Estimação

Wagner H. Bonat
Fernando P. Mayer
Elias T. Krainski

Universidade Federal do Paraná
Departamento de Estatística
Laboratório de Estatística e Geoinformação

27/04/2018

Sumário

Inferência estatística

Seja X uma variável aleatória com função densidade (ou de probabilidade) denotada por $f(x, \theta)$, em que θ é um parâmetro desconhecido. Chamamos de **inferência estatística** o problema que consiste em especificar um ou mais valores para θ, baseado em um conjunto de valores X.

A inferência pode ser feita de duas formas:

- estimativa pontual
- estimativa intervalar

Redução de dados

Um experimentador usa as informações em uma amostra aleatória $X_1, \ldots, X_n$ para se fazer inferências sobre θ.

Normalmente n é grande e fica inviável tirar conclusões baseadas em uma longa **lista** de números.

Por isso, um dos objetivos da inferência estatística é **resumir** as informações de uma amostra, da maneira mais **compacta** possível, mas que ao mesmo tempo seja também **informativa**.

Normalmente esse resumo é feito por meio de **estatísticas**, por exemplo, a média amostral e a variância amostral.

População e amostra

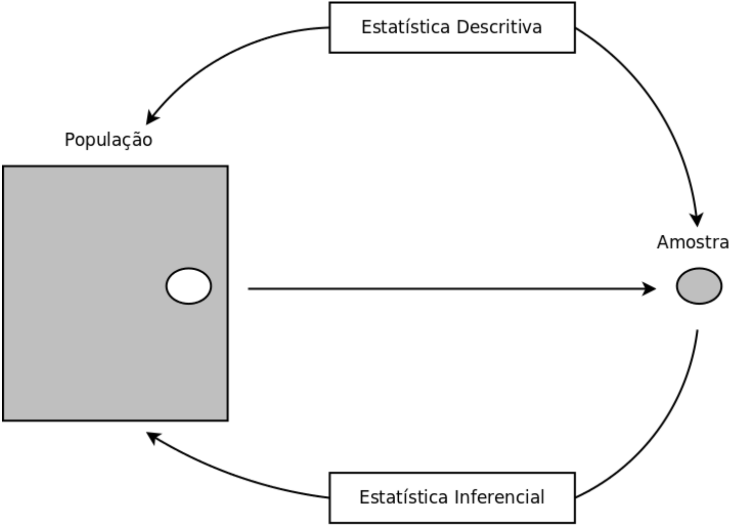
O conjunto de valores de uma característica associada a uma coleção de indivíduos ou objetos de interesse é dito ser uma população.

Uma sequência $X_1, \ldots, X_n$ de n variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (iid) com função densidade (ou de probabilidade) $f(x, \theta)$ é dita ser uma amostra aleatória de tamanho n da distribuição de X.

Como normalmente $n > 1$, então temos que a fdp ou fp conjunta será

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}) = f(x_1, \ldots, x_n, \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta).$$

População e amostra



Parâmetro e Estatística

População $\rightarrow$ censo $\rightarrow$ parâmetro

Uma medida numérica que descreve alguma característica da ***população****, usualmente representada por letras gregas:* θ, μ, σ, ...

Exemplo: média populacional $= \mu$

População $\rightarrow$ amostra $\rightarrow$ estatística

Uma medida numérica que descreve alguma característica da ***amostra****, usualmente denotada pela letra grega do respectivo parâmetro com um acento circunflexo:* $\hat{\theta}$, $\hat{\mu}$, $\hat{\sigma}$, ..., *ou por letras do alfabeto comum:* $\bar{x}$, s, ...

Exemplo: média amostral $= \bar{x}$

Parâmetros

É importante notar que um parâmetro não é restrito aos modelos de probabilidade. Por exemplo:

- $X \sim \text{N}(\mu, \sigma^2) \Rightarrow$ parâmetros: μ, σ^2
- $Y \sim \text{Poisson}(\lambda) \Rightarrow$ parâmetro: λ
- $Y = \beta_0 + \beta_1 X \Rightarrow$ parâmetros: β_0, β_1
- $L_t = L_\infty[1 - e^{-k(t-t_0)}] \Rightarrow$ parâmetros: L_∞, k, t_0

Estatística

Qualquer função da amostra que não depende de parâmetros desconhecidos é denominada uma estatística, denotada por $T(\mathbf{X}) = T(X_1, X_2, \ldots, X_n)$

Exemplos:

- $T_1(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$
- $T_2(\mathbf{X}) = \prod_{i=1}^{n} X_i = X_1 \cdot X_2 \cdots X_n$
- $T_3(\mathbf{X}) = X_{(1)}$
- $T_4(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2$

Estatística

Qualquer função da amostra que não depende de parâmetros desconhecidos é denominada uma estatística, denotada por $T(\mathbf{X}) = T(X_1, X_2, \ldots, X_n)$

Exemplos:

- $T_1(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$
- $T_2(\mathbf{X}) = \prod_{i=1}^{n} X_i = X_1 \cdot X_2 \cdots X_n$
- $T_3(\mathbf{X}) = X_{(1)}$
- $T_4(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2$

Verificamos que T_1, T_2, T_3 são estatístcas, mas T_4 não.

Como é uma função da amostra, então uma estatística também é uma **variável aleatória** $\rightarrow$ distribuições amostrais

Estimador

Espaço paramétrico

O conjunto Θ em que θ pode assumir seus valores é chamado de **espaço paramétrico**

Estimador

Qualquer estatística que assume valores em Θ é um estimador para θ.

Estimador pontual

Dessa forma, um **estimador pontual** para θ é qualquer estatística que possa ser usada para estimar esse parâmetro, ou seja,

$$\hat{\theta} = T(\mathbf{X})$$

Estimador

Observações:

1. Todo estimador é uma estatística, mas nem toda estatística é um estimador.
2. O valor assumido pelo estimador pontual é chamado de **estimativa pontual**,
$$T(\mathbf{X}) = T(X_1, \ldots, X_n) = t$$
ou seja, o estimador é uma **função** da amostra, e a estimativa é o **valor observado** de um estimador (um número) de uma amostra particular.