Занятие 5. Подпоследовательности

I. подпоследовательности, верхний и нижний пределы
II. критерий Коши

Источники:

[Кудрявцев] Кудрявцев Л.Д. и др. Сборник задач по математическому анализу Том 1 (2003)

[Альсевич] Альсевич Л. А. и др. Пределы. Предел последовательности. БГУ (2011)

Составители: Шиманская Г.С., Правдин К.В.
Редактор: Правдин К.В.

В аудитории

I. Подпоследовательности, верхний и нижний пределы

Задача 1. Указать сходящуюся подпоследовательность последовательности $x_n = \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)$.

Ответы: [Кудрявцев с. 150 задание 109]

например: $x_{4k} = 0,\ \ x_{8k-1} = x_{8k-3} = -\frac{1}{\sqrt{2}},\ \ x_{8k-5} = x_{8k-7} = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \ x_{8k-2} = -1,\ \ x_{8k-6} = 1,\ \ k \in \mathbb{N}.$

Задача 2. Найти все частичные пределы последовательности $\{x_n\}$, если x_n равно:

а) $\dfrac{(-1)^n}{n+1}$; б) $\dfrac{n^2}{n+5}$; в) $(-1)^n$.

Ответы: [Кудрявцев с. 150, задание 113]

а) 0; б) $+\infty$; в) $1, -1$.

Задача 3. Выделив подпоследовательности, доказать, что последовательность $x_n = \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right)$ расходится. Найти множество частичных пределов, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$.

Ответы: [Кудрявцев с. 150, задание 116]

$\left\{\pm\frac{1}{2},\ \pm 1\right\},\ \ \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = 1,\ \ \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = -1;$

Задача 4. Выделив подпоследовательности, доказать, что последовательность $x_n = (-1)^{n-1}\left(2 + \frac{3}{n}\right)$ расходится. Найти $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$, а также $\sup\{x_n\}$ и $\inf\{x_n\}$.

Решение:

$\exists \{x_{2n-1}\} = (-1)^{2n-1}\left(2 + \frac{3}{2n-1}\right) = 2 + \frac{3}{2n-1}$

$\{x_{2n}\} = (-1)^{2n}\left(2 + \frac{3}{2n}\right) = -2 - \frac{3}{2n}$

Все члены $\{x_n\}$ сод-ся в $\{x_{2n-1}\}$ и $\{x_{2n}\}$

$x_{2n} < x_{2n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$x_{2n-1} \downarrow \quad x_{2n} \uparrow \Rightarrow$

$x_1 = \sup\{x_n\} = 5$

$x_2 = \inf\{x_n\} = -\frac{7}{2}$

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \lim\limits_{x\to\infty} x_{2n-1} = 2$

$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = -2$

II. Критерий Коши

Задача 5. При помощи критерия Коши доказать, что последовательность x_n сходится:

$x_n = \dfrac{\cos 1}{3} + \dfrac{\cos 2}{3^2} + \dots + \dfrac{\cos n}{3^n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Решение: [Кудрявцев с. 134 пример 17]

▲ Оценим модуль разности $x_{n+p} - x_n$:

$$|x_{n+p} - x_n| = \left| \frac{\cos(n+1)}{3^{n+1}} + \dots + \frac{\cos(n+p)}{3^{n+p}} \right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{3^{n+1}} + \dots + \frac{1}{3^{n+p}} = \frac{1}{3^{n+1}} \cdot \frac{1 - 1/3^p}{1 - 1/3} < \frac{1}{2 \cdot 3^n} < \frac{1}{3^n}.$$

Пусть ε — произвольное положительное число. Поскольку $\lim(1/3^n) = 0$, для этого ε существует N такое, что для любого $n \geqslant N$ верно неравенство $1/3^n < \varepsilon$. Значит, если $n \geqslant N$, а p — произвольное натуральное число, то
$$|x_{n+p} - x_n| < \frac{1}{3^n} < \varepsilon.$$
Таким образом, условие Коши выполнено, и поэтому данная последовательность сходится. ▲

Задача 6. При помощи критерия Коши доказать, что предел последовательности x_n не существует:

а) $x_n = \sin^2 n$;
б) $x_n = \cos^2 n - 1$.

