

Variáveis aleatórias discretas

Wagner H. Bonat
Elias T. Krainski
Fernando P. Mayer

Universidade Federal do Paraná
Departamento de Estatística
Laboratório de Estatística e Geoinformação

16/03/2018



Sumário

- 1 Introdução
- 2 Variáveis aleatórias discretas
- 3 Modelos discretos
 - Principais modelos
 - Outros modelos
- 4 Exercícios recomendados

Variáveis aleatórias

Em probabilidade, uma função X que associa a cada evento do espaço amostral um número real $X(\omega) \in \mathbb{R}$, é denominada uma **variável aleatória** (VA).

Uma variável aleatória pode ser classificada como **discreta** ou **contínua**, dependendo do domínio dos valores de X .

Exemplo: o número de alunos em uma sala é uma variável aleatória (discreta), denotada por X (maiúsculo). Uma observação dessa variável é denotada pela respectiva letra minúscula, e.g., $x = 50$ alunos.

Em geral, denotamos a probabilidade de uma V.A. X assumir determinado valor x como

$$P[X] \quad \text{ou} \quad P[X = x]$$

Variáveis aleatórias

Dada a realização de um experimento aleatório qualquer, com um certo espaço de probabilidade, desejamos estudar a **estrutura probabilística** de quantidades associadas à esse experimento.

Note que antes da realização de um experimento, **não sabemos seu resultado**, entretanto seu espaço de probabilidade pode ser previamente estabelecido.

Dessa forma, podemos atribuir probabilidades aos *eventos* desse espaço amostral, dando origem ao conceito de **variável aleatória**.

Distribuições de probabilidade

Existem diversos *modelos probabilísticos* que procuram descrever vários tipos de variáveis aleatórias: são as **distribuições de probabilidade de variáveis aleatórias** (discretas ou contínuas).

A distribuição de probabilidades de uma VA X é, portanto, uma descrição das probabilidades associadas com os possíveis valores de X . Os valores que X assume determinam o **suporte** (S) da VA.

- **Variáveis discretas** → suporte em um conjunto de valores enumeráveis (finitos ou infinitos)
- **Variáveis contínuas** → suporte em um conjunto não enumerável de valores

Distribuições de probabilidade

Denomina-se de **distribuição de probabilidade** de alguma variável aleatória, a **regra** geral que define a

- **função de probabilidade** (fp) (V.A.s discretas), ou a
- **função densidade de probabilidade** (fdp) (V.A.s contínuas)

para a variável de interesse.

Existem muitas distribuições de probabilidade, mas algumas merecem destaque por sua importância prática.

Estas distribuições também são chamadas de **modelos probabilísticos**.

Sumário

- 1 Introdução
- 2 Variáveis aleatórias discretas**
- 3 Modelos discretos
 - Principais modelos
 - Outros modelos
- 4 Exercícios recomendados

Definição

A **função de probabilidade** (fp) da VA discreta X , que assume os valores $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, é a função que atribui probabilidades a cada um dos possíveis valores: $\{[x_i, p(x_i)], i = 1, 2, \dots\}$, ou seja,

$$P[X = x_i] = p(x_i) = p_i, \quad i = 1, 2, \dots$$

com as seguintes propriedades:

- i. A probabilidade de cada valor deve estar entre 0 e 1

$$0 \leq p(x_i) \leq 1, \quad \forall i = 1, 2, \dots$$

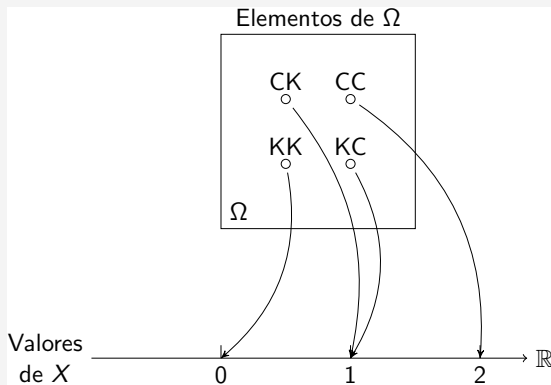
- ii. A soma de todas as probabilidades é igual a 1

$$\sum_i p(x_i) = 1$$

Exemplo 3.3

Experimento

Lançamento de duas moedas. $X =$ número de resultados cara (C)



