

# Variáveis aleatórias contínuas

Wagner H. Bonat  
Elias T. Krainski  
Fernando P. Mayer

Universidade Federal do Paraná  
Departamento de Estatística  
Laboratório de Estatística e Geoinformação

19/04/2018



# Sumário

- 1 Variáveis aleatórias contínuas
  - Introdução
  - Variáveis aleatórias contínuas
- 2 Principais modelos contínuos
  - Modelo Uniforme contínuo
  - Modelo Exponencial
  - Modelo Normal
- 3 Exercícios

# Variáveis aleatórias

Em probabilidade, uma função  $X$  que associa a cada evento do espaço amostral um número real  $X(\omega) \in \mathbb{R}$ , é denominada uma **variável aleatória** (VA).

Uma variável aleatória pode ser classificada como **discreta** ou **contínua**, dependendo do domínio dos valores de  $X$ .

Exemplo: o número de alunos em uma sala é uma variável aleatória (discreta), denotada por  $X$  (maiúsculo). Uma observação dessa variável é denotada pela respectiva letra minúscula, e.g.,  $x = 50$  alunos.

Em geral, denotamos a probabilidade de uma V.A.  $X$  assumir determinado valor  $x$  como

$$P[X] \quad \text{ou} \quad P[X = x]$$

# Distribuições de probabilidade

Existem diversos *modelos probabilísticos* que procuram descrever vários tipos de variáveis aleatórias: são as **distribuições de probabilidade de variáveis aleatórias** (discretas ou contínuas).

A distribuição de probabilidades de uma VA  $X$  é, portanto, uma descrição das probabilidades associadas com os possíveis valores de  $X$ . Os valores que  $X$  assume determinam o **suporte** ( $S$ ) da VA.

- **Variáveis discretas** → suporte em um conjunto de valores enumeráveis (finitos ou infinitos)
- **Variáveis contínuas** → suporte em um conjunto não enumerável de valores

# Distribuições de probabilidade

Denomina-se de **distribuição de probabilidade** de alguma variável aleatória, a **regra** geral que define a

- **função de probabilidade** (fp) (V.A.s discretas), ou a
- **função densidade de probabilidade** (fdp) (V.A.s contínuas)

para a variável de interesse.

Existem muitas distribuições de probabilidade, mas algumas merecem destaque por sua importância prática.

Estas distribuições também são chamadas de **modelos probabilísticos**.

# Variáveis aleatórias contínuas

Uma V.A. é classificada como contínua se assume valores em qualquer intervalo dos números reais, ou seja, um conjunto de valores não enumerável. Dessa forma, não é possível atribuir probabilidades para um ponto específico, apenas para intervalos da reta.

Exemplos:

- Peso de animais
- Tempo de falha de um equipamento eletrônico
- Altura da maré em uma hora específica
- Salinidade da água do mar
- Retorno financeiro de um investimento

## Exemplo 6.1

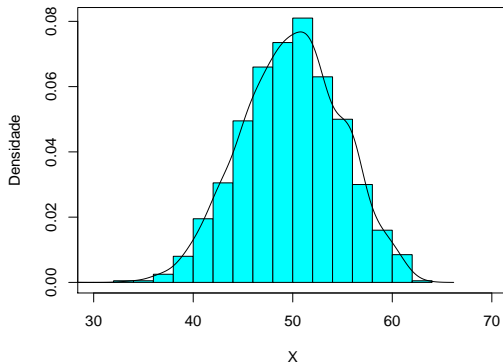
Estudos anteriores revelam a existência de uma grande lençol de água no subsolo de uma região. No entanto, sua profundidade ainda não foi determinada, sabendo-se apenas que o lençol pode estar situado em qualquer ponto entre 20 e 100 metros.

- Determine uma função para representar a variável  $X$  (profundidade do lençol de água).
- Calcule a probabilidade de encontrar água em uma profundidade pelo menos igual a 25, mas inferior a 29 metros.

# Função densidade de probabilidade

Não podemos atribuir probabilidades à valores específicos, pois há uma quantidade **não enumerável** (infinita) de valores em um ponto.

Atribuímos probabilidades à intervalos de valores, por meio de uma **função**. Portanto, as probabilidades são representadas por áreas.





