Drugi izborni ispit

30. srpnja 2020.

Zadaci

Zadatak	Vremensko ograničenje	Memorijsko ograničenje	Bodovi
Autoritet	2 sekunde	512 MiB	100
Restoran	4 sekunde	512 MiB	100
Totoro	1 sekunda	512 MiB	100
Ukupno			300

Zadatak Autoritet

Gospodin Malnar globalno je priznat kao autoritet za mnoge stvari. Primjerice, autoritet je po pitanju kvalitete suhomesnatih proizvoda, ekološkog uzgoja ljutih papričica na balkonskim prostorima, degustacije sokova na bazi grožđa i mnogih drugih stvari. U ovom ćemo se zadatku baviti problemom koji ga trenutno mori te ćemo istražiti kako će gospodin Malnar svoj problem riješiti koristeći neosporan autoritet u avioindustriji.

Naime, gospodin Malnar je ove godine imao zakazane letove u Singapur i Moskvu. Već je rezervirao avionske karte, odabrao prostran smještaj i proučio najbolje *wellness & spa* destinacije. Nažalost, uslijed epidemiološke krize, putovanja su otkazana. Sav shrvan i zabrinut, odmah je krenuo proučavati redove letenja i opće stanje avioindustrije te primijetio da **svijet više nije povezan**. „*To tako ne može, moram pod hitno spasiti svijet!*", pomislio je gospodin Malnar i bacio se na posao.

Na svijetu postoji N zračnih luka i M zračnih linija. Zračne luke označavamo prirodnim brojevima od 1 do N, a svaka zračna linija spaja neke dvije različite zračne luke, što znači da avioni mogu u oba smjera putovati između te dvije luke. U normalnim je okolnostima bilo moguće iz svake zračne luke proputovati do bilo koje druge zračne luke koristeći jednu ili više zračnih linija, odnosno, svijet je bio povezan. Gospodin Malnar će svijet ponovo povezati sa svega nekoliko telefonskih poziva. Svaki poziv bit će upućen nekoj zračnoj luci, neki će pozivi možda više puta biti upućeni istoj luci, a teći će otprilike ovako:

Predstavnik zračne luke: Dobar dan! Dobili ste zračnu luku, kako vam mogu pomoći?

Gospodin Malnar: Dobar dan, gospodin Malnar pri telefonu. Primijetio sam da vaše zračne linije nemaju smisla i da trebate napraviti potpuno suprotnu stvar. Odnosno, neka skup A sadrži zračne luke s kojima ste direktno spojeni zračnom linijom, a neka skup B sadrži sve ostale zračne luke. Želim da ukinete sve zračne linije koje spajaju vašu luku i luke iz skupa A te da uvedete zračne linije koje će spajati vašu luku i luke iz skupa B. Ja sad imam nekog posla pa moram ići, vi napravite kako sam rekao.

Predstavnik zračne luke: Ispričavamo se na propustu, postupit ćemo kako ste rekli.

Vaš je zadatak odrediti koji je najmanji broj telefonskih poziva koje gospodin Malnar mora obaviti kako bi ponovo spojio svijet. Također, odredite na koliko je različitih načina mogao obavljati pozive, a da i dalje broj obavljenih poziva bude minimalan. Broj načina potrebno je ispisati modulo $10^9 + 7$. Moguće je dokazati da, koristeći dovoljno telefonskih poziva, gospodin Malnar uvijek može spasiti svijet.

Ulazni podaci

U prvom su retku prirodni brojevi N i M iz teksta zadatka.

U i-tom od idućih M redaka nalaze dva prirodna broja a_i i b_i ($1 \leq a_i, b_i \leq N, a_i \neq b_i$) koji označavaju da postoji zračna linija između zračnih luka s oznakama a_i i b_i. Neće postojati dvije zračne linije koje spajaju isti par zračnih luka.

Izlazni podaci

U prvom retku ispišite traženi najmanji broj telefonskih poziva iz teksta zadatka.

U drugom retku ispišite traženi broj načina iz teksta zadatka modulo $10^9 + 7$.

Bodovanje

Rješenja koja na nekom test podatku ispišu točan prvi redak i pogrešan drugi redak (ili ga uopće ne ispišu), osvojit će 15% bodova predviđenih za taj test podatak.

Broj bodova nekog podzadatka jednak je najmanjem broju bodova koje vaše rješenje ostvaruje na nekom od test podataka tog podzadatka.

Podzadatak	Broj bodova	Ograničenja
1	5	$1 \leq N \leq 18$
2	9	$1 \leq N, M \leq 300$
3	16	$1 \leq N, M \leq 3\,000$
4	70	$1 \leq N, M \leq 500\,000$

Probni primjeri

ulaz

```
6 6
3 4
1 2
2 3
5 4
4 1
4 6
```

izlaz

```
0
1
```

ulaz

```
4 2
1 4
2 3
```

izlaz

```
2
4
```

ulaz

```
8 9
1 4
2 3
6 7
8 5
2 4
7 8
5 6
6 8
4 3
```

izlaz

```
1
5
```

Pojašnjenje prvog probnog primjera: Svijet je već povezan, stoga gospodin Malnar ne treba obaviti niti jedan poziv.