Exemplo 3.3

Podemos montar uma tabela de distribuição de frequência para a variável aleatória $X = \text{número de resultados cara (C)}$

X	Frequência (f_i)	Frequência relativa (fr_i)
0	1	1/4
1	2	2/4
2	1	1/4
Total	4	1

Assim podemos associar a cada valor de X sua **probabilidade** correspondente, como resultado das **frequências relativas**

$$P[X = 0] = 1/4$$

$$P[X = 1] = 2/4 = 1/2$$

$$P[X = 2] = 1/4$$

Exemplo 3.3

Dessa forma, a **distribuição de probabilidade** da variável aleatória $X =$ número de resultados cara (C) é a tabela

X	$P[X = x_i] = p(x_i)$
0	1/4
1	1/2
2	1/4
Total	1

Repare que as propriedades da função de probabilidade estão satisfeitas:

- i. As probabilidades $p(x_i)$ estão entre 0 e 1
- ii. A soma de todas as probabilidades $p(x_i)$ é 1

Exemplo 3.1

Com dados do último censo, a assistente social de um Centro de Saúde constatou que para as famílias da região, 20% não tem filhos, 30% tem um filho, 35% tem dois, e as restantes se dividem igualmente entre três, quatro ou cinco filhos.

Descreva a função de probabilidade da VA N definida como número de filhos.

Exemplo 3.2

Na construção de um certo prédio, as fundações devem atingir 15 metros de profundidade e, para cada 5 metros de estacas colocadas, o operador anota se houve alteração no ritmo de perfuração previamente estabelecido. Essa alteração é resultado de mudanças para mais ou para menos, na resistência do subsolo.

Nos dois casos, medidas corretivas serão necessárias, encarecendo o custo da obra. Com base em avaliações geológicas, admite-se que a probabilidade de ocorrência de alterações é de 0.1 para cada 5 metros.

O custo básico inicial é de 100 UPC (unidade padrão de construção) e será acrescida de $50k$, com k representando o número de alterações observadas. Como se comporta a va custo das obras de fundações?

Função de distribuição de probabilidade

Em muitas situações, é útil calcularmos a probabilidade **acumulada** até um certo valor.

Definimos a **função de distribuição** ou **função acumulada de probabilidade** de uma VA X pela expressão:

$$F(x) = P(X \leq x)$$

para qualquer número real x .

Exemplo 3.5

Uma população de 1000 crianças foi analisada num estudo para determinar a efetividade de uma vacina contra um tipo de alergia.

No estudo, as crianças recebiam uma dose da vacina e, após um mês, passavam por um novo teste. Caso ainda tivessem tido alguma reação alérgica, recebiam outra dose da vacina. Ao fim de 5 doses todas as crianças foram consideradas imunizadas.

Os resultados completados estão na tabela a seguir.

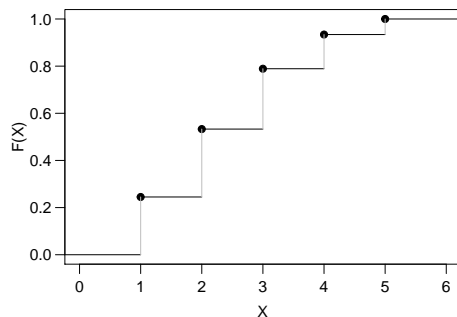
	1	2	3	4	5
Freq.	245	288	256	145	66

Para uma criança sorteado ao acaso qual a probabilidade dela ter recebido 2 doses? E até 2 doses?

