Testes de hipóteses

Wagner H. Bonat
Fernando P. Mayer
Elias T. Krainski

Universidade Federal do Paraná
Departamento de Estatística
Laboratório de Estatística e Geoinformação

01/06/2018

Sumário

1. Introdução
2. Teste para a Média Populacional
   - Variância conhecida
3. Teste para a média com variância desconhecida
   - Teste para a média com variância desconhecida
4. Nível descritivo
   - Nível descritivo
5. Teste Qui-Quadrado
   - Teste Qui-Quadrado
6. Exercícios recomendados

Inferência estatística

Na **inferência estatística** os dois principais objetivos são:

- **Estimar** um parâmetro populacional
- **Testar** uma hipótese ou afirmativa sobre um parâmetro populacional

Testes de hipótese

Hipótese

É uma afirmativa sobre uma propriedade da população

Teste de hipótese

- É um procedimento para se testar uma afirmativa sobre uma propriedade da população
- Permite tomar **decisões** sobre a população com base em informações de dados amostrais.

Tipos de hipóteses

Hipótese nula H_0

É uma afirmativa de que o valor de um parâmetro populacional é **igual** a algum valor especificado. (O termo *nula* é usado para indicar nenhuma mudança, nenhum efeito). Ex.:

- $\mu = 170$ cm
- $p = 0,5$

Hipótese alternativa H_a

É uma afirmativa de que o parâmetro tem um valor, que, de alguma forma, difere da hipótese nula. Ex.:

- $\mu \neq 170$ $\quad \mu < 170$ $\quad \mu > 170$

Tipos de hipóteses

Quando fazemos um teste de hipótese, chegamos a um dos dois possíveis resultados:

- **Rejeitar** H_0: em favor da hipótese alternativa H_a
- **Não rejeitar** H_0: e conclui-se que não existem diferenças

Atenção!

- O termo **aceitar** a hipótese nula é filosoficamente incorreto, pois não se pode aceitar uma hipótese baseada apenas em evidências amostrais (mesmo em um teste de hipótese formal).
- E ainda existe um **erro** associado a todo teste de hipótese

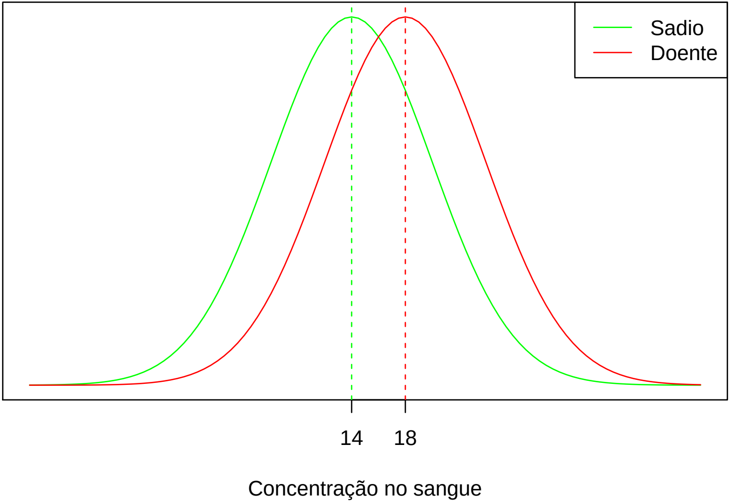
Exemplo 8.1

Suponha que, entre pessoas sadias, a concentração de certa substância no sangue se comporta segundo um modelo Normal com média 14 unidades/ml e desvio padrão 6 unidades/ml.

Pessoas sofrendo de uma doença específica tem concentração méda da substância alterada para 18 unidades/ml.

Admitimos que o modelo Normal com desvio padrão 6 unidades/ml, continua representado de forma adequada a concentração da substância em pessoas com a doença.

Exemplo 8.1



Exemplo 8.1

Para averiguar se um tratamento é eficaz contra a doença, selecionamos uma amostra de 30 indivíduos submetidos ao tratemento.

Assumimos que todos os elementos da amostra $X_1, \ldots, X_{30}$ possuem a mesma distribuição: $X_i \sim \mathrm{N}(\mu, 36)$, onde:

- $\mu = 14$ se o tratamento for eficiente
- $\mu = 18$ se o tratamento não for eficiente

Se a média da amostra for próxima de 14, temos **evidências** de que o tratamento é eficaz. Se for mais próxima de 18, as **evidências** são contrárias ao tratamento.

Então a pergunta é: o quão próximo é "**próximo**"?

