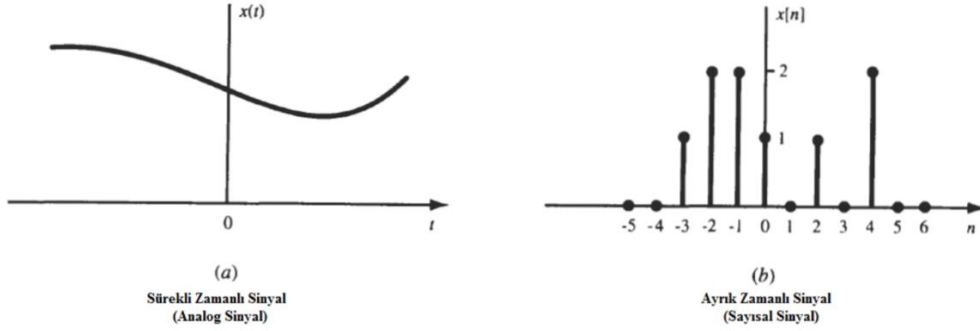


SİNYALLER VE SİNYAL DÖNÜŞÜMLERİ

1.Sinyallerin sınıflandırılması :

1.1 Sürekli Zamanlı ve Ayrık Zamanlı Sinyaller:



1.2 Analog ve Sayısal Sinyaller:

Herhangi bir (a,b) reel sayı aralığında bir $x(t)$ sinyali sonsuz değer alıyorsa bu sinyal analog sinyal diye adlandırılır. Ayrık zamanlı $x[n]$ sinyali ise belirli bir aralıkta sınırlı değer alan sinyallerdir.

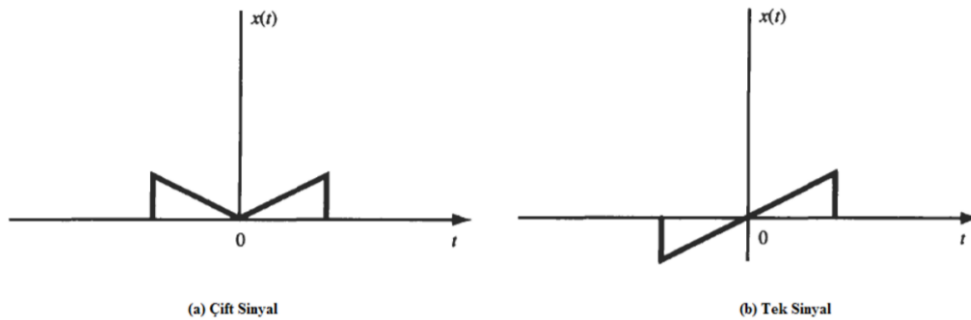
1.3 Gerçek ve Karmaşık Sinyaller:

Bir sinyal sadece reel sayılardan oluşmuşsa gerçek sinyal, sanal (imajiner) kısım içeriyorsa da karmaşık sinyal olarak adlandırılır.

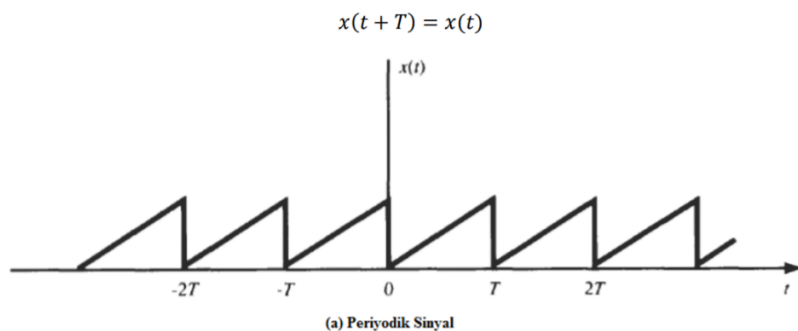
1.4. Belirli ve Rastgele Sinyaller:

Herhangi bir sinyalin hangi zaman aralığında hangi değerlerini alacağını biliyorsak bu sinyal belirli bir sinyal olmuş olur. Rastgele sinyal ise zamanla nasıl değiştiğini, hangi değerleri hangi zamanda alacağını bilemediğimiz sinyallerdir; örneğin toplamsal beyaz gürültü. Rasgele sinyallerin karakteristik özelliklerini istatistiksel olarak ifade edebiliriz.

1.5. Tek(ters simetrik) ve Çift(simetrik) Sinyaller:



1.6. Periyodik ve Periyodik Olmayan Sinyaller:



1.7. Enerji ve Güç Sinyalleri:

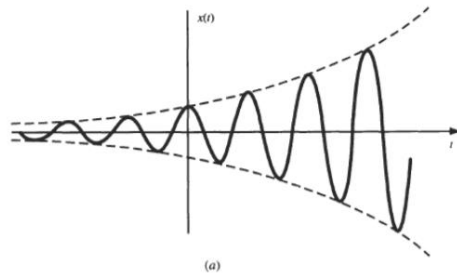
Sonsuz değer alan sinyallerin enerjileri de sonsuz olacağından bu sinyallerin gücünden bahsedilir ve bu sinyallere güç sinyali denir. Eğer sonsuz değer almıyor ve enerjisi bir reel sayıya eşit oluyorsa bu tür sinyallere de enerji sinyali denir.

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2$$
$$P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x(n)|^2$$

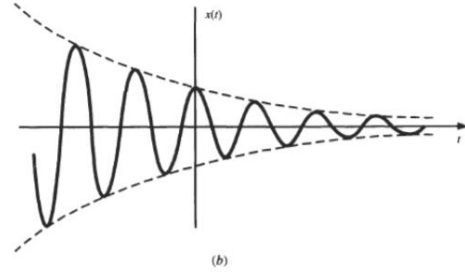
- $0 < E < \infty$, Enerji sinyali, böylece $P = 0$.
- $0 < P < \infty$, Güç sinyali, böylece $E = 0$.
- Bu iki koşula uymayan sinyaller ne enerji sinyalidir ne de güç.

