重慶大學

研究生“数理统计”课程课外作业

姓　名： 陈 增　　学　号： 20180802024t

学　院： 光电工程学院　　专　业： 仪器科学与技术

类　别： 学术硕士　　序　号： 第一组（26）

成　绩：

目 录

压电式能量采集器悬臂梁振幅与输出功率的线性关系分析

摘要

能量自动采集技术可以显著的提高部署在远程的物联网节点的工作寿命。而悬臂梁是压电式能量采集器的常见组成结构，基于压电效应的悬臂梁在外界环境振动之下会产生形变，进而产生功率输出。悬臂梁末端的形变量与输出功率之间存在一定的关系。为了进一步确定两者的数学关系，本文对实际实验测试的数据进行了一元线性回归分析，同时编写了 Python 程序验证了该关系的正确性；最后通过 r 检验法对结果进行了检验，进而得出相关结论。

一．问题提出与分析

物联网技术的普及为远程环境的监控提供了有力支持，但是部署在野外的物联网传感器终端通常面临着电力不足而导致的工作寿命问题。为了解决这一实际问题，能量自动采集技术应运而生。能量采集器是一种适用了能量自动采集技术的装置，能够通过一定的机理将外界的能量转换为电能。能量转换的方式有许多，比如磁电式、热电式等。基于压电效应的能量采集器引起结构简单、制造工艺简洁、能量转换效率高等特点而被广泛的研究与应用。

压电效应是能量采集器的核心，它指的是某些电介质在沿一定方向上受到外力的作用而变形时其内部会产生极化，同时在它的两个相对表面上出现正负相反的电荷的现象。基于压电效应的悬臂梁如下图1所示。

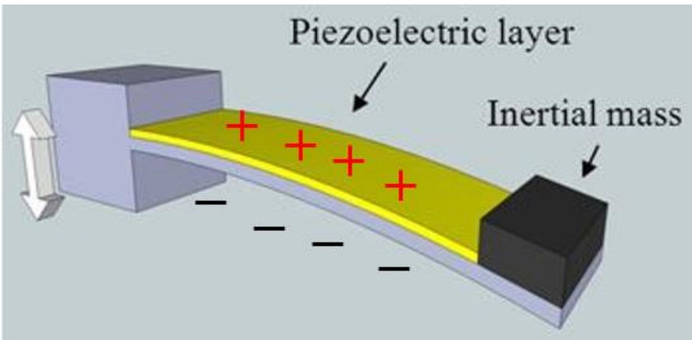

图1 能量采集器中压电效应的悬臂梁示意图

通常环境的振动会使能量采集器中的悬臂梁上下振动。通过上述的模型可以看出，悬臂梁的变形会因为材料的压电效应而在上下板之间产生电荷，将电荷引出即可将环境中的振动能部分转化为电能，从而供传感器节点使用，做到传感器节点的自供电。

一般振动越剧烈，悬臂梁形变越大产生的能量就会越多。悬臂梁的振动幅度通常是比较小的，因此我们可以将此模型简化为如下图2的结构。

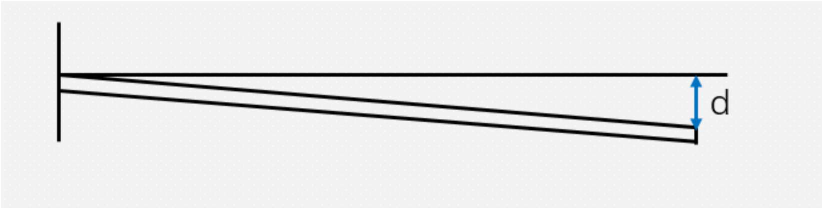

图2 悬臂梁的简化模型

上图的结构中，d是悬臂梁在某一持续稳定振动下的末端形变最大幅度值。不同的振动环境下其值有所不同。一般来说振动的幅度越大则产生的能量越多，功率就越大，两者之间应该存在着某种联系。最常见的联系就是悬臂梁末端形变幅度值与输出功率之间是线性关系，为此我们需要进行相关的实验并得到数据进行分析。

