Opisi algoritama

Zadatke, testne primjere i rješenja pripremili: Adrian Beker, Marin Kišić, Daniel Paleka, Ivan Paljak, Tonko Sabolčec i Paula Vidas. Primjeri implementiranih rješenja su dani u priloženim izvornim kodovima.

Zadatak: Kraljevstvo

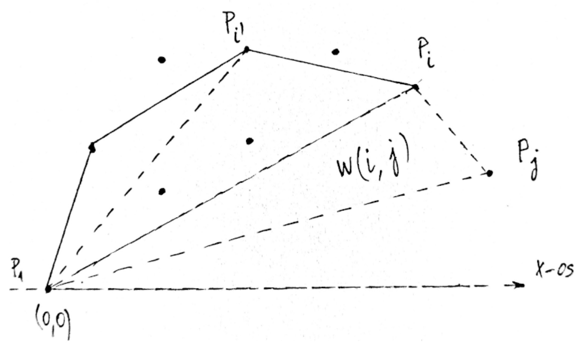
Pripremili: Tonko Sabolčec i Paula Vidas
Potrebno znanje: geometrija, konveksna ljuska, dinamičko programiranje, metoda *podijeli pa vladaj*

Za prvi podzadatak dovoljno je za svaki K-člani podskup dvoraca koji sadrži najljeviji i najdesniji dvorac izračunati površinu konveksne ljuske pripadajućih točaka iz podskupa. Za određivanje konveksne ljuske određenog skupa točaka preporučuje se korištenje *monotone chain* algoritma, dok se površina konveksnog poligona može dobiti podjelom poligona na $K-2$ trokuta (npr. koji dijele jedan zajednički vrh) i zbrajanjem površina trokuta dobivenih preko analitičke formule:

$$P(\Delta ABC) = \frac{1}{2} \cdot |x_A(y_B - y_C) + x_B(y_C - y_A) + x_C(y_A - y_B)|.$$

Ostalim podzadacima pristupit ćemo tako da zadani skup točaka podijelimo na one iznad i ispod x-osi (pri čemu najljeviju i najdesniju točku uzimamo u oba skupa) te odredimo optimalne donje i gornje polovice konačne ljuske. Konkretnije, izračunat ćemo vrijednosti $up(k)$ i $down(k)$ za svaki $2 \leq k \leq K$ gdje $up(k)$ predstavlja najveću moguću površinu neke ljuske koja se sastoji od k vrhova gornjeg skupa točaka, dok $down(k)$ predstavlja analogne vrijednosti za donji skup točaka. Također primijetite da nas zanimaju ljuske koje se sastoje od K ili *manje* vrhova. Konačno rješenje tada dobivamo pronalaskom najvećeg zbroja $up(k_1) + down(k_2)$ pri čemu je $k_1 + k_2 \leq K + 2$ (ova dvojka proizlazi iz činjenice što smo najljeviju i najdesniju točku koristili u oba skupa).

Vrijednosti $up(k)$ i $down(k)$ možemo dobiti primjenom dinamičkog programiranja. U nastavku ćemo se usredotočiti samo na gornju polovicu točaka (obrada za donju polovicu ide analogno). Neka su $P_1, P_2, ..., P_n$ točke gornje polovice uzlazno sortirane po x-koordinati (P_1 je najljevija, a P_n najdesnija). Označimo s $dp(k, i, j)$ najveću moguću površinu neke konveksne ljuske prvih j točaka ($P_1, P_2, ..., P_j$) koja se sastoji od k vrhova, pri čemu su P_i i P_j posljednja dva vrha. Stanje gradimo prijelazima u kojima dodajemo po jednu sljedeću točku gornje ljuske uz pribrajanje pripadajuće površine. U stanje $dp(k, i, j)$ mogli smo doći iz stanja $dp(k-1, i', i)$ uz pribrajanje površine trokuta $P(\Delta P_1 P_i P_j)$, koju ćemo označiti s $w(i, j)$. Pritom je važno voditi računa o konveksnosti vrhova koje uzimamo, tj. da točke P'_i, P_i, P_j budu poredane u smjeru kazaljke na satu.