1.8. Karmaşık Üstel Sinyaller:

$$x(t) = e^{j\omega_0 t}$$



Karmaşık Üstel Artan Sinyal



Karmaşık Üstel Azalan Sinyal

Karmaşık üstel sinyal Euler formülüne göre aşağıdaki biçimde ifade edilir.

$$x(t) = e^{j\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) + j\sin(\omega_0 t)$$

Temel periyot;

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

1.9. Sinüzoidal Sinyaller:

Sürekli zamanlı bir sinüzoidal sinyal aşağıdaki biçimde ifade edilebilir,

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t + \theta)$$

A: Genlik (Volt)

ω_0 : Açısal frekans (rad)

θ : Faz açısı (rad)

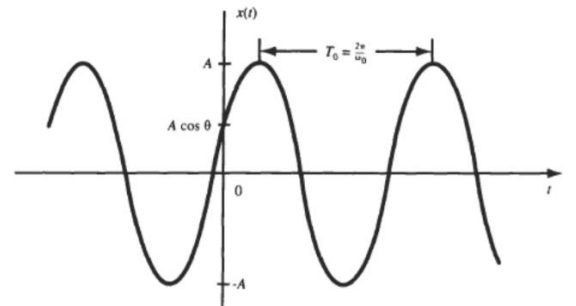
Temel periyot;

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Temel frekans;

$$f_0 = \frac{1}{T_0} \text{ Hertz(Hz)}$$

$$\omega_0 = 2\pi f_0$$



Sürekli Zamanlı Sinüzoidal Sinyal

2. Dönüşümler(Transforms):

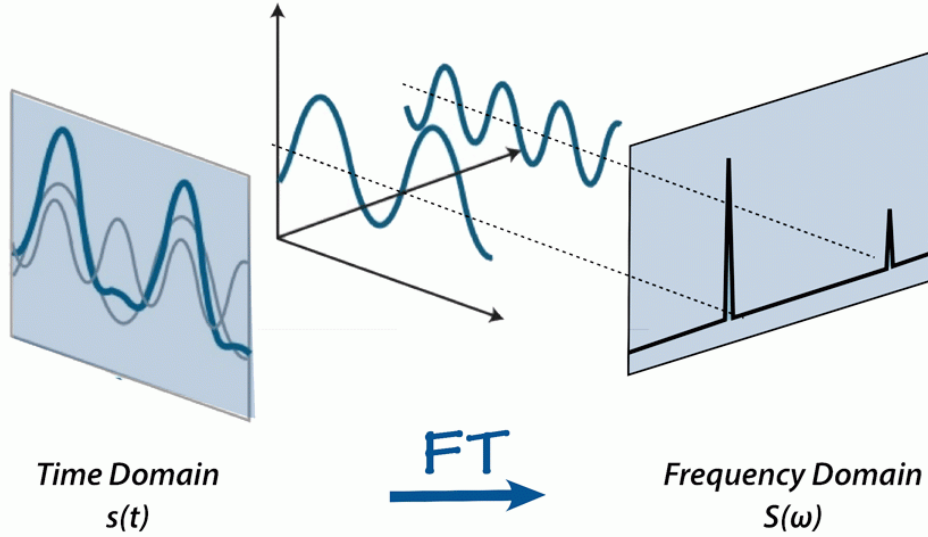
Dünyamızda gözlenen olaylar zamana yada uzaklığa bağlı olarak gelişir. Gözlenen olay zamanın bir fonksiyonu ise zaman ortamı (**Time Domain**), uzunluğun bir fonksiyonu ise uzaklık ortamı (**Space Domain**) söz konusudur. Şayet olay frekansa bağlı olarak gözlenmiş, yani frekansın bir fonksiyonu ise frekans ortamı (**Frequency Domain**)'ndan söz edilir.

Herhangi bir ortamda kaydedilmiş sinyaldeki bilgilerin tamamını bu ortamda açık seçik görüp, işleyip sonuçları değerlendirmek kolay hatta olanaklı olmayabilir. Bu gibi durumlarda veri gözlemlendiği ortamdan başka bir ortama aktararak incelenip irdelendikten sonra bir sonuca varılır. Gerekirse ikinci bir aktarma ile verinin gözlemlendiği ilk ortama geri dönülebilir.

Örneğin; zaman ortamında kaydedilmiş bir sismik sinyal frekans ortamına aktararak istenmeyen bileşenleri ayıklandıktan sonra tekrar zaman ortamına geri dönülebilir. Frekans ortamında yapılan bu ayıklama işlemi zaman ortamında yapılmak istenseydi bir takım sorunlarla karşılaşılabilirdi. Bunun gibi, herhangi bir ortamda gözlenmiş bir sinyalin başka bir ortama aktarılmasına **dönüşüm** ve aktarma tekniklerine de **dönüşüm yöntemleri** denir. Fourier, Laplace, Hankel, Hilbert, Z dönüşümü gibi çeşitli dönüşüm yöntemleri geliştirilmiştir.

2.1. Fourier Dönüşümü:

Fourier dönüşümü; bir takım sinüsoidal fonksiyonların toplamından oluştuğu düşünülen bir $f(t)$ fonksiyonunu bileşenlerine ayırıp her bileşenin genliğinin bulunması esasına dayanır. **Fourier dönüşümü zaman ortamından (time domain) frekans ortamına (frequency domain) geçişi sağlayan tersinir bir araçtır.**

