Opisi algoritama

Zadatke, testne primjere i rješenja pripremili: Adrian Beker, Marin Kišić, Daniel Paleka, Ivan Paljak, Tonko Sabolčec i Paula Vidas. Primjeri implementiranih rješenja su dani u priloženim izvornim kodovima.

Zadatak: Kraljevstvo

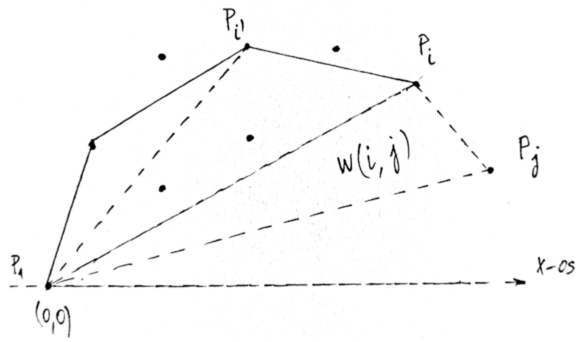
Pripremili: Tonko Sabolčec i Paula Vidas
Potrebno znanje: geometrija, konveksna ljuska, dinamičko programiranje, metoda *podijeli pa vladaj*

Za prvi podzadatak dovoljno je za svaki K-člani podskup dvoraca koji sadrži najljeviji i najdesniji dvorac izračunati površinu konveksne ljuske pripadajućih točaka iz podskupa. Za određivanje konveksne ljuske određenog skupa točaka preporučuje se korištenje *monotone chain* algoritma, dok se površina konveksnog poligona može dobiti podjelom poligona na $K-2$ trokuta (npr. koji dijele jedan zajednički vrh) i zbrajanjem površina trokuta dobivenih preko analitičke formule:

$$P(\Delta ABC) = \frac{1}{2} \cdot |x_A(y_B - y_C) + x_B(y_C - y_A) + x_C(y_A - y_B)|.$$

Ostalim podzadacima pristupit ćemo tako da zadani skup točaka podijelimo na one iznad i ispod x-osi (pri čemu najljeviju i najdesniju točku uzimamo u oba skupa) te odredimo optimalne donje i gornje polovice konačne ljuske. Konkretnije, izračunat ćemo vrijednosti $up(k)$ i $down(k)$ za svaki $2 \leq k \leq K$ gdje $up(k)$ predstavlja najveću moguću površinu neke ljuske koja se sastoji od k vrhova gornjeg skupa točaka, dok $down(k)$ predstavlja analogne vrijednosti za donji skup točaka. Također primijetite da nas zanimaju ljuske koje se sastoje od K ili *manje* vrhova. Konačno rješenje tada dobivamo pronalaskom najvećeg zbroja $up(k_1) + down(k_2)$ pri čemu je $k_1 + k_2 \leq K + 2$ (ova dvojka proizlazi iz činjenice što smo najljeviju i najdesniju točku koristili u oba skupa).

Vrijednosti $up(k)$ i $down(k)$ možemo dobiti primjenom dinamičkog programiranja. U nastavku ćemo se usredotočiti samo na gornju polovicu točaka (obrada za donju polovicu ide analogno). Neka su $P_1, P_2, ..., P_n$ točke gornje polovice uzlazno sortirane po x-koordinati (P_1 je najljevija, a P_n najdesnija). Označimo s $dp(k, i, j)$ najveću moguću površinu neke konveksne ljuske prvih j točaka ($P_1, P_2, ..., P_j$) koja se sastoji od k vrhova, pri čemu su P_i i P_j posljednja dva vrha. Stanje gradimo prijelazima u kojima dodajemo po jednu sljedeću točku gornje ljuske uz pribrajanje pripadajuće površine. U stanje $dp(k, i, j)$ mogli smo doći iz stanja $dp(k-1, i', i)$ uz pribrajanje površine trokuta $P(\Delta P_1 P_i P_j)$, koju ćemo označiti s $w(i, j)$. Pritom je važno voditi računa o konveksnosti vrhova koje uzimamo, tj. da točke P'_i, P_i, P_j budu poredane u smjeru kazaljke na satu.