Možemo pisati:

$$dp(k, i, j) = \max_{1 \leq i' < i}\{dp(k-1, i', i) + w(i, j)\} \quad \text{t.d.} \quad ccw(P'_i, P_i, P_j) < 0,$$

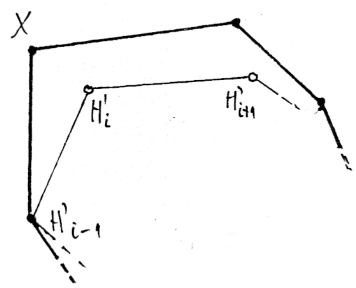
pri čemu je $ccw(A, B, C)$ negativna ako su točke A, B, C poredane u smjeru kazaljke na satu. Konkretna vrijednost ccw funkcije može se dobiti vektorskim množenjem vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$:

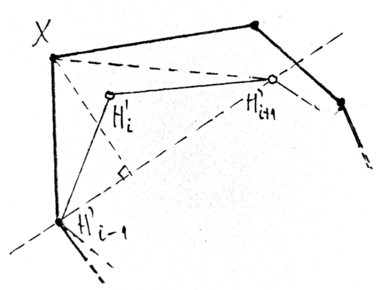
$$ccw(A, B, C) = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (x_B - x_A)(y_C - y_A) - (x_C - x_A)(y_B - y_A).$$

Vrijednosti početnih stanja $dp(2, 1, i)$ jednake su nuli, a konačna vrijednost $up(k)$ dobiva se kao $up(k) = \max_{1<i<n} dp(k, i, n)$. Stanja ima $\mathcal{O}(K \cdot N^2)$, a složenost prijelaza je $\mathcal{O}(N)$ pa je ukupna složenost takvog algoritma $\mathcal{O}(K \cdot N^3)$, dovoljna za osvajanje bodova na drugom podzadatku.

Zamjedba 1. *Vrhovi optimalne konveksne ljuske bit će podskup vrhova konveksne ljuske svih ulaznih točaka.*

Skica dokaza. Neka je H skup vrhova konveksne ljuske svih ulaznih točaka (točke tog skupa nazvat ćemo *vanjskim* točkama). Pretpostavimo suprotno, tj. da je za određenu veličinu ljuske, optimalna konveksna ljuska $H' \not\subset H$. Drugim riječima H' sadrži točku koja nije *vanjska*, neka je to točka H'_i. (Na slici ispod vanjske su točke popunjene.) Provucimo pravac kroz vrhove susjedne vrhu H'_i odabrane konveksne ljuske, tj. kroz točke H'_{i-1} i H'_{i+1}. Tražimo najudaljeniju točku (nazovimo je X) od promatranog pravca s iste strane pravca kao točka H'_i. Najudaljenija točka X sigurno je različita od H'_i te pripada vanjskoj ljusci H (kad bi H'_i bila najudaljenija točka, tada bi H'_i ujedno bila i dio vanjske ljuske, što je suprotno pretpostavci). Primjetite da se zamjenom točke H' točkom X povećava površina odabrane konveksne ljuske (što proizlazi iz formule za trokut $\frac{1}{2} \cdot baza \cdot visina$). No, to je u kontradikciji s pretpostavkom da je polazna konveksna ljuska bila optimalne površine. □





Razlog zbog kojeg smo u prethodno opisanoj dinamici pamtili posljednje dvije točke u stanju je taj da omogućimo postupnu izgradnju konveksne ljuske na *proizvoljnom* skupu točaka (treću točku u prijelazu uvijek smo birali tako da se zadovolji smjer kazaljke na satu). No, sada možemo zanemariti sve točke koje nisu vrhovi konveksne ljuske ulaznih točaka, umjesto zadnje dvije točke u stanju možemo pamtiti samo posljenju točku. Drugim riječima, stanje dinamike $dp(k, i)$ predstavlja najveću moguću površinu neke konveksne ljuske koja se sastoji od k vrhova pri čemu je posljednji vrh točka P_i. Prijelaz se tada može zapisati kao:

$$dp(k, i) = \max_{1 \le j < i} \{dp(k - 1, j) + w(j, i)\}.$$

Pritom se pretpostavlja da točke $P_1, P_2, ...P_n$ čine vrhove gornje konveksne ljuske. Postoji $\mathcal{O}(K \cdot N)$ stanja, a složenost prijelaza je $\mathcal{O}(N)$, što daje ukupnu vremensku složenost od $\mathcal{O}(K \cdot N^2)$, što je dovoljno za treći podzadatak.