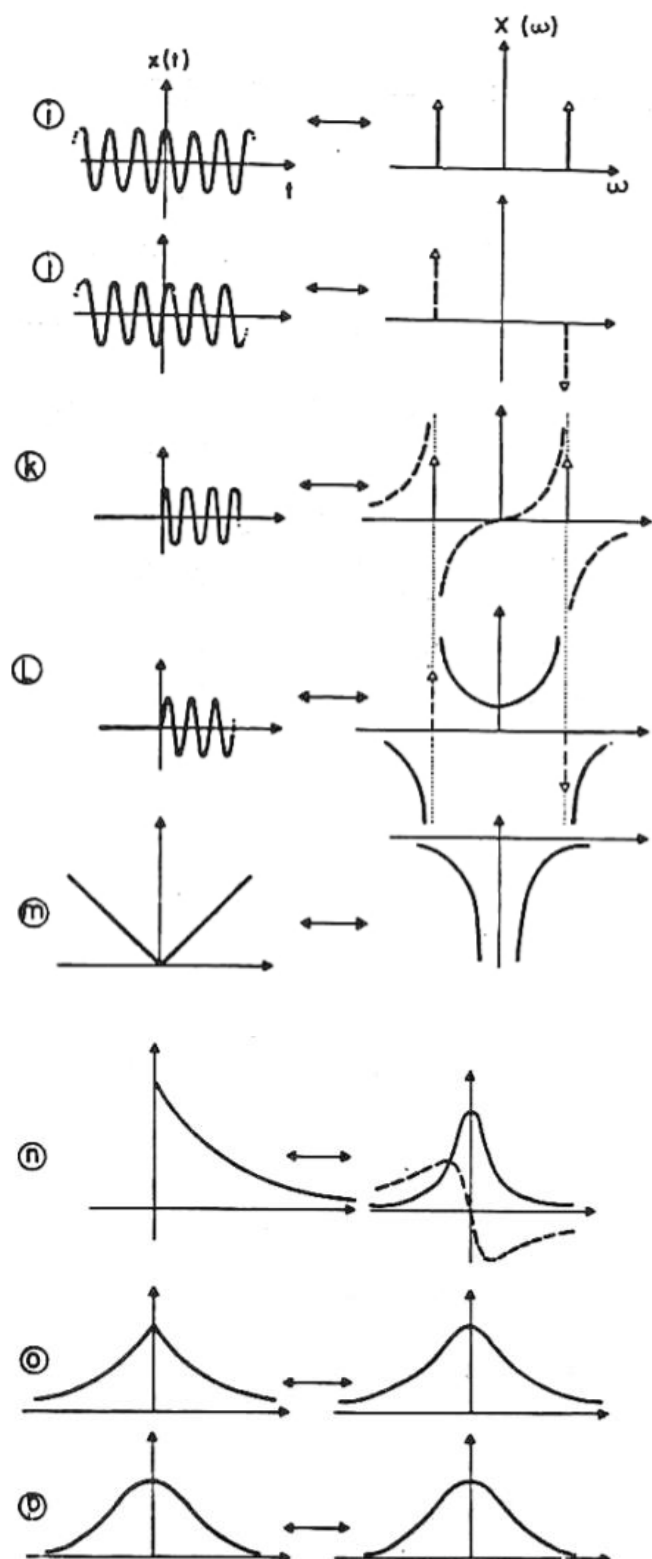
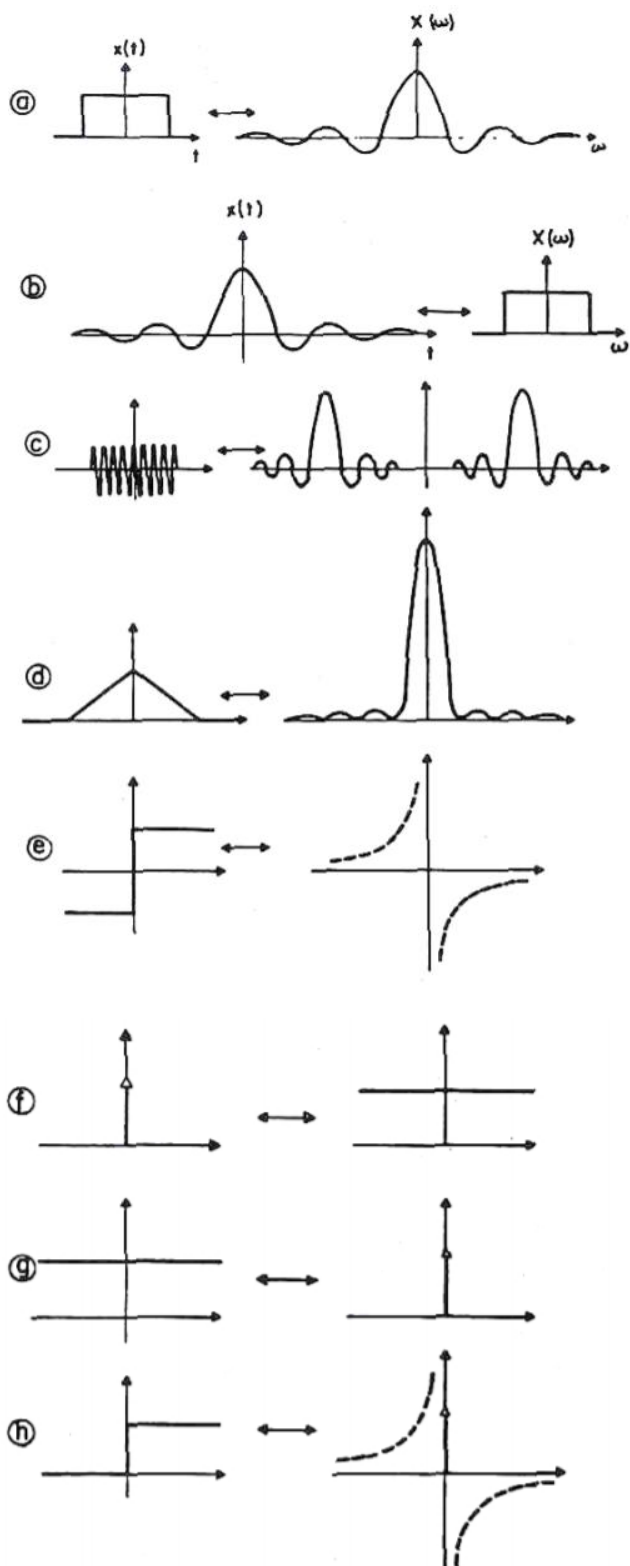


Zaman ortamındaki bir olayın frekans ortamındaki gösterimine onun **spektrumu** denir. Fourier dönüşümü tamamı ile doğrusal bir işlemidir. Yani, ortamlardan birinde (zaman veya frekans) yapılan bir işlemin diğer ortamda mutlaka bir karşılığı vardır. Bilginin her iki ortamdaki anlatımları eşit kesinliktedir. Ancak bazı işlemlerin gerçekleştirilmesi ortamlardan (domain) birinde diğerine göre daha kolay olabilir.

Çok geniş bir uygulama alanının oluşu ve çeşitli konulardaki bir çok problemin çözümünde kullanılmakta olması nedeniyle Fourier dönüşümü üzerinde oldukça ayrıntılı biçimde durulacaktır. Bu dönüşüm, genlik ve faz değerleri gibi iki önemli fiziksel büyüklükten oluşup karmaşık bir sayı ile ifade edilir.

Tablo 2.1 Bazı fonksiyonların Fourier dönüşümleri.

Fonksiyon	Fourier dönüşümü
a) Dikdörtgen $\Pi = \begin{cases} 1, & t \leq 1/2 \\ 0, & t \geq 1/2 \end{cases}$	$\frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2} = \text{sinc} \frac{\omega}{2}$
b) Fourier çentiği $\frac{\sin at}{\pi t} = \frac{a}{\pi} \sin \frac{at}{\pi}$	$\Pi\left(\frac{w}{2a}\right)$
c) $\Pi(t) \cos w_0 t$	$\frac{\sin((w-w_0)/2)}{w-w_0} + \frac{\sin((w+w_0)/2)}{w+w_0}$ $= \frac{1}{2} \left(\sin \frac{w-w_0}{2} + \sin \frac{w+w_0}{2} \right)$
d) Üçgen fonksiyon $A(t) = \begin{cases} 1- t , & t \leq 1 \\ 0, & t > 1, \end{cases}$	$\sin^2 c^2 \frac{w}{2}$
e) $\text{sgn } t = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ -1, & t < 0, \end{cases}$	$-i \frac{2}{w}$
f) Dirak delta fonksiyonu $\delta(t) = 0, \quad t \neq 0,$ $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$	1
g) 1	$2\pi \delta(w)$
h) $u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$	$\pi \delta(w) - i \frac{1}{w}$
i) $\cos w_0 t$	$\pi(\delta(w+w_0) + \delta(w-w_0))$
j) $\sin w_0 t$	$i\pi(\delta(w+w_0) - \delta(w-w_0))$
k) $u(t) \cos w_0 t$	$\frac{\pi}{2} (\delta(w+w_0) + \delta(w-w_0)) \frac{iw}{w_0^2 - w^2}$
l) $u(t) \sin w_0 t$	$\frac{i\pi}{2} (\delta(w+w_0) - \delta(w-w_0)) \frac{w_0}{w_0^2 - w^2}$
m) $ t $	$-\frac{2}{w^2}$
n) $u(t)e^{-at}$	$\frac{a-iw}{a^2 + w^2}$
o) Laplace Fonksiyonu $e^{-a t }$	$\frac{2a}{a^2 + w^2}$
p) Gauss Fonksiyonu e^{-at^2}	$\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-w^2/4a}$



