Estimação: (B) Estimação por intervalo

Wagner H. Bonat
Fernando P. Mayer
Elias T. Krainski

Universidade Federal do Paraná
Departamento de Estatística
Laboratório de Estatística e Geoinformação

10/05/2018

Sumário

Estimação

Existem dois tipos de estimativas que podemos obter a partir de uma **amostra aleatória**:

Estimativa pontual

Fornecem como estimativa um único valor numérico para o parâmetro de interesse

Estimativa intervalar

Fornece um intervalo de valores "plausíveis" para o parâmetro de interesse

Estimação

Por serem **variáveis aleatórias**, os estimadores pontuais possuem uma distribuição de probabilidade (distribuições amostrais).

Com isso, podemos apresentar uma estimativa mais informativa para o parâmetro de interesse, que inclua uma medida de **precisão** do valor obtido $\rightarrow$ **estimativa intervalar** ou **intervalo de confiança**.

Os **intervalos de confiança** são obtidos a partir da **distribuição amostral** de seus estimadores.

Sumário

Suposições necessárias

- A amostra é uma **amostra aleatória simples**. (Todas as amostras de mesmo tamanho tem a mesma probabilidade de serem selecionadas)
- O valor do desvio padrão populacional σ, é conhecido
- Uma ou ambas das seguintes condições são satisfeitas:
  - A população é normalmente distribuída
  - A amostra possui $n > 30$

Erro amostral

Quando coletamos uma **amostra aleatória** e calculamos uma média, sabemos que o valor da média possui um desvio natural, em relação ao verdadeiro valor da média populacional (**erro amostral**), ou seja

$$e = \bar{X} - \mu \quad \Rightarrow \quad \bar{X} = \mu + e$$

Sabemos que a **distribuição amostral da média** é uma distribuição normal, com média μ e variância σ^2/n,

$$\bar{X} \sim \text{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Margem de erro

Usando a transformação

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{e}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathrm{N}(0, 1)$$

podemos determinar o **erro máximo provável** que assumimos para a média amostral que estamos calculando.

O **erro máximo provável** ou **margem de erro** da média é definido por

$$e = z_{\gamma/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

onde $z_{\gamma/2}$ é chamado de **valor crítico**.

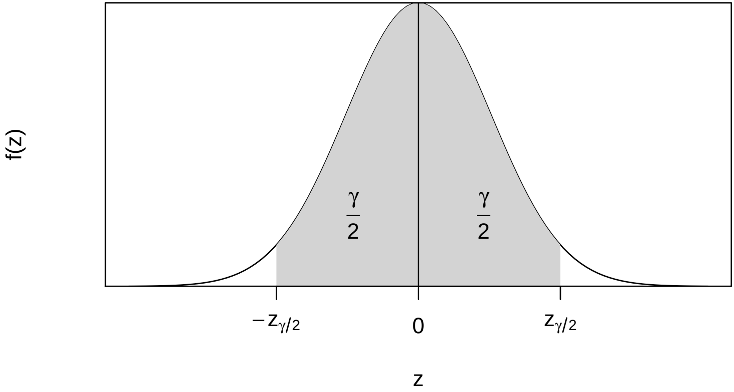
Intervalo de confiança

Fixando um valor γ tal que $0 < \gamma < 1$, podemos encontrar um valor $z_{\gamma/2}$ tal que:

$$
\begin{aligned}
P[|Z| < z_{\gamma/2}] &= \gamma \\
P[-z_{\gamma/2} < Z < z_{\gamma/2}] &= \gamma \\
P[-z_{\gamma/2} < \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{\gamma/2}] &= \gamma \\
P[\bar{x} - z_{\gamma/2} \cdot \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) < \mu < \bar{x} + z_{\gamma/2} \cdot \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)] &= \gamma \\
P[\bar{x} - e < \mu < \bar{x} + e] &= \gamma
\end{aligned}
$$

Intervalo de confiança

O valor crítico $z_{\gamma/2}$ é o valor de γ dividido por 2, uma vez que a "massa" γ deve ser distribuída igualmente em torno de 0.



Coeficiente de confiança γ

A área γ determina o **coeficiente de confiança** associado ao intervalo de confiança que estamos construindo.

O valor $z_{\gamma/2}$ pode ser obtido da tabela da Normal padrão, localizando o valor de $\gamma/2$ no corpo da tabela e obtendo o valor $z_{\gamma/2}$ nas margens correspondentes.

