18 Транспортная задача в матричной постановке. Метод потенциалов для решения транспортной задачи. Особенности решения транспортной задачи с дополнительными условиями

7.1 постановка транспортной задачи (ТЗ). открытая и замкнутая ТЗ

дано:
m складов
n магазинов

товар хранится на складах и развозится по магазинам.

каждому складу соответствует a_i — запас товара на i-том складе $(i \in 1..m)$.

каждому магазину соответствует b_j — потребность j-того магазина в товаре $(j \in 1..n)$.

c_{ij} — стоимость перевозки единицы товара со склада i в магазин j.

x_{ij} — объем перевозки.

таблица:

склад/магазин	b_1	b_2	...	b_n
a_1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1n}

склад/магазин	b_1	b_2	...	b_n
a_2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2n}
...	...	...	...	...
a_m	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mn}

пример

склад/магазин	12	13
10	2	3
15	4	1

решения:

$$\begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 12 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 2 & 13 \end{pmatrix}$$

какое лучше?
посчитаем стоимости:

$$\begin{pmatrix} 0 & 30 \\ 48 & 3 \end{pmatrix} = 81 \quad \begin{pmatrix} 20 & 0 \\ 8 & 13 \end{pmatrix} = 41$$

второе решение более выгодное.

матмодель

целевая функция — суммарная стоимость перевозок.

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \ i \in 1..m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ j \in 1..n$$

$$x_{ij} \geq 0$$

$$\sum a_i = \sum b_j = Q \qquad (*)$$

когда объемы сбалансированы (см. равенство выше), транспортная задача называется замкнутой (закрытой). иначе задача называется незамкнутой.

любую задачу можно свести к замкнутой.

1. избыток товара на складе

пусть $\sum a_i > \sum b_j$. тогда добавим фиктивный магазин с номером $n+1$, для которого $b_{n+1} = \sum a_i - \sum b_j$. стоимость перевозки в этот магазин будет равна нулю: $c_{i\ n+1} = 0$. теперь задача замкнутая.

2. недостаток товара на складе

пусть $\sum a_i < \sum b_j$. тогда добавим фиктивный склад с номером $m+1$, для которого $a_{m+1} = \sum b_j - \sum a_i$. стоимость перевозки из этого склада будет равна нулю: $c_{m+1\ j} = 0$. теперь задача замкнутая.

закрытая транспортная задача всегда имеет решение. вот такое решение (пусть и не будет оптимальным) всегда будет удовлетворять ограничениям задачи.

$$x_{ij} = \frac{a_i b_j}{Q}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i b_j}{Q} = \frac{b_j}{Q} \cdot \sum_{i=1}^{m} a_i = \frac{b_j \cdot Q}{Q} = b_j$$

7.3 алгоритм метода потенциалов

теорема о потенциалах

матмодель:

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \ i \in 1..m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \ j \in 1..n$$

$$x_{ij} \geq 0$$

$$\sum a_i = \sum b_j = Q$$

в соответствие каждому ограничению по складам поставим новую переменную u_i.

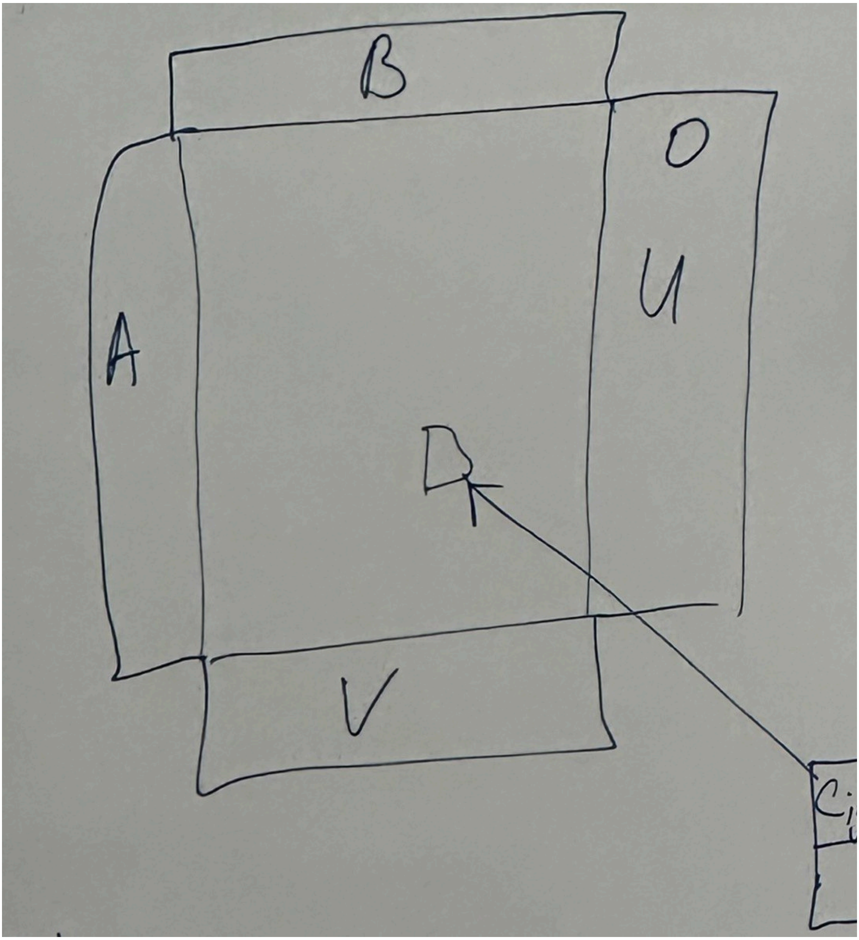
в соответствие каждому ограничению по магазинам поставим новую переменную v_j.

