16 Непрерывные случайные величины (экспоненциальное распределение, нормальное распределение, равномерное на отрезке распределение) и их характеристики

ℵ непрерывная случайная величина (распределенная по непрерывному типу) — случайная величина ξ, функцию распределения $F(\xi)$ которой можно представить в виде

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(\tau)\, d\tau$$

⋆ τ это не т, это греческая тау.

ℵ функция $p(\tau)$ называется плотностью распределения (вероятностей) случайной величины ξ. еще ее называют дифференциальной функцией распределения; мы часто будем называть ее просто плотностью, но это уже наша вольность, а не реальный термин.

соответственно,

$$p_\xi(x) = F'_\xi(x)$$

матожидание

ℵ математическое ожидание (среднее значение) M_ξ непрерывной случайной величины ξ — это интеграл, вычисляемый следующим образом: (здесь $p(x)$ — плотность распределения)

$$M(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\, p(x)\, dx$$

при этом для существования математического ожидания необходимо, чтобы

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |x|\, p(x)\, dx < \infty$$

то есть ряд должен сходиться абсолютно. в ином случае говорят, что матожидания не существует.

математическое ожидание — это такое среднее значение случайной величины. в физике это центр тяжести стержня, который в какой-то точке x имеет плотность $p(x)$.

дисперсия

ℵ дисперсия — числовая характеристика случайной величины, показывающая «разброс» этой величины вокруг ее среднего значения.

здесь нужно понятие второго (начального) момента непрерывной случайной величины:

$$\alpha_2 = M(\xi^2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2\, p(x)\, dx$$

дисперсия непрерывной случайной величины определяется по формуле:

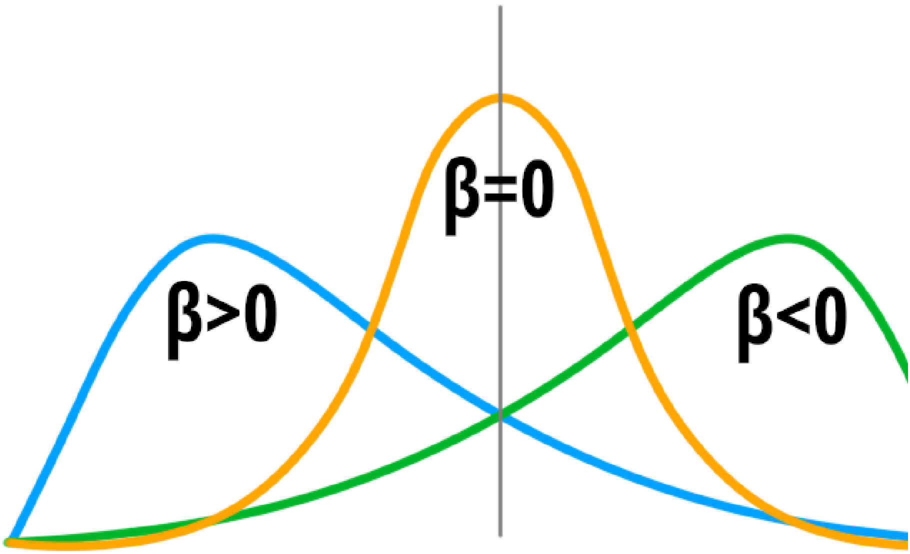
$$D(\xi) = M(\xi - M(\xi))^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - M(\xi))^2\, p(x)\, dx$$

коэффициент асимметрии, эксцесса

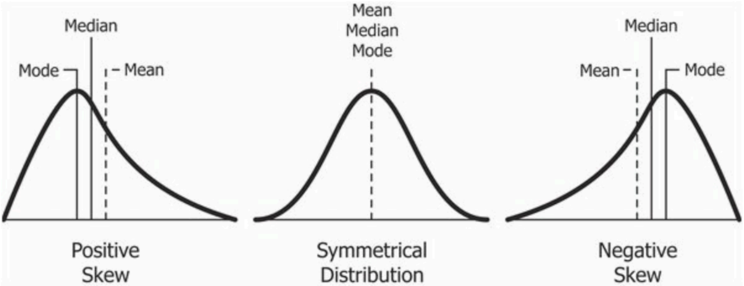
ℵ коэффициент асимметрии показывает, насколько распределение асимметрично относительно прямой $x = M(\xi)$.

$$\beta(\xi) = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

где μ_3 — третий центральный момент ($\mu_3 = M(\xi - M(\xi))^3$), $\sigma = \sqrt{D(\xi)}$ — среднее квадратичное отклонение.



