Regressão e correlação

Wagner H. Bonat
Fernando P. Mayer
Elias T. Krainski

Universidade Federal do Paraná
Departamento de Estatística
Laboratório de Estatística e Geoinformação

13/06/2018

Sumário

Introdução

Um problema comum é o estudo da relação entre duas variáveis, X e Y.

Na prática, procura-se uma **função** de X que explique Y, ou seja,

$$X, Y \to Y \simeq f(X)$$

Essa relação, em geral, não é perfeita, ou seja, existem **erros** associados.

Introdução

Uma das preocupações estatísticas ao analisar dados é a de criar **modelos** do fenômeno em observação.

As observações frequentemente estão misturadas com variações **acidentais** ou **aleatórias**.

Assim, é conveniente supor que cada observação é formada por duas partes: uma **previsível** (ou controlada) e outra **aleatória** (ou não previsível), ou seja

$$\text{(observação)} = \text{(previsível)} + \text{(aleatório)}$$

Introdução

$$\text{(observação)} = \text{(previsível)} + \text{(aleatório)}$$

A parte previsível, incorpora o conhecimento sobre o fenômeno, e é usualmente expressa por uma **função matemática** com **parâmetros desconhecidos**.

A parte aleatória deve obedecer algum **modelo de probabilidade**

Com isso, o trabalho é produzir **estimativas** para os parâmetros desconhecidos, com base em amostras observadas.

Introdução

$$(\text{observação}) = (\text{previsível}) + (\text{aleatório})$$

Matematicamente, podemos escrever

$$y_i = \theta + e_i$$

onde

- y_i = observação i
- θ = efeito fixo, comum a todos os indivíduos
- e_i = "erro" da observação i, ou efeito residual ou aleatório

e_i pode ser considerado como o efeito resultante de várias características que não estão explícitas no modelo.

Introdução

Exemplo: considerando que o peso médio da população é de $\mu = 62$ kg, então o peso de cada pessoa y_i pode ser descrita pelo seguinte modelo

$$y_i = 62 + e_i$$

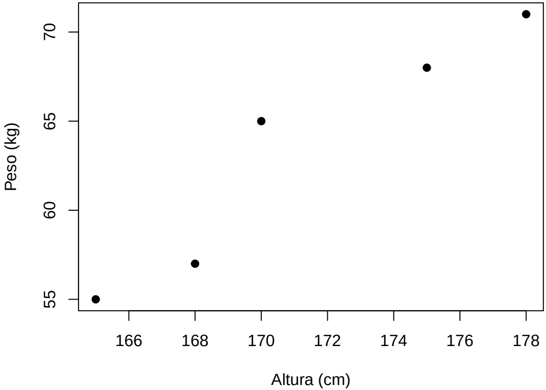
onde $\theta = \mu$, e cada e_i determinará o peso de cada pessoa, em função de diversos fatores como: altura, sexo, idade, país, ..., ou seja

$$e_i = f(\text{altura}, \text{sexo}, \text{idade}, \text{país}, \ldots)$$

Ou seja, à medida que **relacionamos** o peso com outras variáveis, ganhamos informação e diminuimos o **erro**.

Introdução

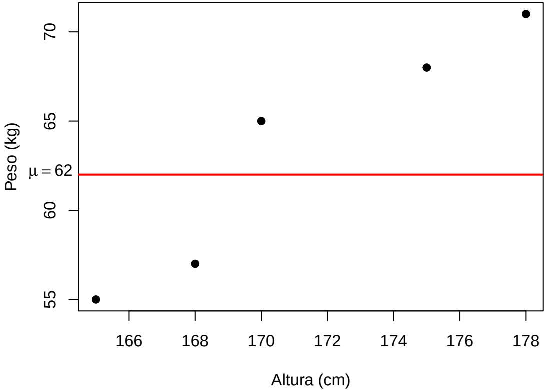
Por exemplo, podemos relacionar os pesos de 5 pessoas com suas respectivas alturas.



E notamos que existe uma aparente **relação linear** entre estas variáveis.

Introdução

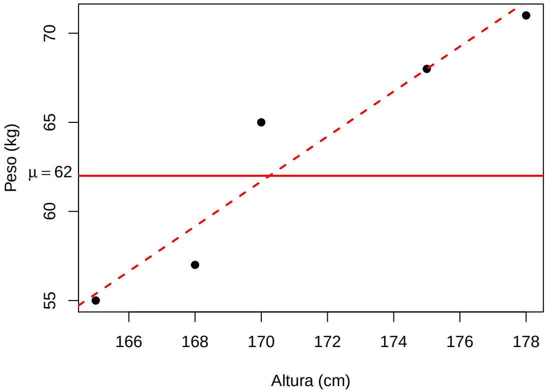
Por exemplo, podemos relacionar os pesos de 5 pessoas com suas respectivas alturas.