Zamjedba 2. *Za oznake pozicija* $a < b < c < d$ *vrijedi* $w(a, d) + w(b, c) < w(a, c) + w(b, d)$.

Skica dokaza. Spomenuta nejednakost popularno se naziva *nejednakost četverokuta*, a u našem će slučaju poslužiti kao trik za optimizaciju dinamike. No, obrazložimo za početak tu tvrdnju. Vrijednost $w(i, j)$ jednaka je:

$$w(i, j) = P(\Delta P_1 P_i P_j) = P((0, 0), P_i, P_j) = \frac{1}{2}(x_j y_i - x_i y_j),$$

gdje je $P_i = (x_i, y_i)$. Raspisivanjem, preslagivanjem i sređivanjem dobiva se:

$$w(a, d) + w(b, c) - w(a, c) - w(b, d) = \frac{1}{2}((x_b - x_a)(y_d - y_c) - (y_b - y_a)(x_d - x_c)).$$

Izraz s desne strane odgovara polovici vektorskog umnoška $\overrightarrow{P_aP_b} \times \overrightarrow{P_cP_d}$, a budući da su točke P_a, P_b, P_c, P_d poredane u smjeru kazaljke na satu, ta je vrijednost negativna, tj. vrijedi:

$$w(a,d) + w(b,c) - w(a,c) - w(b,d) < 0 \quad \Rightarrow \quad w(a,d) + w(b,x) < w(a,c) + w(b,d).$$

$\square$

Zamjedba 3. *Neka je $p_{k,i}$ oznaka najmanje vrijednosti j optimalnog prijelaza u $dp(k,i) = dp(k-1,j) + w(j,i)$. Tada vrijedi $p_{k,i+1} \geq p_{k,i}$.*

Skica dokaza. Pretpostavimo suprotno, tj. da za neke k, i vrijedi $p_{k,i+1} < p_{k,i}$. Budući da je $p_{k,i}$ optimalni prijelaz za $dp(k,i)$, odnosno $p_{k,i+1}$ optimalni prijelaz za $dp(k,i+1)$, vrijede nejednakosti:

$$dp(k-1, p_{k,i}) + w(p_{k,i}, i) \geq dp(k-1, p_{k,i+1}) + w(p_{k,i+1}, i)$$
$$dp(k-1, p_{k,i+1}) + w(p_{k,i+1}, i+1) \geq dp(k-1, p_{k,i}) + w(p_{k,i}, i+1)$$

Zbrajanjem nejednakosti i sređivanjem dolazi se do:

$$w(p_{k,i}, i) + w(p_{k,i+1}, i+1) \geq w(p_{k,i+1}, i) + w(p_{k,i}, i+1).$$

Po pretpostavci vrijedi $p(k, i+1) < p(k,i) < i < i+1$, pa primjenom *Zamjedbe 2* dobivamo:

$$w(p_{k,i}, i) + w(p_{k,i+1}, i+1) < w(p_{k,i+1}, i) + w(p_{k,i}, i+1).$$

što je u kontradikciji s prije dobivenom nejednakosti. Zaključujemo da vrijedi $p(k, i+1) \geq p(k,i)$. $\square$