у всех трех распределений на картинке матожидание равно 0. если распределение симметрично относительно математического ожидания, то его коэффициент асимметрии равен нулю. также, когда $\beta(\xi) = 0$, матожидание, мода и медиана совпадают.

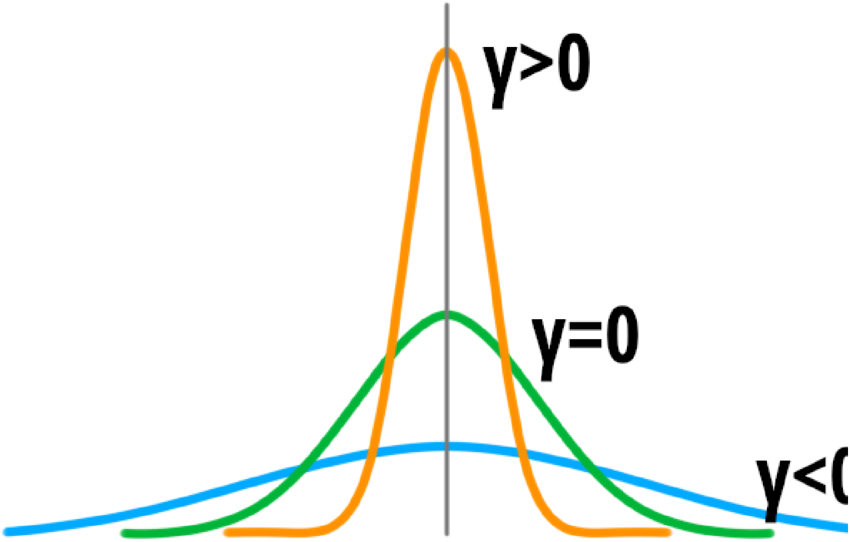


положительная асимметрия — когда правая часть графика длиннее,
отрицательная асимметрия — когда левая часть графика длиннее.

ℵ коэффициент эксцесса — мера остроты пика распределения случайной величины.

$$\gamma = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$$

⋆ 3 отнимаем, потому что для нормального распределения коэффициент эксцесса равен 3, а мы любим с нормальным распределением все сравнивать.



равномерное распределение

ξ равномерно распределена на $[a,\ b]$, если ее плотность $p(x)$ равна

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{если } a \le x \le b, \\ 0, & \text{если } x < a \text{ или } x > b \end{cases}$$

в таком случае функция распределения имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{если } a \le x \le b, \\ 1, & \text{если } x > b. \end{cases}$$

как это получается:

$$F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{a} 0\ dx + \int\limits_{a}^{x} \frac{1}{b-a}\ dx = \frac{x-a}{b-a}$$

$$M(\xi) = \frac{a+b}{2}$$

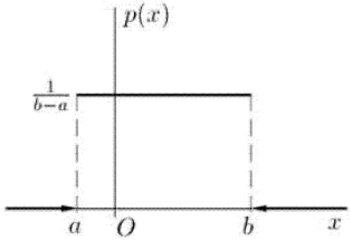


Рис. 6

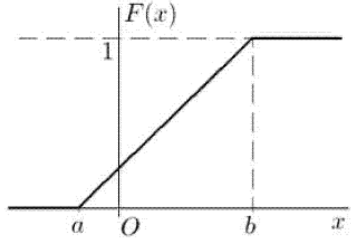


Рис. 7

экспоненциальное распределение

ℵ случайная величина распределена по показательному (или экспоненциальному) закону с параметром $\lambda > 0$:

$$p(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{если } x \geq 0 \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{если } x \geq 0 \end{cases}$$

$$M(\xi) = \frac{1}{\lambda}$$

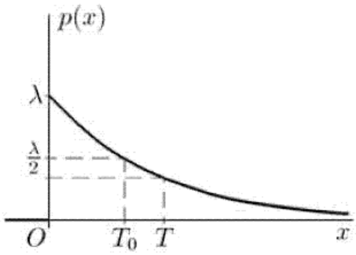


Рис. 8

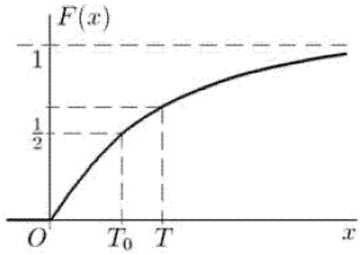


Рис. 9

экспоненциально распределенная случайная величина может принимать только положительные значения.

