17 Задача линейного программирования в каноническом виде. Прямой симплексный метод решения задач линейного программирования

1.1 задача линейного программирования в общем виде

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$$

c_j — коэффициенты целевой функции.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \ (i = 1, \ldots, m_1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \ (i = m_1 + 1, \ldots, m_1 + m_2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ (i = m_1 + m_2 + 1, \ldots, m_1 + m_2 + m_3)$$

всего ограничений — $m_1 + m_2 + m_3$.
a_{ij} — коэффициенты матрицы ограничений.
b_i — правые части ограничений.

множество переменных N может быть разбито на три части:

$N = N_1 \cup N_2 \cup N_3$
N_1 — переменные, которые ≥ 0.
N_2 — переменные, которые < 0.
N_3 — переменные, которые могут иметь любой знак. (температура, например)

$N_1 \cap N_2 \cap N_3 = 0$

1.2 задача линейного программирования в каноническом виде

вопрос заключается в том, чтобы любую задачу привести к вот такому виду:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$$

$$x_j \geq 0$$

$$b_i \geq 0$$

1.3 приведение задачи ЛП к каноническому виду (алгоритм, общий вид таблицы)

1. если $f \to \max$

просто умножить все c_j на -1.
было $2x_1 - 3x_2 \to \max$
стало $-2x_1 + 3x_2 \to \min$

2. если множество M_1 ограничений не пусто

(имеются в виду ограничения $g(x) \geq 0$)

вводятся дополнительные переменные.
$x \geq b$
новая переменная $x' > 0$
$x - x' = b$
пример: b - заявка, x - реальный выпуск, x' - перевыпуск

(нам сказали сделать не менее чем b, мы сделали на x' больше.)

$\star$ помимо дополнительных переменных есть еще искусственные. я уже забыла, чем они отличаются.

3. если множество M_2 ограничений не пусто

(имеются в виду ограничения $g(x) \leq 0$)

$x \leq b$
новая переменная $x' > 0$
$x + x' = b$
пример: b - заявка, x - реальный выпуск, x' - недовыпуск (нам сказали сделать не более чем b, мы сделали на x' меньше.)

4. если N_2 не пусто

производится замена переменных.
$x \in N_2$
$x' = -x$
$x' \geq 0$

5. если N_3 не пусто

производится замена переменных.
$x \in N_3$
$x^+, \ x^- \geq 0$
$x = x^+ - x^-$

6. если есть $b_i < 0$

просто домножить ограничение (неравенство) на -1, чтобы изменить знак.

алгоритм прямого симплексного метода

```
или метод последовательного улучшения плана.
```

для того чтобы использовать этот метод, важно наличие двух условий:

1. канонический вид задачи ЛП (то, что в правой части ограничений, должно быть больше нуля)
2. должен быть начальный базис, от которого нужно отталкиваться, и соответствующее ему БДР (базисное допустимое решение).

$\sum c_j x_j \to \min$
$\sum a_{ij} x_j = b_i$
$x_j \geq 0$

		$c_1, c_2 \ldots c_m$	$c_{m+1} \ldots c_n$

базис	**бдр**	$x_1, x_2 \ldots x_m$	$x_{m+1} \ldots x_n$
x_1	b_1	1	
x_2	b_2	1	a_{rs}
...	...	...	
x_n	b_n	1	
———	———	————	————
z	Δ_0	$\Delta_1 \Delta_2 \ldots \Delta_m$	$\Delta_{m+1} \ldots \Delta_n$

$\Delta_0 = \sum_{i=1}^{m} c_i b_i$

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} - c_j$$

алгоритм

0. построение начальной симплекс таблицы
1. проверка всех Δ_j (кроме Δ_0): если все $\Delta_j \le 0$, то найдено оптимальное решение. конец алгоритма.
2. среди всех оценок $\Delta > 0$ выбираем наибольшую, и соответствующий ей столбец объявляем ведущим столбцом.
3. просматриваем элементы ведущего столбца. если все элементы ≤ 0, значит функция не ограничена и оптимального решения не существует.
4. для всех $a_{is} > 0$ находим отношения $\frac{b_i}{a_{is}}$. берем минимальное из них. R — ведущая строка. (R — мощность строки.)
5. пересчет симплексной таблицы при помощи преобразования Жордана-Гаусса. в строке R записываем S, для всех элементов матрицы a:
   $a_{ij} = \frac{a_{ij} \cdot a_{rs} - a_{rj} \cdot a_{is}}{a_{rs}}$
   то есть для строки с номером R все значения делятся на опорное значение S.
6. возвращаемся к шагу 1.

пример

$$1x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 3x_4 \to \min$$
$$1x_1 + 0x_2 + 2x_3 + 1x_4 = 4$$
$$4x_1 + 1x_2 + 6x_3 + 0x_4 = 14$$
$$x_i \ge 0$$

можно ли использовать симплекс-метод?

1. все элементы справа больше нуля.

2. нужен начальный базис.
   количество базисных переменных равно количеству ограничений. надо, чтобы они образовывали единичную матрицу. можно менять переменные местами. (грубо говоря, x_4 это теперь x_1, а x_1 это x_4.) в конкретном примере можно построить матрицу по переменным x_4 и x_2.

рисуем таблицу.

		1	2	0	3
базис	**бдр**	x_1	x_2	x_3	x_4
3 x_4	4	1	0	2	1
2 x_2	14	4	1	6	0
___	___	___	___	___	___
z	40	10	0	18	0

$1 \cdot 0 + 0 \cdot x_2 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot x_4 = 4$
$4 \cdot 0 + 1 \cdot x_2 + 6 \cdot 0 + 0 \cdot x_4 = 14$

$$\begin{cases} 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_4 = 4 \Rightarrow x_4 = 4 \\ 1 \cdot x - 2 + 0 \cdot x_4 = 14 \Rightarrow x_2 = 14 \end{cases}$$

теперь столбец x_3 ведущий. $S = 3$
анализируем ведущий столбец: если все элементы ≤ 0, то задача не решаема. это не так, поэтому считаем отношения бдр к коэффициентам в ведущем столбце.

базис	бдр	x_1	x_2	x_3	x_4	
3 x_4	4	1	0	2	1	$\frac{4}{2}$
2 x_2	14	4	1	6	0	$\frac{14}{6}$
—	—	—	—	—	—	
z	40	10	0	18	0	

строка с наименьшим отношением становится ведущий. элемент на пересечении ведущей строки и ведущего столбца - опорный.

	1	2	0	3

базис	бдр	x_1	x_2	x_3	x_4	
0 x_3	2	0.5	0	1	0.5	$\frac{2}{0.5}$
2 x_2	2**	1	1	0	-3	$\frac{2}{1}$
—	—	—	—	—	—	
z	4	1	0	0	-9	

$$** \frac{14 \cdot 2 - 4 \cdot 6}{2}$$

	1	2	0	3

базис	бдр	x_1	x_2	x_3	x_4
x_3	1	0	-0.5	1	2

базис	бдр	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	2	1	1	0	-3
—	—	—	—	—	—
z	2	0	-1	0	-6

текущее решение является оптимальным:

$x_1 = 2$

$x_2 = 0$

$x_3 = 1$

$x_4 = 0$

$z^* = 2$