# Função densidade de probabilidade

A **função densidade de probabilidade** (fdp) atribui probabilidades à intervalos de valores do tipo  $[a, b]$ , e é definida por

$$P[a < x < b] = \int_a^b f(x)dx$$

com as seguintes propriedades:

- i. É uma função não negativa

$$f(x) \geq 0$$

- ii. A área total sob a curva deve ser igual a 1

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

# Função densidade de probabilidade

## Observações:

- $P[X = x] = 0$ , portanto:

$$P[a \leq X \leq b] = P[a < X \leq b] = P[a \leq X < b] = P[a < X < b]$$

- Qualquer função  $f(\cdot)$  que seja não negativa e cuja área total sob a curva seja igual à unidade caracterizará uma VA contínua.
- $f(x)$  **não** representa a probabilidade de ocorrência de algum evento. A área sob a curva entre dois pontos é que fornecerá a probabilidade.

## Exemplo

Seja a função:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x^2, & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- Verifique se essa função é uma fdp.
- Calcule:
  - $P[X > 0]$
  - $P[X > 0,5]$
  - $P[-0,5 \leq X \leq 0,5]$
  - $P[X < -2]$
  - $P[X < 0,5]$
  - $P[X < 0 \cup X > 0,5]$

(Ver também exemplos 6.2 e 6.3).

## Medidas de posição para VAs contínuas

- O valor esperado (ou média) da VA contínua  $X$  com função densidade  $f(x)$ , é dado pela expressão:

$$E(X) = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx.$$

- A mediana é o valor  $Md$  que tem a propriedade de

$$P(X \geq Md) \geq 0.5 \quad \text{e} \quad P(X \leq Md) \geq 0.5.$$

- A moda é o valor  $Mo$  tal que,

$$f(Mo) = \max_x f(x).$$

## Variância para VAs contínuas

- Para uma VA  $X$  com densidade  $f(x)$ , a variância é dada por

$$\text{Var}(X) = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx.$$

- Expressão alternativa

$$\text{Var}(X) = \sigma^2 = E(X^2) - E(X)^2.$$

onde

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx.$$

# Exemplo

Seja a função:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x^2, & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Calcule  $E(X)$ ,  $Var(X)$ ,  $DP(X)$ .

# Sumário

- 1 Variáveis aleatórias contínuas
  - Introdução
  - Variáveis aleatórias contínuas
- 2 Principais modelos contínuos
  - Modelo Uniforme contínuo
  - Modelo Exponencial
  - Modelo Normal
- 3 Exercícios

# Modelo Uniforme contínuo

**Definição:** uma VA  $X$  tem distribuição Uniforme contínua no intervalo  $[a, b]$ ,  $a < b$ , se sua função densidade de probabilidade é dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{se } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

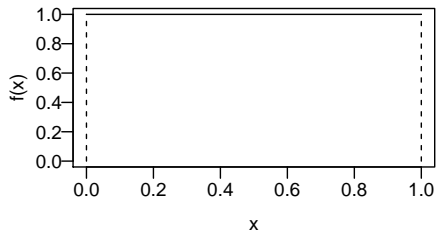
**Notação:**  $X \sim U[a, b]$

**Esperança e variância:**  $E(X) = \frac{a+b}{2}$  e  $Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$ .

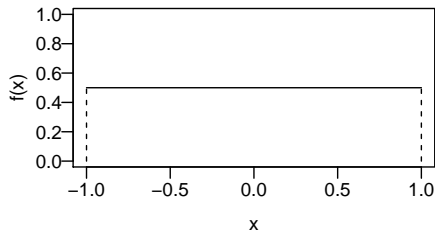


# Modelo Uniforme contínuo

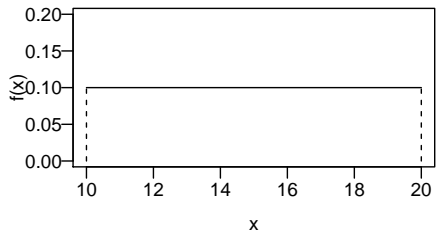
**$a = 0, b = 1$**



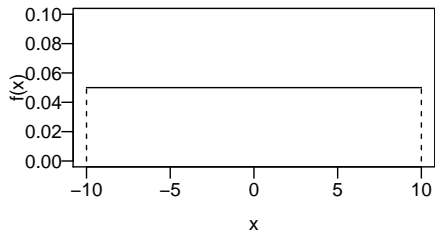
**$a = -1, b = 1$**



**$a = 10, b = 20$**



**$a = -10, b = 10$**



## Exemplo 6.5

Com o objetivo de verificar a resistência à pressão de água, os técnicos de qualidade de uma empresa inspecionam os tubos de PVC produzidos.

