

20 Графы, основные понятия, свойства

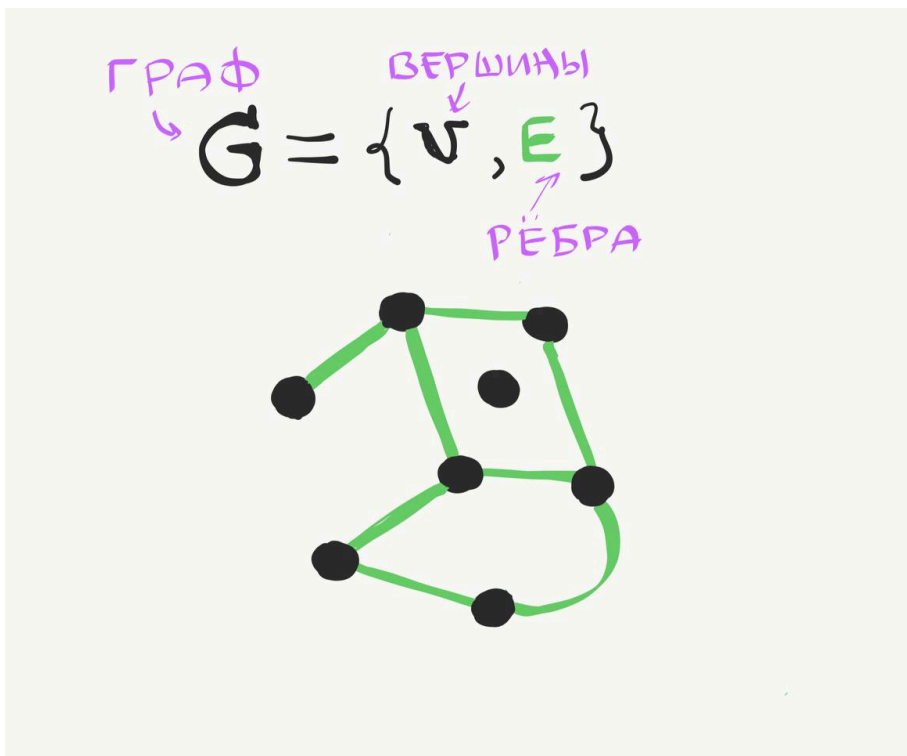
Граф - это топологическая модель, которая состоит из множества вершин и множества соединяющих их рёбер. При этом значение имеет только сам факт, какая вершина с какой соединена.

Определение. Простой граф $G(V, E)$ есть совокупность двух множеств — непустого множества V и множества E неупорядоченных пар различных элементов множества V . Множество V называется *множеством вершин*, множество E называется *множеством рёбер*

$$G(V, E) = \langle V, E \rangle, \quad V \neq \emptyset, \quad E \subseteq V \times V, \quad \{v, v\} \notin E, \quad v \in V,$$

то есть множество E состоит из 2-элементных подмножеств множества V .

Например, граф на рисунке состоит из 8 вершин и 8 рёбер.



Вершина - точка в графе, отдельный объект, для топологической модели графа не имеет значения координата вершины, её расположение, цвет, вкус, размер; однако при решении некоторых задач вершины могут раскрашиваться в разные цвета или сохранять числовые значения.

Ребро - неупорядоченная пара двух вершин, которые связаны друг с другом. Эти вершины называются концевыми точками или концами ребра. При этом важен сам факт наличия связи, каким именно образом осуществляется эта связь и по какой дороге - не имеет значения; однако рёбра может быть присвоен "вес", что позволит говорить о