Консультация

I. Подпоследовательности, верхний и нижний пределы

Задача 7. Указать сходящуюся подпоследовательность последовательности x_n:

$x_n = n - 5\left[\dfrac{n-1}{5}\right]$, где $[x]$ – целая часть числа x (наибольшее целое, не превосходящее x).

Ответ: [Кудрявцев с. 150 задание 109]

например: $x_{5k} = 5$, $x_{5k-1} = 4$, $x_{5k-2} = 3$, $x_{5k-3} = 2$, $x_{5k-4} = 1$, $k \in \mathbb{N}$.

Задача 8. Найти все частичные пределы последовательности x_n:

а) $\dfrac{1-n^3}{1+n^2}$; б) $3^{(-1)^n \cdot n}$.

Ответы: [Кудрявцев с. 150, задание 113]

а) $-\infty$; б) $0, +\infty$.

Задача 9. Выделив подпоследовательности, доказать, что последовательность x_n расходится. Найти множество частичных пределов, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$.

а) $x_n = \left(\dfrac{3}{2}\cos\left(\dfrac{2\pi n}{3}\right)\right)^n$;

б) $\{x_n\} = \left\{1, \dfrac{1}{10}, \dfrac{2}{10}, \dots, \dfrac{9}{10}, \dfrac{1}{100}, \dfrac{2}{100}, \dots, \dfrac{99}{100}, \dots , \dfrac{1}{10^n}, \dfrac{2}{10^n}, \dots, \dfrac{10^n - 1}{10^n}, \dots \right\}$.

Ответы: [Кудрявцев с. 150, задание 116]

а) $\{0, +\infty\}$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = +\infty$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = 0$;
б) $[0; 1]$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = 1$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = 0$.

Задача 10. Выделив подпоследовательности, доказать, что последовательность x_n расходится. Найти $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$, а также $\sup\{x_n\}$, $\inf\{x_n\}$, если x_n равно:

а) $\dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{1+(-1)^n}{2}$; б) $\dfrac{n^2 \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) + 1}{n+1}$.

Ответы: [Кудрявцев с. 150, задание 117]

а) $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = 1$, $\sup\{x_n\} = \frac{3}{2}$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $\inf\{x_n\} = -1$;

б) $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n\} = +\infty$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n\} = -\infty$.

Задача 11. Для последовательности x_n найти $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$, а также $\sup\{x_n\}$, $\inf\{x_n\}$:

$x_n = \dfrac{(3\cos(\pi n/2) - 1)\cdot n + 1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Решение: [Кудрявцев с. 133 пример 16]

▲ При $n = 4k$ имеем

$$x_n = \frac{2n+1}{n} = 2 + \frac{1}{n},$$

и, значит, $\lim\limits_{k\to\infty} x_{4k} = 2$, $2 < x_{4k} \leqslant 2 + 1/4$, причем $x_4 = 9/4$. При $n = 4k+1$ или $n = 4k+3$ имеем

$$x_n = \frac{-n+1}{n} = -1 + \frac{1}{n},$$

и, значит, $-1 < x_n < 0$, $\lim\limits_{k\to\infty} x_{4k+1} = \lim\limits_{k\to\infty} x_{4k+3} = -1$. При $n = 4k+2$ имеем

$$x_n = \frac{-4n+1}{n} = -4 + \frac{1}{n},$$

значит, $-4 < x_n < 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_{4k+2} = -4$.

Таким образом, числа 2, -1, -4 являются частичными пределами данной последовательности. Рассмотренные четыре подпоследовательности $\{x_{4k}\}$, $\{x_{4k+1}\}$, $\{x_{4k+2}\}$, $\{x_{4k+3}\}$ составляют вместе всю данную последовательность. Отсюда следует, что других частичных пределов данная последовательность не имеет.

