Демо КР1 (предел).

N1

Задание 1. Метод математической индукции (1 балл)

Докажите при помощи метода математической индукции, что при $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\dots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3\cdot(3n+1)}.$$

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\dots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3(3n+1)}$$

База $n=1$:

$$\frac{1}{1\cdot 4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3(3n+1)} \Rightarrow \frac{1}{4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{12} \Rightarrow \frac{1}{4}=\frac{3}{12} \Rightarrow \frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

тогда:

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\dots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\frac{1}{(3(n+1)-2)(3(n+1)+1)}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3(3(n+1)+1)}$$

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{3(3n+1)}+\frac{1}{(3(n+1)-2)(3(n+1)+1)}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3(3(n+1)+1)}$$

$$\frac{3n+\cancel{1}-\cancel{1}}{3(3n+1)}+\frac{1}{(3n+1)(3n+4)}=\frac{3n+3+\cancel{1}-\cancel{1}}{3(3n+3+1)}$$

$$\frac{3n(3n+4)+3}{3(3n+1)(3n+4)}=\frac{3n+3}{3(3n+4)}$$

$$\frac{\cancel{3}(n(3n+4)+1)}{\cancel{3}(3n+1)(3n+4)}=\frac{\cancel{3}(n+1)}{\cancel{3}(3n+4)}$$

$$\frac{3n^2+4n+1}{(3n+1)(3n+4)}=\frac{n+1}{3n+4} \Rightarrow \frac{3n^2+3n+n+1}{(3n+1)(3n+4)}=\frac{n+1}{3n+4}$$

$$\frac{3n(n+1)+(n+1)}{(3n+1)(3n+4)}=\frac{n+1}{3n+4} \Rightarrow \frac{(n+1)(3n+1)}{(3n+1)(3n+4)}=\frac{n+1}{3n+4}$$

$$\Rightarrow \frac{n+1}{3n+4}=\frac{n+1}{3n+4}$$

№2.

Задание 2. Последовательность и её предел

Дана последовательность

$$x_n = \frac{2n+1}{n+1}.$$

$$x_n = \frac{2n+1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 2$$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 : |x_n - a| < \varepsilon$

$$\left|\frac{2n+1}{n+1} - 2\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{\cancel{2n+1-2n-2}}{n+1}\right| < \varepsilon$$

$$\left|-\frac{1}{n+1}\right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \varepsilon \Rightarrow n+1 > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$$

- Докажите сходимость x_n, используя критерий Коши.

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n, m \geq N : |x_n - x_m| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim x_n = A \in \mathbb{R}$

$\varepsilon = \frac{1}{2}$ $\quad n = N$

$m = 2N$

$$\left|\frac{2N+1}{N+1} - \frac{4N+1}{2N+1}\right| < \frac{1}{2}$$

$$\left|\frac{(2N+1)^2-(4N+1)(N+1)}{(N+1)(2N+1)}\right| < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{4N^2+4N+1-4N^2-4N-N-1}{(N+1)(2N+1)} < \frac{1}{2}$$

$$\frac{N}{2N^2+3N+1} < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{N}{2N^2+2N+N+1} < \frac{1}{2}$$

$$\frac{N}{(N+1)(2N+1)} < \frac{1}{2}$$

$$\frac{N}{(N+1)(2N+1)} - \frac{1}{2} < 0$$

$$\frac{2N-(N+1)(2N+1)}{2(N+1)(2N+1)} < 0$$

$\Rightarrow \dfrac{-2N^2-N-1}{2(N+1)(2N+1)} < 0$ — верно при любых натуральных N,

значит x_n — сходимая

- Докажите сходимость x_n и найдите её предел, используя теорему Вейерштрасса.

$$x_n = \frac{2n+1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = 2$$

следовательно x_n - огр. сверху $x_n < 2$

$$x_n = \frac{2n+1}{n+1} \quad x_{n+1} = \frac{2n+3}{n+2}$$

$$x_{n+1} - x_n = \frac{(2n+3)(n+1)-(2n+1)(n+2)}{(n+1)(n+2)} =$$

$$= \frac{2n^2+2n+3n+3-2n^2-4n-n-2}{(n+1)(n+2)} =$$

$= \dfrac{1}{(n+2)(n+1)} > 0$ при любом $n \in \mathbb{N}$

значит x_n явл. огр. возр. послед
$\Rightarrow$ x_n сходится к пределу $=2$

- Найдите или укажите, что не существуют
$$\sup x_n, \quad \inf x_n, \quad \max x_n, \quad \min x_n.$$

$\sup x_n$
т.к. x_n явл. огр. возр. послед, то
по теореме Вейерштрасса:
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup x_n = 2$

$\inf x_n$ $\min x_n$
т.к. $n \in \mathbb{N}$, то $\min x_n = x_1 = 1{,}5 = \inf x_n$

$\max x_n$
$\exists M = \max x_n$, тогда $M < 2$, значит
$M = \frac{M+M}{4} < \frac{M+2}{4} < \frac{2+2}{4} = 2$ – противоречие
значит $\nexists \max x_n$