Možemo pisati:

$$dp(k, i, j) = \max_{1 \leq i' < i}\{dp(k-1, i', i) + w(i, j)\} \quad \text{t.d.} \quad ccw(P'_i, P_i, P_j) < 0,$$

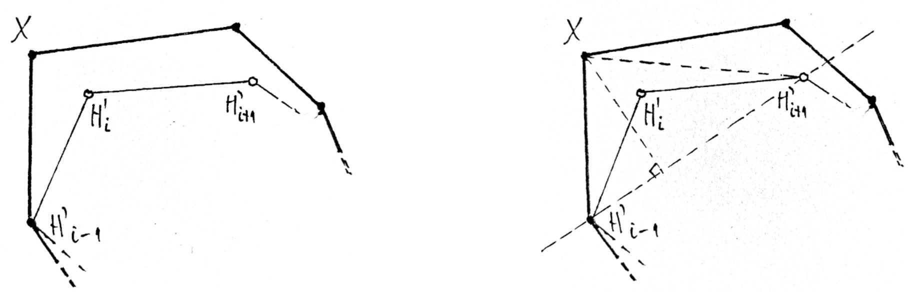
pri čemu je $ccw(A, B, C)$ negativna ako su točke A, B, C poredane u smjeru kazaljke na satu. Konkretna vrijednost ccw funkcije može se dobiti vektorskim množenjem vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$:

$$ccw(A, B, C) = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (x_B - x_A)(y_C - y_A) - (x_C - x_A)(y_B - y_A).$$

Vrijednosti početnih stanja $dp(2, 1, i)$ jednake su nuli, a konačna vrijednost $up(k)$ dobiva se kao $up(k) = \max_{1<i<n} dp(k, i, n)$. Stanja ima $\mathcal{O}(K \cdot N^2)$, a složenost prijelaza je $\mathcal{O}(N)$ pa je ukupna složenost takvog algoritma $\mathcal{O}(K \cdot N^3)$, dovoljna za osvajanje bodova na drugom podzadatku.

Zamjedba 1. *Vrhovi optimalne konveksne ljuske bit će podskup vrhova konveksne ljuske svih ulaznih točaka.*

Skica dokaza. Neka je H skup vrhova konveksne ljuske svih ulaznih točaka (točke tog skupa nazvat ćemo *vanjskim* točkama). Pretpostavimo suprotno, tj. da je za određenu veličinu ljuske, optimalna konveksna ljuska $H' \not\subset H$. Drugim riječima H' sadrži točku koja nije *vanjska*, neka je to točka H'_i. (Na slici ispod vanjske su točke popunjene.) Provucimo pravac kroz vrhove susjedne vrhu H'_i odabrane konveksne ljuske, tj. kroz točke H'_{i-1} i H'_{i+1}. Tražimo najudaljeniju točku (nazovimo je X) od promatranog pravca s iste strane pravca kao točka H'_i. Najudaljenija točka X sigurno je različita od H'_i te pripada vanjskoj ljusci H (kad bi H'_i bila najudaljenija točka, tada bi H'_i ujedno bila i dio vanjske ljuske, što je suprotno pretpostavci). Primjetite da se zamjenom točke H' točkom X povećava površina odabrane konveksne ljuske (što proizlazi iz formule za trokut $\frac{1}{2} \cdot baza \cdot visina$). No, to je u kontradikciji s pretpostavkom da je polazna konveksna ljuska bila optimalne površine. □



Razlog zbog kojeg smo u prethodno opisanoj dinamici pamtili posljednje dvije točke u stanju je taj da omogućimo postupnu izgradnju konveksne ljuske na *proizvoljnom* skupu točaka (treću točku u prijelazu uvijek smo birali tako da se zadovolji smjer kazaljke na satu). No, sada možemo zanemariti sve točke koje nisu vrhovi konveksne ljuske ulaznih točaka, umjesto zadnje dvije točke u stanju možemo pamtiti samo posljenju točku. Drugim riječima, stanje dinamike $dp(k, i)$ predstavlja najveću moguću površinu neke konveksne ljuske koja se sastoji od k vrhova pri čemu je posljednji vrh točka P_i. Prijelaz se tada može zapisati kao:

$$dp(k, i) = \max_{1 \le j < i} \{dp(k-1, j) + w(j, i)\}.$$

Pritom se pretpostavlja da točke $P_1, P_2, \ldots P_n$ čine vrhove gornje konveksne ljuske. Postoji $\mathcal{O}(K \cdot N)$ stanja, a složenost prijelaza je $\mathcal{O}(N)$, što daje ukupnu vremensku složenost od $\mathcal{O}(K \cdot N^2)$, što je dovoljno za treći podzadatak.