Sumário

1. Introdução
2. Teste para a Média Populacional
   - Variância conhecida
3. Teste para a média com variância desconhecida
   - Teste para a média com variância desconhecida
4. Nível descritivo
   - Nível descritivo
5. Teste Qui-Quadrado
   - Teste Qui-Quadrado
6. Exercícios recomendados

Exemplo 8.1 continuação

- Interesse geral $\mu = 14$?
- Distribuição da média amostral para $n = 30$: $\text{N}(\mu, 36/30)$.
- Critério para decidir sobre o valor de μ.
- **Valor crítico**, digamos x_c tal que se a média amostral ($\bar{x}_{obs}$) for maior que x_c concluímos que a amostra pertence a população com média 18.
- Como $\bar{X}$ é uma variável aleatória, devem existir erros associados.

Hipóteses

Hipótese simples:

- H_0 : O tratamento não é eficaz ($\mu = 18$)
- H_a : O tratamento é eficaz ($\mu = 14$)

Hipóteses compostas:

- Hipótese unilateral à esquerda
  - H_0 : O tratamento não é eficaz ($\mu = 18$);
  - H_1 : O tratamento é eficaz ($\mu < 18$).
- Hipótese bilateral:
  - H_0 : O tratamento não é eficaz ($\mu = 18$);
  - H_1 : O tratamento é eficaz ($\mu \neq 18$).

Erros ao realizar um teste de hipótese

- **Erro Tipo I**: rejeitar H_0, quando H_0 é verdadeira.
- **Erro Tipo II**: não rejeitar H_0 quando H_0 é falsa.

	H_o **verdadeira**	H_o **falsa**
Não rejeitar H_0	Decisão correta	Erro tipo II
Rejeitar H_0	Erro tipo I	Decisão correta

Erros ao realizar um teste de hipótese

Definimos por α e β as probabilidades de cometer os erros do tipo I e II:

- $\alpha = P(\text{erro tipo I}) = P(\text{rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ verdadeira})$
- $\beta = P(\text{error tipo II}) = P(\text{não rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ falsa})$

No exemplo 8.1, se $H_0 : \mu = 18$ e $H_a : \mu < 18$, então:

- $\alpha = P(\text{concluir que o tratamento é eficaz quando na verdade não é})$
- $\beta = P(\text{concluir que o tratamento não é eficaz quando na verdade é})$

Erros ao realizar um teste de hipótese

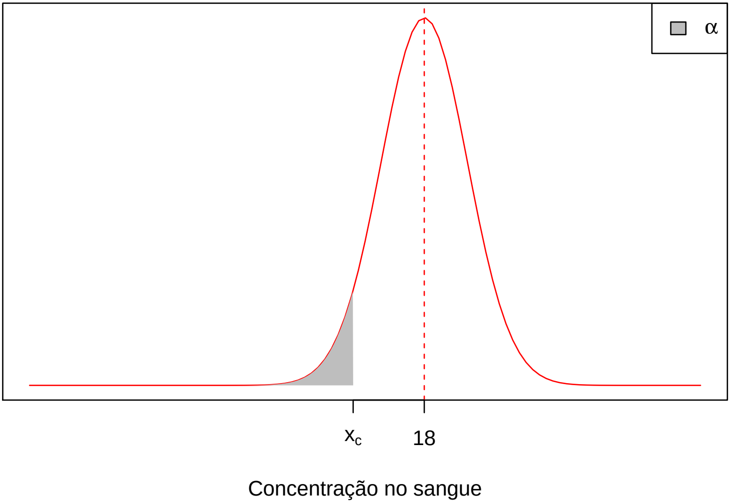
A situação ideal é aquela em que ambas as probabilidades, α e β, são próximas de zero.

No entanto, à medida que diminuimos α, a probabilidade β tende a aumentar.

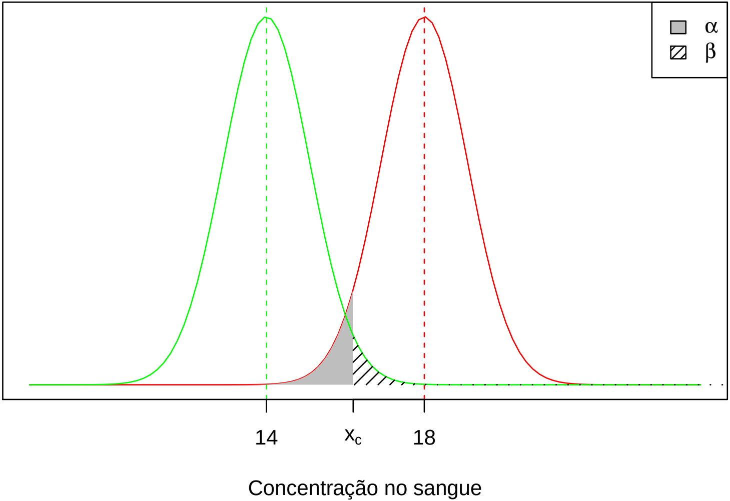
Levando isso em conta, ao formular as hipóteses, devemos cuidar parq eu o erro mais importante a ser evitado seja o erro do tipo I.