E notamos que existe uma aparente **relação linear** entre estas variáveis.

Introdução

Como o peso depende da altura de maneira linear, podemos então aprimorar o modelo anterior incorporando essa informação.



Introdução

Um **modelo linear** entre duas variáveis X e Y, é definido matematicamente como uma equação com dois parâmetros desconhecidos,

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X$$

Sendo assim, o modelo anterior onde conheciamos só a média μ,

$$y_i = \mu + e_i$$

pode ser reescrito como

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 \, \text{altura} + e_i$$

Note que o erro deve diminuir, pois agora

$$e_i = f(\cancel{\text{altura}}, \text{sexo}, \text{idade}, \text{país}, \ldots)$$

ou seja, incorporamos uma informação para explicar o peso, que antes estava inserida no erro.

Introdução

No exemplo anterior, notamos que o peso é uma variável **dependente** (linearmente) da altura.

A **análise de regressão** é a técnica estatística que analisa as relações existentes entre uma única variável **dependente**, e uma ou mais variáveis **independentes**.

O objetivo é estudar as relações entre as variáveis, a partir de um **modelo matemático**, permitindo **estimar** o valor de uma variável a partir da outra.

- Exemplo: sabendo a altura podemos determinar o peso de uma pessoa, se conhecemos os parâmetros do modelo anterior

Introdução

O problema da análise de regressão consiste em definir a **forma** de relação existente entre as variáveis.

Por exemplo, podemos ter as seguintes relações

$$
\begin{aligned}
Y &= \beta_0 + \beta_1 X && \text{linear} \\
Y &= \beta_0 X^{\beta_1} && \text{potência} \\
Y &= \beta_0 e^{\beta_1 X} && \text{exponencial} \\
Y &= \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 X^2 && \text{polinomial}
\end{aligned}
$$

Em todos os casos, a variável **dependente** é Y, aquela que será **predita** a partir da relação e da variável **independente** X

Sumário

Regressão linear

Em uma **análise de regressão linear** consideraremos apenas as variáveis que possuem uma **relação linear** entre si.

Uma análise de regressão linear **múltipla** pode associar k variáveis independentes (X) para "explicar" uma única variável dependente (Y),

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \cdots + \beta_k X_k + e$$

Uma análise de regressão linear **simples** associa uma única variável independente (X) com uma variável dependente (Y),

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + e$$

Regressão linear

Assim, dados n pares de valores, $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots, (X_n, Y_n)$, se for admitido que Y é função linear de X, pode-se estabelecer uma regressão linear simples, cujo modelo estatístico é

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + e_i, \quad i = 1, 2, ..., n$$

onde:

- Y é a variável **resposta** (ou **dependente**)
- X é a variável **explicativa** (ou **independente**)
- β_0 é o **intercepto** da reta (valor de Y quando $X = 0$)
- β_1 é o **coeficiente angular** da reta (**efeito** de X sobre Y)
- $e \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2)$ é o **erro**, ou **desvio**, ou **resíduo**

O problema agora consiste em **estimar** os parâmetros β_0 e β_1.

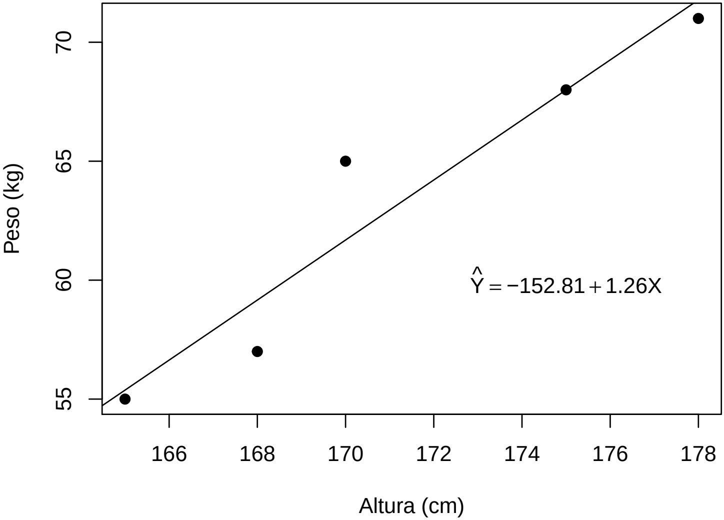
Interpretação dos parâmetros

β_0 representa o ponto onde a reta corta o eixo Y (na maioria das vezes não possui interpretação prática)