Zamjedba 2. *Za oznake pozicija $a < b < c < d$ vrijedi $w(a, d) + w(b, c) < w(a, c) + w(b, d)$.*

Skica dokaza. Spomenuta nejednakost popularno se naziva *nejednakost četverokuta*, a u našem će slučaju poslužiti kao trik za optimizaciju dinamike. No, obrazložimo za početak tu tvrdnju. Vrijednost $w(i, j)$ jednaka je:

$$w(i, j) = P(\Delta P_1 P_i P_j) = P((0, 0), P_i, P_j) = \frac{1}{2}(x_j y_i - x_i y_j),$$

gdje je $P_i = (x_i, y_i)$. Raspisivanjem, preslagivanjem i sređivanjem dobiva se:

$$w(a, d) + w(b, c) - w(a, c) - w(b, d) = \frac{1}{2}((x_b - x_a)(y_d - y_c) - (y_b - y_a)(x_d - x_c)).$$

Izraz s desne strane odgovara polovici vektorskog umnoška $\overrightarrow{P_aP_b} \times \overrightarrow{P_cP_d}$, a budući da su točke P_a, P_b, P_c, P_d poredane u smjeru kazaljke na satu, ta je vrijednost negativna, tj. vrijedi:

$$w(a, d) + w(b, c) - w(a, c) - w(b, d) < 0 \quad \Rightarrow \quad w(a, d) + w(b, x) < w(a, c) + w(b, d).$$

$\square$

Zamjedba 3. *Neka je $p_{k,i}$ oznaka najmanje vrijednosti j optimalnog prijelaza u $dp(k, i) = dp(k-1, j) + w(j, i)$. Tada vrijedi $p_{k,i+1} \geq p_{k,i}$.*

Skica dokaza. Pretpostavimo suprotno, tj. da za neke k, i vrijedi $p_{k,i+1} < p_{k,i}$. Budući da je $p_{k,i}$ optimalni prijelaz za $dp(k, i)$, odnosno $p_{k,i+1}$ optimalni prijelaz za $dp(k, i + 1)$, vrijede nejednakosti:

$$dp(k-1, p_{k,i}) + w(p_{k,i}, i) \geq dp(k-1, p_{k,i+1}) + w(p_{k,i+1}, i)$$
$$dp(k-1, p_{k,i+1}) + w(p_{k,i+1}, i+1) \geq dp(k-1, p_{k,i}) + w(p_{k,i}, i+1)$$

Zbrajanjem nejednakosti i sređivanjem dolazi se do:

$$w(p_{k,i}, i) + w(p_{k,i+1}, i+1) \geq w(p_{k,i+1}, i) + w(p_{k,i}, i+1).$$

Po pretpostavci vrijedi $p(k, i + 1) < p(k, i) < i < i + 1$, pa primjenom *Zamjedbe 2* dobivamo:

$$w(p_{k,i}, i) + w(p_{k,i+1}, i+1) < w(p_{k,i+1}, i) + w(p_{k,i}, i+1).$$

što je u kontradikciji s prije dobivenom nejednakosti. Zaključujemo da vrijedi $p(k, i + 1) \geq p(k, i)$. $\square$

Konačno ćemo dobivene spoznaje iskoristiti za optimiziranje naše dinamike! Pretpostavimo da smo odredili sve vrijednosti $dp(k-1, i)$ i da na temelju njih želimo izračunati vrijednosti $dp(k, i)$ za svaki $1 \leq i \leq n$. Najprije ćemo izračunati $dp(k, n/2)$, tako da prođemo po svim $1 \leq j < n/2$ i odredimo optimalni prijelaz $p_{k,n/2}$. Zbog $p_{k,i+1} \geq p_{k,i}$ optimalni prijelaz za $dp_{k,i<n/2}$ dobiva se u intervalu $p_{k,i<n/2} \in [1, p_{i,n/2}]$, dok je za $i > n/2$ ta vrijednost u intervalu $p_{k,i>n/2} \in [p_{i,n/2}, n]$. Izračun svih vrijednosti $dp(k, i)$ stoga se može obaviti rekurzivnom metodom *podijeli pa vladaj* u kojoj pamtimo dva intervala. Prvi interval, $[lo, hi]$, odnosi se na vrijednosti i za koje želimo izračunati $dp(k, i)$, a drugi interval $[p_{lo}, p_{hi}]$ odnosi se na granice u kojima se traži optimalni prijelaz $p_{k,i}$. Pseudokod rekurzivne funkcije dan je u nastavku:

```
izracunaj(lo, hi, p_lo, p_hi):
    mid = (lo + hi) / 2
    p_opt = 0
    dp(k, i) = 0
    za svaki i := p_lo do min(mid-1, p_hi):
        ako dp(k-1, i) + w(i, mid) > dp(k, i):
            dp(k, i) = dp(k-1, i) + w(i, mid)
            p_opt = i
    izracunaj(lo, mid-1, p_lo, p_opt)
    izracunaj(mid+1, hi, p_opt, p_hi)
```