Konačno ćemo dobivene spoznaje iskoristiti za optimiziranje naše dinamike! Pretpostavimo da smo odredili sve vrijednosti $dp(k-1,i)$ i da na temelju njih želimo izračunati vrijednosti $dp(k,i)$ za svaki $1 \leq i \leq n$. Najprije ćemo izračunati $dp(k, n/2)$, tako da prođemo po svim $1 \leq j < n/2$ i odredimo optimalni prijelaz $p_{k,n/2}$. Zbog $p_{k,i+1} \geq p_{k,i}$ optimalni prijelaz za $dp_{k,i<n/2}$ dobiva se u intervalu $p_{k,i<n/2} \in [1, p_{i,n/2}]$, dok je za $i > n/2$ ta vrijednost u intervalu $p_{k,i>n/2} \in [p_{i,n/2}, n]$. Izračun svih vrijednosti $dp(k,i)$ stoga se može obaviti rekurzivnom metodom *podijeli pa vladaj* u kojoj pamtimo dva intervala. Prvi interval, $[lo, hi]$, odnosi se na vrijednosti i za koje želimo izračunati $dp(k,i)$, a drugi interval $[p_{lo}, p_{hi}]$ odnosi se na granice u kojima se traži optimalni prijelaz $p_{k,i}$. Pseudokod rekurzivne funkcije dan je u nastavku:

```
izracunaj(lo, hi, p_lo, p_hi):
    mid = (lo + hi) / 2
    p_opt = 0
    dp(k, i) = 0
    za svaki i := p_lo do min(mid-1, p_hi):
        ako dp(k-1, i) + w(i, mid) > dp(k, i):
            dp(k, i) = dp(k-1, i) + w(i, mid)
            p_opt = i
    izracunaj(lo, mid-1, p_lo, p_opt)
    izracunaj(mid+1, hi, p_opt, p_hi)
```

Rekurziju je potrebno pozvati s parametrima $izracunaj(1, n, 1, n)$, a može se pokazati da je složenost takvog poziva $\mathcal{O}(N \log N)$. Budući da funkciju moramo pozvati K puta (za svaki prijelaz s $k-1$ na k), ukupna složenost algoritma iznosi $\mathcal{O}(K \cdot N \log N)$.

Zadatak: Redoslijed

Pripremio: Adrian Beker
Potrebno znanje: tournament stablo, topološko sortiranje

Za početak, opisat ćemo rješenja drugog i trećeg podzadatka, u kojima su sve boje u Davorovim potezima međusobno različite. Za $1 \le i \le N$, neka je P_i skup poteza čiji interval prekriva i-ti metar daske te neka f_i označava njegovu boju, odnosno neka je $f_i = 0$ ako je on neobojan. Ukoliko je $f_i = 0$ i P_i je neprazan, traženi redoslijed ne postoji, stoga ispisujemo "NE". Također, ako je $f_i > 0$ te P_i ne sadrži potez boje f_i, odgovor je "NE". U suprotnom, kako bi i-ti metar na kraju bio obojan bojom f_i, nužan i dovoljan uvjet na redoslijed jest sljedeći: jedinstveni potez iz P_i boje f_i (nazovimo ga z_i) dolazi poslije svih ostalih poteza iz P_i. Primijetimo sada da uvjete ovog oblika možemo prikazati pomoću usmjerenog grafa G u kojemu čvorovi predstavljaju poteze, a usmjereni brid pq označava da se potez p u redoslijedu nalazi prije poteza q. Ukoliko G ima ciklus, odgovor je "NE", a u suprotnom je traženi redoslijed moguće naći topološkim sortiranjem ovog grafa. Naivna implementacija ovog rješenja ima složenost $\mathcal{O}(N \cdot M)$ te je dovoljna za ostvariti sve bodove na drugom podzadatku.

Za treći podzadatak potrebno je efikasno izgraditi spomenuti graf. U tu svrhu, izgradimo tournament stablo T nad nizom f_i, a graf G proširimo čvorovima stabla T (ali ne i bridovima). Ovdje ćemo čvorove stabla T poistovjećivati s pripadajućim intervalima u nizu f_i. Interval svakog poteza p podijelimo na čvorove stabla T (kao što to činimo u upitima na T), nazovimo taj skup čvorova C_p. Za svaki $x \in C_p$ dodamo brid od p prema x. Nadalje, za svaki i takav da je $f_i > 0$, neka S_i označava skup čvorova stabla T koji sadrže f_i te neka je y_i jedinstveni element u $C_{z_i} \cap S_i$. Tada za svaki $x \in S_i \setminus \{y_i\}$ dodamo brid od x prema z_i. Ako za neki j vrijedi $z_i \neq z_j$ i $y_i = y_j$, odgovor je "NE", a u suprotnom dodamo bridove od svih poteza $p \neq z_i$ takvih da $y_i \in C_p$ prema z_i. Nije teško vidjeti da su valjani redoslijedi inducirani upravo topološkim poretcima ovako izgrađenog grafa G. Budući da svaki od skupova C_p, S_i ima veličinu $\mathcal{O}(\log N)$, graf G ima $\mathcal{O}(N + M)$ čvorova i $\mathcal{O}((N + M) \log N)$ bridova, stoga opisano rješenje ostvaruje sve bodove na trećem podzadatku.