二、数据描述

我们实验室已经制备有上述结构的悬臂梁，故对其在不同振动环境下的工作情况进行测试，分别测量悬臂梁末端的振动幅度和稳定振动源之后的输出功率值，得到如下表1中的结果（以下为本实验室中自主制备的悬臂梁的测试数据）。

表1 悬臂梁末端幅度值与输出功率表

形变量（mm）	输出功率(μW)
0.33	2.12
0.68	3.23
1.13	4.89
1.84	6.98
2.35	7.16
2.94	8.42
3.47	10.66
3.82	11.53
4.56	11.94
5.02	13.98

本次实验共得到能量采集器悬臂梁末端形变量与其对应输出功率数据共10组，将上述数据绘制在图表之中如下图3所示

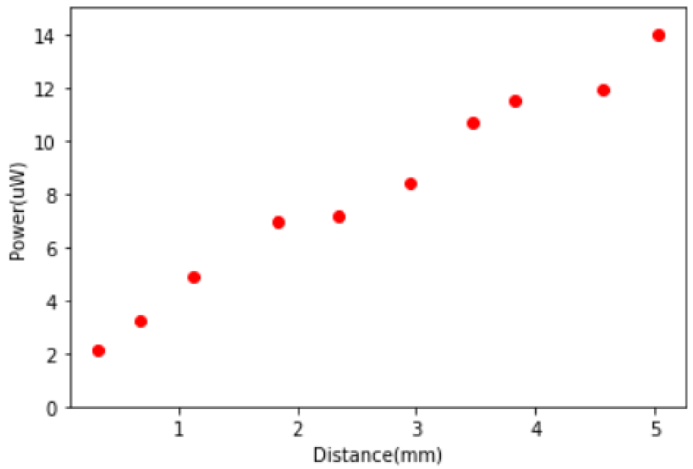

图3 测量数据散点图

初步观察数据可以推测形变量与输出功率之间存在一定的线性关系，因此可以建立模型对其进行线性关系分析，从而验证猜想。

三、模型建立

（1）提出假设条件

根据上述情况，现假设能量采集器悬臂梁末端形变量为自变量X，输出功率为Y。且$(x_i, y_i)(i = 1,\ 2, \dots 10)$为实际实验测得的10组数据值，假设其满足以下的一元线性回归模型：

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i, i = 1, 2, \dots n$$
$$\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2), i = 1, 2, \dots n$$
$$Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0, i \neq j, i, j = 1,2, \dots n$$

由线性回归模型可知，若$|\beta_1|$越大，Y随X的变化趋势就越明显；反之，若越小，Y随X的变化就越不明显。特别是，当$\beta_1 = 0$时，则表明无论X如何变化Y的值都不受影响，因而Y与X之间不存在线性相关关系。当$|\beta_1| \neq 0$时，则认为Y与X之间有线性相关关系。于是，上述问题可以归结为对统计假设

$$H_0\text{：} \beta_1 = 0\text{，} H_1\text{：} \beta_1 \neq 0$$

的检验。若拒绝H_0，就认为Y与X之间有线性相关关系，所求的样本回归直线有意义；若接受H_0，则认为Y与X之间不存在线性相关关系，它们之间可能存在明显的非线性相关关系，也可能根本就不相关，所求的样本回归直线无意义。

（2）模型构建

我们想找的回归方程$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$是要使观测值$(x_i, y_i)(i = 1,2,\dots,n)$从整体上比较靠近它。用数学的话来说就是要求观测值$y_i$与其拟合值$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i$之间的偏差平方和达到最小。