Rekurziju je potrebno pozvati s parametrima $izracunaj(1, n, 1, n)$, a može se pokazati da je složenost takvog poziva $\mathcal{O}(N \log N)$. Budući da funkciju moramo pozvati K puta (za svaki prijelaz s $k-1$ na k), ukupna složenost algoritma iznosi $\mathcal{O}(K \cdot N \log N)$.

Zadatak: Redoslijed

Pripremio: Adrian Beker
Potrebno znanje: tournament stablo, topološko sortiranje

Za početak, opisat ćemo rješenja drugog i trećeg podzadatka, u kojima su sve boje u Davorovim potezima međusobno različite. Za $1 \leq i \leq N$, neka je P_i skup poteza čiji interval prekriva i-ti metar daske te neka f_i označava njegovu boju, odnosno neka je $f_i = 0$ ako je on neobojan. Ukoliko je $f_i = 0$ i P_i je neprazan, traženi redoslijed ne postoji, stoga ispisujemo "NE". Također, ako je $f_i > 0$ te P_i ne sadrži potez boje f_i, odgovor je "NE". U suprotnom, kako bi i-ti metar na kraju bio obojan bojom f_i, nužan i dovoljan uvjet na redoslijed jest sljedeći: jedinstveni potez iz P_i boje f_i (nazovimo ga z_i) dolazi poslije svih ostalih poteza iz P_i. Primijetimo sada da uvjete ovog oblika možemo prikazati pomoću usmjerenog grafa G u kojemu čvorovi predstavljaju poteze, a usmjereni brid pq označava da se potez p u redoslijedu nalazi prije poteza q. Ukoliko G ima ciklus, odgovor je "NE", a u suprotnom je traženi redoslijed moguće naći topološkim sortiranjem ovog grafa. Naivna implementacija ovog rješenja ima složenost $\mathcal{O}(N \cdot M)$ te je dovoljna za ostvariti sve bodove na drugom podzadatku.

Za treći podzadatak potrebno je efikasno izgraditi spomenuti graf. U tu svrhu, izgradimo tournament stablo T nad nizom f_i, a graf G proširimo čvorovima stabla T (ali ne i bridovima). Ovdje ćemo čvorove stabla T poistovjećivati s pripadajućim intervalima u nizu f_i. Interval svakog poteza p podijelimo na čvorove stabla T (kao što to činimo u upitima na T), nazovimo taj skup čvorova C_p. Za svaki $x \in C_p$ dodamo brid od p prema x. Nadalje, za svaki i takav da je $f_i > 0$, neka S_i označava skup čvorova stabla T koji sadrže f_i te neka je y_i jedinstveni element u $C_{z_i} \cap S_i$. Tada za svaki $x \in S_i \setminus \{y_i\}$ dodamo brid od x prema z_i. Ako za neki j vrijedi $z_i \neq z_j$ i $y_i = y_j$, odgovor je "NE", a u suprotnom dodamo bridove od svih poteza $p \neq z_i$ takvih da $y_i \in C_p$ prema z_i. Nije teško vidjeti da su valjani redoslijedi inducirani upravo topološkim poretcima ovako izgrađenog grafa G. Budući da svaki od skupova C_p, S_i ima veličinu $\mathcal{O}(\log N)$, graf G ima $\mathcal{O}(N + M)$ čvorova i $\mathcal{O}((N + M) \log N)$ bridova, stoga opisano rješenje ostvaruje sve bodove na trećem podzadatku.

Iako nije jasno kako modificirati ovaj pristup da radi u općenitom slučaju, potpuno rješenje zadatka koristit će neke slične ideje. Najprije za svaki $1 \leq i \leq N$ provjerimo da vrijedi $f_i > 0$ ako i samo ako se f_i nalazi u uniji intervala svih poteza – ako taj uvjet nije ispunjen, odmah znamo da je odgovor "NE". Dalje, traženi redoslijed pohlepno gradimo unatrag. Reći ćemo da je neki potez *dobar* ako još nije iskorišten, a trenutno se u nizu f_i na njegovom intervalu pojavljuje samo njegova boja (i eventualno nule). Nije teško tzv. *exchange argumentom* dokazati da je sljedeći algoritam točan:

Dok nisu svi potezi iskorišteni ponavljaj:

- Ako ne postoji dobar potez, odgovor je "NE";
- Inače uzmi bilo koji dobar potez p, postavi sve vrijednost u nizu f_i na njegovom intervalu na 0, te stavi p na početak redoslijeda.