Os tubos inspecionados têm 6 metros de comprimento e são submetidos a grandes pressões até o aparecimento do primeiro vazamento, cuja distância a uma das extremidades (fixada à priori) é anotada para fins de análise.

Escolhe-se um tubo ao acaso para ser inspecionado. Queremos calcular a probabilidade de que o vazamento esteja, a no máximo 1 metro das extremidades.

# Modelo Exponencial

**Definição:** uma VA contínua  $X$  assumindo valores não negativos, segue o modelo exponencial com parâmetro  $\alpha > 0$  se sua densidade é dada por

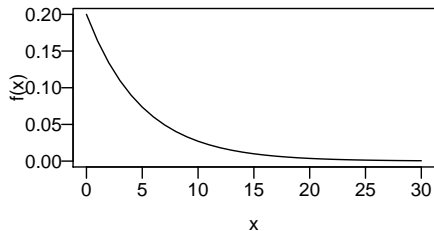
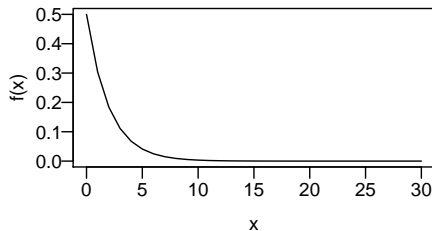
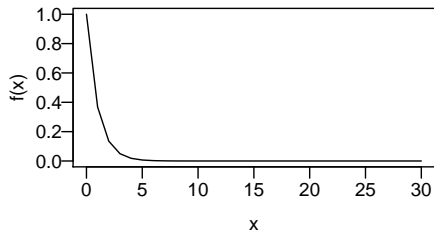
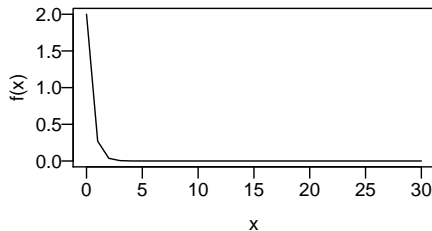
$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

**Notação:**  $X \sim \text{Exp}(\alpha)$

**Esperança e variância:**  $E(X) = \mu = \frac{1}{\alpha}$  e  $\text{Var}(X) = \frac{1}{\alpha^2}$ .

**Obs.:**  $P(a < X < b) = \int_a^b \alpha e^{-\alpha x} dx = e^{-\alpha a} - e^{-\alpha b}$ .

# Modelo Exponencial

 $\alpha = 0.2$  $\alpha = 0.5$  $\alpha = 1$  $\alpha = 2$ 

## Exemplo 6.6

- Uma indústria fabrica lâmpadas especiais que ficam em operação continuamente. A empresa oferece a seus clientes a garantia de reposição, caso a lâmpada dure menos de 50 horas. A vida útil dessas lâmpadas é modelada através da distribuição Exponencial com parâmetro  $1/8000$ . Determine a proporção de troca por defeito de fabricação.

## Exemplo 6.7

- O intervalo de tempo, em minutos, entre emissões consecutivas de uma fonte radioativa é uma variável aleatória com distribuição Exponencial de parâmetro  $\alpha = 0,2$ . Calcule a probabilidade de haver uma emissão em um intervalo inferior a 2 minutos.

# Modelo Normal

**Definição:** Dizemos que uma VA  $X$  segue o modelo normal se sua fdp é a seguinte

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right], \quad -\infty < x < \infty$$

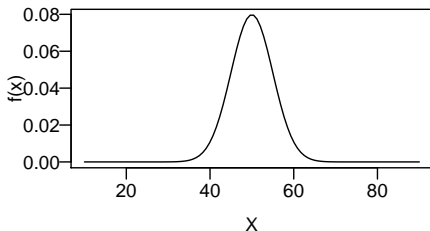
onde  $\mu \in \mathbb{R}$  é a média da população,  $\sigma \in \mathbb{R}^+$  é o desvio-padrão populacional.

