Opisi algoritama

Zadatke, testne primjere i rješenja pripremili: Adrian Beker, Daniel Paleka, Ivan Paljak, Stjepan Požgaj, Tonko Sabolčec i Paula Vidas. Primjeri implementiranih rješenja su dani u priloženim izvornim kodovima.

Zadatak Autoritet

Pripremili: Adrian Beker i Paula Vidas
Potrebno znanje:

Zadatak Restoran

Pripremili: Ivan Paljak i Tonko Sabolčec
Potrebno znanje:

Zadatak Totoro

Pripremili: Stjepan Požgaj i Daniel Paleka
Potrebno znanje: matematika, pretraživanje u dubinu (DFS), linearnost očekivanja, teorija grupa ili Markovljevi lanci, ad hoc

Prvo definirajmo notaciju. Neka $\mathcal{I}(\pi)$ označava broj inverzija permutacije π. Neka za neku tvrdnju T oznaka $[T]$ označava *boolean* vrijednost te tvrdnje: 1 ako je točna, 0 ako je netočna. (Ta notacija naziva se Iverson bracket.) Kompoziciju permutacija τ i π označavat ćemo s $\tau\pi$.

Skup S je standardan primjer *grupe*: skupa na kojem je definirana neka asocijativna operacija (ovdje kompozicija permutacija), te. Ovdje nećemo ulaziti u dokaz da je definicijom skupa S zadana podgrupa grupe permutacija, jer čitatelj mora to jednom raspisati sam. Jedina stvar koja na prvu nije jasna jest da možemo dobiti inverze svake zadane permutacije, ali to je istina standardnim Za više, pogledate izvrsni Groups chapter iz Napkina: https://web.evanchen.cc/napkin.html

Permutacije p_i iz ulaza zovu se *generatori* grupe.

Za prvu parcijalu, dovoljno je izračunati grupu S (koja nije pretjerano velika) i prebrojiti inverzije u svakoj od dobivenih permutacija. Ako je slučajno presporo, primijetimo da je prosječan broj inverzija jednak $\frac{1}{2}\binom{n}{2}$ u slučaju da je grupa S jednaka grupi svih permutacija S_N, pa je naivno rješenje moguće ubrzati za konstantni faktor.

Za $K = 1$, dana grupa S je konačna *ciklička*, tj. oblika je $\{1, p, p^2, p^3, \ldots, p^m\}$ za neki m. (Ovdje s p^t označavamo permutaciju p primijenjenu t puta.) Poznato je i lako za dokazati da je m točno najmanji zajednički višekratnik veličina svih ciklusa permutacije.

Za drugu parcijalu, vrijedi $m = N$, pa je dovoljno u $O(N \log N)$ prebrojati inverzije svake permutacije u S. Ako permutacija nije ciklus, tada m može biti jako velik (npr. ciklusi veličina prvih tridesetak prostih brojeva), pa moramo napraviti nešto pametnije.

Za treću parcijalu i puno rješenje, trebamo koncept *linearnosti očekivanja*. Sve što slijedi može se izreći i elementarno, ali je vjerojatnosna terminologija puno prirodnija.

Ako nasumce (s uniformnom vjerojatnošću) biramo permutaciju π iz S, tada je izraz $\frac{1}{|S|}\mathcal{I}(\pi)$ prosječna vrijednost ili *očekivanje* $\mathbb{E}\mathcal{I}(\pi)$ broja inverzija $\mathcal{I}$.

Po definiciji vrijedi

$$\mathcal{I}(\pi) = \sum_{1 \le i < j \le N} [\pi(i) > \pi(j)].$$

Koristeći da očekivanje možemo rastaviti po pribrojnicima, dobivamo

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\mathcal{I}(\pi) &= \sum_{1 \le i < j \le N} \mathbb{E}[\pi(i) > \pi(j)] \\ &= \sum_{1 \le i < j \le N} \mathbb{P}[\pi(i) > \pi(j)]. \end{aligned}$$

Zato je dovoljno izračunati vjerojatnost da vrijedi $\pi(i) > \pi(j)$ kada uzimamo uniformno nasumičnu permutaciju π iz S.

