19 Отношения и отображения. Виды и свойства

множество - произвольная совокупность различных объектов, которые называются элементами множества.
описать множество можно, перечислив все элементы, часть элементов $A = \{1,\ 2,\ 3\}$, указав его обозначение ($\mathbb{N}$ - натуральные числа) или использовав какую-то закономерность $A = \{x : x = 2k + 1\}$. во множестве может и не быть никаких элементов, тогда оно обозначается как пустое множество, $\emptyset$.

отношения между множествами

подмножество: B ⊂ A (элементы множества B также являются элементами множества A). такая связь называется включением.

если B ⊂ A, A ⊂ B, то A = B. множества равные, если они состоят из одинаковых элементов.

новые множества часто определяют через ранее введенные A, B, C, D и пр., используя операции над множествами.

- пересечение (то, что общее) $\cap$
- объединение (все вместе) $\cup$
- разность (от одного отрезать то, что общее с другим) $\setminus$
- дополнение (все остальное множество U, кроме данного кусочка) $\overline{A}$
- симметрическая разность (то, что не принадлежит обоим множествам сразу) $\triangle$

свойства операций над множествами

1. свойства операций объединения, пересечения и дополнения:

- коммутативность (независимость от порядка объединения)
    - $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$
- ассоциативность (независимость от расстановки скобок)
    - $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
    - $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- дистрибутивность (аналогично раскрытию скобок при умножении и сложении чисел)
    - $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
    - $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
- двойственность де Моргана
    - $!(A \cap B) = !A \cup !B$
    - $!(A \cup B) = !A \cap !B$

покрытия и разбиения множества

покрытие - семейство подмножеств, которые вместе (в объединении) дают свое "родительское" множество.

также покрытие - совокупность множеств, которые содержат элементы заданного.

разбиение - семейство, в котором все пары множеств в пересечении дают пустые множества (не имеют общих элементов). подмножества в таком случае называются классами.

разбиение множества на классы

множество $\mathbb{X}$ разбито на классы $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \mathrm{X}_3..\mathrm{X}_n$, если:

- подмножества $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \mathrm{X}_3..\mathrm{X}_n$ попарно не пересекаются
- объединение подмножеств $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \mathrm{X}_3..\mathrm{X}_n$ совпадает с множеством $\mathbb{X}$.

разбиение множества моделирует классификацию множества $\mathbb{A}$.

произведение разбиений - всевозможные пересечения разных разбиений множества. (например, если студентов разделить по секциям и по группам, получатся два разбиения, и можно найти все их пересечения.)

прямое (Декартово) произведение двух множеств состоит из пар $C = A \times B = \{(a, b) |\ x \in A,\ y \in B\}$

$A = \{a,\ b,\ c,\ ...,\ h\}$

$B = \{1,\ 2,\ 3,\ ...,\ 8\}$

$A \times B = \{(x, y):\ x \in A,\ y \in B\}$

бинарное отношение

бинарным отношением между множествами A и B назовем $R \subset A \times B$. в этом названии отношение означает связь между множествами, а бинарное - то, что множеств два. бинарное отношение это вообще что угодно: знакомство людей, то, что одно множество больше другого, смежность двух точек у многоугольника. главное, что множества два, и они как-то там относятся.

любое бинарное отношение R имеет область определения $Dom\ R$:

$$Dom\ R = \{x \in A \mid \exists\ y \in B : (x,\ y) \in R\}$$

и область значения $Im\ R$:

$$Im\ R = \{y \in B \mid \exists\ x \in A : (x,\ y) \in R\}$$

условие $(x,\ y) \in R$ также записывают в виде xRy или $x \sim y$.

бинарное отношение можно удобно записать в виде матрицы $Q[A,\ B]$ из нулей и единиц на индексных множествах A и B, где

$$Q_{xy} = \begin{cases} 1, & \text{если } (x,\ y) \in R \text{ (или } xRy) \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

эту матрицу Q назовем матрицей смежности отношения R.

бинарные отношения весьма разнообразны, они используются при классификации, сопоставлении или сравнении объектов. виды и названия отношений определяются их свойствами. рассмотрим некоторые из них, используя случай, когда $X = A = B$, а значит, $x \in A,\ y \in B$, а также xRy. тогда бинарное отношение может быть:

- рефлексивным, если

  $\forall x \in X : (x, x) \in R$, то есть любой элемент $x \in X$ находится в отношении R сам с собой, если R - рефлексивное. на диагоналях матрицы Q будут единицы. пример: я есть я или $1 = 1$.

- симметричным, если

  $\forall\ (x,\ y) \in R \iff (y,\ x) \in R$, то есть если $x,\ y \in X$ находятся в отношении xRy, то верно и yRx. матрица Q также симметрична: $Q_{xy} = Q_{yx}$. пример: если Петя брат Толи, то Толя брат Пети.