Exemplo 3.5

Tabela de frequência:

	n_i	f_i	f_{ac}
1	245	0.245	0.245
2	288	0.288	0.533
3	256	0.256	0.789
4	145	0.145	0.934
5	66	0.066	1.000
Sum	1000	1.000	

Gráfico de $F(X)$:

Exemplo 3.5

Assim,

$$F(2) = P(X \leq 2) = P(X = 1) + P(X = 2) = 0,533$$

Note que podemos escrever

$$F(x) = P(X \leq x) = 0,533 \quad \text{para } 2 \leq x < 3$$

E os valores completos da função de distribuição são:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 1 \\ 0,245 & \text{se } 1 \leq x < 2 \\ 0,533 & \text{se } 2 \leq x < 3 \\ 0,789 & \text{se } 3 \leq x < 4 \\ 0,934 & \text{se } 4 \leq x < 5 \\ 1 & \text{se } x \geq 5 \end{cases}$$

Exemplo 3.6

Num estudo sobre a incidência de câncer foi registrado, para cada paciente com esse diagnóstico, o número de casos de câncer em parentes próximos (pais, irmãos, tios, filhos, primos e sobrinhos). A distribuição de frequência para 26 pacientes é a seguinte:

	0	1	2	3	4	5
n_i	4	4	6	6	2	4

Estudos anteriores assumem que a incidência de câncer em parentes próximos pode ser teoricamente modelada pela seguinte função discreta de probabilidade:

	1	2	3	4	5	6
p_i	0.1	0.1	0.3	0.3	0.1	0.1

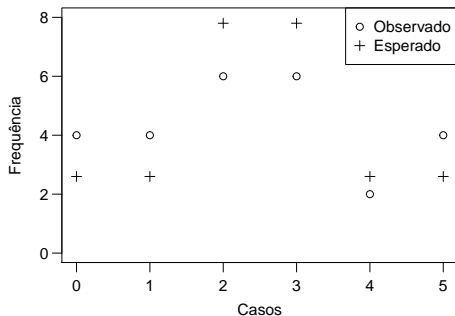
Os dados observados concordam com o modelo teórico?

Exemplo 3.6

O número de observações de incidência que seria esperado seguindo o modelo teórico é calculado como

$$e_i = n \times p_i$$

	n_i	e_i
0	4	2.6
1	4	2.6
2	6	7.8
3	6	7.8
4	2	2.6
5	4	2.6
Sum	26	26.0



Sumário

- 1 Introdução
- 2 Variáveis aleatórias discretas
- 3 Modelos discretos**
 - Principais modelos
 - Outros modelos
- 4 Exercícios recomendados

Modelo Uniforme Discreto

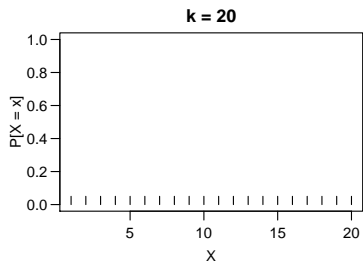
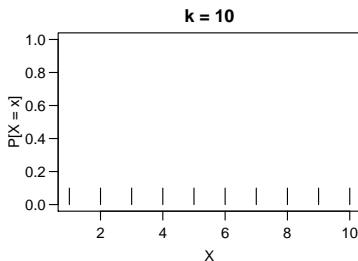
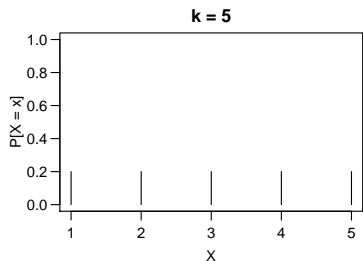
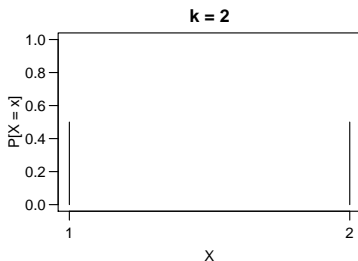
Definição: Seja X uma VA assumindo valores $1, 2, \dots, k$. Dizemos que X segue o modelo **Uniforme Discreto** se atribui a mesma probabilidade $1/k$ a cada um desses k valores.

Então, sua função de probabilidade é dada por

$$P[X = j] = \frac{1}{k}, \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

Notação: $X \sim U_D[1, k]$

Modelo Uniforme Discreto



Exemplo 3.7

Uma rifa tem 100 bilhetes numerados de 1 a 100. Tenho 5 bilhetes consecutivos numerados de 21 a 25 e meu colega tem outros 5 bilhetes, com os números 1, 11, 29, 68 e 93. Quem tem maior possibilidade de ser sorteado?