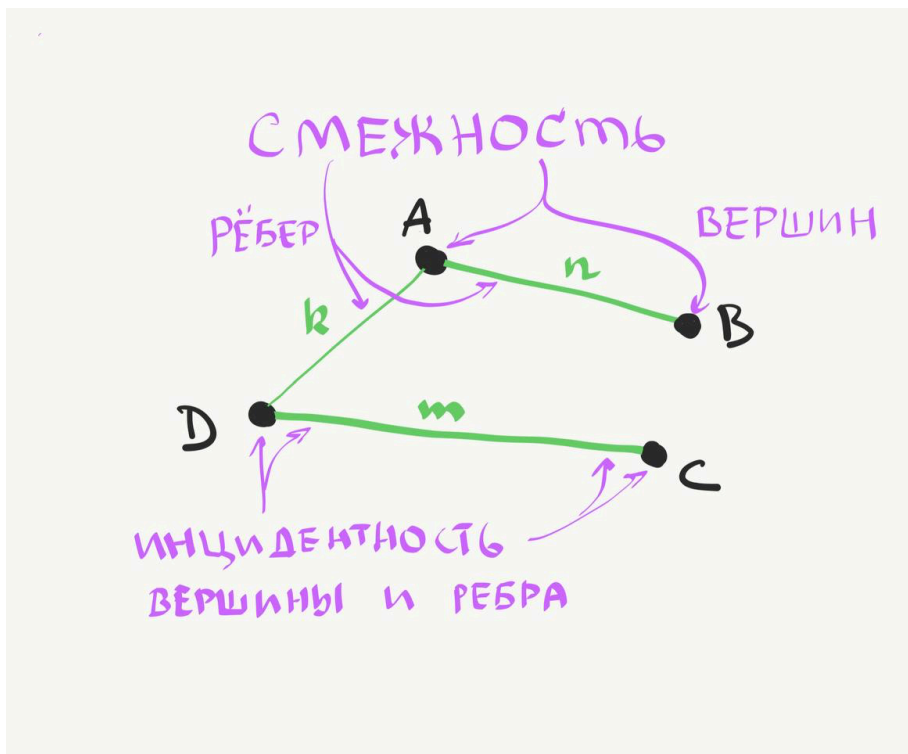
“нагруженном графе” и решать задачи оптимизации.

Инцидентность - вершина и ребро называются инцидентными, если вершина является для этого ребра концевой. Обратите внимание, что термин “инцидентность” применим только к вершине и ребру.

Смежность вершин - две вершины называются смежными, если они инцидентны одному ребру.

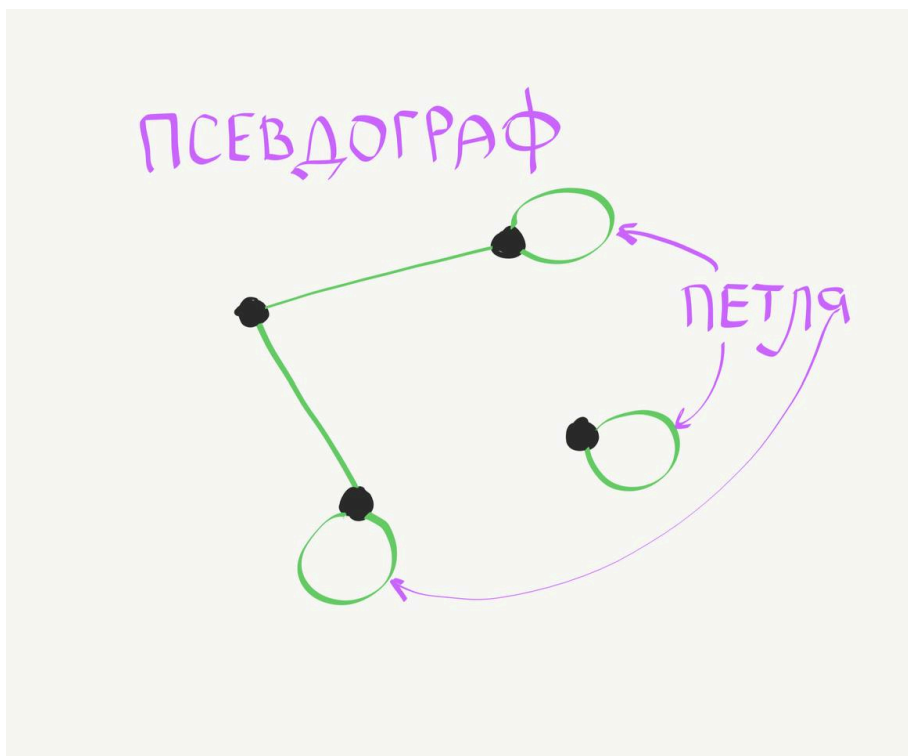
Смежность рёбер - два ребра называются смежными, если они инцидентны одной вершине.

