. $k! > 0$, $\lambda^k > 0$ и $e^{-\lambda} > 0$.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}}_{=e^{\lambda}} = e^0 = 1$$

$\sum P = 1 \Rightarrow$ подходит для закона распределения. ура!

примечание для тех, кто не понял, почему оно равно e^{λ}:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

это разложение в ряд Тейлора.

замечание

если в какой-то задаче $n \cdot p \cdot q \leq 9$, то следует применить закон распределения Пуассона.