Variáveis aleatórias contínuas

Wagner H. Bonat
Elias T. Krainski
Fernando P. Mayer

Universidade Federal do Paraná
Departamento de Estatística
Laboratório de Estatística e Geoinformação

19/04/2018

Sumário

1 Variáveis aleatórias contínuas
- Introdução
- Variáveis aleatórias contínuas

2 Principais modelos contínuos
- Modelo Uniforme contínuo
- Modelo Exponencial
- Modelo Normal

3 Exercícios

Variáveis aleatórias

Em probabilidade, uma função X que associa a cada evento do espaço amostral um número real $X(\omega) \in \mathbb{R}$, é denominada uma **variável aleatória** (VA).

Uma variável aleatória pode ser classificada como **discreta** ou **contínua**, dependendo do domínio dos valores de X.

Exemplo: o número de alunos em uma sala é uma variável aleatória (discreta), denotada por X (maiúsculo). Uma observação dessa variável é denotada pela respectiva letra minúscula, *e.g.*, $x = 50$ alunos.

Em geral, denotamos a probabilidade de uma V.A. X assumir determinado valor x como

$$P[X] \quad \text{ou} \quad P[X = x]$$

Distribuições de probabilidade

Existem diversos *modelos probabilísticos* que procuram descrever vários tipos de variáveis aleatórias: são as **distribuições de probabilidade de variáveis aleatórias** (discretas ou contínuas).

A distribuição de probabilidades de uma VA X é, portanto, uma descrição das probabilidades associadas com os possíveis valores de X. Os valores que X assume determinam o **suporte** (S) da VA.

- **Variáveis discretas** $\rightarrow$ suporte em um conjunto de valores enumeráveis (finitos ou infinitos)
- **Variáveis contínuas** $\rightarrow$ suporte em um conjunto não enumerável de valores

Distribuições de probabilidade

Denomina-se de **distribuição de probabilidade** de alguma variável aleatória, a **regra** geral que define a

- **função de probabilidade** (fp) (V.A.s discretas), ou a
- **função densidade de probabilidade** (fdp) (V.A.s contínuas)

para a variável de interesse.

Existem muitas distribuições de probabilidade, mas algumas merecem destaque por sua importância prática.

Estas distribuições também são chamadas de **modelos probabilísticos**.

Variáveis aleatórias contínuas

Uma V.A. é classificada como contínua se assume valores em qualquer intervalo dos números reais, ou seja, um conjunto de valores não enumerável. Dessa forma, não é possível atribuir probabilidades para um ponto específico, apenas para intervalos da reta.

Exemplos:

- Peso de animais
- Tempo de falha de um equipamento eletrônico
- Altura da maré em uma hora específica
- Salinidade da água do mar
- Retorno financeiro de um investimento

Exemplo 6.1

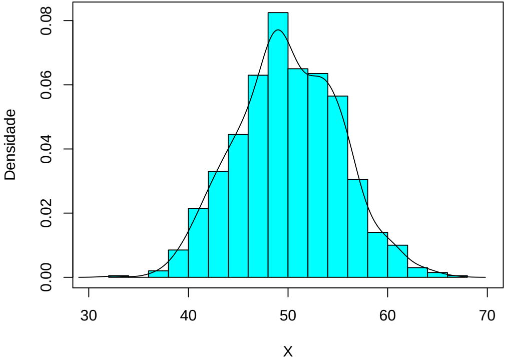
Estudos anteriores revelam a existência de uma grande lençol de água no subsolo de uma região. No entanto, sua profundidade ainda não foi determinada, sabendo-se apenas que o lençol pode estar situado em qualquer ponto entre 20 e 100 metros.

- Determine uma função para representar a variável X (profundidade do lençol de água).
- Calcule a probabilidade de encontar água em uma profundidade pelo menos igual a 25, mas inferior a 29 metros.

Função densidade de probabilidade

Não podemos atribuir probabilidades à valores específicos, pois há uma quantidade **não enumerável** (infinita) de valores em um ponto.