设给定 n 个点 $(x_i, y_i)(i=1,2,...,n)$， $y=\beta_0+\beta_1 x$ 为一条直线， 记

$$S_E^2=\sum_{i=1}^{n}\left[y_i-(\beta_0+\beta_1 x_i)\right]^2$$

其中 S_E^2 就是误差平方和，它反映全部的观测值与直线的偏离程度。因此，S_E^2 越小，观测值与直线拟合得越好。所谓的最小二乘法就是使 S_E^2 达到最小的一种估计 β_0,β_1 的方法。

如果 $\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_1$ 满足

$$S_E^2=\min_{\beta_0,\ \beta_1}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\beta_0-\beta_1 x_i)^2$$

那么称 $\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_1$ 分别是 β_0,β_1 的最小二乘估计。

下面来求 β_0,β_1 的最小二乘估计。

由于 S_E^2 是 β_0,β_1 的一个非负二元函数，故其极小值一定存在，根据微积分的理论知道只要求 S_E^2 对 β_0,β_1 的一阶偏导数为 0， 即

$$\begin{cases}\dfrac{\partial S_E^2}{\partial\beta_0}=-2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\hat{\beta}_0-\hat{\beta}_1 x_i)=0\\ \dfrac{\partial S_E^2}{\partial\beta_1}=-2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\hat{\beta}_0-\hat{\beta}_1 x_i)x_i=0\end{cases}$$

整理后得

$$\begin{cases}n\hat{\beta}_0+(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i)\hat{\beta}_1=\sum\limits_{i=1}^{n}y_i\\ (\sum\limits_{i=1}^{n}x_i)\hat{\beta}_0+(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2)\hat{\beta}_1=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i y_i\end{cases}$$

解之得

$$\begin{cases}\hat{\beta}_0=\bar{y}-\beta_1\bar{x}\\ \hat{\beta}_1=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\end{cases}$$

其中 $\bar{x}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$， $\bar{y}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}y_i$ 。

在具体计算时，常记

$$l_{xx}=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=\sum_{i=1}^{n}x_i{}^2-n\bar{x}^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})x_i$$
$$l_{yy}=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2=\sum_{i=1}^{n}y_i{}^2-n\bar{y}^2=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})y_i$$
$$l_{xy}=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=\sum_{i=1}^{n}x_i y_i-n\bar{x}\bar{y}=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})y_i$$

这样 β_0,β_1 的最小二乘估计可以表示为

$$\begin{cases} \hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} \\ \hat{\beta}_1 = \dfrac{l_{xy}}{l_{xx}} \end{cases}$$

因此，可得到回归方程为

$$\begin{aligned} \hat{y} &= \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x \\ &= \bar{y} + \hat{\beta}_1 (x - \bar{x}) \end{aligned}$$

（3）模型求解

根据上图3可以看出形变量与输出功率之间可能存在线性关系，则根据上述的回归模型可以对实验数据进行进一步的处理。得到如下表所示的数据。

表2 测量数据预处理结果

序号	形变量x (mm)	输出功率y（μW）	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
1	0.33	2.12	0.1089	4.4944	0.6996
2	0.68	3.23	0.4624	10.4329	2.1964
3	1.13	4.89	1.2769	23.0121	5.5257
4	1.84	6.98	3.3856	48.7204	12.8432
5	2.35	7.16	5.5225	51.2656	16.8260
6	2.94	8.42	8.6436	70.8964	24.7548
7	3.47	10.66	12.0409	113.6356	36.9902
8	3.82	11.53	14.5924	132.9409	44.0446
9	4.56	11.94	20.7936	142.5636	54.4464
10	5.02	13.98	25.2004	195.4404	70.1796
求和	26.14	80.91	92.0272	794.3023	268.5065