Por isso, a probabilidade α recebe o nome de **nível de significância** do teste, e é esse erro que devemos controlar.

Erros ao realizar um teste de hipótese



Erros ao realizar um teste de hipótese



Valor crítico

Supondo α conhecido podemos determinar o valor crítico x_c.

$$
\begin{aligned}
\alpha &= P(\text{erro tipo I}) = P(\text{rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ verdadeira}) \\
&= P(\bar{X} < x_c \mid \mu = 18) = P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{x_c - 18}{6/\sqrt{30}}\right) \\
&= P(Z < z_c)
\end{aligned}
$$

com $Z \sim N(0, 1)$.

Obtendo o valor crítico

Dado α encontramos z_c na tabela normal padrão.

Obtemos x_c

$$z_c = \frac{x_c - 18}{6/\sqrt{30}} \quad \Rightarrow \quad x_c = 18 + z_c \frac{6}{\sqrt{30}}$$

Supondo $\alpha = 0.05$ temos

$$0.05 = P(Z < z_c) \quad \Rightarrow \quad z_c = -1.64$$

logo

$$x_c = 18 - 1.64 \frac{6}{\sqrt{30}} = 16.2$$

Região Crítica

Dada uma amostra, se $\bar{x}_{obs} < 16.2$, **rejeitamos** H_0, concluindo que o tratamento é eficaz.

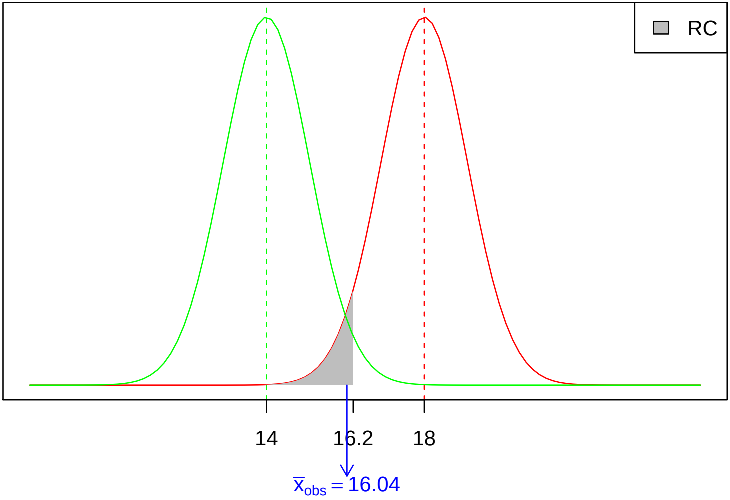
O conjunto dos números reais menores que 16.2 é denominado de **Região de Rejeição** ou **Região Crítica** (RC), isto é:

$$RC = \{x \in \mathbb{R} : x < 16.2\}.$$

No exemplo 8.1, se a média amostral dos 30 indivíduos foi $\bar{x}_{obs} = 16.04$, então rejeitamos H_0, ao nível de significância $\alpha = 0.05$.

Nesse caso, $\bar{x}_{obs} < x_c$ está dentro da RC.

Região Crítica



Teste de hipótese bilateral

- Defina as hipóteses $H_0 : \mu = \mu_0$ e $H_1 : \mu \neq \mu_0$.
- Defina a região crítica

$$RC = \{x \in \Re | x < x_{c1} \quad \text{ou} \quad x > x_{c2}\}$$

tal que

$$P(\bar{X} < x_{c1}) = \alpha/2 \quad \text{e} \quad P(\bar{X} > x_{c2}) = \alpha/2.$$

Etapas de um teste de hipóteses

- Estabelecer as hipóteses nula e alternativa.
- Definir a forma da região crítica, com base na hipótese alternativa.
- Identificar a distribuição do estimador e obter sua estimativa.
- Fixar α e obter a região crítica.
- Concluir o teste com base na estimativa e na região crítica.

Exemplo 8.3

- Um pesquisador deseja estudar o efeito de certa substância no tempo de reação de seres vivos a um certo tipo de estímulo. Um experimento é desenvolvido com cobaias que são inoculadas com a substância e submetidas a um estímulo elétrico, com seus tempos de reação (em segundos) anotados. Os seguintes valores foram obtidos: $9.1; 9.3; 7.2; 7.5; 13.3; 10.9; 7.2; 9.9; 8.0; 8.6$. Admite-se que o tempo de reação segue, em geral, o modelo Normal com média 8 e desvio padrão $\sigma = 2$ segundos. O pesquisador desconfia que o tempo médio sofre alteração por influência da substância. Efetue um teste de hipótese para verificar se o pesquisador tem razão. E calcule a probabilidade do erro tipo II supondo que $\mu = 9$.