Primijetimo da se postavljanje elemenata na intervalu na 0 lako svodi na postavljanje jednog elementa na 0 jer je svaki element potrebno najviše jednom postaviti na 0 (npr. ne-nul elemente možemo držati u *setu*). Naivna implementacija ovog algoritma ima složenost $\mathcal{O}(N \cdot M)$ te je dovoljna za četvrti podzadatak.

Za sve bodove, preostaje efikasno održavati dobre poteze. Poteze koji su trenutno dobri držat ćemo u redu (*queueu*) Q. Nad nizom f_i izgradimo tournament stablo čiji svaki čvor pamti minimalnu i maksimalnu boju na svojem intervalu (odnosno redom ∞, $-\infty$ ako takva boja ne postoji), nazovimo ih $mini$ i $maks$. Tijekom algoritma, za svaki čvor razlikujemo tri faze, ovisno o tome vrijedi li $mini < maks$, $mini = maks$ ili $mini > maks$, odnosno redom pojavljuju li se barem dvije, točno jedna ili niti jedna boja na tom intervalu.

Kao i u rješenju trećeg podzadatka, na početku interval svakog poteza p podijelimo na čvorove u stablu te označimo dobiveni skup čvorova s C_p. Također, održavamo brojač koji broji za koliko čvorova iz skupa C_p vrijedi $mini < maks$ ili $mini = maks \neq c_p$ (c_p je boja poteza p). Kada vrijednost tog brojača padne na 0, potez postaje dobar i stavljamo ga u red Q. Osvježavanje vrijednosti $mini$ i $maks$ u tournamentu radimo na uobičajen način, a odgovarajuće brojače nije teško osvježiti na samom početku te prilikom prijelaza između faza. Ukupna je složenost $\mathcal{O}((N+M)\log N)$. Za implementacijske detalje pogledajte službene kodove.

Zadatak Sadnice

Pripremili: Paula Vidas i Daniel Paleka
Potrebno znanje: ad-hoc, konstrukcije

Broj vijenaca koji nastanu nakon reza jednak je broju presječenih komada špage plus jedan. Ukupno ćemo koristiti $NM + N + M$ komada špage, a mogućih rezova ima $N + M$. Svaku špagu siječe točno jedan mogući rez, pa uvijek postoji rez koji siječe barem $\lceil \frac{NM+N+M}{N+M} \rceil = \lceil \frac{NM}{N+M} \rceil + 1$ komada špage. Pokazat ćemo da uvijek možemo postići taj odgovor.

Prva dva podzadatka su posebni slučajevi, čija ćemo (jedna od mogućih) rješenja ilustrirati za $N = M = 6$, odnosno $N = 6, M = 12$:

```
o--o--o--o--o--o--o
|  |  |           |
o  o  o  o  o  o  o
         |  |  |  |
o--o--o--o--o--o--o
|  |  |           |
o  o  o  o  o  o  o
         |  |  |  |
o--o--o--o--o--o--o
|  |  |           |
o  o  o  o  o  o  o
         |  |  |  |
o--o--o--o--o--o--o
```

```
o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o
|  |  |  |        |
o  o  o  o  o  o  o--o--o--o--o--o--o
            |  |  |  |  |
o--o--o--o--o--o--o  o  o  o  o  o  o
                  |        |  |  |  |
o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o
|  |  |  |        |
o  o  o  o  o  o  o--o--o--o--o--o--o
            |  |  |  |  |
o--o--o--o--o--o--o  o  o  o  o  o  o
                  |        |  |  |  |
o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o
```

Lako je vidjeti kako ta rješenja generalizirati za bilo koji N, samo valja pripaziti kada N nije djeljiv s dva, odnosno tri.

Prije prelaska na rješenje za sve bodove, valja napomenuti nešto u vezi parcijalnog bodovanja suboptimalnih rješenja. Natjecatelji koji se nisu susreli s ovakvim načinom bodovanja mogu se uplašiti zadatka i misliti da je optimalno rješenje jako teško i da je zadatak nestandardnog tipa, kao na primjer IOI 2013 Art Class. Međutim, motivacija za parcijalno bodovanje može biti drukčija.