Exemplo: $\gamma = 0,95$:

- Temos que $\gamma/2 = 0,475$ é a área que devemos procurar no corpo da tabela
- O valor de $z_{\gamma/2}$ será determinado pelos valores correspondentes nas margens da tabela. Nesse caso, $z_{\gamma/2} = 1,96$ é o valor crítico procurado.

Intervalo de confiança

Com estas definições, podemos construir um **intervalo de confiança** para μ, com **coeficiente de confiança** γ:

$$\text{IC}(\mu, \gamma) = \left[\bar{X} - z_{\gamma/2} \cdot \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right); \bar{X} + z_{\gamma/2} \cdot \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)\right]$$

Outras notações:

$$\bar{x} - e < \mu < \bar{x} + e$$

$$\bar{x} \pm e$$

$$[\bar{x} - e; \bar{x} + e]$$

Procedimentos gerais para a construção de intervalos de confiança

1. Verifique se as suposições necessárias estão satisfeitas
    - Temos uma AAS
    - σ é conhecido
    - A população tem distribuição normal ou $n > 30$
2. Determine o nível de confiança γ, e encontre o valor crítico $z_{\gamma/2}$
3. Calcule a margem de erro $e = z_{\gamma/2} \cdot (\sigma/\sqrt{n})$
4. Calcule $\text{IC}(\mu, \gamma)$

Interpretação de um intervalo de confiança

Suponha que obtivemos um intervalo de 95% de confiança:
$\text{IC}(\mu, 95\%) = [52; 58]$

Interpretação 1

Temos 95% de confiança de que a verdadeira média populacional μ se encontra entre 52 e 58

Interpretação 2

Temos 95% de confiança de que o intervalo entre 52 e 58 realmente contém a verdadeira média populacional μ

Interpretação de um intervalo de confiança

Suponha que obtivemos um intervalo de 95% de confiança:
$\text{IC}(\mu, 95\%) = [52; 58]$

Interpretação 1 — ERRADA

Temos 95% de confiança de que a verdadeira média populacional μ se encontra entre 52 e 58

Interpretação 2 — CERTA

Temos 95% de confiança de que o intervalo entre 52 e 58 realmente contém a verdadeira média populacional μ

Interpretação de um intervalo de confiança

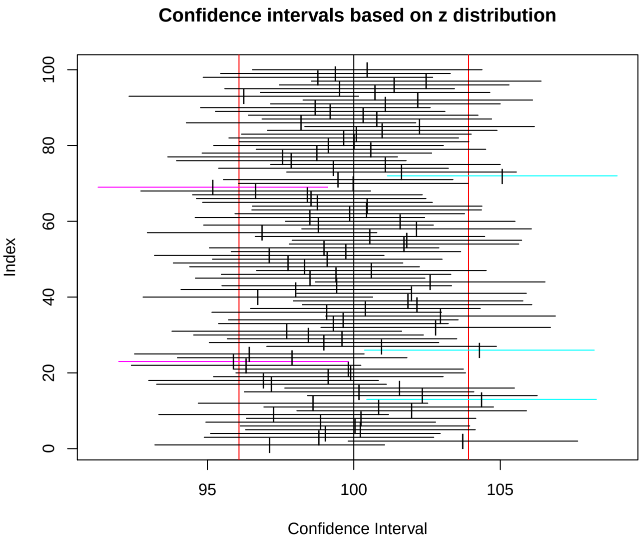
Como o intervalo de confiança é calculado a partir de uma **amostra aleatória**, este intervalo **também é aleatório**!

Isso significa que para cada amostra aleatória que tivermos, um intervalo **diferente** será calculado.

Como o valor de μ é fixo, é o intervalo que deve conter o valor de μ, e não o contrário.

Isso significa que se pudessemos obter 100 amostras diferentes, e calcularmos um intervalo de confiança de 95% para cada uma das 100 amostras, esperariamos que 5 destes intervalos **não** contenham o verdadeiro valor da média populacional μ.

Interpretação de um intervalo de confiança



Exemplo

Uma empresa de computadores deseja estimar o tempo médio de horas semanais que as pessoas utilizam o computador.

Uma amostra aleatória de 25 pessoas apresentou um tempo médio de uso de 22,4 horas. Com base em estudos anteriores, a empresa assume que $\sigma = 5,2$ horas, e que os tempos são normalmente distribuídos.