Exemplo 8.4

- Um relatório de uma companhia afirma que 40% de toda a água obtida, através de poços artesianos no nordeste é salobra. Há muitas controvérsias sobre essa afirmação, alguns dizem que a proporção é maior, outros que é menor. Para dirimir as dúvidas, 400 poços foram sorteados e observou-se, em 120 deles água salobra. Qual seria a conclusão, ao nível de 3%?

Sumário

1 Introdução

2 Teste para a Média Populacional
- Variância conhecida

3 Teste para a média com variância desconhecida
- Teste para a média com variância desconhecida

4 Nível descritivo
- Nível descritivo

5 Teste Qui-Quadrado
- Teste Qui-Quadrado

6 Exercícios recomendados

Teste para a média com variância desconhecida

- Variância amostral $S^2 = (\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}^2)/(n-1)$.
- Defina a estatística $T = \frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{S^2/n}}$.
- T tem distribuição t-Student com $(n-1)$ graus de liberdade.

Exemplo 8.5

- Deseja-se investigar se uma certa moléstica que ataca o rim altera o consumo de oxigênio desse orgão. Para indivíduos sadios, admite-se que esse consumo tem distribuição Normal com média 12 cm^3/min. Os valores medidos em cinco pacientes com a moléstia foram: $14.4; 12.9; 15.1; 13.7; 13.5$. Qual seria a conclusão, ao nível de 1% de significância?

Intervalo de confiança para μ com variância desconhecida

- $IC(\mu, \gamma) = [\bar{X} - t_{\gamma/2}\frac{S}{\sqrt{n}};$
- Exemplo 8.6: Para os dados do exemplo anterior obtenha um intervalo com 90% de confiança para a média populacional.
- A TABELA T JÁ DA O VALOR BILATERAL!!!
- $[13.90 - 2.132\sqrt{0.67/5};\ 13.90 + 2.132\sqrt{0.67/5}]$
- $[13.09; 14.71]$

Sumário

1. Introdução
2. Teste para a Média Populacional
   - Variância conhecida
3. Teste para a média com variância desconhecida
   - Teste para a média com variância desconhecida
4. Nível descritivo
   - Nível descritivo
5. Teste Qui-Quadrado
   - Teste Qui-Quadrado
6. Exercícios recomendados

Nível descritivo

- Em geral o α é pré-fixado.
- Podemos calcular supondo que a hipóese nula é verdadeira a probabilidade de se obter estimativas mais extremas do que a que está fornecida pela amostra.
- Exemplo 8.7 - Uma associação de defesa do consumidor desconfia que embalagens de 450 gramas de um certo tipo de biscoito estão abaixo do peso. Para verificar tal afirmação, foram coletados ao acaso 80 pacotes em vários supermercados, obtendo-se uma média de peso de 447 gramas. Admitindo-se que o peso dos pacotes segue o modelo Normal com desvio padrão 10 grams, que conclusão pode ser tirada através do nível descritivo?

Sumário

1. Introdução
2. Teste para a Média Populacional
   - Variância conhecida
3. Teste para a média com variância desconhecida
   - Teste para a média com variância desconhecida
4. Nível descritivo
   - Nível descritivo
5. Teste Qui-Quadrado
   - Teste Qui-Quadrado
6. Exercícios recomendados

Teste Qui-Quadrado

- Exemplo 8.9 - No exemplo 8.2, definimos X como sendo o número de impactos anteriores à falha em um equipamento eletrônico. Uma amostra de 80 ensaios foi obtida, cada ensaio representando os testes feitos até a interrupção por falha no equipamento, resultado 80 observações da variável de interesse. Pretende-se verificar se o modelo Geométrico com $p = 0.4$ é adequado.
- Exemplo 8.10 Tarefa de casa.

Teste Qui-Quadrado

- Exemplo 8.10 - A tabela abaixo contém os resultados obtidos por estudantes do ensino médio, em um exame com questões nas disciplinas de física e matemática. Deseja-se testar se existe dependência entre as notas dessas duas disciplinas que, para efeito de apresentação na tablea e analise de comportamento foram classificadas nas categorias alta, média e baixa.
- As notas de física e matemática são independentes?

Sumário

1. Introdução
2. Teste para a Média Populacional
   - Variância conhecida
3. Teste para a média com variância desconhecida
   - Teste para a média com variância desconhecida
4. Nível descritivo
   - Nível descritivo
5. Teste Qui-Quadrado
   - Teste Qui-Quadrado
6. Exercícios recomendados

Exercícios recomendados

- Seção 8.2 - 1 a 6.
- Seção 8.3 - 1 a 6.
- Seção 8.4 - 1 a 4.
- Seção 8.5 - 1 a 7.