- Fourier Dönüşümünün Özellikleri:

1. Doğrusallık ve Toplama Özelliği:

$x(t)$ ve $y(t)$ 'nin Fourier dönüşümü $X(f)$ ve $Y(f)$ olsun. $x(t)+y(t)$ 'nin Fourier dönüşümü $X(f)+Y(f)$ 'dir;

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x(t) + y(t)) e^{-i2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi ft} dt + \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-i2\pi ft} dt$$

Kısaca;

$$x(t) + y(t) \leftrightarrow X(f) + Y(f)$$

2. Bakışimlilik Özelliği:

$$x(t) \leftrightarrow X(f)$$

olsun

$$X(t) \leftrightarrow x(f)$$

dir. Ters Fourier dönüşümü bağıntısında t yerine $-t$ konulduğunda

$$x(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{-i2\pi ft} df$$

olur. t ve f değişkenleri aralarında değiştirildiğinde

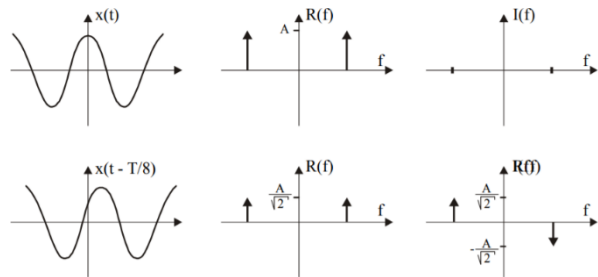
$$x(-f) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) e^{-i2\pi ft} dt$$

elde edilir.

3. Zaman kayması özelliği:

$x(t)$ 'yi t_0 kadar kaydırmakla elde edilen $x(t-t_0)$ 'in Fourier $e^{-i2\pi ft_0} X(f)$ dönüşümü olur:

$$x(t - t_0) \leftrightarrow e^{-i2\pi ft_0} X(f)$$



4. Frekans Kayması Özelliği:

$X(f)$ frekans ekseninde f_0 sabiti kadar kaydırıldığında elde edilen $X(f-f_0)$ 'in ters Fourier dönüşümü

$$x(t) e^{i2\pi f_0 t}$$

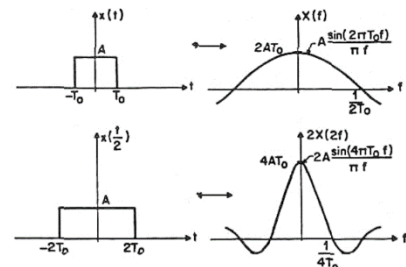
olur:

$$x(t) e^{i2\pi f_0 t} \leftrightarrow X(f - f_0)$$

5. Zaman Ölçeklenmesi Özelliği:

$x(t)$ 'nin Fourier dönüşümü $X(f)$ olsun. k sıfırdan farklı gerçek bir sabit olması koşuluyla, $x(kt)$ 'nin Fourier dönüşümü $(1/|k|) X(f/k)$ olur:

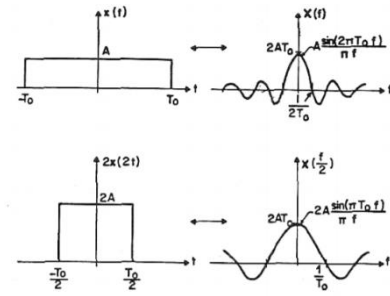
$$x(kt) \leftrightarrow \frac{1}{|k|} X\left(\frac{f}{k}\right)$$



6. Frekans Ölçeklenmesi Özelliği:

$X(f)$ ' in ters Fourier dönüşümü $x(t)$ olsun. k 'nın gerçek bir sabit olması koşuluyla, $X(kf)$ ' nin ters Fourier dönüşümü $(1/|k|) x(t/k)$ dir.

$$\frac{1}{|k|} x\left(\frac{t}{k}\right) \leftrightarrow X(kf)$$



Tablo 2.3 :Fourier dönüşümünün bazı özellikleri

	$x(t) \leftrightarrow X(f)$
	$y(t) \leftrightarrow Y(f)$
Doğrusallık	$x(t) + y(t) \leftrightarrow X(f) + Y(f)$
Bakışimlilik	$x(-f) \leftrightarrow X(t)$
Zaman Kayması	$x(t - t_0) \leftrightarrow e^{i2\pi f t_0} X(f)$
Frekans Kayması	$e^{i2\pi f_0 t} x(t) \leftrightarrow X(f - f_0)$
Zaman Ölçeklenmesi	$x(kt) \leftrightarrow \frac{1}{ k } X\left(\frac{f}{k}\right), k \neq 0$
Frekans Ölçeklenmesi	$\frac{1}{ k } x\left(\frac{t}{k}\right) \leftrightarrow X(kf), k \neq 0$
Ortak Bağıntı	$x(t) \leftrightarrow (X^*(f))^*$
Zaman Integrali	$\int_{-\infty}^t x(t) dt \leftrightarrow (i2\pi f)^{-1} X(f)$
Frekans Integrali	$(it)^{-1} x(t) \leftrightarrow \int_{-f}^{\infty} X(f) df$
Zaman Türevi	$d^n x(t) / dt^n \leftrightarrow (i2\pi f)^n X(f)$
Frekans Türevi	$(-it)^n x(t) \leftrightarrow d^n X(f) / df^n$
Eşlenek	$x^*(t) \leftrightarrow X^*(-f)$
Evrişim	$x(t) * y(t) \leftrightarrow X(f) \cdot Y(f)$
	$x(t) \cdot y(t) \leftrightarrow X(f) * Y(f)$
İlişki	$c_{yx}(\tau) = x(t) * y(-t) \leftrightarrow X(f) \cdot Y^*(f)$

2.2. Laplace Dönüşümü:

Laplace Dönüşümü diferansiyel denklemlerin çözümü için bir tekniktir. Burada zaman alanı(**time domain**) formunun diferansiyel denklemi ilk önce frekans alanı(**frequency domain**) formunun cebirsel denklemine dönüştürülür. Cebirsel denklemin frekans alanındaki çözülmesinden sonra, sonuç sonunda diferansiyel denklemin nihai çözümünü elde etmek için zaman alanı(**time domain**) formuna dönüştürülür. Başka bir deyişle, söylenebilir **Laplace Dönüşümü** diferansiyel denklem çözme yöntemidir.