Atribuimos probabilidades à intervalos de valores, por meio de uma **função**. Portanto, as probabilidades são representadas por áreas.



Função densidade de probabilidade

A **função densidade de probabilidade** (fdp) atribui probabilidades à intervalos de valores do tipo $[a, b]$, e é definida por

$$P[a < x < b] = \int_a^b f(x)dx$$

com as seguintes propriedades:

i. É uma função não negativa

$$f(x) \geq 0$$

ii. A área total sob a curva deve ser igual a 1

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

Função densidade de probabilidade

Observações:

- $P[X = x] = 0$, portanto:

$$P[a \leq X \leq b] = P[a < X \leq b] = P[a \leq X < b] = P[a < X < b]$$

- Qualquer função $f(\cdot)$ que seja não negativa e cuja área total sob a curva seja igual à unidade caracterizará uma VA contínua.
- $f(x)$ **não** representa a probabilidade de ocorrência de algum evento. A área sob a curva entre dois pontos é que fornecerá a probabilidade.

Exemplo

Seja a função:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x^2, & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- Verifique se essa função é uma fdp.
- Calcule:
  - $P[X > 0]$
  - $P[X > 0,5]$
  - $P[-0,5 \leq X \leq 0,5]$
  - $P[X < -2]$
  - $P[X < 0,5]$
  - $P[X < 0 \cup X > 0,5]$

(Ver também exemplos 6.2 e 6.3).

Medidas de posição para VAs contínuas

- O valor esperado (ou média) da VA contínua X com função densidade $f(x)$, é dado pela expressão:

$$E(X) = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x) dx.$$

- A mediana é o valor Md que tem a propriedade de

$$P(X \geq Md) \geq 0.5 \quad \text{e} \quad P(X \leq Md) \geq 0.5.$$

- A moda é o valor Mo tal que,

$$f(Mo) = \max_{x} f(x).$$

Variância para VAs contínuas

- Para uma VA X com densidade $f(x)$, a variância é dada por

$$Var(X) = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx.$$

- Expressão alternativa

$$Var(X) = \sigma^2 = E(X^2) - E(X)^2.$$

onde

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx.$$

Exemplo

Seja a função:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x^2, & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Calcule $E(X)$, $Var(X)$, $DP(X)$.

Sumário

1. Variáveis aleatórias contínuas
   - Introdução
   - Variáveis aleatórias contínuas
2. Principais modelos contínuos
   - Modelo Uniforme contínuo
   - Modelo Exponencial
   - Modelo Normal
3. Exercícios

Modelo Uniforme contínuo

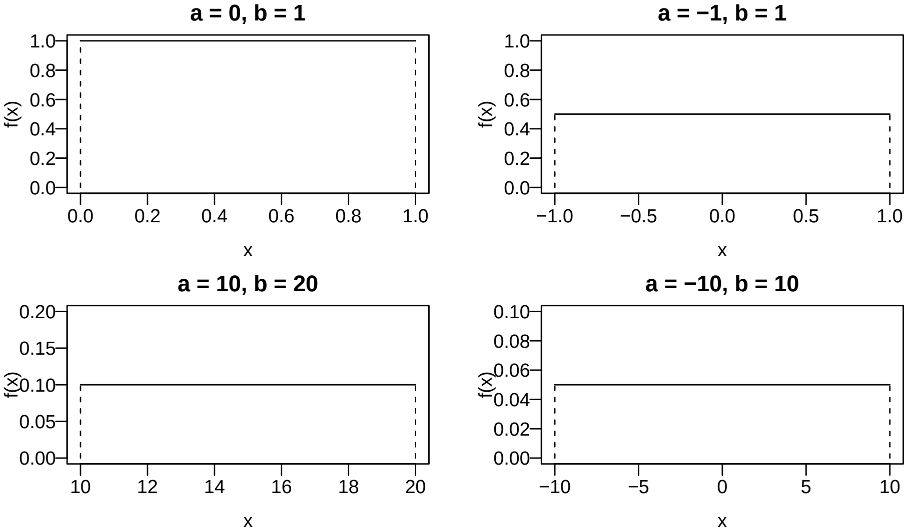
Definição: uma VA X tem distribuição Uniforme contínua no intervalo $[a, b]$, $a < b$, se sua função densidade de probabilidade é dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{se } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Notação: $X \sim U[a, b]$

