



## Opisi algoritama

Zadatke, testne primjere i rješenja pripremili: Adrian Beker, Daniel Paleka, Ivan Paljak, Stjepan Požgaj, Tonko Sabolčec i Paula Vidas. Primjeri implementiranih rješenja su dani u priloženim izvornim kodovima.

### Zadatak Autoritet

Pripremili: Adrian Beker i Paula Vidas

Potrebno znanje: teorija grafova, *DFS*-stablo, artikulacijske točke i dvostruko povezane komponente

Prvo, očito su potezi komutativni i involutorni pa nas samo zanima skup čvorova koje smo odabrali. Broj najkraćih nizova poteza tada jednostavno možemo dobiti množenjem broja najmanjih skupova s  $k!$ , gdje je  $k$  veličina najmanjeg skupa. Osnovna je ideja da ćemo u većini slučajeva moći postići cilj koristeći malo poteza. Za graf ćemo reći da je *klika* ako je potpun i ima bar dva čvora. Razlikujemo četiri (disjunktna) slučaja:

1. Graf je povezan
2. Graf se sastoji od točno dviju disjunktnih klika
3. Graf se sastoji od barem triju disjunktnih klika
4. Preostali slučaj

Prvi je slučaj očit. U drugom slučaju, nije teško vidjeti da je optimalno uzeti čitavu manju kliku (koji god podskup čvorova odabrali, graf se raspada na najviše dva potpuna grafa). U trećem slučaju trebamo bar 2 poteza i to se postiže uzimanjem bilo kojih dvaju čvorova iz različitih klika (ili dvaju iz iste ukoliko je ona veličine 2).

U četvrtom slučaju graf nije povezan i postoji komponenta  $K$  koja nije klika. Tada očito trebamo bar 1 potez, a tvrdimo da to možemo i postići. Recimo da je čvor  $x$  *dobar* ako primjenom operacije na  $x$  dobivamo povezan graf. Recimo da se uklanjanjem čvora  $x$  njegova komponenta raspada na komponente  $C_1, C_2, \dots, C_k$ . Tada  $x$  nije dobar ako i samo ako je povezan sa svim čvorovima neke  $C_i$ .

Ako je  $K$  izolirani čvor, tada je taj čvor dobar, stoga pretpostavimo da  $K$  nije potpun graf. Recimo da je čvor u  $K$  *centralan* ako je povezan sa svima ostalima.

**Tvrdnja 1.** Postoji čvor  $y$  u  $K$  koji nije centralan i nije artikulacijska točka.

*Dokaz:* Ako ne postoji centralan čvor, onda odaberemo čvor u  $K$  koji nije artikulacijska točka, npr. list u razapinjućem stablu. Ako postoji centralan čvor, uzmemo bilo koji čvor koji nije centralan (takav postoji jer  $K$  prema pretpostavci nije potpun graf).  $\square$

Sada je očito je da je čvor  $y$  iz tvrdnje dobar. Konačno, preostaje prebrojati dobre čvorove, a to se može učiniti na sljedeći način. Primijetimo da neki neizolirani čvor nije dobar ako i samo ako je ili centralan u čitavoj komponenti ili istodobno jedinstvena artikulacijska točka i centralan u nekoj dvostruko povezanoj komponenti u kojoj se nalazi. Stoga problem možemo riješiti nalaženjem artikulacijskih točaka i rastavom grafa na dvostruko povezane komponente. Postoje i druga rješenja koja koriste standardne informacije iz *DFS*-stabla. Ukupna je složenost  $\mathcal{O}(N + M)$  ili  $\mathcal{O}(N + M \log N)$ . Za implementacijske detalje pogledajte službene kodove.



## Zadatak Restoran

Pripremili: Adrian Beker, Ivan Paljak, Tonko Sabolčec

Potrebno znanje: dokazivanje točnosti pohlepnog algoritma, tournament stablo

Za početak, promatrajmo jednostavniji slučaj u kojemu se skup gostiju koji čekaju pred restoranom ne mijenja. Najprije uočimo da postoji optimalno rješenje u kojemu trenutci kuhanja i jedenja svakog gosta čine interval. Zaista, primjerice ako  $i$ -ti gost završava kuhanje u minuti  $t$ , tada on može kuhati u vremenskom intervalu  $[t - a_i + 1, t]$ , a trenutke kuhanja ostalih gostiju možemo po potrebi pomaknuti ranije, čime se ukupno vrijeme ne povećava (analogno se pokazuje za trenutke jedenja). Ispostavlja se da vrijedi i nešto jača tvrdnja:

**Tvrdnja 1.** Postoji optimalno rješenje u kojemu gosti jedu hranu istim redoslijedom kojim su je i kuhali.

*Dokaz:* Neka gost  $y$  dolazi neposredno poslije gosta  $x$  u redoslijedu jedenja. Ukoliko  $y$  dolazi prije  $x$  u redoslijedu kuhanja, moguće ih je zamijeniti u poretku jedenja tako da i dalje svi uvjeti budu zadovoljeni, a ukupno se vrijeme ne poveća. Tvrdnja slijedi jer se opisanom transformacijom smanjuje broj inverzija u redoslijedu jedenja u odnosu na redoslijed kuhanja.  $\square$

Primijetimo dalje da ako fiksiramo redoslijed kuhanja (a time prema Tvrdnji 1 i redoslijed jedenja), tada je optimalno pohlepno dodijeliti najprije intervale kuhanja, a zatim intervale jedenja. To nam omogućava da, za fiksiran redoslijed gostiju, ukupno vrijeme evaluiramo u linearnoj složenosti. Sada je lako riješiti prvi podzadatak u složenosti  $\mathcal{O}(N! \cdot N)$  – naprosto ispitamo sve moguće poretke.

Međutim, već za drugi podzadatak potrebna je sljedeća opservacija, koja se pokazuje bitnom i za ostatak rješenja:

**Tvrdnja 3.** Ako je  $p_1, p_2, \dots, p_N$  poredak gostiju, gdje je  $p_i$  oznaka  $i$ -tog gosta u poretku, tada je najmanje ukupno vrijeme jednako

$$\max_{i=1}^N \left\{ \sum_{j=1}^i a_{p_j} + \sum_{j=i}^N b_{p_j} \right\}.$$

*Dokaz:* Označimo s  $T$  vrijednost gornjeg izraza. Tada ukupno vrijeme očito nije manje od  $T$ . Kako bismo dokazali da ono nije veće od  $T$ , uočimo posljednjeg gosta koji počinje jesti čim završi s kuhanjem (primijetimo da će to uvijek biti slučaj za prvog gosta, stoga takav gost uvijek postoji), neka je to  $k$ -ti gost u poretku. Budući da je  $k$  maksimalan s tim svojstvom, za sve  $k < i \leq N$  mora vrijediti da  $i$ -ti gost počinje jesti čim  $(i-1)$ -vi gost završi. Stoga je ukupno vrijeme jednako  $\sum_{j=1}^k a_{p_j} + \sum_{j=k}^N b_{p_j}$ , što očito ne prelazi  $T$ .  $\square$

Primijetimo da se izraz za vrijednost  $T$  iz Tvrdnje 2 može malo drugačije zapisati:

$$\sum_{j=1}^N b_j + \max_{i=1}^N \left\{ a_{p_i} + \sum_{j=1}^{i-1} (a_{p_j} - b_{p_j}) \right\},$$

Zbog toga se problem svodi na nalaženje poretka  $p_1, p_2, \dots, p_N$  koji minimizira maksimum od  $c_i = a_{p_i} + \sum_{j=1}^{i-1} (a_{p_j} - b_{p_j})$  po svim  $1 \leq i \leq N$ . Sada je drugi podzadatak moguće riješiti dinamičkim programiranjem s bitmaskama – za svaki podskup gostiju, dinamika pamti rješenje spomenutog problema. Prijelaze između stanja nije teško izvesti u linearnoj složenosti na način da fiksiramo svakog mogućeg posljednjeg gosta u poretku. Stoga je ukupna složenost ovog pristupa  $\mathcal{O}(N \cdot 2^N)$ .

Konačno dolazimo i do trećeg podzadatka, za koji je potrebna sljedeća ključna opservacija o optimalnom poretku gostiju:

**Tvrdnja 2.** Za gosta ćemo reći da je *kuhar* ako mu je vrijeme kuhanja strogo manje od vremena



jedenja, a u suprotnom ćemo reći da je *gurman*. Tada postoji optimalan poredak u kojemu prvo dolaze svi kuhari sortirani uzlazno prema vremenu kuhanja te potom svi gurmani sortirani silazno prema vremenu jedenja.

*Dokaz:* Dokaz se temelji na standardnom *exchange argumentu*. Promotrimo neki optimalan poredak  $p_1, p_2, \dots, p_N$  te pogledajmo što se događa kada zamijenimo neka dva susjedna gosta  $p_i, p_{i+1}$ . Možemo primijetiti da se vrijednosti  $c_j$  za  $j \notin \{i, i+1\}$  ne mijenjaju, stoga je samo potrebno pratiti vrijednosti  $c_i$  te  $c_{i+1}$ . Nije teško uvjeriti se da je uvijek optimalno napraviti zamjenu u skladu s opisanim načinom sortiranja. Detalje ostavljamo čitateljici za vježbu.  $\square$

Tvrdnja 3 sada nam omogućava da treći podzadatak riješimo sortiranjem svih gostiju na odgovarajući način te jedostavnom evaluacijom ukupnog vremena, u ukupnoj složenosti  $\mathcal{O}(N \log N)$ .