Construa um intervalo de confiança para a média μ com coeficiente de confiança de 95%.

Amplitude de um intervalo

A **amplitude** de um intervalo de confiança é dada pela diferença entre o limite superior e inferior, ou seja,

$$
\begin{aligned}
\text{AMP}_{IC} &= \left[\bar{x} + z_{\gamma/2} \cdot \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)\right] - \left[\bar{x} - z_{\gamma/2} \cdot \left(\frac{\gamma}{\sqrt{n}}\right)\right] \\
&= 2 \times z_{\gamma/2} \cdot (\sigma/\sqrt{n})
\end{aligned}
$$

- Note que, claramente, um intervalo de confiança depende conjuntamente de três componentes:
  - Coeficiente de confiança γ, expresso pelo valor crítico $z_{\gamma/2}$
  - Desvio-padrão populacional σ
  - Tamanho da amostra n

Amplitude de um intervalo

$z_{\gamma/2} \rightarrow$ Cada vez que aumentamos a confiança γ, o valor de $z_{\gamma/2}$ fica maior, e consequentemente a amplitude do intervalo aumenta.

$\sigma \rightarrow$ Um grande desvio padrão indica a possibilidade de um considerável distanciamento dos valores amostrais em relação à média populacional

$n \rightarrow$ Quanto maior for o tamanho da amostra, maior será a quantidade de informação disponível. Com isso, valores maiores de n produzem intervalos mais informativos

Exemplo

Seja $X \sim \mathrm{N}(\mu, 36)$

a) Para uma amostra de tamanho 50, obtivemos média amostral 18,5. Construa intervalos de confiança de
   - (i) 90% (ii) 95% (iii) 99%
b) Calcule as amplitudes dos intervalos acima e explique a diferença.
c) Para um nível de confiança de 95%, construa intervalos de confiança (admita a mesma média amostral 18,5) supondo tamanhos de amostra
   - (i) $n = 15$ (ii) $n = 100$
d) Calcule as amplitudes dos intervalos acima e explique a diferença.

Determinação do tamanho amostral

Nosso objetivo é coletar dados para estimar a **média populacional** μ.

A questão é:

> ***Quantos elementos (itens, objetos, pessoas, ...) devemos amostrar?***

Já vimos que, de maneira (bem) geral, $n > 30$ é um tamanho de amostra mínimo para a maioria dos casos.

Será que podemos ter uma estimativa melhor de quantos elementos devem ser amostrados para estimarmos a média populacional com uma precisão conhecida?

Determinação do tamanho amostral

A partir da equação do **erro máximo provável**

$$e = z_{\gamma/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

podemos isolar n e chegar na seguinte equação para a determinação do tamanho amostral

$$n = \left[\frac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{e}\right]^2$$

Determinação do tamanho amostral

Note que, em

$$n = \left[\frac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{e}\right]^2$$

- O tamanho amostral *n* **não** depende do tamanho populacional *N*
- O tamanho amostral depende:
  - do nível de confiança desejado (expresso pelo valor crítico $z_{\alpha/2}$)
  - do erro máximo *desejado*
  - do desvio-padrão σ (embora veremos que não é estritamente necessário)
- Como o tamanho amostral precisa ser um número inteiro, arredondamos sempre o valor para o **maior** número inteiro mais próximo

Exemplo

Seja $X \sim \text{N}(\mu, 36)$

a) Calcule o tamanho da amostra, para que com 95% de probabilidade, a média amostral não difira da média populacional por mais de
   - (i) $0,5$ unidades   (ii) 2 unidades

b) Qual o impacto do erro máximo assumido para o tamanho da amostra?

c) Calcule o tamanho da amostra, para que a diferença da média amostral para a média populacional (em valor absoluto) seja menor ou igual a 2 unidades, com níveis de confiança de
   - (i) 90%   (ii) 95%

d) Compare as estimativas do item anterior e analise o impacto do nível de confiança para a determinação do tamanho amostral.

Sumário

Estimativa da variância amostral

Na maioria das situações práticas, não sabemos o verdadeiro valor do desvio padrão populacional σ.

Se o desvio padrão é desconhecido, ele precisa ser estimado.

Sendo $(X_1, \ldots, X_n)$ VAs onde $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, vimos que o "melhor" estimador para σ^2 é a variância amostral

$$S^2 = \frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}^2)$$

que é não viciada e consistente para σ^2.