Velik dio teoretske računalne znanosti bavi se algoritmima koji daju suboptimalna rješenja koja su unutar nekog konstantnog ili većeg faktora od optimalnog rješenja - tzv. ε-aproksimacijama. Zapravo, na konferencijama i na arXiv-u se sve rjeđe viđaju algoritmi koii traže točno optimalno rješenje nekog kombinatornog problema.

Drugopotpisani autor smatra da bi se parcijalno bodovanje trebalo češće pojavljivati na natjecanjima, jer spor i točan algoritam ne mora nužno biti vrijedniji od brzog i skoro točnog algoritma. (Naravno, pod uvjetom da algoritam *uvijek* producira rješenje blizu optimalnog.)

Na primjer, za oko 50 bodova na ovom zadatku, dovoljno je bilo smisliti pravilnu raspodjelu špaga po retcima i stupcima koja čini stablo, te da nijedan rez ne siječe više od $\frac{3}{2}K$ komada špage. Takvo (lakše) rješenje ostavljamo čitatelju za vježbu, te predstavljamo samo rješenje za sve bodove.

Prvo ćemo pokazati konstrukciju za parni N, na primjeru $N = 6, M = 17$. Povežemo prvo sve sadnice u parnim redovima i sve sadnice u zadnjem stupcu:

```
o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o
                                                   |
o  o  o  o  o  o  o  o  o  o  o  o  o  o  o  o  o  o
                                                   |
o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o
                                                   |
o  o  o  o  o  o  o  o  o  o  o  o  o  o  o  o  o  o
                                                   |
o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o
                                                   |
o  o  o  o  o  o  o  o  o  o  o  o  o  o  o  o  o  o
                                                   |
o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o
```

Neka je $K = \lceil \frac{NM}{N+M} \rceil$. Promotrimo prvo prvu "prugu", i sadnice u sredini. Prvih K sadnica povežemo prema gore, sljedećih K prema dolje, a ostatak prema desno.

```
o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o
|  |  |  |  |                                      |
o  o  o  o  o  o  o  o  o  o  o  o--o--o--o--o--o--o
               |  |  |  |  |                       |
o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o
```

Zatim u sljedećoj pruzi radimo istu stvar, samo pomaknutu za $2K$. To jest, počinjemo od sadnice $(3, 2K)$, a drugu koordinatu gledamo modulo M. Slično nastavljamo dalje. Za promatrani primjer na kraju imamo:

```
o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o
|  |  |  |  |                                      |
o  o  o  o  o  o  o  o  o  o  o  o--o--o--o--o--o--o
               |  |  |  |  |                       |
o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o
                                 |  |  |  |  |     |
o  o  o  o--o--o--o--o--o--o--o  o  o  o  o  o  o  o
|  |  |                                      |  |  |
o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o
         |  |  |  |  |                             |
o--o--o--o  o  o  o  o  o  o  o  o  o  o--o--o--o--o
                        |  |  |  |  |              |
o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o
```

Ako je N neparan, onda u zadnjem retku srednjih K sadnica ne povezujemo prema dolje, nego prema desno. Za primjer $N = 7, M = 17$ dobivamo:

```
o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o
|  |  |  |  |                                      |
o  o  o  o  o  o  o  o  o  o  o--o--o--o--o--o--o--o
               |  |  |  |  |                       |
o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o
                              |  |  |  |  |        |
o  o  o  o--o--o--o--o--o--o--o  o  o  o  o  o  o  o
|  |  |                                      |  |  |
o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o
         |  |  |  |  |                             |
o--o--o--o  o  o  o  o  o  o  o  o  o  o  o--o--o--o
                        |  |  |  |  |              |
o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o
|                                      |  |  |  |  |
o  o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o  o  o  o  o
```

Dokažimo sada da smo postigli željeno ograničenje, odnosno da svaki rez siječe najviše $K + 1$ špaga. Vodoravne špage smo rasporedili ravnomjerno, tj. za bilo koja dva okomita reza, broj špaga koje sijeku razlikuje se za najviše jedan. Ako je $2K \leq M$, svaki vodoravni rez siječe točno $K + 1$ špaga, pa svaki okomiti rez može sijeći najviše $K + 1$ špaga (u suprotnom bi prosjek bio prevelik). Inače je $2K = M + 1$. Vodoravni rezovi tada sijeku najviše $K + 1$ dužina, a okomiti najviše $\lceil \frac{N}{2} \rceil + 1 \leq K + 1$. Formalne dokaze ovih tvrdnji ostavljamo čitatelju za vježbu.