Na kraju, za sve bodove potrebno je osmisliti kako efikasno održavati trenutni skup gostiju te evaluirati formulu za ukupno vrijeme. U tu svrhu uzmimo sve goste koji se ikad pojavljuju te ih sortirajmo na način kako je opisano u Tvrdnji 3. Time dobivamo niz parova  $(a_i, b_i)$  nad kojim je potrebno podržavati sljedeće upite:

- Označi neki par aktivnim/neaktivnim.
- Evaluiraj formulu za parove koji su trenutno aktivni.

Primijetimo da ako parove koji trenutno nisu aktivni zamijenimo s  $(0, 0)$ , tada rješenje dobivamo evaluacijom formule za čitav niz parova. Stoga nad nizom možemo izgraditi tournament stablo koje u svakom čvoru pamti rješenje, sumu  $a_i$ -ova te sumu  $b_i$ -ova za pripadajući interval. Tada nije teško spojiti spomenute informacije za dva čvora te na uobičajen način odgovarati na upite u složenosti  $\mathcal{O}(\log(N + K))$ , stoga je ukupna složenost rješenja  $\mathcal{O}((N + K) \log(N + K))$ . Za implementacijske detalje pogledajte službene kodove.



## Zadatak Totoro

Pripremili: Stjepan Požgaj i Daniel Paleka

Potrebno znanje: matematika, pretraživanje u dubinu/širinu (dfs/bfs), linearnost očekivanja, teorija grupa ili Markovljevi lanci, ad hoc

Prvo definirajmo notaciju. Neka  $\mathcal{I}(\pi)$  označava broj inverzija permutacije  $\pi$ . Neka za neku tvrdnju  $T$  oznaka  $[T]$  označava *boolean* vrijednost te tvrdnje: 1 ako je točna, 0 ako je netočna. (Ta notacija naziva se Iverson bracket.) Kompoziciju permutacija  $\tau$  i  $\pi$  označavat ćemo s  $\tau\pi$ .

Skup  $S$  je standardan primjer *grupe*: skupa na kojem je definirana neka asocijativna operacija (ovdje kompozicija permutacija), te postoje inverzi svih elemenata i identiteta. Ovdje nećemo ulaziti u dokaz da je definicijom skupa  $S$  zadana podgrupa grupe permutacija, jer čitatelj mora to jednom raspisati sam. Za uvod u grupe, pogledate izvrsni Groups chapter iz Napkina: <https://web.evanchen.cc/napkin.html>.

Permutacije  $p_i$  iz ulaza zovu se *generatori* grupe.

Za prvu parcijalu, dovoljno je izračunati grupu  $S$  (koja nije pretjerano velika) i prebrojiti inverzije u svakoj od dobivenih permutacija. Ako je slučajno presporo, primijetimo da je prosječan broj inverzija jednak  $\frac{1}{2}\binom{N}{2}$  u slučaju da je grupa  $S$  jednaka grupi svih permutacija  $S_N$ , pa je naivno rješenje moguće ubrzati za konstantni faktor.

Za  $K = 1$ , dana grupa  $S$  je konačna *ciklička*, tj. oblika je  $\{1, p, p^2, p^3, \dots, p^m\}$  za neki  $m$ . (Ovdje s  $p^t$  označavamo permutaciju  $p$  primijenjenu  $t$  puta.) Poznato je i lako za dokazati da je  $m$  točno najmanji zajednički višekratnik veličina svih ciklusa permutacije.

Za drugu parcijalu, vrijedi  $m = N$ , pa je dovoljno u  $O(N \log N)$  prebrojati inverzije svake permutacije u  $S$ . Ako permutacija nije ciklus, tada  $m$  može biti jako velik (npr. ciklusi veličina prvih tridesetak prostih brojeva), pa moramo napraviti nešto pametnije.

Za treću parcijalu i puno rješenje, trebamo koncept *linearnosti očekivanja*. Sve što slijedi može se izreći i elementarno, ali je vjerojatnosna terminologija puno prirodnija.

Ako nasumce (s uniformnom vjerojatnošću) biramo permutaciju  $\pi$  iz  $S$ , tada je izraz  $\frac{1}{|S|}\mathcal{I}(\pi)$  prosječna vrijednost ili *očekivanje*  $\mathbb{E}\mathcal{I}(\pi)$  broja inverzija  $\mathcal{I}$ .