A distribuição t de Student

Definindo a variável padronizada

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{S^2/n}} = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$$

o denominador S^2 fará com que a função densidade de T seja diferente da Normal.

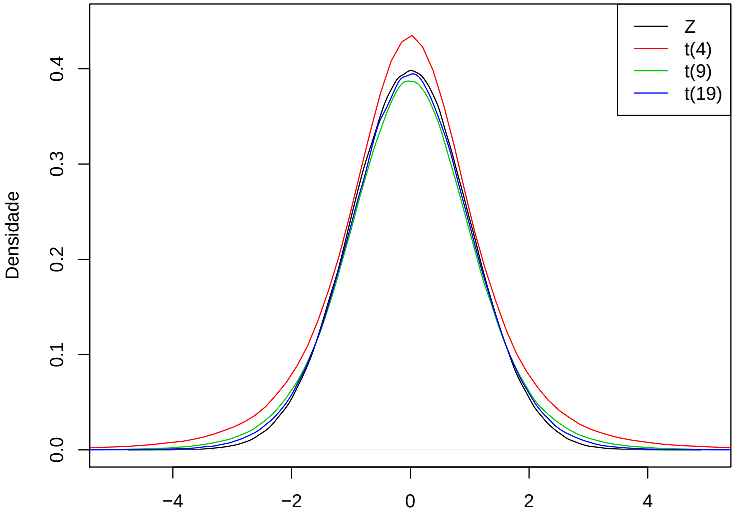
Essa nova densidade é denominada t **de Student**, e seu parâmetro é denominado **graus de liberdade**, que nesse caso é $n - 1$. Assim:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

Características da distribuição t

- É simétrica com média $t = 0$ (assim como $z = 0$)
- É diferente para tamanhos de amostra diferentes
- Possui maior área nas caudas e menor área no centro (quando comparada com a distribuição normal) $\rightarrow$ para incorporar a incerteza
- O desvio padrão da distribuição t varia com o tamanho da amostra (ao contrário da distribuição z onde $\sigma = 1$)
    - $n \downarrow \quad \sigma \uparrow$
    - $n \uparrow \quad \sigma \downarrow$
- A medida que o n amostral aumenta, a distribuição t se aproxima cada vez mais de uma distribuição normal padrão Z
    - Por isso, para amostras grandes ($n > 30$) o resultado das duas é similar

Características da distribuição t

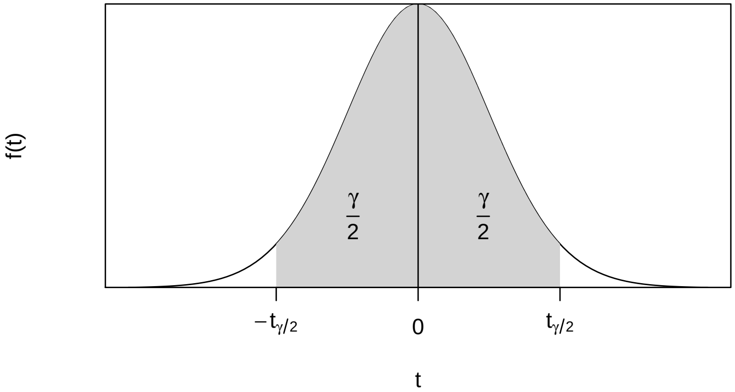


Encontrando valores críticos de t

Com a definição do **nível de confiança** e sabendo o tamanho da amostra n, sabemos então o valor de γ e dos gl, e devemos encontrar o **valor crítico** de $t_{\gamma/2}$. Usando como exemplo $\gamma = 0,95$ e uma amostra de $n = 7$

- Temos que $n = 7 \Rightarrow gl = n - 1 = 6$
- Na tabela da distribuição t de Student procure a linha correspondente aos gl, e coluna correspondente ao valor de $1 - \gamma = 1 - 0,95 = 0,05 = 5\%$
- O valor de $t_{\gamma/2}$ será determinado pelos valores correspondentes **no corpo da tabela**. Nesse caso, $t_{\gamma/2} = 2,447$ é o valor crítico procurado.