U slučaju kada je $K = 1$, zadatak se može lijepo matematički riješiti u složenosti $\sum_{C_1, C_2 \text{ciklusi}} |C_1| \cdot |C_2| = O(N^2)$, jer možemo računati $\mathbb{P}[\pi(i) < \pi(j)$ za sve $i \in C_1, j \in C_2$ istovremeno. Za detalje pogledajte službeni kod. rješenja za $K = 1$.

Kada je $K > 1$, moramo zaboraviti na rješenje za $K = 1$, jer je jako teško analizirati strukturu grupe s više generatora.

Ključna ideja je promatrati graf $G_{\text{parovi}})$ od N^2 čvorova $(i, j) : 1 \le i, j \le N$, gdje su povezani vrhovi

(i, j) i $(p_k(i), p_k(j))$ za svaki $1 \leq k \leq N$. Ako primijenimo permutaciju π iz S, jasno je da to možemo interpretirati kao "vrh (i, j) ide u vrh $(\pi(i), \pi(j))$".

Vrh (i, j) neka permutacija π iz S može poslati samo u vrhove pripadajuće povezane komponente. Ako bi znali distribuciju Ključna je sljedeća obzervacija:

Tvrdnja: Uniformno nasumična permutacija π iz S šalje vrh (i, j) u uniformno nasumičan vrh u njegovoj povezanoj komponenti. *Prvi dokaz:* Elementaran, bit će u finalnoj verziji editoriala. *Drugi dokaz:* Primijetimo da svaki vrh ima stupanj K, tj. graf je *regularan*. Promatrajmo Markovljev lanac M na vrhovima grafa, tj. slučajnu šetnju koja svaki brid bira s jednakom vjerojatnošću. Lako se dokaže da *stacionarna distribucija* (jedinstvena vjerojatnost na vrhovima grafa koja se ne mijenja u koraku lanca M) svakom vrhu neke povezane komponente pridružuje istu vjerojatnost, jer je graf regularan.

Promotrimo Cayleyjev graf grupe S generirane permutacijama $p_1, \ldots, p_K$, gdje su vrhovi elementi $\pi \in S$, a bridovi između permutacija π i $p_k \pi$ za svaki $1 \leq k \leq K$. Graf je također regularan stupnja K, pa ako definiramo sličnu slučajnu šetnju M_S, stacionarna distribucija je uniformna po svim elementima grupe S.

Sada samo koristimo da slučajna šetnja iz nekog vrha po vjerojatnosti konvergira u stacionarnu distribuciju, kako u lancu M, tako i u lancu M_S. [1]

Slučajne šetnje na lancima M i M_S možemo bijektivno upariti, jer svaki korak u oba lanca odgovara nekoj ulaznoj permutaciji p_k.

Zato vrijedi

$$\begin{aligned} \text{uniformna permutacija } \pi \in S &\equiv \text{slučajna šetnja permutacijama } p_k \\ &\equiv \text{stacionarna distribucija na komponentama grafa } G_{\text{parovi}}. \end{aligned}$$

Stoga, dovoljno je za svaku povezanu komponentu u G_{parovi} izračunati broj čvorova (a, b) takvih da je $a > b$ (*invertiranih* čvorova), jer se čvor (i, j) šalje u svaki čvor komponente s jednakom vjerojatnošću. Tražena vjerojatnost dobiva se dijeljenjem broja invertiranih čvorova s veličinom komponente. Komponente je lako izračunati u složenosti $O(N^2 K)$ pretraživanjem u dubinu.

[1] Postoje manji problemi s periodičnošću, ali se oni lako riješe takozvanim *lazy* bridovima – ne ulazimo u tehnikalije.