- транзитивным, если

  $\forall\ (x,\ y),\ (y,\ z) \in R \Rightarrow (x,\ z) \in R$. примером такого отношения могут быть порядковые сравнения типа: $(C \subset B) \cap (B \subset A) \Rightarrow (C \subset A)$ или $c \leq b\ \cap\ b \leq a \Rightarrow c \leq a$.

если отношение обладает этими тремя свойствами, оно называется отношением эквивалентности. если R - отношение эквивалентности, то элементы $x,\ y \in X$, для которых выполняется xRy, называются эквивалентными и обозначаются $x \sim y$.

$$x \sim y \iff xRy.$$

> пример отношения: знакомство людей является рефлексивным (я знаком с собой) и симметричным (я знаком с тобой и ты знаком со мной), но не является транзитивным (я знаком с тобой, а ты знаком с ним, но это не значит, что я знаком с ним). другой пример: назовем смежными две клетки на шахматной доске, если между ними единственным способом может перемещаться какая-нибудь фигура (ладья, например). отношение смежности в этом случае будет симметричным, но не будет транзитивным.

отображения

ввиду важности вопроса, рассмотрим этот класс бинарных отношений отдельно.

если для каждого значения $x \in X$ имеется единственное $y \in Y$ для которого выполняется xRy, то можно сказать, что отображение $R : X \to Y$. отображением $f : X \to Y$ назовем правило сопоставления $\forall\ x \in X$некоторого $y \in Y$. отображение так же, как и любое другое бинарное отношение, приобретает область определения (множество X) и область значения (множество Y). часто отображение записывают как $y = f(x)$

отображения бывают:

- инъективные

  инъекция - отображение множества X на множество Y, при которым разные элементы множества X переводятся в разные элементы множества Y, то есть $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. чтобы понятнее: для $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ функция $f(x) = x^2$ является инъективной (каждому x соответствует уникальное y), а для $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ она не является инъективной, т. к. для разных x могут соответствовать одинаковые y: $f(-2) = f(2) = 4$.

- сюрьективные

  сюръекция - отображение множества X на множество Y, при котором каждый элемент множества Y является образом хотя бы одного элемента множества X, то есть $\forall\ y \in Y\ \exists\ x \in X : y = f(x)$. чтобы понятнее: для $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ функция $f(x) = x^2$ является сюръективной (каждому $y \in Y$ соответствует какое-то x), а для $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ она не является сюръективной, т. к. не существует такого x, который бы соответствовал $y = -9$.

- биективные

  биекция - отображение множества X на множество Y, при котором каждому элементу множества X соответствует ровно один элемент множества Y, и наоборот, т. е. биекция - отображение, которое является и инъективным, и сюръективным. для красоты: функция $f : X \to Y$ является биективной согда существует обратная функция $f^{-1} : Y \to X$ такая, что $\forall\ x \in X\ f^{-1}(f(x)) = x; \forall\ y \in Y\, f(f^{-1}(y)) = y$. чтобы понятнее: для любого x найдется единственное y, для любого y найдется единственное x, как в функциях $f(x) = x^3$ или $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ f(x) = ln(x)$.

если отображение f - биекция, прообраз каждого элемента $y \in Y$ - в точности из одного элемента $x \in X$, что позволяет ввести понятие обратного отображения $f^{-1} : Y \to X$. несложно доказать, что отображение, обратное к биективному, также является биективным, кроме того: $f(f^{-1}(y)) = y, \quad f^{-1}(f(x)) = x$.

обратное отображение $f^{-1} : Y \to X$ определяется только для биективного отображения f.

по аналогии с предикатами можно ввести суперпозицию или композицию отображений.

поконкретнее. если задано отображение $f : X \to Y,\ g : Y \to Z$, определим отображение $h = g \bullet f : X \to Z$ по правилу: для любого $x \in X : \quad z = h(x) = g \bullet f(x) \in Z \quad \iff \quad y = f(x),\ \ z = g(y)$. суперпозицию функций часто записывают в виде $h(x) = g(f(x))$

а теперь по-человечески.

суперпозиция функций (также называется композицией функций или сложной функцией) - функция, полученная из некоторого множества функций путем подстановки одной функции в другую или отождествления переменных.

способы получить суперпозицию:

- подставить одну функцию в качестве аргумента другой;
- подставить i-тый аргумент функции f вместо j-того аргумента. (было $\{a,\ b,\ c,\ d\}$ стало $\{a,\ b,\ c,\ b\}$). то есть, при отождествлеии c переменных изначальной функции f с n аргументами, мы получим функцию h, у которой аргументов будет $n - c + 1$. например: была булева функция $f(a,\ b) = a \vee b$, мы отождествляем a и b, получаем $h(a) = a \vee a$ - проектор единственного аргумента. кому и зачем это надо, никто не знает, но зачем-то это все же придумали.