Modelo Bernoulli

Definição: Uma variável aleatória X segue o modelo Bernoulli se assume apenas os valores 0 (“fracasso”) ou 1 (“sucesso”). Sua função de probabilidade é dada por

$$P[X = x] = p^x(1 - p)^{1-x}, \quad x = 0, 1$$

onde o parâmetro $0 \leq p \leq 1$ é a probabilidade de sucesso.

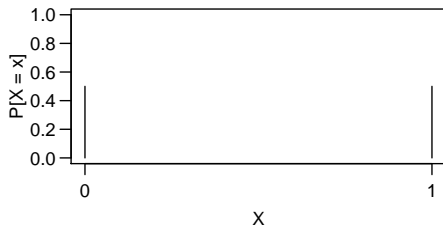
Notação: $X \sim \text{Ber}(p)$

Modelo Bernoulli

p = 0.2



p = 0.5



p = 0.7



p = 0.9



Exemplo

No lançamento de uma moeda, considere cara como o evento de sucesso. Qual a probabilidade de sair cara, sendo que $p = 1/2$?

$$X = \begin{cases} 1, & \text{cara} \\ 0, & \text{coroa} \end{cases}$$

Temos que

X	$P[X = x]$	$p = 1/2$
0	$1 - p$	$1/2$
1	p	$1/2$

Modelo Binomial

Definição: Seja um experimento realizado dentro das seguintes condições:

- i. São realizados n “ensaios” de Bernoulli independentes
- ii. Cada ensaio só pode ter dois resultados possíveis: “sucesso” ou “fracasso”
- iii. A probabilidade p de sucesso em cada ensaio é constante

Vamos associar a VA X o número de sucessos em n ensaios de Bernoulli. Portanto X poderá assumir os valores $0, 1, \dots, n$.

Modelo binomial

Vamos determinar a distribuição de probabilidade de X , através da probabilidade de um número genérico x de sucessos.

Suponha que ocorram sucessos (1) apenas nas x primeiras provas, e fracassos (0) nas $n - x$ provas restantes

$$\underbrace{1, 1, 1, \dots, 1}_x, \underbrace{0, 0, 0, \dots, 0}_{n-x}$$

Como as provas são independentes, a probabilidade de ocorrência de x sucessos em n tentativas é uma extensão do modelo de Bernoulli para n ensaios, ou seja,

$$\underbrace{p \cdot p \cdot p \cdots p}_x \cdot \underbrace{(1 - p) \cdot (1 - p) \cdot (1 - p) \cdots (1 - p)}_{n-x} = p^x (1 - p)^{n-x}$$

Modelo binomial

Porém, o evento: “ x sucessos em n provas” pode ocorrer de diferentes maneiras (ordens) distintas, todas com a mesma probabilidade.

Como o número de ordens é o número de combinações de n elementos tomados x a x , então a probabilidade de ocorrerem x sucessos em n provas de Bernoulli será então a distribuição binomial, dada por

$$P[X = x] = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \dots, n$$

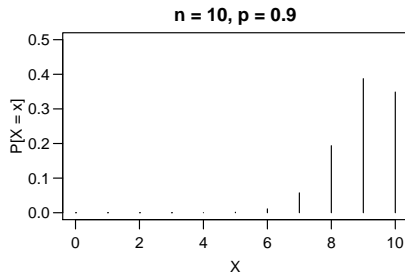
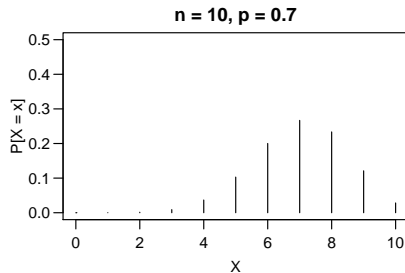
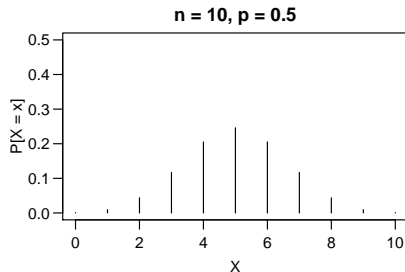
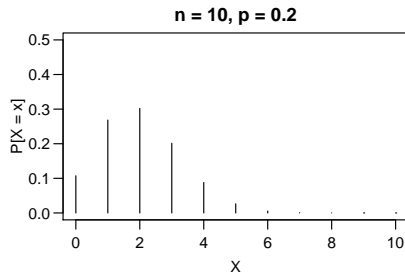
onde