Encontrando valores críticos de t



Intervalo de confiança

Com estas definições, podemos construir um **intervalo de confiança** para μ, com **coeficiente de confiança** γ, e σ desconhecido:

$$\text{IC}(\mu, \gamma) = \left[\bar{X} - t_{\gamma/2} \cdot \left(\frac{S}{\sqrt{n}}\right); \bar{X} + t_{\gamma/2} \cdot \left(\frac{S}{\sqrt{n}}\right)\right]$$

Outras notações:

$$\bar{x} - e < \mu < \bar{x} + e$$

$$\bar{x} \pm e$$

$$[\bar{x} - e; \bar{x} + e]$$

Procedimentos gerais para a construção de intervalos de confiança

1. Verifique se as suposições necessárias estão satisfeitas
   - Temos uma AAS
   - Temos uma estimativa de s
   - A população tem distribuição normal ou $n > 30$
2. Determine o nível de confiança γ, e encontre o valor crítico $t_{\gamma/2}$
3. Calcule a margem de erro $e = t_{\gamma/2} \cdot (\sigma/\sqrt{n})$
4. Calcule $\text{IC}(\mu, \gamma)$

Exemplo

Em um teste da eficácia do alho na dieta para a redução do colesterol, 49 pessoas foram avaliadas e seus níveis de colesterol foram medidos antes e depois do tratamento. As **mudanças** nos níveis de colesterol apresentaram média de 0,4 e desvio-padrão de 21.

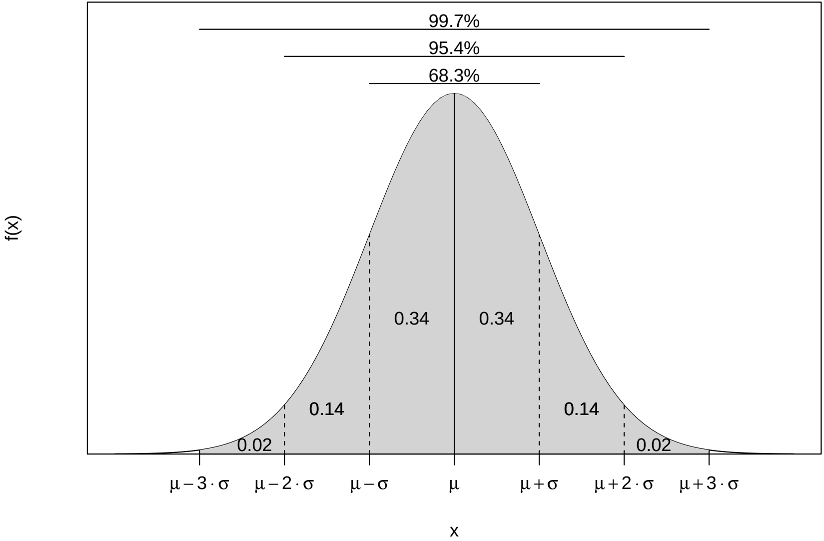
a) Para um nível de confiança de 95%, calcule o intevalo para a verdadeira média das mudanças no nível de colesterol
b) O que o intervalo de confiança sugere sobre a eficácia do uso do alho na dieta para a redução do colesterol?
c) Resolva o mesmo exemplo supondo que o $\sigma = s$ é conhecido (ou seja, usando a distribuição Z). Compare os dois métodos.

Determinação do tamanho amostral

Se σ for desconhecido?

- Estime o valor de σ com base em algum estudo feito anteriormente
- Faça uma amostra piloto e estime o desvio padrão amostral s, e use-o como uma aproximação para o desvio-padrão populacional σ
- Use a **regra empírica** da amplitude para dados com distribuição (aproximadamente) normal

Regra empírica para uma distribuição normal



Regra empírica para uma distribuição normal

Define-se **valores usuais** aqueles que são típicos e não muito extremos.

Como sabemos que em uma distribuição (aproximadamente) normal, aproximadamente 95% dos dados encontram-se a 2 desvios-padrões acima e abaixo da média, temos que

$$4\sigma = (\max - \min)$$
$$\sigma = \frac{(\max - \min)}{4}$$

pode ser utilizado como uma estimatva para σ.

Exemplo

Um professor deseja estimar o salário médio de professores do ensino médio de uma cidade. Quantos professores devem ser selecionados para termos 90% de confiança que a média amostral esteja a menos de R$30,00 da média populacional? Sabe-se apenas que os salários variam entre R$800,00 e R$1.200,00.