Tüm gerçel sayılar $t \geq 0$ için tanımlanan bir $f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü, aşağıdaki şekilde tanımlanan tek taraflı bir dönüşüm olan $F(s)$ fonksiyonudur.

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

Bu yöntemi yalnızca bilinen sabitlerle ile diferansiyel denklemleri çözmek için kullanılabilir. Bilinen sabitleri olmayan bir denkleminiz varsa, bu yöntem işe yaramaz ve başka bir yöntem bulunması gerekecektir. Laplace dönüşümü, Fourier dönüşümüne benzer. Bir fonksiyonun Fourier dönüşümü, gerçel bir değişkenin (frekansın) karmaşık bir fonksiyonu iken, bir fonksiyonun Laplace dönüşümü, karmaşık bir değişkenin karmaşık bir fonksiyonudur.

Tek taraflı Laplace dönüşümünün özellikleri

	Zaman alanı	s etki alanı	Yorum Yap
Doğrusallık	$af(t) + bg(t)$	$aF(s) + bG(s)$	Temel entegrasyon kuralları kullanılarak kanıtlanabilir.
Frekans alanı türevi	$t f(t)$	$-F'(s)$	F' , F 'nin s 'ye göre ilk türevidir.
Frekans etki alanı genel türevi	$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$	Daha genel form, F (ler) in n inci türevi.
Türev	$f'(t)$	$sF(s) - f(0^-)$	f Bir olduğu varsayılır türevlenebilir fonksiyonu ve onun türevinin üstel tipte olduğu varsayılmaktadır. Bu daha sonra parçalarla entegrasyonla elde edilebilir
İkinci türev	$f''(t)$	$s^2 F(s) - s f(0^-) - f'(0^-)$	f 'nin iki kez türevlenebilir olduğu ve ikinci türevin üstel tipte olduğu varsayılır. Türev özelliğini $f'(t)$ 'ye uygulayarak takip eder.
Genel türev	$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k} f^{(k-1)}(0^-)$	f olduğu varsayılır, n ile türevlenebilir -times n üstel tipte inci türevi. Bunu matematiksel tümevarımla takip eder .
Frekans alanı entegrasyonu	$\frac{1}{t} f(t)$	$\int_s^{\infty} F(\sigma) d\sigma$	Bu, frekans farklılaşması ve koşullu yakınsamanın doğası kullanılarak çıkarılır.
Zaman alanı entegrasyonu	$\int_0^t f(\tau) d\tau = (u * f)(t)$	$\frac{1}{s} F(s)$	$u(t)$ Birim basamak basamak fonksiyonu ve bir $(U * f)(t)$ olup evrişim arasında $u(t)$ ve $f(t)$.
Frekans kaydırma	$e^{at} f(t)$	$F(s - a)$	
Zaman değiştirme	$f(t - a)u(t - a)$	$e^{-as} F(s)$	$u(t)$ Heaviside adım fonksiyonudur
Zaman ölçeklendirme	$f(at)$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$	$a > 0$
Çarpma işlemi	$f(t)g(t)$	$\frac{1}{2\pi i} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{c-iT}^{c+iT} F(\sigma)G(s - \sigma) d\sigma$	Entegrasyon, tamamen F 'nin yakınsama bölgesi içinde kalan düşey çizgi $\text{Re}(\sigma) = c$ boyunca yapılır.
Evrişim	$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau$	$F(s) \cdot G(s)$	
Karmaşık çekim	$f^*(t)$	$F^*(s^*)$	
Çapraz korelasyon	$f(t) \star g(t)$	$F^*(-s^*) \cdot G(s)$	
Periyodik fonksiyon	$f(t)$	$\frac{1}{1 - e^{-Ts}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt$	$f(t)$, tüm $t \geq 0$ için $f(t) = f(t + T)$ olacak şekilde T periyodunun periyodik bir fonksiyonudur. Bu, zaman kaydırma özelliğinin ve geometrik dizinin sonucudur.

Example: Find the Laplace transform of the constant function

$$f(t) = 1, \quad 0 \leq t < \infty.$$

Solution:

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{\infty} e^{-ts} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-ts} (1) dt \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-ts} dt \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{e^{-ts}}{-s} \right]_0^b \quad \text{provided } s \neq 0. \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{e^{-bs}}{-s} - \frac{e^0}{-s} \right] \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{e^{-bs}}{-s} - \frac{1}{-s} \right] \end{aligned}$$

At this stage we need to recall a limit from Cal 1:

$$e^{-x} \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{if } x \rightarrow +\infty \\ +\infty & \text{if } x \rightarrow -\infty \end{cases}.$$

Hence,

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{e^{-bs}}{-s} = \begin{cases} 0 & \text{if } s > 0 \\ +\infty & \text{if } s < 0 \end{cases}.$$

Thus,

$$F(s) = \frac{1}{s}, \quad s > 0.$$

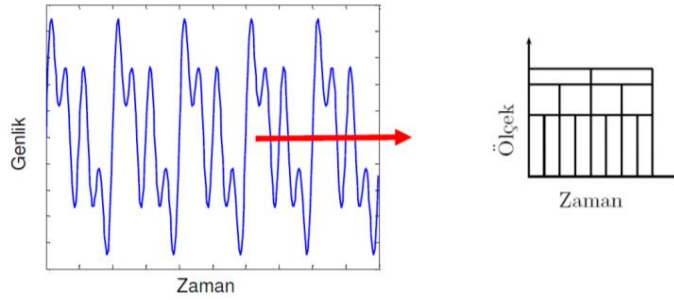
In this case the domain of the transform is the set of all positive real numbers.