**Notação:**  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

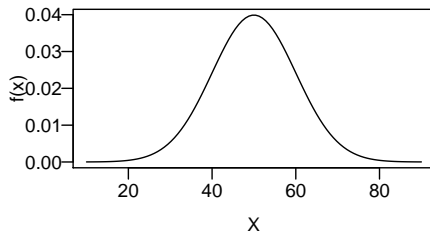
**Esperança e variância:**  $E(X) = \mu$  e  $Var(X) = \sigma^2$

# Modelo Normal

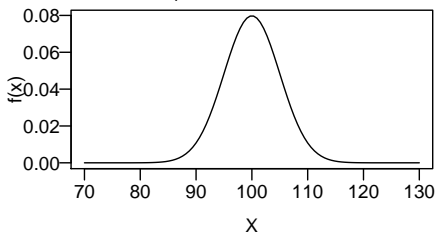
$$\mu = 50, \sigma^2 = 25$$



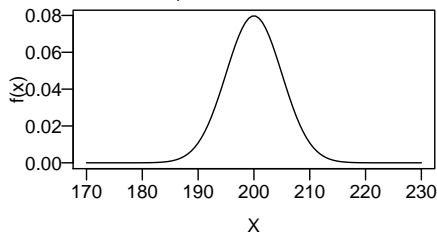
$$\mu = 50, \sigma^2 = 100$$



$$\mu = 100, \sigma^2 = 25$$



$$\mu = 200, \sigma^2 = 25$$





# Modelo Normal

Características da curva normal:

- É **simétrica** em relação à  $\mu$
- O ponto máximo (moda) de  $f(x)$  é o ponto  $x = \mu$
- Os pontos de inflexão da função são  $\mu - \sigma$  e  $\mu + \sigma$
- A área total sob a curva é 1 ou 100%
- A curva é **assintótica** em relação ao eixo  $x$

# Modelo Normal

Para qualquer VA normal  $X$ , valem as seguintes relações:

$$P[X > \mu] = P[X < \mu]$$

$$P[\mu - \sigma < X < \mu + \sigma] \cong 0,6827$$

$$P[\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma] \cong 0,9545$$

$$P[\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma] \cong 0,9973$$

Portanto,  $6\sigma$  é frequentemente referida como a **largura** de uma distribuição normal.

Métodos mais avançados de integração podem ser utilizados para mostrar que a área sob a função densidade de probabilidade normal de  $-\infty < x < \infty$  é igual a 1.

# Modelo Normal

Para obter uma probabilidade do modelo normal, devemos calcular a área entre os pontos  $a$  e  $b$ , ou seja,

$$P[a < X < b] = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right] dx$$

No entanto, essa função não possui forma fechada, e o cálculo de probabilidades pode ser feito apenas por aproximações numéricas.

Para contornar esse problema, os valores de probabilidade são obtidos para uma distribuição normal padrão ( $Z$ ) com  $\mu = 0$  e  $\sigma^2 = 1$ ,

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

A vantagem é que podemos fazer uma única tabela com as integrais aproximadas de  $Z$ , ao invés de uma tabela para cada par  $(\mu, \sigma^2)$ .

# Modelo Normal

Se  $Z \sim N(0, 1)$ , então sua fdp é

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2}(z)^2 \right]$$

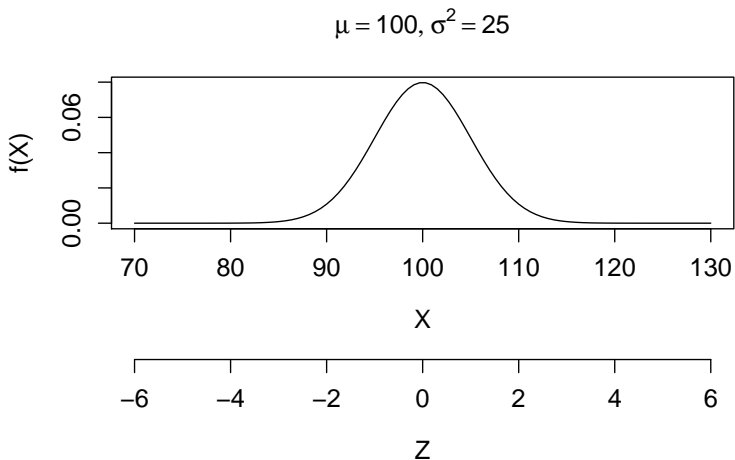
Para se obter a probabilidade de  $Z$  estar entre  $a$  e  $b$ ,

$$P[a < Z < b] = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2}(z)^2 \right] dz$$