Говоря проще - две вершины смежные, если они соединены ребром, два ребра смежные - если они соединены вершиной.



Петля - ребро, инцидентное одной вершине. Ребро, которое замыкается на одной вершине.

Псевдограф - граф с петлями. С такими графами не очень удобно работать, потому что переходя по петле мы остаёмся в той же самой вершине, поэтому у него есть своё название.



Кратные рёбра - рёбра, имеющие одинаковые концевые вершины, по другому их называют ещё параллельными.

Мультиграф - граф с кратными рёбрами.

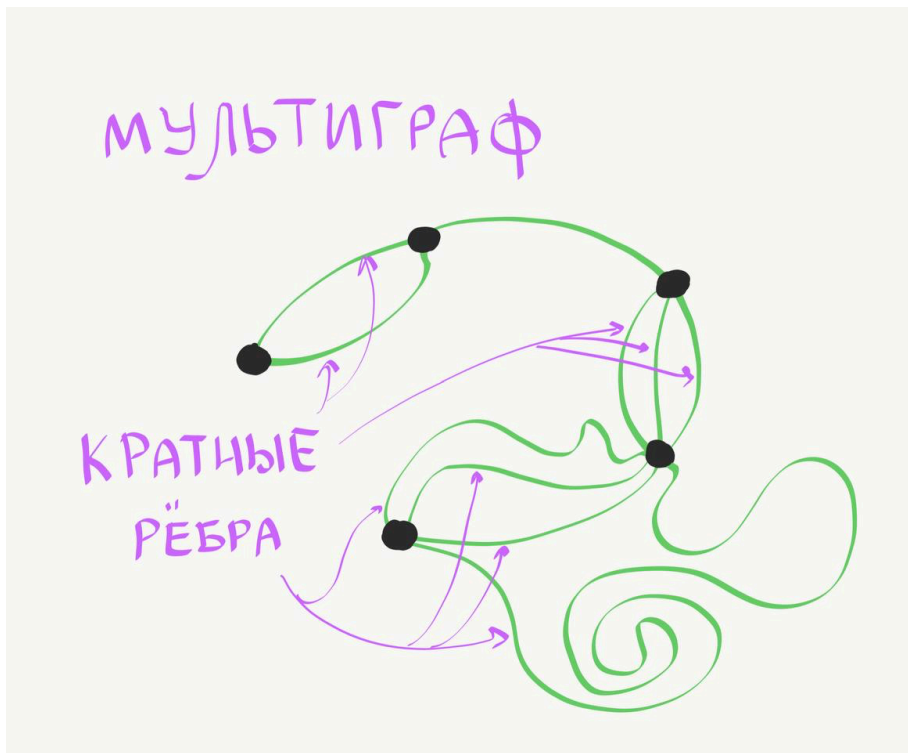
Псевдомультиграф - граф с петлями и кратными рёбрами.

Кратные рёбра - рёбра, имеющие одинаковые

концевые вершины, по другому их называют ещё параллельными.

Мультиграф - граф с кратными рёбрами.