Sumário

Proporção amostral

A proporção amostral

$$\hat{p} = \frac{x}{n} = \frac{\text{número de sucessos}}{\text{total de tentativas}}$$

é a "melhor estimativa" para a proporção populacional p

Através do estudo da distribuição amostral da proporção, chegamos aos seguintes resultados:

- A proporção amostral $\hat{p}$ **tende** para o valor da proporção populacional p
- A distribuição das proporções amostrais tende a ser uma **distribuição normal**
- $\mathrm{E}(\hat{p}) = \mu_{\hat{p}} = p$
- $\mathrm{Var}(\hat{p}) = \sigma^2_{\hat{p}} = \frac{p(1-p)}{n}$

Distribuição amostral da proporção $\hat{p}$

Assim, sabemos que

$$p \sim \mathrm{N}\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$$

Ainda podemos mostrar que a quantidade

$$Z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \sim \mathrm{N}(0, 1)$$

Quando não conhecemos p, usamos $\hat{p} = x/n$ como estimativa

Erro amostral da proporção

O **erro amostral** da proporção pode ser definido por

$$e = \hat{p} - p \quad \Rightarrow \quad p = \hat{p} + e$$

então

$$Z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} = \frac{e}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \sim \mathrm{N}(0, 1)$$

Portanto o **erro máximo provável** ou **margem de erro** da proporção é

$$e = z_{\gamma/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

Intervalo de confiança

Com estas definições, podemos construir um **intervalo de confiança** para p, com **coeficiente de confiança** γ

$$\text{IC}(p, \gamma) = \left[\hat{p} - z_{\gamma/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}; \hat{p} + z_{\gamma/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$$

Outras notações:

$$\hat{p} - e < p < \hat{p} + e$$

$$\hat{p} \pm e$$

$$[\hat{p} - e; \hat{p} + e]$$

Procedimentos gerais para a construção de intervalos de confiança

1. Verifique se as suposições necessárias estão satisfeitas
   - Temos uma AAS
   - As condições para a distribuição binomial são satisfeitas
     - as tentativas são independentes
     - há duas categorias de resultado ("sucesso", "fracasso")
     - a probabilidade de sucesso p permanece constante
   - A distribuição normal pode ser usada como aproximação para a distribuição binomial, ou seja, $np \geq 5$ e $np(1-p) \geq 5$
2. Determine o nível de confiança γ, e encontre o valor crítico $z_{\gamma/2}$
3. Calcule a margem de erro $e = z_{\gamma/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$
4. Calcule $\text{IC}(p, \gamma)$

Exemplo

Em uma pesquisa realizada por um instituto de pesquisa Norte-Americano, 1500 adultos foram selecionados aleatoriamente para responder à pergunta se acreditam ou não no aquecimento global. 1050 entrevistados respoderam que sim. Com isso:

a) Para um nível de confiança de 95%, calcule o intervalo de confiança para a verdadeira proporção de pessoas que acreditam no aquecimento global
b) Com base nesse resultado, podemos concluir que a maioria dos adultos acredita no aquecimento global?

Determinação do tamanho amostral

A partir da equação do erro máximo provável

$$e = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

podemos isolar n e chegar na seguinte equação para a determinação do tamanho amostral para uma proporção populacional

$$n = \left(\frac{z_{\alpha/2}}{e}\right)^2 \cdot p(1-p)$$

Determinação do tamanho amostral

Como **não conhecemos** a proporção poppulacional p, temos duas alternativas:

1. Usar $\hat{p}$ no lugar de p (estimativa otimista)
2. Usar $p = 0,5$ (estimativa conservadora). Porque quando $p = 0,5$ teremos o maior tamanho de amostra possível.

p	$(1-p)$	$p(1-p)$
0,1	0,9	0,09
0,3	0,7	0,21
0,5	0,5	**0,25**
0,6	0,4	0,24
0,8	0,2	0,16

Exemplo

Um fabricante de peças deseja estimar a verdadeira proporção de peças defeituosas no processo de fabricação, com um erro máximo de 3% e nível de confiança de 99%. Calcule o tamanho da amostra necessário para se estimar esta proporção se:

a) O fabricante tem uma estimativa de que em uma amostra anterior, aproximadamente 10% das peças eram defeituosas.
b) O fabricante não tem nenhuma informação prévia sobre a proporção de peças defeituosas.

Sumário

Exercícios recomendados