As integrais (áreas) para valores de  $Z$  entre 0,00 e 3,99 estão na tabela. Portanto, para qualquer valor de  $X$  entre  $a$  e  $b$ , podemos calcular a probabilidade correspondente através da transformação,

$$P[a < X < b] = P \left[ \frac{a - \mu}{\sigma} < Z < \frac{b - \mu}{\sigma} \right]$$

# Modelo Normal



# Modelo Normal

## Exemplo de uso da tabela

- Calcule as probabilidades (áreas):
  - $P(0 < Z < 2)$
  - $P(Z > 2)$
  - $P(Z < -2)$
  - $P(2,0 < Z < 2,5)$
  - $P(-2,61 < Z < 2,43)$
  - $P(Z > -1,63)$
  - Qual é o valor de  $c$  tal que  $P(0 < Z < c) = 0,4$ ?
  - Qual é o valor de  $d$  tal que  $P(Z > d) = 0,8$ ?

## Exemplo 6.9

Doentes sofrendo de certa moléstia são submetidos a um tratamento intensivo cujo tempo de cura foi modelado por uma densidade Normal de média 15 e desvio padrão 2 (em dias).

- Calcule a proporção de pacientes que demorarão mais de 17 dias para se recuperar.
- Calcule a probabilidade um paciente selecionado ao acaso demorar menos de 20 dias para se recuperar.
- Qual o tempo máximo necessário para a recuperação de 25% dos pacientes?
- Se 100 pacientes forem escolhidos ao acaso, qual seria o número esperado de doentes curados em menos de 11 dias?

# Normal como aproximação da binomial

- A distribuição Normal é uma das mais importantes na Estatística:
  - Muitos fenômenos aleatórios se comportam próximos à essa distribuição
  - Pode ser usada como aproximação para outras distribuições

Se  $X \sim \text{Bin}(n, p)$  então  $E(X) = np$  e  $\text{Var}(X) = np(1 - p)$ .

Podemos aproximar a binomial pela normal, usando

$$Y \sim N(\mu = np, \sigma^2 = np(1 - p)),$$

em geral, quando  $np \geq 5$  e  $np(1 - p) \geq 5$ .



## Exemplo 6.11

Estudo do Sindicato dos Bancários indica que cerca de 30% dos funcionários de banco têm problemas de estresse, provenientes das condições de trabalho. Numa amostra de 200 bancários, qual seria a probabilidade de pelo menos 50 com essa doença?

## Exemplo 6.11

Estudo do Sindicato dos Bancários indica que cerca de 30% dos funcionários de banco têm problemas de estresse, provenientes das condições de trabalho. Numa amostra de 200 bancários, qual seria a probabilidade de pelo menos 50 com essa doença?

Temos então  $X \sim \text{Bin}(200, 0.3)$ , e a probabilidade seria

$$P(X \geq 50) = \sum_{k=50}^{200} \binom{200}{k} 0.3^k 0.7^{200-k}$$

que é difícil de calcular sem computador.

## Exemplo 6.11

Mas  $E(X) = np = 60$  e  $Var(X) = np(1 - p) = 42$ . Assim, temos  $Y \sim N(60, 42)$ , de modo que

$$\begin{aligned} P(X \geq 50) &\approx P(Y \geq 50) = P\left(\frac{Y - 60}{\sqrt{42}} \geq \frac{50 - 60}{\sqrt{42}}\right) \\ &= P(Z \geq -1.54) = 0.9382 \end{aligned}$$

Usando o R:

```
## Cálculo exato pela binomial  
pbinom(49, size = 200, prob = 0.3, lower.tail = FALSE)
```