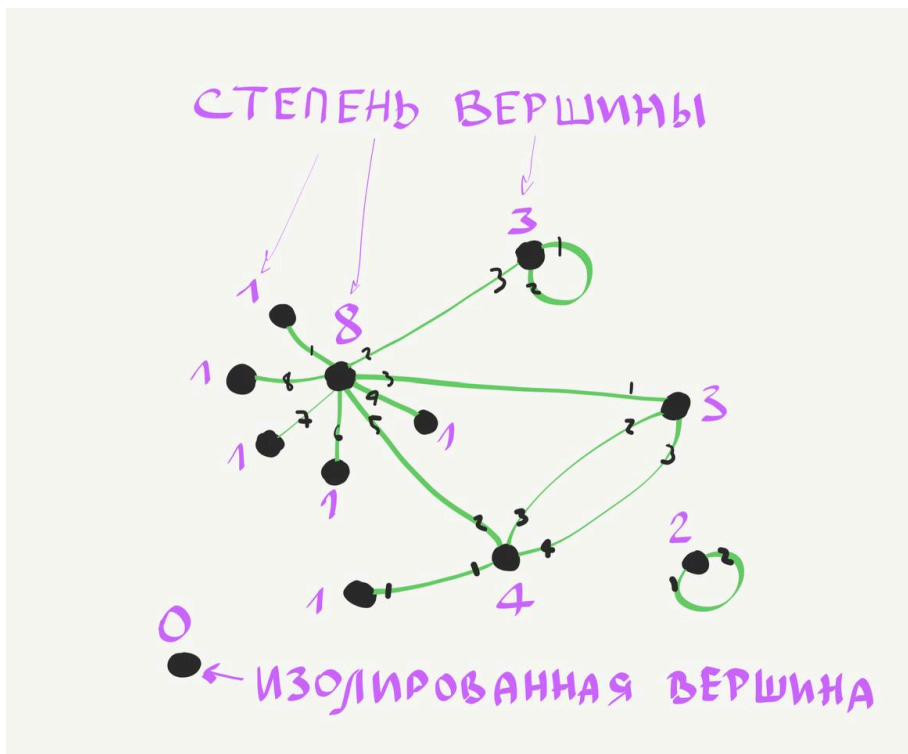
Псевдомультиграф - граф с петлями и кратными рёбрами.



Степень вершины - это количество рёбер, инцидентных указанной вершине. По-другому - количество рёбер, исходящих из вершины. Петля увеличивает степень вершины на 2.

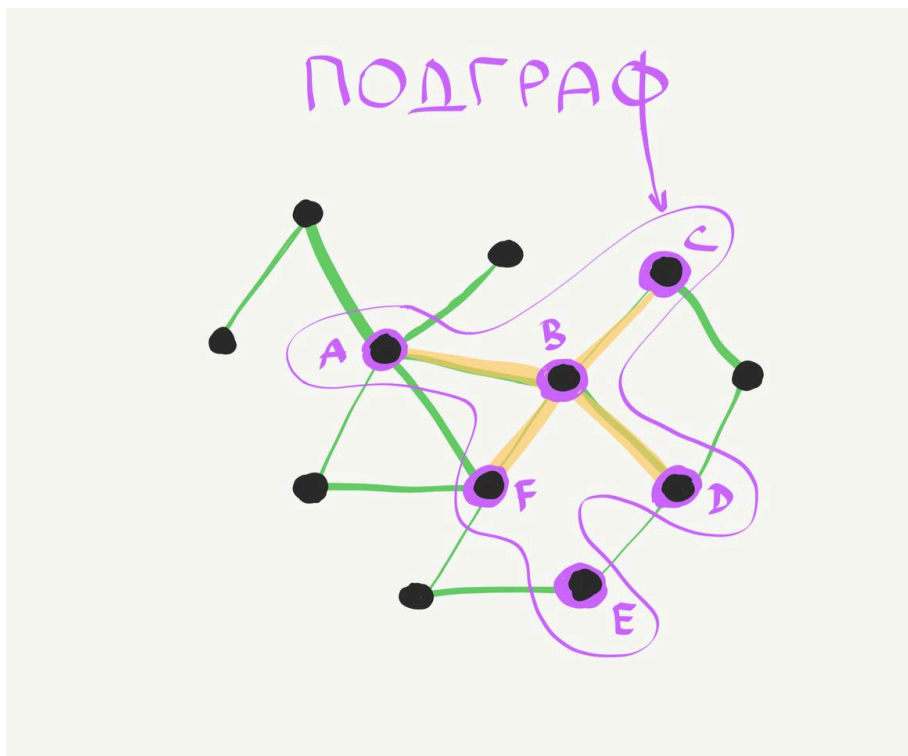
Изолированная вершина - вершина с нулевой степенью.