β_1 representa a variabilidade em Y causada pelo aumento de uma unidade em X. Além disso,

- $\beta_1 > 0$ mostra que com o aumento de X, também há um aumento em Y
- $\beta_1 = 0$ mostra que **não há efeito** de X sobre Y
- $\beta_1 < 0$ mostra que com a aumento de X, há uma diminuição em Y

Interpretação dos parâmetros



Estimação dos parâmetros

Como através de uma amostra obtemos uma estimativa da verdadeira equação de regressão, denominamos

$$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i$$

ou seja, $\hat{Y}_i$ é o valor **estimado** de Y_i, através das **estimativas** de β_0 e β_1, que chamaremos de $\hat{\beta}_0$ e $\hat{\beta}_1$.

Para cada valor de Y_i, temos um valor $\hat{Y}_i$ estimado pela equação de regressão,

$$Y_i = \hat{Y}_i + e_i$$

Estimação dos parâmetros

Portanto, o erro (ou desvio) de cada observação em relação ao modelo adotado será

$$e_i = Y_i - \hat{Y}_i$$
$$e_i = Y_i - (\beta_0 + \beta_1 X_i)$$

Devemos então adotar um modelo cujos parâmetros β_0 e β_1, tornem esse diferença a menor possível.

Isso equivale a **minimizar** a **soma de quadrados dos resíduos** (SQR), ou do erro,

$$SQR = \sum_{i=1}^{n} [Y_i - (\beta_0 + \beta_1 X_i)]^2$$

Estimação dos parâmetros

O método de minimizar a soma de quadrados dos resíduos é denominado de **método dos mínimos quadrados**.

Para se encontrar o ponto mínimo de uma função, temos que obter as derivadas parciais em relação a cada parâmetro,

$$\frac{\partial SQR}{\partial \beta_0} = 2\sum_{i=1}^{n}[Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i](-1)$$

$$\frac{\partial SQR}{\partial \beta_1} = 2\sum_{i=1}^{n}[Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i](-X_i)$$

e igualar os resultados a zero

$$\hat{\beta}_0 = \frac{\partial SQR}{\partial \beta_0} = 0 \qquad \text{e} \qquad \hat{\beta}_1 = \frac{\partial SQR}{\partial \beta_1} = 0$$

Estimação dos parâmetros

Dessa forma, chegamos às **estimativas de mínimos quadrados** para os parâmetros β_0 e β_1:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i \sum_{i=1}^{n} Y_i}{n}}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{n} X_i)^2}{n}}$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}$$

onde

$$\bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i \qquad \text{e} \qquad \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Exemplo

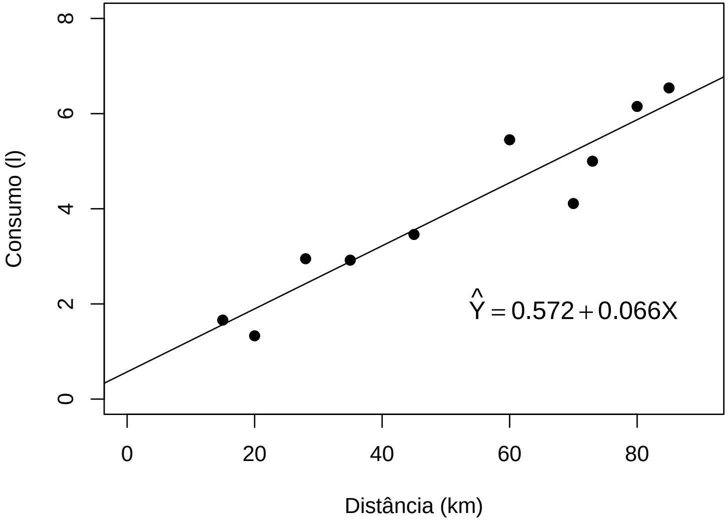
A tabela a seguir relaciona as distâncias percorridas por carros (km) e seus consumos de combustível (litros), em uma amostra de 10 carros novos.