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

é o **coeficiente binomial**, que dá o número total de combinações possíveis de n elementos, com x sucessos.

Notação: $X \sim \text{bin}(n, p)$

Modelo binomial



Modelo binomial

É importante notar que as probabilidades são completamente caracterizadas pela informação dos **parâmetros**.

Por exemplo, para calcular a probabilidade de 3 sucessos de uma $b(12, 0.4)$ fazemos

$$P[X = 3] = \binom{12}{3} 0.4^3 0.6^9 = \frac{12!}{3!9!} 0.4^3 0.6^9 = 0.142$$

Diversos programas computacionais fazem esse cálculo facilmente. Por exemplo, com o R

```
round(dbinom(0:12, size = 12, prob = 0.4), 3)
```

```
[1] 0.002 0.017 0.064 0.142 0.213 0.227 0.177 0.101 0.042 0.012 0.002 0.000  
[13] 0.000
```

Exemplo 3.9

O escore de um teste internacional de proficiência na língua inglesa varia de 0 a 700 pontos, com mais pontos indicando um melhor desempenho. Informações, coletadas durante vários anos, permite estabelecer o seguinte modelo para o desempenho no teste:

Pontos	[0, 200)	[200, 300)	[300, 400)	[400, 500)	[500, 600)	[600, 700)
p_i	0.06	0.15	0.16	0.25	0.28	0.10

Várias universidades americanas, exigem um escore mínimo de 600 pontos para aceitar candidatos de países de língua não inglesa. De um grande grupo de estudantes brasileiros que prestaram o último exame, escolhemos ao acaso 20 deles. Qual é a probabilidade de no máximo 3 atenderem ao requisito mínimo?

Exemplo 3.10

Um veterinário está estudando o índice de natalidade em porcos sujeitos à inseminação artificial. Para tal, coletou informações sobre a variável número de filhotes nascidos vivos em cada uma das 100 inseminações realizadas com o mesmo reprodutor. A tabela a seguir apresenta os resultados.

Número	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Freq. Obs.	1	6	7	23	26	21	12	3	1

O veterinário informa que 11 ou mais filhotes nascidos vivos é uma ocorrência muito rara e pode ser desprezada em termos do modelo. Ele sugeriu que a variável N : número de filhotes nascidos vivos, poderia ser ajustada pelo modelo Binomial com parâmetros $n = 10$ e $p = 0.5$. O que você acha da sugestão do veterinário?

Exemplo 3.10

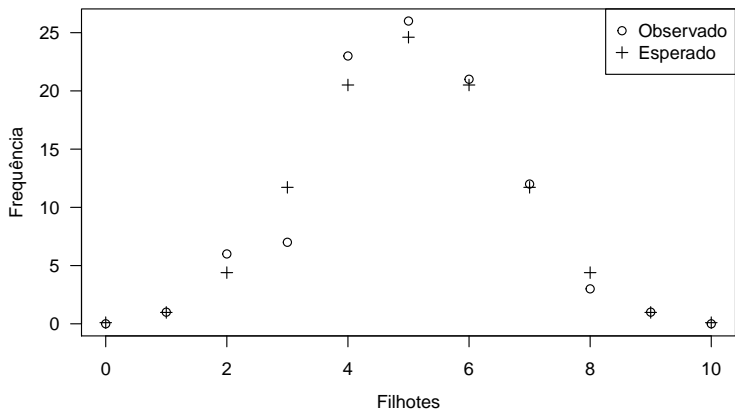
Usando o R temos:

```
obs <- c(0, 1, 6, 7, 23, 26, 21, 12, 3, 1, 0)
prob <- dbinom(0:10, size = 10, prob = 0.5)
esp <- prob * 100
cbind("Obs" = obs, "p" = round(prob, 2), "Esp" = round(esp, 2))
```