Esperança e variância: $E(X) = \frac{a+b}{2}$ e $Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

Modelo Uniforme contínuo



Exemplo 6.5

Com o objetivo de verificar a resistência à pressão de água, os técnicos de qualidade de uma empresa inspecionam os tubos de PVC produzidos.

Os tudos inspecionados têm 6 metros de comprimento e são submetidos a grandes pressões até o aparecimento do primeiro vazamento, cuja distância a uma das extremidades (fixada à priori) é anotada para fins de análise.

Escolhe-se um tubo ao acaso para ser inspecionado. Queremos calcular a probabilidade de que o vazamento esteja, a no máximo 1 metro das extremidades.

Modelo Exponencial

Definição: uma VA contínua X assumindo valores não negativos, segue o modelo exponencial com parâmetro $\alpha > 0$ se sua densidade é dada por

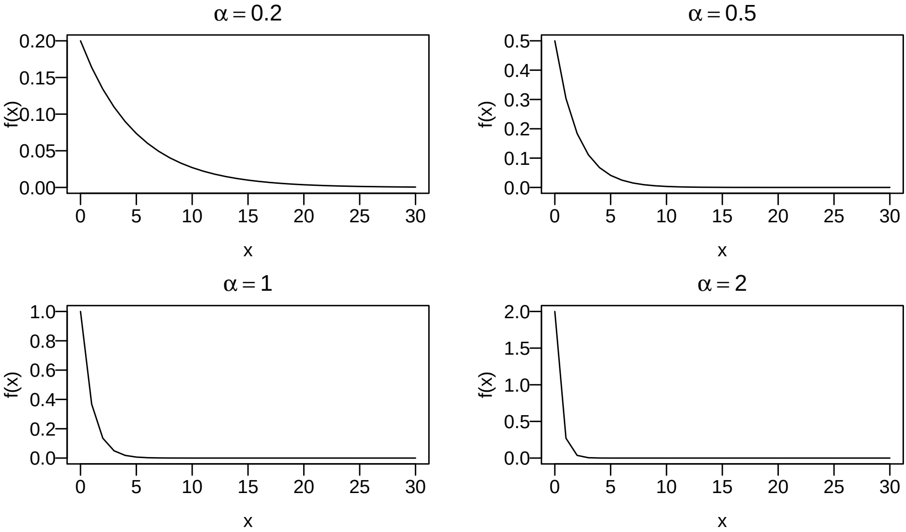
$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Notação: $X \sim \text{Exp}(\alpha)$

Esperança e variância: $E(X) = \mu = \frac{1}{\alpha}$ e $Var(X) = \frac{1}{\alpha^2}$.

Obs.: $P(a < X < b) = \int_a^b \alpha e^{-\alpha x} \, dx = e^{-\alpha a} - e^{-\alpha b}$.

Modelo Exponencial



Exemplo 6.6

- Uma indústria fabrica lâmpadas especiais que ficam em operação continuamente. A empresa oferece a seus clientes a garantia de reposição, caso a lâmpada dure menos de 50 horas. A vida útil dessas lâmpadas é modelada através da distribuição Exponencial com parâmetro $1/8000$. Determine a proporção de troca por defeito de fabricação.

Exemplo 6.7

- O intervalo de tempo, em minutos, entre emissões consecutivas de uma fonte radioativa é uma variável aleatória com distribuição Exponencial de parâmetro $\alpha = 0,2$. Calcule a probabilidade de haver uma emissão em um intervalo inferior a 2 minutos.