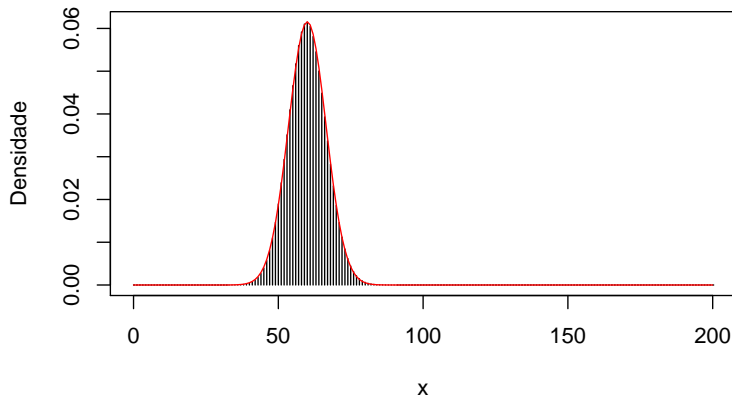
```
# [1] 0.9494082
```

```
## Aproximação pela Normal  
pnorm(50, mean = 60, sd = sqrt(42), lower.tail = FALSE)
```

```
# [1] 0.9385887
```

## Exemplo 6.11

Aproximação de  $X \sim \text{Bin}(200, 0.3)$  com  $Y \sim N(60, 42)$ .



## Combinação linear de Normais independentes

Se  $X_1, X_2, \dots, X_n$  formam uma sequência de variáveis aleatórias independentes, onde  $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ , e  $a_1, a_2, \dots, a_n$  são constantes quaisquer, então:

$$W = \sum_{i=1}^n a_i X_i \quad \text{terá distribuição Normal com} \quad W \sim N(\mu_W, \sigma_W^2)$$

onde:

$$\mu_W = E\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(a_i X_i) = \sum_{i=1}^n a_i E(X_i) = \sum_{i=1}^n a_i \mu_i$$

$$\sigma_W^2 = \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(a_i X_i) = \sum_{i=1}^n a_i^2 \text{Var}(X_i) = \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2$$

## Exemplo 6.13

Uma corretora negocia títulos na Bolsa de Valores e utiliza um modelo probabilístico para avaliar seus lucros. Suas aplicações financeiras de compra e venda atingem três áreas: agricultura, indústria e comércio. Admita que o seguinte modelo representa o comportamento do lucro diário da corretora (em milhares):

$$L = 2L_A + 5L_I + 3L_C$$

onde  $L_A$ ,  $L_I$  e  $L_C$  representam, os lucros diários nos setores de agricultura, indústria e comércio.

As distribuições de probabilidades dessas variáveis aleatórias são  $L_A \sim N(3, 4)$ ,  $L_I \sim N(6, 9)$  e  $L_C \sim N(4, 16)$ . Supondo independência entre os três setores, qual será a probabilidade de um lucro diário acima de 50 mil.

## Exemplo 6.12

Um serviço de fiscalização é criado para averiguar se garrafas de um certo refrigerante contém, de fato, o volume especificado pelo fabricante. Para tanto, 10 garrafas do produto são compradas no varejo, em várias regiões da cidade. Cada uma dessas garrafas é esvaziada e o volume de seu conteúdo, que denotaremos por  $V$  é aferido.

Uma vez obtidos os 10 valores, a média aritmética  $M$  é calculada e, se  $M < 290$  mililitros (ml), a companhia é multada. Estudos na linha de produção do fabricante mostraram que variações sempre ocorrem, mesmo se as especificações forem seguidas.

Por essa razão, considera-se o volume do conteúdo das garrafas como seguindo o modelo Normal, com média  $\mu = 300$  ml e desvio-padrão  $\sigma = 25$  ml. Gostaríamos de calcular qual é a probabilidade de que o fabricante seja multado injustamente.

# Sumário

- 1 Variáveis aleatórias contínuas
  - Introdução
  - Variáveis aleatórias contínuas
- 2 Principais modelos contínuos
  - Modelo Uniforme contínuo
  - Modelo Exponencial
  - Modelo Normal
- 3 Exercícios



# Exercícios recomendados

- Seção 6.1 - 1, 2, 3, 4 e 5.
- Seção 6.2 - 1 a 9.