Distância	20.00	60.00	15.00	45.00	35.00	80.00	70.00	73	28.00	85.00
Consumo	1.33	5.45	1.66	3.46	2.92	6.15	4.11	5	2.95	6.54

Com isso:

a. Faça um diagrama de dispersão
b. Trace um modelo linear aproximado
c. Estime os parâmetros $\hat{\beta}_0$ e $\hat{\beta}_1$
d. Interprete o resultado. Pode-se concluir que para percursos mais longos há maior consumo de combustível?
e. Faça uma *predição* do consumo de combustível para uma distância de 50 km.

Exemplo



Exemplo

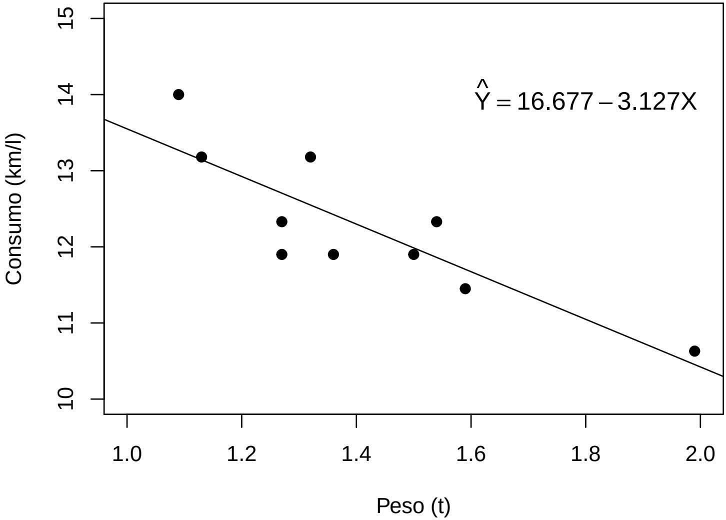
A tabela a seguir relaciona os pesos de carros (t) e as taxas de consumo de combustível (km/l), para uma amostra de 10 carros.

Peso	1.32	1.59	1.27	1.99	1.13	1.54	1.36	1.5	1.27	1.09
Consumo	13.18	11.45	12.33	10.63	13.18	12.33	11.90	11.9	11.90	14.00

Com isso:

a. Faça um diagrama de dispersão
b. Trace um modelo linear aproximado
c. Estime os parâmetros $\hat{\beta}_0$ e $\hat{\beta}_1$
d. Interprete o resultado. O que você pode concluir a respeito da taxa de consumo?
e. Faça uma *predição* do consumo de combustível para um veículo com peso de 1,8 t.

Exemplo



$\hat{Y} = 16.677 - 3.127X$
Consumo (km/l)
10
11
12
13
14
15
1.0
1.2
1.4
1.6
1.8
2.0
Peso (t)

Sumário

Correlação

Até agora o interesse estava em estudar qual a influência de uma V.A. X sobre uma V.A. Y, por meio de uma **relação linear**.

Assim, em uma análise de regressão é indispensável identificar qual variável é dependente.

Na **análise de correlação** isto não é necessário, pois queremos estudar o **grau de relacionamento** entre as variáveis X e Y, ou seja, uma medida de **covariabilidade** entre elas.

A correlação é considerada como uma medida de **influência mútua** entre variáveis, por isso não é necessário especificar quem influencia e quem é influenciado.

Correlação

O **grau de relação** entre duas variáveis pode ser medido através do **coeficiente de correlação linear** (r), dado por

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i \sum_{i=1}^{n} Y_i}{n}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{n} X_i)^2}{n}} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{n} Y_i)^2}{n}}} r = \frac{\text{Cov}(XY)}{\text{DP}(X) \cdot \text{DP}(Y)}$$

onde

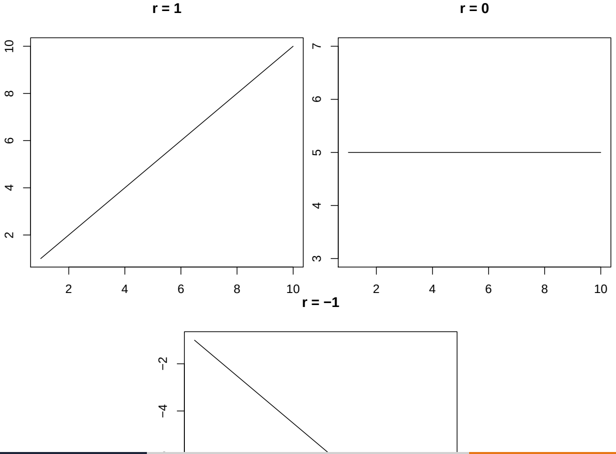
$$-1 \leq r \leq 1$$

Portanto,

- $r = 1$ correlação **positiva** perfeita entre as variáveis
- $r = 0$ **não há** correlação entre as variáveis
- $r = -1$ correlação **negativa** perfeita entre as variáveis

Correlação

Existem muitos tipos de associações possíveis, e o coeficiente de correlação avalia o quanto uma nuvem de pontos no gráfico de dispersão se aproxima de uma reta.