Modelo Normal

Definição: Dizemos que uma VA X segue o modelo normal se sua fdp é a seguinte

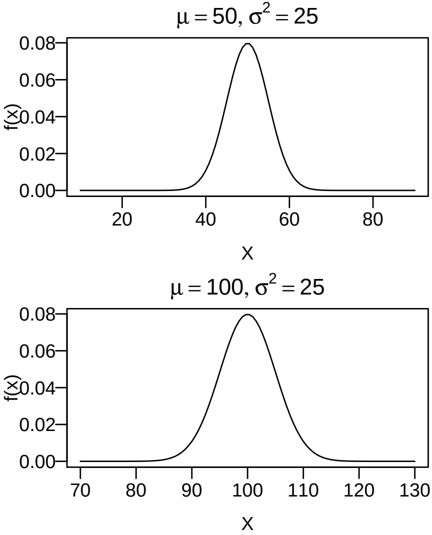
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right], \quad -\infty < x < \infty$$

onde $\mu \in \mathbb{R}$ é a média da população, $\sigma \in \mathbb{R}^+$ é o desvio-padrão populacional.

Notação: $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$

Esperança e variância: $E(X) = \mu$ e $Var(X) = \sigma^2$

Modelo Normal



Modelo Normal

Característcas da curva normal:

- É **simétrica** em relação à μ
- O ponto máximo (moda) de $f(x)$ é o ponto $x = \mu$
- Os pontos de inflexão da função são $\mu - \sigma$ e $\mu + \sigma$
- A área total sob a curva é 1 ou 100%
- A curva é **assintótica** em relação ao eixo x

Modelo Normal

Para qualquer VA normal X, valem as seguintes relações:

$$
\begin{aligned}
&P[X > \mu] = P[X < \mu] \\
&P[\mu - \sigma < X < \mu + \sigma] \approxeq 0,6827 \\
&P[\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma] \approxeq 0,9545 \\
&P[\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma] \approxeq 0,9973
\end{aligned}
$$

Portanto, 6σ é frequentemente referida como a **largura** de uma distribuição normal.

Métodos mais avançados de integração podem ser utilizados para mostrar que a área sob a função densidade de probabilidade normal de $-\infty < x < \infty$ é igual a 1.

Modelo Normal

Para obter uma probabilidade do modelo normal, devemos calcular a área entre os pontos a e b, ou seja,

$$P[a < X < b] = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] dx$$

No entanto, essa função não possui forma fechada, e o cálculo de probabilidades pode ser feito apenas por aproximações numéricas.

Para contornar esse problema, os valores de probabilidade são obtidos para uma distribuição normal padrão (Z) com $\mu = 0$ e $\sigma^2 = 1$,

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \text{N}(0, 1)$$

A vantagem é que podemos fazer uma única tabela com as integrais aproximadas de Z, ao invés de uma tabela para cada par (μ, σ^2).

Modelo Normal

Se $Z \sim \mathrm{N}(0, 1)$, então sua fdp é

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}(z)^2\right]$$

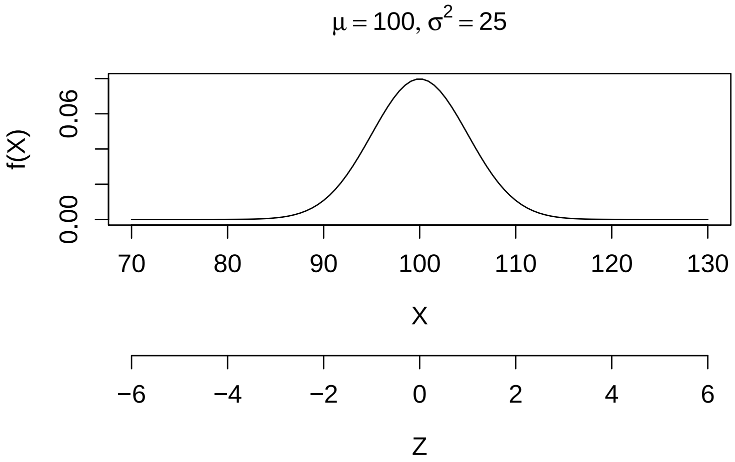
Para se obter a probabilidade de Z estar entre a e b,

$$P[a < Z < b] = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}(z)^2\right] dz$$