#		Obs	p	Esp
#	[1,]	0	0.00	0.10
#	[2,]	1	0.01	0.98
#	[3,]	6	0.04	4.39
#	[4,]	7	0.12	11.72
#	[5,]	23	0.21	20.51
#	[6,]	26	0.25	24.61
#	[7,]	21	0.21	20.51
#	[8,]	12	0.12	11.72
#	[9,]	3	0.04	4.39
#	[10,]	1	0.01	0.98
#	[11,]	0	0.00	0.10

Exemplo 3.10

```
par(mar=c(4,4,1,1), mgp=c(2.5,1,0), las=1)
plot(0:10, obs, xlab = "Filhotes", ylab = "Frequência")
points(0:10, esp, pch = 3)
legend("topright", legend = c("Observado", "Esperado"), pch = c(1, 3))
```



Modelo Geométrico

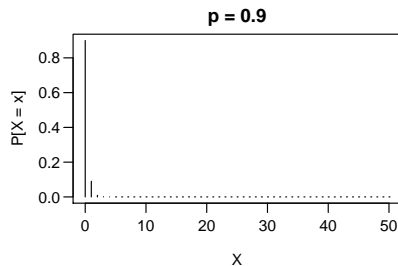
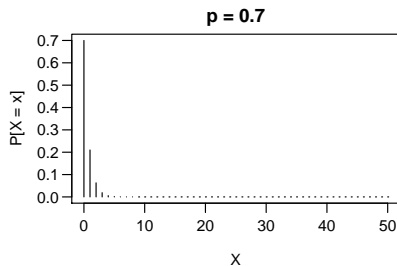
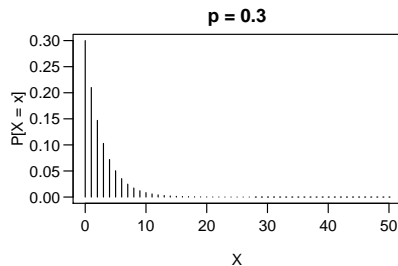
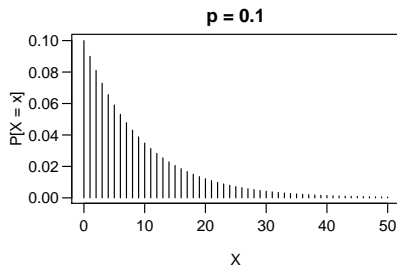
Definição: Considere o número (k) de ensaios Bernoulli **que precedem o primeiro sucesso**. Nesse caso, dizemos que a VA X tem distribuição Geométrica de parâmetro p , e sua função de probabilidade tem a forma

$$P(X = k) = p(1 - p)^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

onde $0 \leq p \leq 1$ é a probabilidade de sucesso.

Notação: $X \sim G(p)$.

Modelo Geométrico



Exemplo 3.11

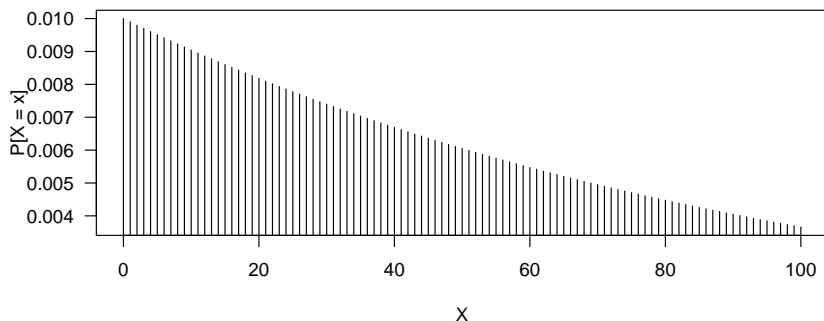
Uma linha de produção está sendo analisada para efeito de controle da qualidade das peças produzidas. Tendo em vista o alto padrão requerido, a produção é interrompida para regulagem toda vez que uma peça defeituosa é observada. Se 0.01 é a probabilidade da peça ser defeituosa, estude o comportamento da variável Q , quantidade de peças boas produzidas antes da primeira defeituosa.