根据上表可以计算得到

$$\bar{x} = \frac{26.14}{10} = 2.614mm$$

$$\bar{y} = \frac{80.91}{10} = 8.091mm$$

$$l_{xy} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x} \cdot \bar{y} = 268.5065 - 10 \times 2.614 \times 8.091 = 57.0078$$

$$l_{xx} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2 = 92.0272 - 10 \times 2.614 \times 2.614 = 23.6972$$

$$l_{yy}=\sum_{i=1}^{n}y_i^2-n\bar{y}^2=794.3023-10\times 8.091\times 8.091=139.6595$$

$$\hat{\beta}_1=\frac{l_{xy}}{l_{xx}}=\frac{57.0078}{23.6972}=2.40567$$

$$\hat{\beta}_0=\bar{y}-\hat{\beta}_1\bar{x}=8.091-2.40567\times 2.614=1.80258$$

$$S_E^2=S_T^2-S_R^2=l_{yy}-\hat{\beta}_1^2 l_{xx}=139.6595-2.40567\times 2.40567\times 23.6972$$
$$=2.5179$$

$$\widehat{\sigma}=\sqrt{\frac{S_E^2}{n-2}}=\sqrt{\frac{6.33982}{8}}=0.8902$$

综上所得，根据实验数据可以求得悬臂梁输出功率与其末端形变量的样本回归直线方程为：

$$\hat{y}=\beta_0+\hat{\beta}_1\bar{x}=2.40567x+1.80258$$

四、计算方法设计和计算机实现

针对上述的计算过程及其结果，采用编程的方式对其进行验证。此处编写 Python 程序对数据进行回归处理，使用的是 Scipy 库中的 optimize 相关的方法进行直线拟合；得到直线之后再使用 Matplotlib 库将直线和点进行展示。