As integrais (áreas) para valores de Z entre 0,00 e 3,99 estão na tabela. Portanto, para qualquer valor de X entre a e b, podemos calcular a probabilidade correspondente através da transformação,

$$P[a < X < b] = P\left[\frac{a-\mu}{\sigma} < Z < \frac{b-\mu}{\sigma}\right]$$

Modelo Normal



Modelo Normal

Exemplo de uso da tabela

- Calcule as probabilidades (áreas):
    - $P(0 < Z < 2)$
    - $P(Z > 2)$
    - $P(Z < -2)$
    - $P(2,0 < Z < 2,5)$
    - $P(-2,61 < Z < 2,43)$
    - $P(Z > -1,63)$
    - Qual é o valor de c tal que $P(0 < Z < c) = 0,4$?
    - Qual é o valor de d tal que $P(Z > d) = 0,8$?

Exemplo 6.9

Doentes sofrendo de certa moléstia são submetidos a um tratamento intensivo cujo tempo de cura foi modelado por uma densidade Normal de média 15 e desvio padrão 2 (em dias).

- Calcule a proporção de pacientes que demorarão mais de 17 dias para se recuperar.
- Calcule a probabilidade um paciente selecionado ao acaso demorar menos de 20 dias para se recuperar.
- Qual o tempo máximo necessário para a recuperação de 25% dos pacientes?
- Se 100 pacientes forem escolhidos ao acaso, qual seria o número esperado de doentes curados em menos de 11 dias?

Normal como aproximação da binomial

- A distribuição Normal é uma das mais importantes na Estatística:
  - Muitos fenômenos aleatórios se comportam próximos à essa distribuição
  - Pode ser usada como aproximação para outras distribuições

Se $X \sim \text{Bin}(n, p)$ então $E(X) = np$ e $Var(X) = np(1-p)$.

Para $n \to \infty$, podemos aproximar a binomial pela normal, usando

$$Y \sim \text{N}(\mu = np, \sigma^2 = np(1-p))$$

Exemplo 6.11

Estudo do Sindicato dos Bancários indica que cerca de 30% dos funcionários de banco têm problemas de estresse, provenientes das condições de trabalho. Numa amostra de 200 bancários, qual seria a probabilidade de pelo menos 50 com essa doença?

Exemplo 6.11

Estudo do Sindicato dos Bancários indica que cerca de 30% dos funcionários de banco têm problemas de estresse, provenientes das condições de trabalho. Numa amostra de 200 bancários, qual seria a probabilidade de pelo menos 50 com essa doença?

Temos então $X \sim \text{Bin}(200, 0.3)$, e a probabilidade seria

$$P(X \geq 50) = \sum_{k=50}^{200} \binom{200}{k} 0.3^k 0.7^{200-k}$$

que é difícil de calcular sem computador.

Exemplo 6.11

Mas $E(X) = np = 60$ e $Var(X) = np(1-p) = 42$. Assim, temos $Y \sim \text{N}(60, 42)$, de modo que

$$
\begin{aligned}
P(X \geq 50) \approx P(Y \geq 50) &= P\left(\frac{Y-60}{\sqrt{42}} \geq \frac{50-60}{\sqrt{42}}\right) \\
&= P(Z \geq -1.54) = 0.9382
\end{aligned}
$$

Usando o R:

```r
## Cálculo exato pela binomial
pbinom(49, size = 200, prob = 0.3, lower.tail = FALSE)
```