$\boxed{№3}$

Задание 3. Подпоследовательности и их пределы

Дана последовательность
$$x_n = (-1)^n \left(\frac{n^2 + 3n + 1}{3n^2 + 5} \right).$$
Найдите и обоснуйте множество частичных пределов последовательности x_n. Выпишите $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$.

$$x_{2n} = \frac{n^2+3n+1}{3n^2+5}$$

$$x_{2n-1} = -\frac{n^2+3n+1}{3n+5}$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3n+1}{3n^2+5} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}\left(1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{\cancel{n^2}\left(3+\frac{5}{n^2}\right)} = \frac{1}{3}$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} -\frac{n^2+3n+1}{3n^2+5} = -\frac{1}{3}$$

Задание 3. Подпоследовательности и их пределы

Дана последовательность

$$x_n = (-1)^n \left(\frac{n^2 + 3n + 1}{3n^2 + 5} \right).$$

Найдите и обоснуйте множество частичных пределов последовательности x_n. Выпишите $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$.

$$x_{2n} = \frac{n^2+3n+1}{3n^2+5}$$

$$x_{2n-1} = -\frac{n^2+3n+1}{3n+5}$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \lim_{n\to\infty} x_{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3n+1}{3n^2+5} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}\left(1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{\cancel{n^2}\left(3+\frac{5}{n^2}\right)} = \frac{1}{3}$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \lim_{n\to\infty} x_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} -\frac{n^2+3n+1}{3n^2+5} = -\frac{1}{3}$$

$E = \left\{-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right\}$ – мн-во частичн. пределов

$\boxed{№4}$

Задание 4. Предел функции (1 балл)

- Докажите, используя определение предела по Коши, что

$$\lim_{x\to1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = 2\,.$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x: 0 < |x - x_0| < \delta \quad |f(x) - A| < \varepsilon \iff \lim_{x\to x_0} f(x) = A$$

$$\left| \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} - 2 \right| < \varepsilon \iff \left| \frac{x-1-2(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}-1} \right| < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < \frac{x-2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < \frac{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x} - \sqrt{x} - (\sqrt{x} - 1)}{\sqrt{x} - 1} < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) - (\sqrt{x} - 1)}{\sqrt{x} - 1} < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < \sqrt{x} - 1 < \varepsilon$$

$$1 - \varepsilon < \sqrt{x}$$

$$1 - 2\varepsilon + \varepsilon^2 < x$$

$$\sqrt{x} < 1 + \varepsilon$$

$$x < 1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2$$

$$\delta = \min\{\varepsilon^2 + 2\varepsilon + 1; \varepsilon^2 - 2\varepsilon + 1\}$$

$$\Rightarrow 2 - \delta < x < 2 + \delta$$

- Докажите, что предела не существует, используя определение предела по Гейне:

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right).$$

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0, \quad x_n \neq x_0 \qquad \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x)$$

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = A$$

$$x_n = \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \qquad \tilde{x}_n = -\frac{1}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

$$f(x_n) = \operatorname{arctg}\frac{1}{x_n} = \qquad f(\tilde{x}_n) = \operatorname{arctg} -\frac{1}{x_n} =$$

$$= \operatorname{arctg}\frac{1}{\frac{1}{n}} = \qquad = \operatorname{arctg} -\frac{1}{\frac{1}{n}} =$$

$$= \operatorname{arctg} n \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{\pi}{2} \qquad = \operatorname{arctg}(-n) \xrightarrow[n \to \infty]{} -\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{2} \neq -\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \lim \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) \nexists$$

№5

Задание 5. Вычисление пределов (4 балла)

Вычислите, используя арифметические свойства пределов, замечательные пределы и следствия из них:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n+4}-\sqrt{n^2-n+1}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+3n+4}-\sqrt{n^2-n+1})(\sqrt{n^2+3n+4}+\sqrt{n^2-n+1})}{(\sqrt{n^2+3n+4}+\sqrt{n^2-n+1})}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n+4-n^2+n-1}{\sqrt{n^2+3n+4}+\sqrt{n^2-n+1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4n-1}{\sqrt{n^2+3n+4}+\sqrt{n^2-n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{4}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}=$$

$$=2$$

$$\lim_{x\to-1}\frac{4x^2+5x+1}{x^3+1}$$

$$\lim_{x\to-1}\frac{4(x+\frac{1}{4})\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)}(x^2-2x+1)}=\lim_{x\to-1}\frac{4x+1}{x^2-2x+1}=$$

$$=\frac{-4+1}{1+2+1}=-1$$

$$\lim_{x\to2}(3-x)^{1/\operatorname{tg}(x-2)}$$

$$\lim_{x\to2}(1-(x-2))^{\frac{1}{tg(x-2)}}$$

Пусть $(x-2)=t$, тогда:

$$\lim_{t\to0}(1+(-t))^{\frac{1}{tgt}}=\lim_{t\to0}\left((1+(-t))^{-\frac{1}{t}}\right)^{-\frac{t}{tgt}}=$$

$$=\lim_{t\to0}e^{-\frac{t}{tgt}}=e^{\lim\limits_{t\to0}-\frac{t}{tgt}}=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\arcsin(x/2)}{1-\cos 4x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{x}{2}}{\frac{16x^2}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{2x^2}}{16\,\cancel{x^2\cdot 2}}=\frac{1}{16}$$