由此得到的拟合图形如下图 4 所示。

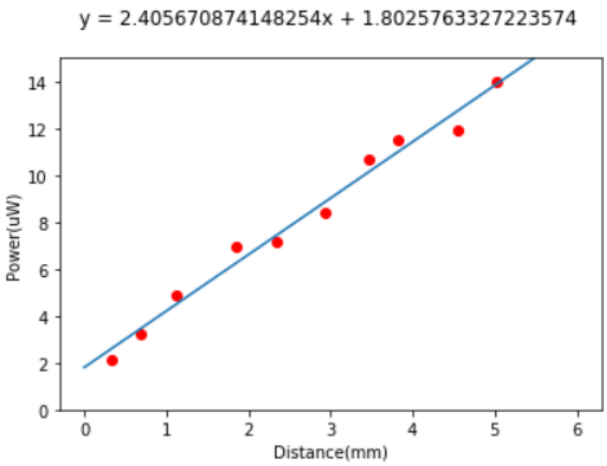

图4 Python程序拟合直线结果

可以看到程序拟合的结果与计算的结果几乎一致，验证了计算过程的正确性。因此可以得到回归方程为：

$$\hat{y}=\beta_0+\hat{\beta}_1\bar{x}=2.40567x+1.80258$$

Python程序处理代码

```
import numpy as np
from scipy import optimize
import matplotlib.pyplot as plt
import math
# 数据点
X = np.array([ 0.33,0.68,1.13,1.84,2.35,2.94,3.47,3.82,4.56,5.02])
Y = np.array([2.12,3.23,4.89,6.98,7.16,8.42,10.66,11.53,11.94,13.98])
# 几个求和的变量
sumx = 0     # X 的和
sumxx = 0    # X 的平方和
sumy = 0     # Y 的和
sumyy = 0    # Y 的平方和
sumxy = 0    # XY 的和
for i in X:
    sumx = sumx + i
    sumxx = sumxx + i * i
print("数值计算结果:")
print("X 求和:{:.4f}".format(sumx))
print("X 平方求和:{:.4f}".format(sumxx))
for j in Y:
    sumy = sumy + j
    sumyy = sumyy + j * j
print("Y 求和:{:.4f}".format(sumy))
print("Y 平方求和:{:.4f}".format(sumyy))
for k in [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]:
    sumxy =sumxy + X[k] * Y[k]
print("XY 求和:{:.4f}".format(sumxy))
# 计算 X 与 Y 的平均值
avex = sumx / 10
avey = sumy / 10
# 计算 lxx lyy lxy 的值
lxy = sumxy - 10 * avex * avey
lxx = sumxx - 10 * avex * avex
```

```
lyy = sumyy - 10 * avey * avey
# 计算β0 和β1
beta1 = lxy / lxx
beta0 = avey - beta1 * avex
print("beta1:{:.4f}".format(beta1))
print("beta0:{:.4f}".format(beta0))
# 计算 Se 的平方
SE2 = lyy - beta1 * beta1 * lxx
# 计算 Segma
Segma = math.sqrt(SE2 * SE2 / (10 -2))
print("Segma:{:.4f}".format(Segma))
print("回归直线：", "y = {}x + {} \n".format(beta1, beta0))
# 自定义函数
def residuals(p):
    k, b = p
    return Y - (k * X + b)
# 使用 Scipy 库进行拟合
r = optimize.leastsq(residuals, [0, 3])
k, b = r[0]   # 斜率和截距
print("自带拟合函数计算结果:")
print("拟合直线:","y = " , k,"x" , "+", b)
# 绘制图形
plt.plot(X, Y, 'ro', linewidth=1)
plt.title("y = {}x + {} \n".format(k, b))
A = np.linspace(0, 6, 6)
B = k * A + b
plt.plot(A, B)
plt.xlabel("Distance(mm)")
plt.ylabel("Power(uW)")
plt.ylim(0, 15)
plt.show()
```

程序输出结果：

数值计算结果:

X 求和:26.1400

X 平方求和:92.0272

Y 求和:80.9100

Y 平方求和:794.3023

XY 求和:268.5065

beta1:2.4057

beta0:1.8026

Segma:0.8901

回归直线：　y = 2.405670871375737x + 1.8025763422238228

自带拟合函数计算结果:

拟合直线: y =　2.405670874148254 x + 1.8025763327223574

五、结果分析与检验

现在对计算结果进行假设检验。采用 r 检验法进行检验。由于

$$\mathrm{R} = \sqrt{\frac{S_R^2}{S_r^2}} = \frac{l_{xy}}{\sqrt{l_{xx l_{yy}}}}$$

则检验统计值

$$r = \frac{l_{xy}}{\sqrt{l_{xx}l_{yy}}} = \frac{57.0078}{\sqrt{23.6972 \times 139.6595}} = 0.99095$$

此处取显著性水平$\alpha = 0.05$.且 n=10.则查表知

$$r_\alpha(n-2) = r_\alpha(8) = 0.632$$

拒绝域为

$$\{|r| > r_\alpha(n-2) = 0.632\}$$

本实验中

$$r = 0.99095 > 0.632$$

属于拒绝域中，因此拒绝原假设H_0，接受备择假设H_1，即认为

$$H_1\text{：}\ \beta_1 \neq 0$$

因此可以认为本实验中能量采集器悬臂梁末端位移量与输出电压之间的线性关系显著。

六、主要的结论与发现

经过上述的回归分析，可以认为普通压电式能量采集器悬臂梁的末端形变量与其输出功率之间存在显著的线性关系，并根据实验数据可以得到回归方程为

$$\hat{y} = \beta_0 + \hat{\beta}_1 \bar{x} = 2.40567x + 1.80258$$

同时使用了 r 检验法对计算结果进行了检验，证明了两者确实存在显著线性关系。

本次针对实测数据的分析结果可以用于预测本实验室中压电能量采集器的悬臂梁在其他振动环境下的输出功率，并据此改进悬臂梁的尺寸。对于其他结构的悬臂梁可以参考实验方法进行类似的回归分析，找到其对应的线性回归方程。

七、参考文献

[1] 钟波，刘琼荪，刘朝林，黄光辉.数理统计[M].北京：高等教育出版社，2015.