Po definiciji vrijedi

$$\mathcal{I}(\pi) = \sum_{1 \leq i < j \leq N} [\pi(i) > \pi(j)].$$

Koristeći da očekivanje možemo rastaviti po pribrojnicima, dobivamo

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\mathcal{I}(\pi) &= \sum_{1 \leq i < j \leq N} \mathbb{E}[\pi(i) > \pi(j)] \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq N} \mathbb{P}[\pi(i) > \pi(j)]. \end{aligned}$$

Zato je dovoljno izračunati vjerojatnost da vrijedi  $\pi(i) > \pi(j)$  kada uzimamo uniformno nasumičnu permutaciju  $\pi$  iz  $S$ .

U slučaju kada je  $K = 1$ , zadatak se može lijepo matematički riješiti u složenosti  $\sum_{C_1, C_2 \text{ ciklusi}} |C_1| \cdot |C_2| = O(N^2)$ , jer možemo računati  $\mathbb{P}[\pi(i) < \pi(j)]$  za sve  $i \in C_1, j \in C_2$  istovremeno. Za detalje pogledajte službeni kod rješenja za  $K = 1$ .

Kada je  $K > 1$ , moramo zaboraviti na rješenje za  $K = 1$ , jer je jako teško analizirati strukturu grupe s više generatora.

Ključna ideja je promatrati graf  $G_{\text{parovi}}$  od  $N^2$  čvorova  $(i, j) : 1 \leq i, j \leq N$ , gdje su povezani vrhovi  $(i, j)$  i  $(p_k(i), p_k(j))$  za svaki  $1 \leq k \leq K$ . Ako primijenimo permutaciju  $\pi$  iz  $S$ , jasno je da to možemo interpretirati kao “vrh  $(i, j)$  ide u vrh  $(\pi(i), \pi(j))$ ”.



Vrh  $(i, j)$  neka permutacija  $\pi$  iz  $S$  može poslati samo u vrhove pripadajuće povezane komponente. Ako bi znali s kojom vjerojatnošću nasumična permutacija  $\pi$  šalje vrh  $(i, j)$  u svaki vrh njegove komponente, mogli bi smo eksplicitno izračunati tražene vjerojatnosti. Tu pomaže sljedeća ključna činjenica:

**Tvrdnja:** Uniformno nasumična permutacija  $\pi$  iz  $S$  šalje vrh  $(i, j)$  u uniformno nasumičan vrh u njegovoj povezanoj komponenti.

*Prvi dokaz:* Elementaran, bit će u finalnoj verziji editorijala.

*Drugi dokaz:* Primijetimo da svaki vrh ima stupanj  $K$ , tj. graf je *regularan*. Promatrajmo Markovljev lanac  $M$  na vrhovima grafa, tj. slučajnu šetnju koja svaki brid bira s jednakom vjerojatnošću. Lako se dokaže da *stacionarna distribucija* (jedinstvena vjerojatnost na vrhovima grafa koja se ne mijenja u koraku lanca  $M$ ) svakom vrhu neke povezane komponente pridružuje istu vjerojatnost, jer je graf regularan.

Promotrimo Cayleyjev graf grupe  $S$  generirane permutacijama  $p_1, \dots, p_K$ , gdje su vrhovi elementi  $\pi \in S$ , a bridovi između permutacija  $\pi$  i  $p_k\pi$  za svaki  $1 \leq k \leq K$ . Graf je također regularan stupnja  $K$ , pa ako definiramo sličnu slučajnu šetnju  $M_S$ , stacionarna distribucija je uniformna po svim elementima grupe  $S$ .

Sada samo koristimo da slučajna šetnja iz nekog vrha po vjerojatnosti konvergira u stacionarnu distribuciju, kako u lancu  $M$ , tako i u lancu  $M_S$ .<sup>1</sup>

Slučajne šetnje na lancima  $M$  i  $M_S$  možemo bijektivno upariti, jer svaki korak u oba lanca odgovara nekoj ulaznoj permutaciji  $p_k$ .

Zato vrijedi

$$\begin{aligned} \text{uniformna permutacija } \pi \in S &\equiv \text{slučajna šetnja permutacijama } p_k \\ &\equiv \text{stacionarna distribucija na komponentama grafa } G_{\text{parovi}}. \end{aligned}$$

Stoga, dovoljno je za svaku povezanu komponentu u  $G_{\text{parovi}}$  izračunati broj čvorova  $(a, b)$  takvih da je  $a > b$  (*invertiranih* čvorova), jer se čvor  $(i, j)$  šalje u svaki čvor komponente s jednakom vjerojatnošću. Tražena vjerojatnost dobiva se dijeljenjem broja invertiranih čvorova s veličinom komponente. Komponente je lako izračunati u složenosti  $O(N^2K)$  pretraživanjem u dubinu ili širinu.

---

<sup>1</sup>Postoje manji problemi s periodičnošću, ali se oni lako riješe takozvanim *lazy* bridovima – ne ulazimo u tehnikalije.