Iako nije jasno kako modificirati ovaj pristup da radi u općenitom slučaju, potpuno rješenje zadatka koristit će neke slične ideje. Najprije za svaki $1 \le i \le N$ provjerimo da vrijedi $f_i > 0$ ako i samo ako se f_i nalazi u uniji intervala svih poteza – ako taj uvjet nije ispunjen, odmah znamo da je odgovor "NE". Dalje, traženi redoslijed pohlepno gradimo unatrag. Reći ćemo da je neki potez *dobar* ako još nije iskorišten, a trenutno se u nizu f_i na njegovom intervalu pojavljuje samo njegova boja (i eventualno nule). Nije teško tzv. *exchange argumentom* dokazati da je sljedeći algoritam točan:

Dok nisu svi potezi iskorišteni ponavljaj:

- Ako ne postoji dobar potez, odgovor je "NE";
- Inače uzmi bilo koji dobar potez p, postavi sve vrijednost u nizu f_i na njegovom intervalu na 0, te stavi p na početak redoslijeda.

Primijetimo da se postavljanje elemenata na intervalu na 0 lako svodi na postavljanje jednog elementa na 0 jer je svaki element potrebno najviše jednom postaviti na 0 (npr. ne-nul elemente možemo držati u *setu*). Naivna implementacija ovog algoritma ima složenost $\mathcal{O}(N \cdot M)$ te je dovoljna za četvrti podzadatak.

Za sve bodove, preostaje efikasno održavati dobre poteze. Poteze koji su trenutno dobri držat ćemo u redu (*queueu*) Q. Nad nizom f_i izgradimo tournament stablo čiji svaki čvor pamti minimalnu i maksimalnu boju na svojem intervalu (odnosno redom ∞, $-\infty$ ako takva boja ne postoji), nazovimo ih *mini* i *maks*. Tijekom algoritma, za svaki čvor razlikujemo tri faze, ovisno o tome vrijedi li $mini < maks$, $mini = maks$ ili $mini > maks$, odnosno redom pojavljuju li se barem dvije, točno jedna ili niti jedna boja na tom intervalu.

Kao i u rješenju trećeg podzadatka, na početku interval svakog poteza p podijelimo na čvorove u stablu te označimo dobiveni skup čvorova s C_p. Također, održavamo brojač koji broji za koliko čvorova iz skupa C_p vrijedi $mini < maks$ ili $mini = maks \neq c_p$ (c_p je boja poteza p). Kada vrijednost tog brojača padne na 0, potez postaje dobar i stavljamo ga u red Q. Osvježavanje vrijednosti $mini$ i $maks$ u tournamentu radimo na uobičajen način, a odgovarajuće brojače nije teško osvježiti na samom početku te prilikom prijelaza između faza. Ukupna je složenost $\mathcal{O}((N + M) \log N)$. Za implementacijske detalje pogledajte službene kodove.

Zadatak: Sadnice

Pripremili: Paula Vidas i Daniel Paleka
Potrebno znanje: ad-hoc, konstrukcije

Broj vijenaca koji nastanu nakon reza jednak je broju presječenih komada špage plus jedan. Ukupno ćemo koristiti $NM + N + M$ komada špage, a mogućih rezova ima $N + M$. Svaku špagu siječe točno jedan mogući rez, pa uvijek postoji rez koji siječe barem $\lceil \frac{NM+N+M}{N+M} \rceil = \lceil \frac{NM}{N+M} \rceil + 1$ komada špage. Pokazat ćemo da uvijek možemo postići taj odgovor.