Coeficiente de determinação

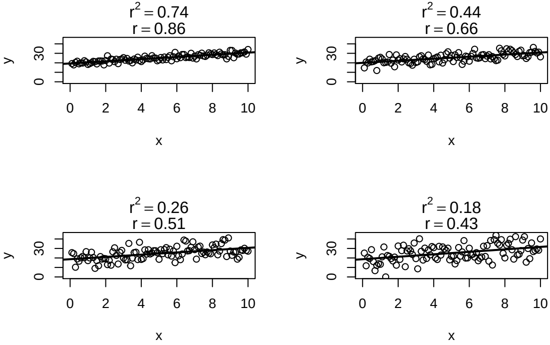
O **coeficiente de determinação** (r^2) é o quadrado do coeficiente de correlação, por consequência

$$0 \leq r^2 \leq 1$$

O r^2 nos dá a **porcentagem de variação em Y que pode ser explicada pela variável independente X**.

Quanto mais próximo de 1, maior é a explicação da variável Y pela variável X.

Correlação



Exemplo

Usando os dados do primeiro exemplo anterior, calcule o coeficiente de correlação e o r^2.

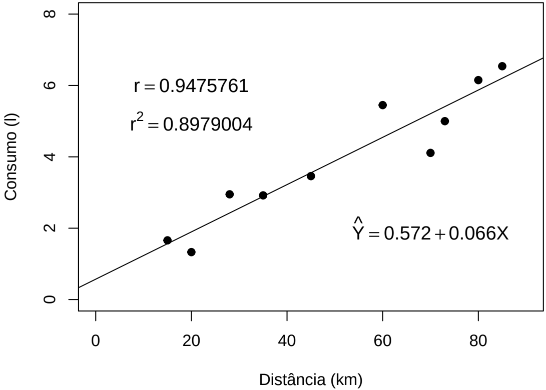
|l|l|l|l|l|l|l|l|l|l|l|

Distância & 20 & 60 & 15 & 45 & 35 & 80 & 70 & 73 & 28 & 85 \ Consumo & 1,33 & 5,45 & 1,66 & 3,46 & 2,92 & 6,15 & 4,11 & 5,00 & 2,95 & 6,54 \

$\sum_{i=1}^{n} X_i = 511 \quad \sum_{i=1}^{n} Y_i = 39.57 \quad \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i = 2419.6 \setminus \sum_{i=1}^{n} X_i^2 = 3.2113 \times 10^4$

$\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 = 185.9137$

Exemplo


r = 0.9475761
$r^2 = 0.8979004$
$\hat{Y} = 0.572 + 0.066X$
Consumo (l)
Distância (km)
0
2
4
6
8
0
20
40
60
80

Exemplo

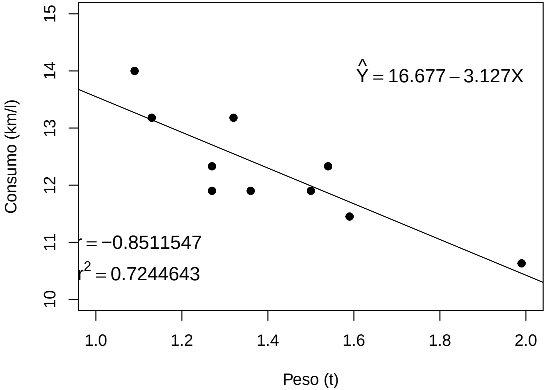
Usando os dados do segundo exemplo anterior, calcule o coeficiente de correlação e o r^2.

|l|l|l|l|l|l|l|l|l|l|l|

Peso & 1,32 & 1,59 & 1,27 & 1,99 & 1,13 & 1,54 & 1,36 & 1,5 & 1,27 & 1,09 \ Consumo & 13,18 & 11,45 & 12,33 & 10,63 & 13,18 & 12,33 & 11,90 & 11,90 & 11,90 & 14,00 \

$\sum_{i=1}^{n} X_i = 14.06$ $\sum_{i=1}^{n} Y_i = 122.8$ $\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i = 170.7045$ \ $\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = 20.3926$ $\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 = 1516.412$

Exemplos



$\hat{Y} = 16.677 - 3.127X$
$r = -0.8511547$
$r^2 = 0.7244643$
Consumo (km/l)
Peso (t)
10
11
12
13
14
15
1.0
1.2
1.4
1.6
1.8
2.0

Teste para o coeficiente de correlação

Usualmente definimos o coeficiente de correlação para uma amostra, pois desconhecemos esse valor para a população.