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
1. 1	$\frac{1}{s}$
2. e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
3. $t^n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
4. $t^p, p > -1$	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$
5. \sqrt{t}	$\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{\frac{3}{2}}}$
6. $t^{n-\frac{1}{2}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$	$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) \sqrt{\pi}}{2^n s^{n+\frac{1}{2}}}$
7. $\sin(at)$	$\frac{a}{s^2 + a^2}$
8. $\cos(at)$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$
9. $t \sin(at)$	$\frac{2as}{(s^2 + a^2)^2}$
10. $t \cos(at)$	$\frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}$
11. $\sin(at) - at \cos(at)$	$\frac{2a^3}{(s^2 + a^2)^2}$
12. $\sin(at) + at \cos(at)$	$\frac{2as^2}{(s^2 + a^2)^2}$
13. $\cos(at) - at \sin(at)$	$\frac{s(s^2 - a^2)}{(s^2 + a^2)^2}$
14. $\cos(at) + at \sin(at)$	$\frac{s(s^2 + 3a^2)}{(s^2 + a^2)^2}$
15. $\sin(at + b)$	$\frac{s \sin(b) + a \cos(b)}{s^2 + a^2}$
16. $\cos(at + b)$	$\frac{s \cos(b) - a \sin(b)}{s^2 + a^2}$
17. $\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$
18. $\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$
19. $e^{at} \sin(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2 + b^2}$
20. $e^{at} \cos(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}$
33. $\int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau$	$F(s) G(s)$
34. $f(t+T) = f(t)$	$\frac{\int_0^T e^{-st} f(t) dt}{1 - e^{-sT}}$
35. $f'(t)$	$sF(s) - f(0)$
36. $f''(t)$	$s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$
37. $f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) \cdots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$

2.3. Wavelet Dönüşümü:

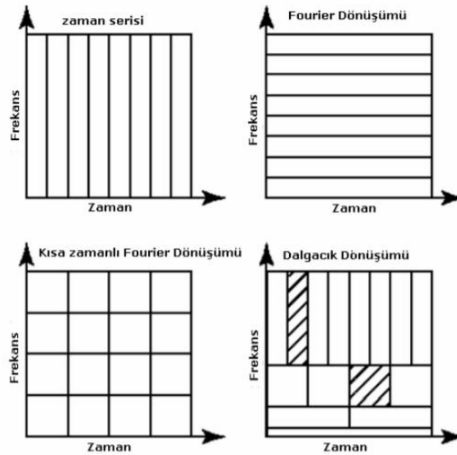
Wavelet(Dalgacık) dönüşümü, bir işaretin zaman-frekans analizi için kullanılan bir dönüşüm türüdür. Özellikle sismik verilerin incelenmesi sırasında yaşanan problemler “Sürekli Dalgacık Dönüşümünün” gelişmesine olanak sağlamıştır. Daha sonraları ise dalgacık analizinin çok çeşitli sinyal tiplerine uygulanabilir olduğu görülmüştür. Yapılan çalışmalarda sinyallerde süreksizlik tanısında (kalp grafiklerinin yorumlanması örnek verilebilir) ve sinyalden gürültü temizlemede dalgacık dönüşümünden önemli ölçüde yararlanılmıştır.

Adından da anlaşıldığı gibi **Wavelet** (dalgacık) dönüşümü dalgacıklar yardımı ile yapılmaktadır. Kısa zamanlı Fourier dönüşümüne (KZFD) benzer olarak dönüşümünde pencere görevini ana dalgacık denilen bir fonksiyon üstlenir, fakat bu ana dalgacık dönüşüm işlemi süresince hem ölçeklenir hem de ötelenir. Ölçekleme dalgaının genişletilip daraltılmasına, öteleme ise zaman ekseninde dalgaının kaydırılmasına karşılık gelir . KZFD'de dönüşüm boyunca sabit kalan pencere fonksiyonunun genişliği wavelet (dalgacık) dönüşümünde sürekli değiştiğinden, hem zaman hem de frekans domeninin çözünürlüğü artmaktadır, bu da **Wavelet** (dalgacık) dönüşümünü Fourier dönüşümünden daha üstün kılmaktadır. Dalgacık analizi; kısa zamanlı Fourier analizinin aksine zaman frekans alanını değil, zaman-ölçek alanını kullanır. Şekil 2.1 dalgacık analizi sonucunda sinyalde ölçek ve zaman değişimini göstermektedir.



Şekil 2.1. Dalgacık analizinde ölçek-zaman alanı.

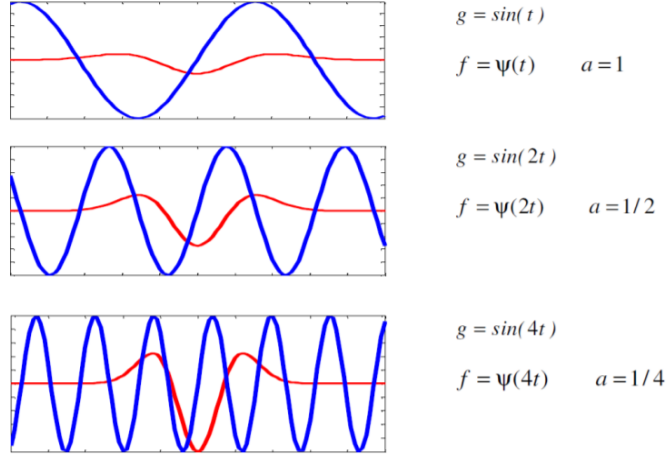
Diğer taraftan Şekil 2.2’de Fourier, kısa zamanlı Fourier ve wavelet (dalgacık) dönüşümlerinin zaman-frekans domeninde çözünürlükleri göstermektedir. Kısaca özetlemek gerekirse; Fourier dönüşümü bize frekans bilgisini verir ama bu frekansların ne zaman oluştuğunu belirtemez. Kısa Zamanlı Fourier dönüşümünde zaman-frekans çözünürlüğü sabittir yani KZFD’de zaman penceresi bütün frekanslarda değişmeyen büyüklüktedir. Wavelet (dalgacık) dönüşümünde ise bu çözünürlük ayarlanabilmektedir.



Şekil 2.2. Dönüşümlerin zaman-frekans çözünürlüğü bakımından karşılaştırma

Wavelet (dalgacık) dönüşümünün en önemli parametresi dalgacıktır. Bir fonksiyonun dalgacık olabilmesi, süresinin sınırlı ve ortalama değerinin sıfır olması koşullarına bağlıdır. Bu nedenle dalgacık fonksiyonu genlik ekseninin pozitif ve negatif yönlerinde salınım yapmalı ve bu salınım, zaman ekseninde ilerledikçe genlik ekseninde sifıra oturarak sona ermelidir.