теорема

если для базисных клеток выполняется условие $u_i + v_j = c_{ij}$, а для не базисных выполняется условие $u_i + v_j \leq c_{ij}$, то текущее решение x_{ij} является оптимальным.

алгоритм решения транспортной задачи при использовании метода потенциалов

0. привести к замкнутому типу
1. построить начальное БДР транспортной задачи (см. пред. лекция)



2. для базисных
   $u_i + u_j = c_{ij}$
   $m + n - 1$, $u \sim m$, $v \sim n$
   пусть $u_1 = 0$

3. для небазисных
   $S_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$
   если все $S_{ij} \geq 0$, то найдено оптимальное решение.
   иначе переходим к шагу 4.

4. находим минимальное S_{ij}, и для клетки, соответствующей данной оценке, строим цикл. ставим в ней пометку "+", далее чередуем пометки "-" и "+".

5. среди клеток со знаком "-" находим минимальное значение перевозки. обозначим его $\lambda = \min\{x_{ij}^-\}$.

6. пересчет транспортной таблицы.

$$x'_{ij} = \begin{cases} x_{ij} + \lambda, \ x^+ \\ x_{ij} - \lambda, \ x^- \\ x_{ij}, \ \text{остальные клетки} \end{cases}$$

клетку, найденную на шаге 5, исключаем из базиса.
$z' \leq z$
$z' = z + \underbrace{\lambda}_{\geq 0} \cdot \underbrace{\min S_{ij}}_{\leq 0}$

если среди оценок небазисных клеток существуют нули, то данное решение не единственно возможное.

пример

$\frac{\text{магазины} \rightarrow}{\text{склады} \downarrow}$	**58**	**22**	**18**	**22**
30	5	8	6	2
50	2	7	5	3
40	1	4	3	5
33	6	5	5	2

приводим к закрытому типу.

	58	22	18	22	*33*
30	5	8	6	2	*0*
50	2	7	5	3	*0*
40	1	4	3	5	*0*
33	6	5	5	2	*0*

	58	22	18	22	33	u $\downarrow$
30	5 / 30	8	6	2	0	0
50	2 / 28	7 / 22	5	3	0	-3
40	1	4 / 0	3 / 18	5 / 22	0	-6
33	6	5	5	2 / 0	0 / 33	-9
v $\rightarrow$	5	10	9	11	9	

$u_1 + v_1 = 5$

$u_2 + v_1 = 2$

$u_2 + v_2 = 7$

$u_3 + v_2 = 4$

$u_3 + v_3 = 3$

$u_3 + v_4 = 5$

$u_4 + v_4 = 2$

$u_4 + v_5 = 0$

пусть $u_1 = 0$.
посчитать систему можно по таблице.

$S_{12} = c_{12} - u_1 - v_1 = 8 - 0 - 10 = -2$

$S_{13} = -3$

$S_{14} = -9$

$S_{15} = -9$

$S_{23} = -1$
$S_{24} = -5$
$S_{25} = -6$
$S_{31} = 2$
$S_{35} = -3$
$S_{41} = 10$
$S_{42} = 4$
$S_{43} = 5$

есть отрицательные значения, поэтому продолжаем.

пример:
$S_{15} = -9$ (не S_{14} потому что просто захотелось)

построим цикл:

	58	**22**	**18**	**22**	**33**	**u** $\downarrow$
30	5 / 30 -	8 $\rightarrow$	6 $\rightarrow$	2 $\rightarrow$	0 +	0
50	2 / 28 +	7 / 22 -	5	3	0 $\downarrow$	-3
40	1	4 / 0 +	3 / 18 $\leftarrow$	5 / 22 -	0 $\downarrow$	-6
33	6	5	5	2 / 0 +	0 / 33 -	-9
v $\rightarrow$	5	10	9	11	9	z = 524

$\lambda = 22 \ (x_{34})$

$0\lambda - 0\lambda + 2\lambda - 5\lambda + 4\lambda - 7\lambda + 2\lambda - 5\lambda = -9\lambda$

$z' = z - 9 \cdot 22 = 524 - 198 = 326$

строим новую матрицу:

	58	**22**	**18**	**22**	**33**	**u ↓**
30	5 / 8 →	8 →	6 →	2 →	0 / 22 ↓	0
50	2 / 50 ↑	7 / 0 ←	5	3	0 ↓	-3
40	1	4 / 22 ↑	3 / 18	~~5 / 0~~	0 ↓	-6
33	6	5 ↑	5 ←	2 / 22 ←	0 / 11	0
v →	5	10	9	2	0	z = 326

не будем прописывать все S, просто запишем самого мелкого:

$S_{42} = -5$

$\lambda = 0$

рисуем новую таблицу.