Висячая вершина - вершина со степенью 1.



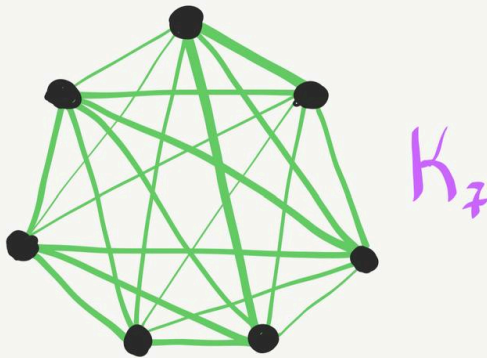
ИЗОЛИРОВАННАЯ ВЕРШИНА

Подграф. Если в исходном графе выделить несколько вершин и несколько рёбер (между выбранными вершинами), то мы получим подграф исходного графа.



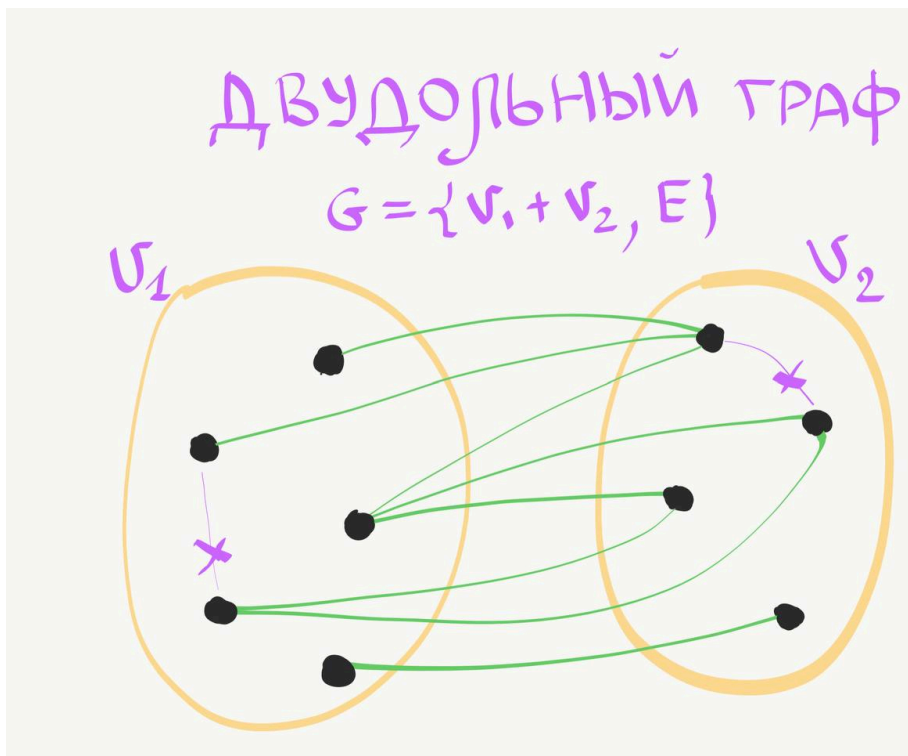
Полный граф - это граф, в котором каждые две вершины соединены одним ребром.

полный граф



Регулярный граф - граф, в котором степени всех вершин одинаковые.