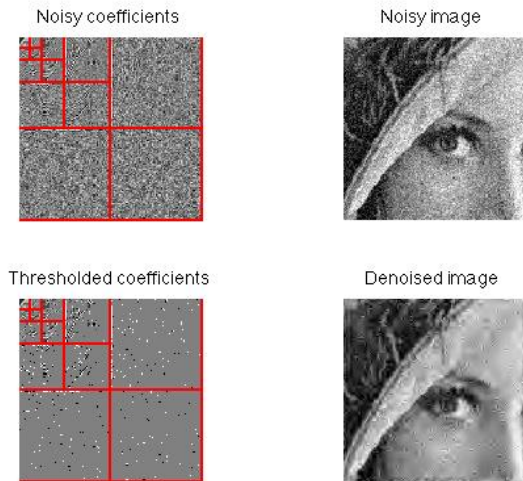
Wavelet (dalgacık) dönüşümünde ölçek parametresi 'a' ile gösterilir ve frekans ile ilişkilidir. Büyük ölçekler düşük frekanslara, küçük ölçekler de yüksek frekanslara karşılık düşerler. Bu parametreler Şekil 2.4'de bir örnek üzerinde dalgacığa nasıl etki ettiği açıklanmaya çalışılmıştır. İlgili şekilde bir dalgacık üzerinde ölçeklemeyi belirleyen 'a' parametresinin 1, 1/2 ve 1/4 olarak seçimi durumunda dalgacık fonksiyonu gösterilmiştir.



Sürekli Dalgacık Dönüşümü (SDD): SDD, dalgacık fonksiyonunun kaydırılıp bir ölçek ile çarpılmasından sonra, zaman alanı boyunca toplanmasıyla elde edilir.

Ayrık Dalgacık Analizi (ADD): Elde edilen tüm zaman dizilerinin veri sayısı arttığı zaman, analizin süresi ve hassasiyeti artar. Bunu engellemek için belirli ölçekte gruplar oluşturularak analiz yapılır. Bu şekilde yapılan dalgacık tanımlanması Ayrık Dalgacık Dönüşü (ADD) olarak adlandırılır.

Doğadaki sinyallerin büyük bir çoğunluğu, her an değişimin olduğu, durağan olmayan sinyallerdir. Bu sebeple, Fourier analizi, frekans bileşenlerinin hepsini kapsamaz. Wavelet dönüşümü veya wavelet analizi, şu ana kadar uygulanan analiz yöntemlerindeki noksanlıkları ortadan kaldırmak için kullanılan en son çözümdür. Fourier dönüşümündeki zaman bilgisinin kaybolması problemini ortadan kaldıran wavelet analizi, bir sinyalin içerisindeki tüm frekans bileşenlerinin hangi zamanlarda ve hangi genliklerde olduğunu tespit edebilir. Bütün bu avantajlarından dolayı Wavelet analizi yaygın olarak kullanılmakta ve pek çok alana uygulanmaktadır.



2.4. Hermite dönüşümü:

Hermite dönüşümü özel bir polinom dönüşümü durumudur. Bir örüntü açıklama modeli olarak kabul edilebilir.

Hermite dönüşümü, dönüşümün çekirdekleri olarak Hermite polinomlarını $H_n(x)$ 'i kullanan matematikçi Charles Hermite'nin adını taşıyan integral bir dönüşümdür.

The Hermite transform of a function $F(x)$ is

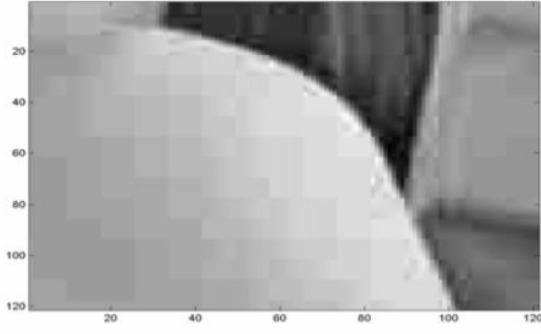
$$H\{F(x)\} = f_H(n) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) F(x) dx$$

The inverse Hermite transform is given by

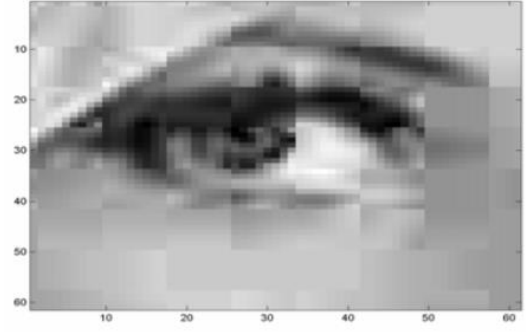
$$H^{-1}\{f_H(n)\} = F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi} 2^n n!} f_H(n) H_n(x)$$

Bazı Hermite dönüşümleri:

$F(x)$	$f_H(n)$
$x^m, n > m$	0
x^n	$\sqrt{\pi} n! P_n(1)$
e^{ax}	$\sqrt{\pi} a^n e^{a^2/4}$
$e^{2xt-t^2}, t < \frac{1}{2}$	$\sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (2t)^n$
$e^{x^2} \frac{d}{dx} \left[e^{-x^2} \frac{d}{dx} F(x) \right]$	$-2n f_H(n)$
$e^{-x^2} H_n(x)$	$2^{n-1/2} \Gamma(n+1/2)$
$x^2 H_n(x)$	$(n+1/2) \delta_n$
$\frac{d^m}{dx^m} F(x)$	$f_H(n+m)$
$x \frac{d^m}{dx^m} F(x)$	$n f_H(n+m-1) + \frac{1}{2} f_H(n+m+1)$
$F(x) * G(x)$	$\sqrt{\pi} (-1)^n \left[2^{2n+1} \Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right) \right]^{-1} f_H(n) g_H(n)$ [5]
$H_m(x)$	$\sqrt{\pi} 2^n n! \delta_{nm}$
$H_n^2(x)$	$\sqrt{\pi} \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} 2^{r+n} (2r)! n!$
$H_m(x) H_p(x)$	$\begin{cases} \frac{\sqrt{\pi} 2^k m! n! p!}{(k-m)!(k-n)!(k-p)!}, & m+n+p=2k, k \geq m, n, p \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$ [6]
$H_m^2(x) H_n(x), m > n$	$\sqrt{\pi} 2^n 2^m n! \sum_{k=0}^n \binom{m}{k} \binom{n}{k} \binom{2k}{k}$ [7]
$H_{n+p+q}(x) H_p(x) H_q(x)$	$\sqrt{\pi} 2^{n+p+q} (n+p+q)!$
$e^{z^2} \sin(\sqrt{2}xz), 2z < 1$	$\begin{cases} \sqrt{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m (2z)^{2m+1}, & n=2m+1 \\ 0, & n \neq 2m+1 \end{cases}$
$(1-z^2)^{-1/2} \exp\left[\frac{2xyz - (x^2+y^2)z^2}{(1-z^2)}\right]$	$\sqrt{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} z^m H_m(y) \delta_{nm}$