Pojašnjenje drugog probnog primjera: Sljedeći su nizovi poziva najkraći među onima koji svijet čine povezanim: $(1, 4)$, $(4, 1)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$.

Zadatak Restoran

Sovjetski Savez, odnosno Savez Sovjetskih Socijalističkih Republika (SSSR) nekadašnja je država koja je nastala 1917. godine nakon Oktobarske revolucije, a raspala se 1991. godine. Popularne internetske šale nerijetko prezentiraju život stanovnika Sovjetskoga Saveza oskudicom, neimaštinom i slabom zastupljenošću proizvoda na tržištu. Tekst ovog zadatka, kao i sam zadatak, inspiraciju pronalazi u takvim stereotipnim šalama te nema veze sa stvarnošću.

Ispred ulaza u sovjetski restoran stoji N ljudi koji čekaju da se restoran otvori. Ljudi su označeni prirodnim brojevima od 1 do N onim redoslijedom kojim su se skupljali ispred restorana. Na jelovniku je samo jedna opcija, tzv. *specijalitet kuće*, jaja na oko. U restoranu ne radi kuhar, već gosti moraju sami sebi spremiti svoje jelo. Također, u restoranu se nalazi samo jedna tava, tako da **u nekom trenutku hranu može spremati najviše jedan gost.** Dodatno, u restoranu se nalazi samo jedna vilica i samo jedan nož, stoga, u **nekom trenutku hranu može jesti najviše jedan gost.** Srećom, u restoranu se nalazi beskonačno mnogo tanjura pa gost koji završava s pripremom hrane može gotovu hranu prebaciti na tanjur i pričekati da se oslobode vilica i nož.

Za svakog gosta je poznato koliko mu je vremena potrebno da spremi hranu i koliko mu je vremena potrebno da tu hranu pojede. Vaš je zadatak odrediti koliko je najmanje vremena potrebno da se svih N gostiju najede ako odluče spremati i jesti hranu optimalnim redoslijedom.

Međutim, to nije sve, prije nego što se restoran otvorio, dogodilo se K ključnih događaja oblika:

- `DOLAZI a b` – došao je novi gost koji hranu može spremiti za a minuta, a pojesti za b minuta. Novopridošli gost označen je najmanjim prirodnim brojem kojim nije označen niti jedan od dosadašnjih gostiju.
- `ODLAZI x` – otišao je gost koji je x-ti po redu došao ispred restorana.
- `POREDAK` – gosti su nestrpljivi i žele saznati optimalan redoslijed spremanja i jedenja hrane kojim će se svi najesti u najmanjem mogućem vremenu.

Prije prvog događaja potrebno je ispisati koliko je najmanje vremena potrebno da se N gostiju najede. Za svaki događaj tipa `DOLAZI` ili `ODLAZI`, potrebno je ispisati koliko je minimalno vremena potrebno da se najede onaj skup gostiju koji se nakon tog događaja nalazi ispred restorana. Konačno, nakon svakog događaja tipa `POREDAK` potrebno je ispisati kojim je redoslijedom optimalno spremati i jesti hranu da se u najmanjem mogućem vremenu najede onaj skup ljudi koji se trenutno nalazi ispred restorana.

Ulazni podaci

U prvom su retku prirodni brojevi N i K iz teksta zadatka.

U i-tom od sljedećih N redaka nalaze po dva prirodna broja a_i i b_i $(1 \le a_i, b_i \le 10^9)$ koji označavaju da gost s oznakom i može hranu spremiti za a_i minuta, a pojesti za b_i minuta.

U sljedećih se K redaka nalazi po jedan ključan događaj u formatu kakav je opisan u tekstu zadatka. Možete pretpostaviti da su događaji međusobno konzistentni. Odnosno, nikad neće otići gost koji još nije niti došao. Također, ispred restorana u svakom će se trenutku nalaziti barem jedan gost, a brzina spremanja i jedenja hrane novopridošlih gostiju pokoravat će se već spomenutim ograničenjima iz prethodnog odlomka.

Izlazni podaci

U prvi je redak potrebno ispisati koliko je minimalno vremena potrebno da se početnih N gostiju najede.

Ako je i-ti događaj tipa `DOLAZI` ili `ODLAZI`, tada je u $(i+1)$-om retku potrebno ispisati koliko je minimalno vremena potrebno da se najede skup gostiju koji se nakon i-tog događaj nalazi ispred restorana.

Ako je i-ti događaj tipa `POREDAK`, tada je u $(i+1)$-om retku potrebno ispisati $2x$ brojeva, pri čemu x označava broj gostiju koji se trenutno nalaze ispred restorana. Prvih x brojeva treba sadržavati oznake gostiju onim redom kojim će slagati hranu, dok posljednjih x brojeva treba sadržavati oznake gostiju onim redom kojim će jesti hranu.