Двудольный граф - если все вершины графа можно разделить на два множества таким образом, что каждое ребро соединяет вершины из разных множеств, то такой граф называется двудольным. Например, клиент-серверное приложение содержит множество запросов (рёбер) между клиентом и сервером, но нет запросов внутри клиента или внутри сервера.



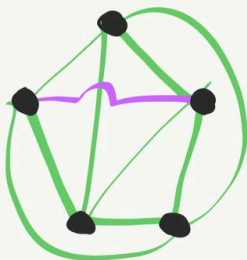
Планарный граф. Если граф можно разместить на плоскости таким образом, чтобы рёбра не пересекались, то он называется “планарным графом” или “плоским графом”.

Если это невозможно сделать, то граф называется “**непланарным**”.

Минимальные непланарные графы - это полный граф K_5 из 5 вершин и полный двудольный граф $K_{3,3}$ из 3+3 вершин (известная задача о 3 соседях и 3 колодцах). Если какой-либо граф в качестве подграфа содержит K_5 или $K_{3,3}$, то он является непланарным.

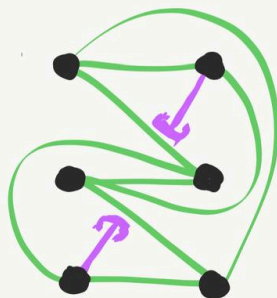
НЕ ПЛАНАРНЫЙ ГРАФ содержит подграф

K_5



или

$K_{3,3}$



Путь или **Маршрут** - это последовательность смежных рёбер. Обычно путь задаётся перечислением вершин, по которым он пролегает.

Длина пути - количество рёбер в пути.

Цепь - маршрут без повторяющихся рёбер.

Простая цепь - цепь без повторяющихся вершин.

Цикл или **Контур** - цепь, в котором последняя вершина совпадает с первой.

Длина цикла - количество рёбер в цикле.

Самый короткий цикл - это петля.

Цикл Эйлера - цикл, проходящий по каждому ребру ровно один раз. Эйлер доказал, что такой цикл

существует тогда, и только тогда, когда все вершины в связанном графе имеют чётную степень.

Цикл Гамильтона - цикл, проходящий через все вершины графа по одному разу. Другими словами - это простой цикл, в который входят все вершины графа.

Взвешенный граф - граф, в котором у каждого ребра и/или каждой вершины есть "вес" - некоторое число, которое может обозначать длину пути, его стоимость и т. п. Для взвешенного графа составляются различные алгоритмы оптимизации, например поиск кратчайшего пути.

Связный граф - граф, в котором существует путь между любыми двумя вершинами.

Дерево - связный граф без циклов.

Между любыми двумя вершинами дерева существует единственный путь.

Лес - граф, в котором несколько деревьев.

Деревья часто используются для организации иерархической структуры данных, например, при создании двоичных деревьев поиска или кучи, в этом случае одну вершину дерева называют корнем.

Ориентированный граф или Орграф - граф, в котором рёбра имеют направления.

Дуга - направленные рёбра в ориентированном графе.

Полустепень захода вершины - количество дуг, заходящих в эту вершину.

Исток - вершина с нулевой полустепенью захода.

Полустепень исхода вершины - количество дуг, исходящих из этой вершины

Сток - вершина с нулевой полустепенью исхода.

Компонента связности - множество таких вершин графа, что между любыми двумя вершинами существует маршрут.

Компонента сильной связности - максимальное множество вершин орграфа, между любыми двумя вершинами которого существует путь по дугам.

Компонента слабой связности - максимальное множество вершин орграфа, между любыми двумя вершинами которого существует путь по дугам без учёта направления (по дугам можно двигаться в любом направлении).

Мост - ребро, при удалении которого, количество связанных компонент графа увеличивается.

КОМПОНЕНТЫ СИЛЬНОЙ СВЯЗНОСТИ