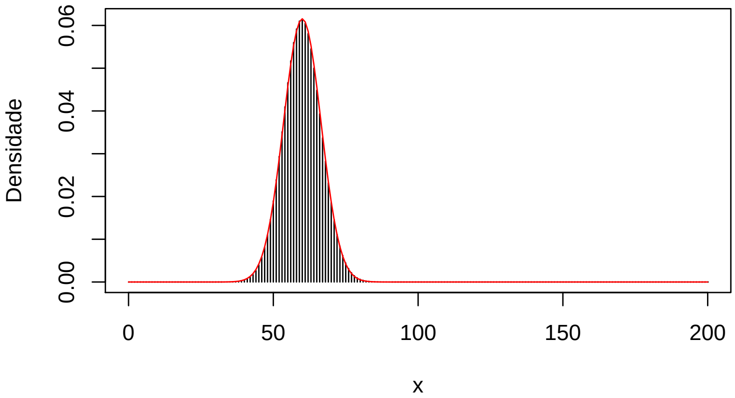
```
# [1] 0.9494082
```

```r
## Aproximação pela Normal
pnorm(50, mean = 60, sd = sqrt(42), lower.tail = FALSE)
```

```
# [1] 0.9385887
```

Exemplo 6.11

Aproximação de $X \sim \text{Bin}(200, 0.3)$ com $Y \sim \text{N}(60, 42)$.



Combinação linear de Normais independentes

Se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ fomam uma sequência de variáveis aleatórias independentes, onde $X_i \sim \mathrm{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$, e $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são constantes quaisquer, então:

$$W = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i \quad \text{terá distribuição Normal com} \quad W \sim \mathrm{N}(\mu_W, \sigma_W^2)$$

onde:

$$\mu_W = E(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i) = \sum_{i=1}^{n} E(a_i X_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i$$

$$\sigma_W^2 = Var(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i) = \sum_{i=1}^{n} Var(a_i X_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 Var(X_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2$$

Exemplo 6.13

Uma corretora negocia títulos na Bolsa de Valores e utiliza um modelo probabilístico para avaliar seus lucros. Suas aplicações financeiras de compra e venda atingem três áreas: agricultura, indústria e comércio. Admita que o seguinte modelo representa o comportamento do lucro diário da corretora (em milhares):

$$L = 2L_A + 5L_I + 3L_C$$

onde L_A, L_I e L_C representam, os lucros diários nos setores de agricultura, indústria e comércio.

As distribuições de probabilidades dessas variáveis aleatórias são $L_A \sim N(3, 4)$, $L_I \sim N(6, 9)$ e $L_C \sim N(4, 16)$. Supondo independência entre os três setores, qual será a probabilidade de um lucro diário acima de 50 mil.

Exemplo 6.12

Um serviço de fiscalização é criado para averiguar se garrafas de um certo refrigerante contém, de fato, o volume especificado pelo fabricante. Para tanto, 10 garrafas do produto são compradas no varejo, em várias regiões da cidade. Cada uma dessas garrafas é esvaziada e o volume de seu conteúdo, que denotaremos por V é aferido.

Uma vez obtidos os 10 valores, a média aritmética M é calculada e, se $M < 290$ mililitros (ml), a companhia é multada. Estudos na linha de produção do fabricante mostraram que variações sempre ocorrem, mesmo se as especificações forem seguidas.

Por essa razão, considera-se o volume do conteúdo das garrafas como seguindo o modelo Normal, com média $\mu = 300$ ml e desvio-padrão $\sigma = 25$ ml. Gostaríamos de calcular qual é a probabilidade de que o fabricante seja multado injustamente.

Sumário

1. Variáveis aleatórias contínuas
   - Introdução
   - Variáveis aleatórias contínuas
2. Principais modelos contínuos
   - Modelo Uniforme contínuo
   - Modelo Exponencial
   - Modelo Normal
3. Exercícios

Exercícios recomendados

- Seção 6.1 - $1, 2, 3, 4$ e 5.
- Seção 6.2 - 1 a 9.