Exemplo 3.11

$$P(Q = k) = 0.01 \times 0.99^{k-1}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Usando o R temos

```
x = c(0:100)
dx = dgeom(x = x, prob = 0.01)
par(mar=c(4,4,1,1), mgp=c(3,1,0), las=1)
plot(x, dx, type = "h", xlab = "X", ylab = "P[X = x]")
```



Modelo Poisson

Definição: Seja um experimento realizado nas seguintes condições:

- i. As ocorrências são independentes
- ii. As ocorrências são aleatórias
- iii. A variável aleatória X é o número de ocorrências de um evento **ao longo de algum intervalo** (de tempo ou espaço)

Denominamos esse experimento de **processo de Poisson**.

Vamos associar a VA X o número de ocorrências em um intervalo. Portanto X poderá assumir os valores $0, 1, \dots$ (sem limite superior).

Modelo Poisson

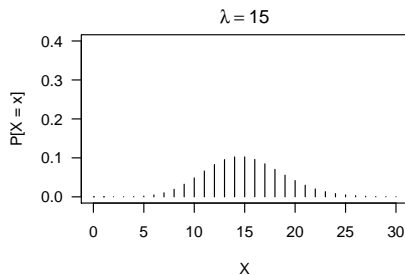
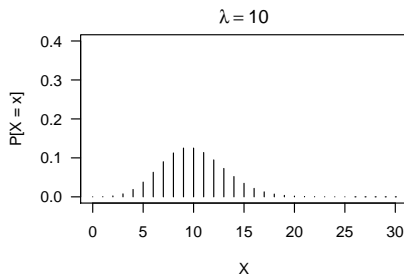
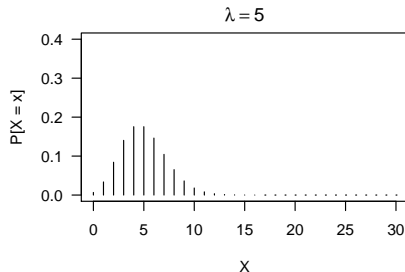
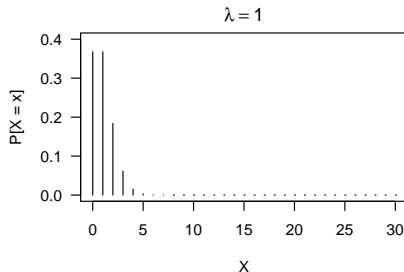
Uma VA X segue o modelo de Poisson se surge a partir de um processo de Poisson, e sua **função de probabilidade** for dada por

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

onde o parâmetro $\lambda > 0$ é a taxa média de ocorrências em um intervalo de tempo ou espaço.

Notação: $X \sim Po(\lambda)$.

Modelo Poisson



Exemplo 3.12

A emissão de partículas radioativas têm sido modelada através de uma distribuição de Poisson, com o valor do parâmetro dependendo da fonte utilizada.

Suponha que o número de partículas alfa, emitidas por minuto, seja uma variável aleatória seguindo o modelo Poisson com parâmetro 5, isto é, a taxa média de ocorrência é de 5 emissões a cada minuto.

Calcule a probabilidade de haver mais de 2 emissões em um minuto.

Exemplo 3.12

Note que $P(A > 2) = 1 - P(A \leq 2)$, portanto

$$\begin{aligned} P(A > 2) &= \sum_{a=3}^{\infty} P(A = a) = 1 - P(A \leq 2) \\ &= 1 - \sum_{a=0}^2 \frac{e^{-5} 5^a}{a!} = 0.875 \end{aligned}$$

Em R temos

```
1 - ppois(2, lambda = 5)
```

```
# [1] 0.875348
```

Exemplo 3.13

Engenheiros da companhia telefônica estudam se o modelo de Poisson com taxa de ocorrência de 4.5 chamadas por hora pode ser ajustado ao número N de chamadas interestaduais que chegam por hora, a uma central telefônica, durante o período noturno. Os dados coletados referentes a 650 períodos de uma hora, estão apresentados abaixo. Analise se esta suposição é razoável.