нормальное распределение

ℵ непрерывная случайная величина η распределена по нормальному (или гауссову) закону $N(a,\ \sigma)$ с параметрами $(a,\ \sigma)$, где $a \in (-\infty;\ +\infty)$, если плотность распределения равна

$$p_\eta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \cdot e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

здесь a — среднее значение, обычно матожидание, а σ — среднее квадратическое отклонение.
чтобы не ломать глаза, $e^{\text{что-нибудь}}$ частенько записывают как $\exp(\text{что-нибудь})$:

$$p_\eta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \cdot \exp\left(\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)$$

функция распределения для нормального распределения равна

$$F_\eta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int\limits_{-\infty}^{x} \exp\left(\frac{-(\tau-a)^2}{2\sigma^2}\right) d\tau$$

```
вся та же фигня, только с интегралом и т
вместо x, потому что производная экспоненты и
все дела.
```

держите картинку:

Пример 5. Положительная целочисленная случайная величина ξ имеет закон распределения $p_i = \mathsf{P}\{\xi = i\} = 1/[i\,(i+1)]$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{\infty} i p_i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i+1} = \infty$$

и, значит, математическое ожидание случайной величины ξ не существует. □

(здесь $m = a$, $\phi(x) = p(x)$, $\Phi(x) = F(x)$.)

как видно из рисунков, параметр a (на графике m) определяет положение влево-вправо на графике, а параметр σ — насколько "острым" будет пик плотности.

нормальное распределение становится стандартизированным, если $a = 0,\ \sigma = 1$.

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)$$

если выразить нормальное распределение η через стандартизированное ξ (или наоборот), то получится, что

$$\xi = \frac{\eta - a}{\sigma}; \quad \eta = \sigma\xi + a$$

$F_\eta(x)$ — интеграл, не берущийся в квадратуру (нельзя выразить через элементарные функции / взять интеграл), поэтому мы выражаем его через F_ξ, которая уже четкий пацанчик и считается по-человечески.

$$F_\eta(x) = P(\eta < x) = P(\sigma\xi + a < x) = P(\xi < \frac{x-a}{\sigma}) = F_\xi(\frac{x-a}{\sigma})$$

функция Лапласа:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x \exp\left(\frac{-\tau^2}{2}\right) d\tau$$

$$F_\xi(x) = \frac{1}{2} + \Phi(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x \exp\left(\frac{-\tau^2}{2}\right) d\tau$$

```
объяснение, почему интеграл от 0 до х, от
госпожи Марии:
Функция это интеграл от -бесконечности до
икса. Поскольку распределение
стандартизованное, то график плотности
симметричен относительно 0. То есть интеграл
от -бесконечности до 0 равен интегралу от 0
до +бесконечности, а поскольку площадь под
всем графиком это 1, то каждый из этих кусков
равен 1/2. Теперь к собсна функции: хз зачем,
возможно для удобства, всю функцию поделили
на кусок от -бесконечности до 0 и кусок от 0
до икса. Первый кусок это 1/2, как сказано
выше, а второй это Ф(х).
```

матожидание стандартизованного распределения равно 0, а обычное получается подстановкой замены:

$$M_\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = (\text{внесение } x \text{ под } dx) =$$
$$-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) d\left(-\frac{x^2}{2}\right) = 0$$

тогда:

$$M_\eta = M(\ \sigma\xi + a\ ) = M(\ \sigma\xi\ ) + M(a) = 0 + a = a$$

с дисперсией та же история, но дисперсия стандартизованного равна 1:

$$D(\xi) = M(\xi^2) - (\underbrace{M(\xi)}_{=0})^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^2 \cdot e^{\frac{-x^2}{2}}\, dx =$$

$$\left| \begin{matrix} u = x & du = dx \\ xe^{\frac{-x^2}{2}}\, dx = dv & v = -e^{\frac{-x^2}{2}} \end{matrix} \right|$$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left((-xe^{\frac{-x^2}{2}}) \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-x^2}{2}} \, dx \right) = 1$ и мне уже кристалльно пофиг, почему.

$$D(\eta) = D(\sigma\xi + a) = \sigma^2 D(\xi) = \sigma^2 = 1$$