Bodovanje

Podzadatak	Broj bodova	Ograničenja
1	5	$1 \le N \le 9$, $K = 1$, jedini događaj je tipa `POREDAK`
2	13	$1 \le N \le 20$, $K = 1$, jedini događaj je tipa `POREDAK`
3	21	$1 \le N \le 200\,000$, $K = 1$, jedini događaj je tipa `POREDAK`
4	29	$1 \le N, K \le 200\,000$, ne postoji događaj tipa `POREDAK`
5	32	$1 \le N, K \le 200\,000$, događaj tipa `POREDAK` dogodit će se najviše 10 puta.

Probni primjeri

ulaz

```
2 1
1 3
2 3
POREDAK
```

izlaz

```
7
1 2 1 2
```

ulaz

```
1 4
4 3
DOLAZI 3 8
DOLAZI 5 2
ODLAZI 1
ODLAZI 3
```

izlaz

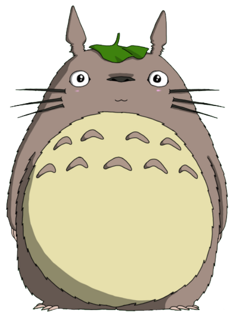
```
7
14
16
13
11
```

Pojašnjenje prvog probnog primjera:

Gost s oznakom 1 započinje sa slaganjem obroka i završava u prvoj minuti. Zatim ta ista osoba započinje objed, a gost s oznakom 2 započinje sa slaganjem svog obroka. U trećoj minuti gost s oznakom 2 završava sa slaganjem svog obroka, ali gost s oznakom 1 još nije pojeo pa ovaj mora čekati sve do četvrte minute. Konačno, u četvrtoj minuti gost oznakom 2 započinje svoj obrok kojeg završava u sedmoj minuti.

Zadatak Totoro

"*Tonari no To to ro Totoro, To to ro Totoro*"



Totoro ima K permutacija $p_1, \ldots, p_K$ duljine N.

Neka je S skup svih permutacija koje je moguće dobiti komponiranjem konačnog broja permutacija p_i. Kompozicija dvije permutacije π i τ na mjestu i ima element $\pi(\tau(i))$. Na primjer, kompozicija permutacija $\pi = (1,3,2)$ i $\tau = (2,3,1)$ jednaka je $\pi \circ \tau = (3,2,1)$. Dozvoljeno je komponirati iste permutacije više puta.

Jasno je da je S konačan skup, jer je sadržan u skupu svih permutacija duljine N.

Zanima nas **prosječan broj inverzija permutacija u skupu** S. Broj inverzija $\mathcal{I}(\pi)$ permutacije π jednak je broju uređenih parova brojeva $1 \leq i < j \leq N$ za koje je $\pi(i) > \pi(j)$.

Formalno, zanima nas $\frac{1}{|S|} \sum_{\pi \in S} \mathcal{I}(\pi)$. Može se dokazati da je odgovor moguće napisati kao skraćeni razlomak $\frac{A}{B}$, gdje B nije djeljiv s $10^9 + 7$. Ispišite AB^{-1} modulo $10^9 + 7$, odnosno broj X takav da je $0 \leq X < 10^9 + 7$ i $X \cdot B \equiv A \pmod{10^9 + 7}$.

Ulazni podaci

U prvom su retku prirodni brojevi K i N iz teksta zadatka.

U i-tom od sljedećih K redaka nalazi se permutacija p_i, prikazana kao niz od N različitih brojeva od 1 do N, odvojenih razmakom.

Izlazni podaci

U jedinom retku ispišite odgovor modulo $10^9 + 7$.

Bodovanje

Podzadatak	Broj bodova	Ograničenja
1	7	$1 \leq K \leq 10, 1 \leq N \leq 9$
2	8	$K = 1$, $1 \leq N \leq 2\,500$, permutacija je ciklus.
3	25	$K = 1$, $1 \leq N \leq 2\,500$
4	60	$1 \leq K \leq 10$, $1 \leq N \leq 2\,500$

Napomena: Permutacija je ciklus ako brojeve $1, 2, \ldots, n$ možemo poredati u niz $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tako da vrijedi $p(a_1) = a_2, p(a_2) = a_3, \ldots, p(a_n) = a_1$.

Probni primjeri

ulaz	ulaz	ulaz
1 3 2 3 1	2 5 4 2 1 3 5 2 5 4 3 1	1 9 3 4 5 6 7 8 1 9 2
izlaz	**izlaz**	**izlaz**
333333337	5	300000017

Pojašnjenje prvog probnog primjera: Primijetimo da je $S = \{(2,3,1),(3,1,2),(1,2,3)\}$. Prva permutacija ima dvije inverzije, druga isto dvije inverzije, a zadnja je identiteta i nema inverzija. Zato je prosječan broj inverzija $\frac{4}{3}$, što odgovara ispisanom broju modulo $10^9 + 7$.

Pojašnjenje drugog probnog primjera: Može se provjeriti da je S jednak skupu svih permutacija skupa $\{1,2,3,4,5\}$, tj. komponiranjem danih permutacija je moguće dobiti sve ostale permutacije.

Pojašnjenje trećeg probnog primjera: U ovom primjeru vrijedi $|S| = 20$, te je odgovor jednak razlomku $\frac{149}{10}$ modulo $10^9 + 7$.