Chamadas	0	1	2	3	4	5	6	7	8+
Freq. Obs.	9	38	71	115	125	106	79	50	57

Exemplo 3.13

Usando o R temos

```
obs <- c(9, 38, 71, 115, 125, 106, 79, 50, 57)
prob <- c(dpois(0:7, lambda = 4.5), 1 - ppois(7, lambda = 4.5))
esp <- prob * 650
cbind("Obs" = obs, "p" = round(prob, 2), "Esp" = round(esp, 2))
```

#		Obs	p	Esp
#	[1,]	9	0.01	7.22
#	[2,]	38	0.05	32.49
#	[3,]	71	0.11	73.11
#	[4,]	115	0.17	109.67
#	[5,]	125	0.19	123.37
#	[6,]	106	0.17	111.04
#	[7,]	79	0.13	83.28
#	[8,]	50	0.08	53.54
#	[9,]	57	0.09	56.28

Modelo hipergeométrico

Definição: Considere um conjunto de n objetos dos quais m são do tipo I e $n - m$ são do tipo II . Para um sorteio de r objetos $r < n$, feito ao acaso e **sem reposição**, defina X como o número de objetos de tipo I selecionados.

Diremos que a VA X segue o modelo Hipergeométrico e sua função de probabilidade é dada por

$$P[X = k] = \frac{\binom{m}{k} \binom{n-m}{r-k}}{\binom{n}{r}},$$

onde $k = \max \{0, r - (n - m)\} \leq k \leq \min \{r, m\}$.

Notação: $X \sim \text{HG}(m, n, r)$.

Exemplo

Considere que, num lote de 20 peças, existam 4 defeituosas. Selecionando-se 5 dessas peças, sem reposição, qual seria a probabilidade de 2 defeituosas terem sido escolhidas?

Exemplo

Pelo enunciado, sabemos que $n = 20$, $m = 4$, $r = 5$. podemos calcular a probabilidade de $X = 2$ como

$$P[X = 2] = \frac{\binom{m}{k} \binom{n-m}{r-k}}{\binom{n}{r}} = \frac{\binom{4}{2} \binom{20-4}{5-2}}{\binom{20}{5}} = 0.217$$

Usando o R temos

```
## m = defeituosas, n = não defeituosas, k = tam. amostra  
dhyper(x = 2, m = 4, n = 16, k = 5)
```

```
# [1] 0.2167183
```

Modelo hipergeométrico - captura e recaptura

Para determinar o tamanho de uma população, podemos usar o modelo hipergeométrico

- Captura e marcação de m animais
- Após um tempo, amostram-se r animais (sem reposição)
- O número de animais marcados é contado

Sendo X a VA “número de animais marcados”, então $X \sim \text{HG}(m, N, r)$, onde N é o tamanho da população (desconhecido).

Supondo que a amostra forneça k_0 animais marcados, podemos ter uma estimativa de N com

$$N_{est} = m \frac{r}{k_0}$$

Modelo hipergeométrico - captura e recaptura

Suponha que você marcou 200 indivíduos de uma espécie de peixe em um lago. Algum tempo depois você capturou 56 indivíduos, dos quais 9 estavam marcados. Qual o tamanho estimado da população?

$$\begin{aligned} N_{est} &= m \frac{r}{k_0} \\ &= 200 \cdot \frac{56}{9} \\ &= 1244,44 \approx 1244 \end{aligned}$$

Sumário

- 1 Introdução
- 2 Variáveis aleatórias discretas
- 3 Modelos discretos
 - Principais modelos
 - Outros modelos
- 4 Exercícios recomendados

Exercícios recomendados

- Seção 3.1 - 3, 5 e 6.
- Seção 3.2 - 2, 3, 5 e 6.
- Seção 3.3 - 1, 2, 3, 4, 5 e 6.
- Extras: Seção 3.4 - 1, 9, 10, 14, 16, 19, 21, e 26.