Uma população que tenha duas variáveis não correlacionadas pode produzir uma amostra com coeficiente de correlação diferente de zero.

Para **testar** se uma amostra foi colhida de uma população para o qual o coeficiente de correlação entre duas variáveis é nulo, precisamos obter a **distribuição amostral** da estatística r.

Teste para o coeficiente de correlação

Seja ρ o verdadeiro coeficiente de correlação populacional desconhecido.

Para testar se o coeficiente de correlção populacional é igual a zero, realizamos um teste de hipótese com

$$H_0 : \rho = 0$$
$$H_a : \rho \neq 0$$

A estatística de teste utilizada é

$$t_{calc} = r\sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}}$$

que tem distribuição t de Student com $n-2$ graus de liberdade.

Teste para o coeficiente de correlação

Procedimentos gerais para a construção de um teste de hipótese para ρ

- Usar as hipótestes:

$$H_0 : \rho = 0$$
$$H_a : \rho \neq 0$$

- Definir um nível de **significância*** α (ex.: $\alpha 0,05$), que irá determinar o nível de **confiança** $100(1-\alpha)\%$ do teste
- Determinar a **região de rejeição** com base no nível de significância $\rightarrow$ t_{crit} (com $n-2$ graus de liberdade)
- Calcular a **estatística de teste**, sob a hipótese nula

$$t_{calc} = r\sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}}$$

- Rejeitar a hipótese nula se a estatística de teste calculada estiver dentro da região de rejeição ($|t_{calc}| > |t_{crit}|$)

Exemplo

Usando os dados dos exemplos anteriores, realize os testes de hipótese para o coeficiente de correlação ρ, usando um nível de 5% de significância.

- Distância (km) x Consumo (l) $\rightarrow r = 0.9475761$
- Peso (t) x Consumo (km/l) $\rightarrow r = -0.8511547$

Correlação

ATENÇÃO! — Correlação não implica causação!

Existir uma correlação (positiva ou negativa) entre duas VAs X e Y, mesmo que significativa, **não** implica que X **causa** Y.

Correlação

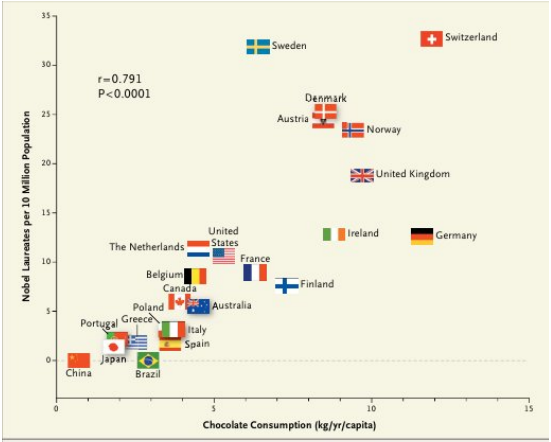
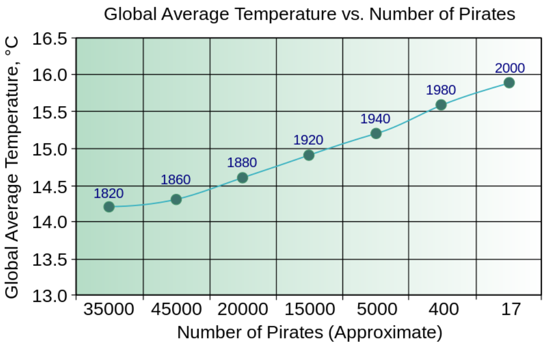


Figure 1. Correlation between Countries' Annual Per Capita Chocolate Consumption and the Number of Nobel Laureates per 10 Million Population.

Correlação


Global Average Temperature vs. Number of Pirates
Global Average Temperature, °C
16.5
16.0
15.5
15.0
14.5
14.0
13.5
13.0
1820
1860
1880
1920
1940
1980
2000
35000
45000
20000
15000
5000
400
17
Number of Pirates (Approximate)