Очевидно,

$$\varlimsup_{n\to\infty} x_n = x - 2, \qquad \varliminf_{n\to\infty} x_n = -4.$$

Из предыдущих рассмотрений следует также, что

$$\sup\{x_n\} = x_4 = 9/4, \quad \inf\{x_n\} = -4. \ ▲$$

II. Критерий Коши

Задача 12. При помощи критерия Коши доказать, что последовательность x_n сходится:

$x_n = \dfrac{\cos 1}{1\cdot 2} + \dfrac{\cos 2}{2\cdot 3} + \dots + \dfrac{\cos n}{n(n+1)}$, $n \in \mathbb{N}$.

Решение: [Альсевич с. 45 пример 4.28]

Р е ш е н и е. Возьмем $\forall \varepsilon > 0$. Рассмотрим

$$\left|a_{n+p} - a_n\right| =$$

$$= \left|\frac{\cos 1}{1\cdot 2} + \frac{\cos 2}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{\cos n}{n(n+1)} + \frac{\cos(n+1)}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{\cos(n+p)}{(n+p)(n+p+1)} - \right.$$

$$\left. - \frac{\cos 1}{1\cdot 2} - \frac{\cos 2}{2\cdot 3} - \ldots - \frac{\cos n}{n(n+1)}\right| = \left|\frac{\cos(n+1)}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{\cos(n+p)}{(n+p)(n+p+1)}\right| \le$$

$$\le [|a+b| \le |a|+|b|] \le \frac{|\cos(n+1)|}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{|\cos(n+p)|}{(n+p)(n+p+1)} \le [|\cos\alpha| \le 1\ \forall\alpha] \le$$

$$\le \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{1}{(n+p)(n+p+1)} = \left[\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right] =$$

$$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{n+p} - \frac{1}{n+p+1} =$$

$$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} \le [\forall p \ge 0] \le \frac{1}{n+1} \le \frac{1}{n} \le \varepsilon \Leftrightarrow n \ge \frac{1}{\varepsilon}.$$

Таким образом, $\forall\varepsilon > 0$, $\exists \nu_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}$, $\forall n \ge \nu_\varepsilon$, $\forall p \ge 0 \Rightarrow |a_{n+p} - a_n| \le \varepsilon$.

А это означает, что для последовательности (a_n) выполняется условие Коши, т. е. последовательность является фундаментальной. Согласно достаточному условию критерия Коши, последовательность (a_n) сходится.

Задача 13. При помощи критерия Коши доказать, что предел последовательности x_n не существует:

а) $x_n = \sin n \cos n$;
б) $x_n = \sin^2 n - \cos^2 n$.

Самостоятельно

I. Подпоследовательности, верхний и нижний пределы

Задача 14. Найти все частичные пределы последовательности $x_n = n\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)$.

Ответы: [Кудрявцев с. 150, задание 113]

$0, \pm\infty$.

Задача 15. Выделив подпоследовательности, доказать, что последовательность $x_n = (-1)^n \frac{2n+1}{n}$ расходится. Найти множество частичных пределов, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$.

Ответы: [Кудрявцев с. 150, задание 116]

$\{\pm 2\}$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = 2$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = -2$.

Задача 16. Выделив подпоследовательности, доказать, что последовательность $\{x_n\}$ расходится. Найти $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$, а также $\sup\{x_n\}$, $\inf\{x_n\}$, если x_n равно:

а) $(-1)^n \dfrac{3n-1}{n+2}$; б) $\dfrac{((-1)^n - 1)n^2 + n + 1}{n}$.

Ответы: [Кудрявцев с. 150, задание 117]

а) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \sup\{x_n\} = 3$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \inf\{x_n\} = -3$;
б) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = 1$, $\sup\{x_n\} = \frac{3}{2}$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \inf\{x_n\} = -\infty$.

II. Критерий Коши

Задача 17. При помощи критерия Коши доказать, что последовательность $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\operatorname{arctg}(2^k + k)}{2^k}$ сходится.

[Альсевич с. 45 упражнение 4.5]

Задача 18. При помощи критерия Коши доказать, что предел последовательности x_n не существует:

а) $x_n = \sin n \cos n$;
б) $x_n = \sin^2 n - \cos^2 n$.