Prva dva podzadatka su posebni slučajevi, čija ćemo (jedna od mogućih) rješenja ilustrirati za $N = M = 6$ odnosno $N = 6, M = 12$:

```
o--o--o--o--o--o--o
|  |  |           |
o  o  o  o  o  o  o
         |  |  |  |
o--o--o--o--o--o--o
|  |  |           |
o  o  o  o  o  o  o
         |  |  |  |
o--o--o--o--o--o--o
|  |  |           |
o  o  o  o  o  o  o
         |  |  |  |
o--o--o--o--o--o--o
```

```
o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o
|  |  |  |        |
o  o  o  o  o  o  o--o--o--o--o--o--o
            |  |  |  |  |
o--o--o--o--o--o--o  o  o  o  o  o  o
                  |        |  |  |  |
o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o
|  |  |  |        |
o  o  o  o  o  o  o--o--o--o--o--o--o
            |  |  |  |  |
o--o--o--o--o--o--o  o  o  o  o  o  o
                  |        |  |  |  |
o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o
```

Prvo ćemo pokazati konstrukciju za parni N, na primjeru $N = 6, M = 17$. Povežemo prvo sve sadnice u parnim redovima i sve sadnice u zadnjem stupcu:

```
o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o
                                                   |
o  o  o  o  o  o  o  o  o  o  o  o  o  o  o  o  o  o
                                                   |
o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o
                                                   |
o  o  o  o  o  o  o  o  o  o  o  o  o  o  o  o  o  o
                                                   |
o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o
                                                   |
o  o  o  o  o  o  o  o  o  o  o  o  o  o  o  o  o  o
                                                   |
o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o
```

Neka je $K = \lceil \frac{NM}{N+M} \rceil$. Promotrimo prvo prvu “prugu”, i sadnice u sredini. Prvih K sadnica povežemo prema gore, sljedećih K prema dolje, a ostatak prema desno.

```
o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o
|  |  |  |  |                                      |
o  o  o  o  o  o  o  o  o  o  o--o--o--o--o--o--o--o
               |  |  |  |  |                       |
o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o
```

Zatim u sljedećoj pruzi radimo istu stvar, samo pomaknutu za $2K$. To jest, počinjemo od sadnice $(1, 2K)$, a drugu koordinatu gledamo modulo M. Slično nastavljamo dalje. Za promatrani primjer na kraju imamo:

```
o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o
|  |  |  |  |                                      |
o  o  o  o  o  o  o  o  o  o  o--o--o--o--o--o--o--o
               |  |  |  |  |                       |
o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o
                              |  |  |  |  |        |
o  o  o  o--o--o--o--o--o--o--o  o  o  o  o  o  o  o
|  |  |                                      |  |  |
o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o
         |  |  |  |  |                             |
o--o--o--o  o  o  o  o  o  o  o  o  o  o--o--o--o--o
                        |  |  |  |  |              |
o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o
```

Ako je N neparan, onda u zadnjem retku srednjih K sadnica ne povezujemo prema gore, nego prema desno. Za primjer $N = 7, M = 17$ dobivamo:

```
o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o
|  |  |  |  |                                      |
o  o  o  o  o  o  o  o  o  o  o--o--o--o--o--o--o--o
               |  |  |  |  |                       |
o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o
                              |  |  |  |  |        |
o  o  o  o--o--o--o--o--o--o--o  o  o  o  o  o  o  o
|  |  |                                      |  |  |
o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o
         |  |  |  |  |                             |
o--o--o--o  o  o  o  o  o  o  o  o  o  o--o--o--o--o
                        |  |  |  |  |              |
o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o
|                                      |  |  |  |  |
o  o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o--o  o  o  o  o
```

Dokažimo sada da smo postigli željeno ograničenje, odnosno da svaki rez siječe najviše $K + 1$ špaga. Vodoravne špage smo rasporedili ravnomjerno, tj. za bilo koja dva okomita reza, broj špaga koje sijeku se razlikuje za najviše jedan. Ako je $2K \le M$, svaki vodoravni rez siječe točno $K + 1$ špaga, pa svaki okomiti rez može sijeći najviše $K + 1$ špaga (u suprotnom bi prosjek bio prevelik). Inače je $2K = M + 1$. Vodoravni rezovi tada sijeku najviše $K + 1$ dužina, a okomiti najviše $\lceil \frac{N}{2} \rceil + 1 \le K + 1$ (dokaz čitatelju za vježbu).