Probabilidades

Wagner H. Bonat
Elias T. Krainski
Fernando P. Mayer

Universidade Federal do Paraná
Departamento de Estatística
Laboratório de Estatística e Geoinformação

27/02/2018

Sumário

Definições

- Fenômeno aleatório: situação ou acontecimento cujos resultados não podem ser previstos com certeza.
- Espaço amostral: conjunto de todos os resultados possíveis de um fenômeno aleatório, denotado por Ω.
- Eventos: subconjuntos de Ω, denotado por $A, B, \ldots$.
- Conjunto vazio: conjunto sem eventos, denotado por $\emptyset$.
- União $A \cup B$: ocorrência de pelo menos um dos eventos A ou B.
- Intersecção $A \cap B$: ocorrência simultânea de A e B.
- Eventos disjuntos ou mutuamente exclusivos: $A \cap B = \emptyset$.
- Eventos complementares: $A \cup A^c = \Omega$ e $A \cap A^c = \emptyset$.

Definição de probabilidade

- Probabilidade é uma função $P(\cdot)$ que atribui valores numéricos aos eventos do espaço amostral, de tal forma que
  1. $0 \leq P(A) \leq 1, \quad \forall A \in \Omega;$
  2. $P(\Omega) = 1;$
  3. $P(\bigcup_{j=1}^{n} A_j) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j)$, com os A_j's disjuntos.
- Exemplos triviais: lançamento de uma moeda e lançamento de um dado.
- Regra da adição de probabilidades. Sejam A e B eventos em Ω. Então

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

- Mostre que

$$P(A) = 1 - P(A^c).$$

Probabilidade condicional

- Definição: Dados dois eventos A e B, a probabilidade condicional de A dado que ocorreu B é representado por $P(A|B)$ e dada por

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad \text{para} \quad P(B) > 0.$$

- Caso $P(B) = 0$ definimos $P(A|B) = P(A)$.
- Regra do produto: Sejam A e B eventos em Ω, Então

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B), \quad \text{com} \quad P(B) > 0.$$

- Exemplo usando dado (ver Exemplo 2.3 livro).

Independência de eventos

- Definição: Dois eventos A e B são independentes, se a informação da ocorrência ou não de B não altera a probabilidade de ocorrência de A. Isto é,

$$P(A|B) = P(A), \quad P(B) > 0,$$

ou ainda da seguinte forma

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

- Exemplo 2.4.

Exemplo 2.4

- Uma empresa produz peças em duas máquinas I e II, que podem apresentar desajustes com probabilidade 0.05 e 0.10; respectivamente. No início do dia de operação um teste é realizado e, caso a máquina esteja fora de ajuste, ela ficará sem operar nesse dia passando por revisão técnica. Para cumprir o nível mínimo de produção pelo menos uma das máquinas deve operar. Você diria que a empresa corre o risco de não cumprir com suas metas de produção?

Partição do espaço amostral

- Definição: Os eventos $C_1, C_2, ..., C_k$ formam uma partiç˜ao do espaço amostral, se eles não tem intersecção entre si e se sua união é igual ao espaço amostral. Isto é,

$$C_i \cap C_j = \emptyset \quad \text{para} \quad i \neq j \quad \text{e} \quad \bigcup_{i=1}^{k} C_i = \Omega.$$

- Figura 2.4 e exemplo 2.5.

Exemplo 2.5

- Suponha que um fabricante de sorvetes recebe 20% de todo o leite que utiliza de uma fazenda F_1, 30% de uma outra fazendo F_2 e 50% de F_3. Um órgão de fiscalização inspecionou as fazendas de surpresa e observou que 20% do leite produzido por F_1 estava adulterado por adição de água, enquanto que para F_2 e F_3, essa proporção era de 5% e 2%, respectivamente. Na indústria de sorvetes os galões de leite são armazenados em um refrigerador sem identificação das fazendas. Para um galão escolhido qual a probabilidade do leite estar adulterado?

Teorema de Bayes

- Suponha que os eventos $C_1, C_2, ..., C_k$ formem uma partição de Ω e que suas probabilidades sejam conhecidas. Suponha, ainda, que para um evento A, se conheçam as probabilidades $P(A|C_i)$ para todos $i = 1, 2, ..., k$. Então, para qualquer j,

$$P(C_j|A) = \frac{P(A|C_j)P(C_j)}{\sum_{i=1}^{k} P(A|C_i)P(C_i)}, \quad j = 1, 2, ..., k.$$

- Demonstração e Exemplo 2.6.

Exercícios recomendados

- Seção 2.1 Ex. $1, 2, 3, 4$ e 5.
- Seção 2.2 Ex. $1, 2, 3, 4, 5, 6$ e 7.
- Seção 2.3 Ex. $1, 3, 8, 9, 11, 13, 15$ e 19.
- Próxima aula - Exercícios e tira dúvidas.