

Занятие 1. Предел последовательности

- I. последовательность
- II. предел по определению
- III. исследование сходимости последовательности

В аудитории

I. Последовательность

Задача 1. Написать первые пять членов последовательности.

- 1. $x_n = 1 + (-1)^n \frac{1}{n}$
- 2. $x_n = n(1 - (-1)^n)$

Задача 2. Написать формулу общего члена последовательности.

- 1. $-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$
- 2. $0, 2, 0, 2, \dots$
- 3. $1, 0, -3, 0, 5, 0, -7, 0, \dots$

II. Предел по определению

Задача 3. Доказать по определению предела, что число 1 является пределом последовательности $x_n = \frac{n}{n+1}$ (т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$)

Задача 4. Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \ln(n-1)}{3 \ln(n+1)} = \frac{2}{3}$, используя определение предела последовательности.

Задача 5. Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n + \sqrt[3]{n^2 - 26n + 24}} = 0$, используя определение предела последовательности.

Задача 6. Доказать, что последовательность $x_n = (-1)^n + 1/n$ не имеет предела.

Задача 7. Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - 3n}{3n + 6} = +\infty$.

III. Исследование сходимости последовательности

Задача 8. Дана последовательность a_n . Число A является пределом последовательности при $n \rightarrow \infty$.

Проведите исследование по плану:

- 1) Постройте график общего члена последовательности в зависимости от номера n .
- 2) Проиллюстрируйте сходимость (расходимость) последовательности:
 - a. вспомните определение предела последовательности, запишите его через ε , n_0 и неравенство;
 - b. выберите три различных положительных числа $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3$;
 - c. для каждого такого числа изобразите на графике соответствующую ε -окрестность предела A (« ε -трубу»);
 - d. для каждого выбранного ε найдите на графике номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$, после которого все члены последовательности попадают в ε -окрестность, или установите, что такого номера нет.

(!) Обратите внимание, что для качественной иллюстрации сгущения элементов последовательности a_n вокруг предела A (при $n \rightarrow \infty$) значения для ε следует выбирать так, чтобы соответствующие номера $n_0 = n_0(\varepsilon)$ получались действительно большими (например, $n_0(\varepsilon_1) > 10$, $n_0(\varepsilon_2) > 100$, $n_0(\varepsilon_3) > 1000$).

№	a_n	A
1.	$a_n = \frac{3n^2 + 2}{4n^2 - 1}$	$A = \frac{3}{4}$
2.	$a_n = \frac{2n^3}{n^3 - 2}$	$A = 2$
3.	$a_n = \frac{3n^2}{2 - n^2}$	$A = -3$
4.	$a_n = \frac{5n + 1}{10n - 3}$	$A = \frac{1}{2}$
5.	$a_n = \frac{4n - 3}{2n + 1}$	$A = 2$
6.	$a_n = \frac{2 - 3n^2}{4 + 5n^2}$	$A = -\frac{3}{5}$
7.	$a_n = \frac{3n^2 + n}{2n^2}$	$A = \frac{3}{2}$
8.	$a_n = \frac{3n - 1}{5n + 1}$	$A = \frac{3}{5}$

Консультация

Разбор задачи 8 на исследование сходимости последовательности.

Самостоятельно

I. Последовательность

Задача 9. Написать первые пять членов последовательности.

- $x_n = \frac{3n+5}{2n-3}$.
- $x_n = (-1)^n \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \pi n$

Задача 10. Написать формулу общего члена последовательности.

- $2, \frac{4}{3}, \frac{6}{5}, \frac{8}{7}, \dots$
- $-3, \frac{5}{3}, -\frac{7}{5}, \frac{9}{7}, -\frac{11}{9}, \dots$
- $0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \dots$

II. Предел по определению

Задача 11. Доказать по определению предела, что число 4 является пределом последовательности

$$x_n = \frac{4n-1}{n+5}.$$

Задача 12. Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 \cdot 3^n}{3^n - 2} = 5$, используя определение предела последовательности.

Задача 13. Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 3n}{3n^2 + 6} = \frac{4}{3}$, используя определение предела последовательности.

Задача 14. Доказать, что последовательность $x_n = \sin \frac{\pi n}{2}$ не имеет предела.

Задача 15. Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n - 5n^2}{3n + 6} = -\infty$.