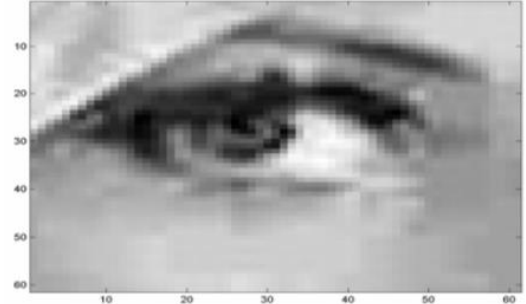
Compressed image



Compressed image



Hermite filtered compressed image



Hermite filtered compressed image

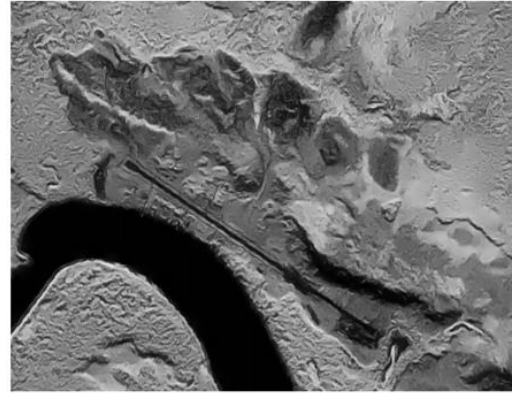


FIGURE 24.5

Left: Original SAR AeS-1 image. Right: Image after noise reduction.

Hermite dönüşümü, uzaktan algılama görüntülerinde gürültü azaltma ve füzyon için kullanılacak verimli bir görüntü temsil modelidir. Kodlama ve hareket tahmini gibi diğer uygulamalar ilgili çalışmalarda gösterilmiştir.

SAR görüntülerinde gürültü azaltma durumunda, burada sunulan uyarlanabilir algoritma, homojen bölgeleri düzeltirken görüntü keskinliğini korumamıza izin verir. Hermite dönüşümünü temel alan önerilen füzyon algoritması, görüntüleri aynı veya farklı görüntü sensörlerinden farklı uzamsal ve spektral çözünürlüklerle bütünleştirir.

Algoritma, orijinal verilerin hem en yüksek uzamsal hem de spektral çözünürlüklerini korumayı amaçlamaktadır.

2.5.Jacobi Dönüşümü:

Matematikte, Jacobi dönüşümü, dönüşümün çekirdekleri olarak Jacobi polinomlarını $P_n^{\alpha,\beta}(x)$ kullanan matematikçi Carl Gustav Jacob Jacobi'nin adını taşıyan integral bir dönüşümdür.

The Jacobi transform of a function $F(x)$ is^[5]

$$J\{F(x)\} = f^{\alpha,\beta}(n) = \int_{-1}^1 (1-x)^\alpha (1+x)^\beta P_n^{\alpha,\beta}(x) F(x) dx$$

The inverse Jacobi transform is given by

$$J^{-1}\{f^{\alpha,\beta}(n)\} = F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\delta_n} f^{\alpha,\beta}(n) P_n^{\alpha,\beta}(x), \quad \text{where} \quad \delta_n = \frac{2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(n+\alpha+1) \Gamma(n+\beta+1)}{n! (\alpha+\beta+2n+1) \Gamma(n+\alpha+\beta+1)}$$

$F(x)$	$f^{\alpha,\beta}(n)$
$x^m, m < n$	0
x^n	$n! (\alpha + \beta + 2n + 1) \delta_n$
$P_m^{\alpha,\beta}(x)$	$\delta_n \delta_{mn}$
$(1+x)^{a-\beta}$	$\binom{n+\alpha}{n} 2^{\alpha+a+1} \frac{\Gamma(a+1) \Gamma(\alpha+1) \Gamma(a-\beta+1)}{\Gamma(\alpha+a+n+2) \Gamma(a-\beta+n+1)}$
$(1-x)^{\sigma-\alpha}, \Re \sigma > -1$	$\frac{2^{\sigma+\beta+1}}{n! \Gamma(\alpha-\sigma)} \frac{\Gamma(\sigma+1) \Gamma(n+\beta+1) \Gamma(\alpha-\sigma+n)}{\Gamma(\beta+\sigma+n+2)}$
$(1-x)^{\sigma-\beta} P_m^{\alpha,\sigma}(x), \Re \sigma > -1$	$\frac{2^{\sigma+\sigma+1}}{m! (n-m)!} \frac{\Gamma(n+\alpha+1) \Gamma(\alpha+\beta+m+n+1) \Gamma(\sigma+m+1) \Gamma(\alpha-\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1) \Gamma(\alpha+\sigma+m+n+2) \Gamma(\alpha-\beta+m+1)}$
$2^{\alpha+\beta} Q^{-1} (1-z+Q)^{-\alpha} (1+z+Q)^{-\beta}, Q = (1-2xz+z^2)^{1/2}, z < 1$	$\sum_{n=0}^{\infty} \delta_n z^n$
$(1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \frac{d}{dx} \left[(1-x)^{\alpha+1} (1+x)^{\beta+1} \frac{d}{dx} \right] F(x)$	$-n(n+\alpha+\beta+1) f^{\alpha,\beta}(n)$
$\left\{ (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \frac{d}{dx} \left[(1-x)^{\alpha+1} (1+x)^{\beta+1} \frac{d}{dx} \right] \right\}^k F(x)$	$(-1)^k n^k (n+\alpha+\beta+1)^k f^{\alpha,\beta}(n)$

Jacobi metodu , ana köşegeni boyunca sıfır olmayan bir matris üzerindeki bir matris denklemini çözme yöntemidir. Jacobi metodu sayısal lineer cebirde lineer denklemlerin diyagonal olarak baskın sistemlerin çözümlerinin belirlenmesi için oluşturulmuş bir algoritmadır. Her diyagonal eleman tek tek çözülür ve yaklaşık bir değer olarak alınır. Bu aşama onlar yakınsayana kadar tekrarlanır. Bu algoritma matris köşegenleştirilmesi Jacobi dönüşüm metodunun (diğer adıyla Jacobi özdeğer algoritmasının) sadeleştirilmiş şeklidir.

The Jacobi method is easily derived by examining each of the n equations in the [linear system of equations](#) $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ in isolation. If, in the i th equation

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i,$$

solve for the value of x_i while assuming the other entries of \mathbf{x} remain fixed. This gives

$$x_i^{(k)} = \frac{b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j^{(k-1)}}{a_{ii}},$$

which is the Jacobi method.

In this method, the order in which the equations are examined is irrelevant, since the Jacobi method treats them independently. The definition of the Jacobi method can be expressed with [matrices](#) as

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{D}^{-1} (\mathbf{L} + \mathbf{U}) \mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{D}^{-1} \mathbf{b},$$

where the matrices \mathbf{D} , $-\mathbf{L}$, and $-\mathbf{U}$ represent the [diagonal](#), [strictly lower triangular](#), and [strictly upper triangular](#) parts of \mathbf{A} , respectively.