Практика 12. Точки разрыва.

где $e=2{,}71828\ldots$ — основание натуральных ...

Наряду с введенным выше понятием предела функции используют также следующее понятие *одностороннего* предела. Число a называют *пределом функции* $y=f(x)$ *в точке* x_0 *справа* (*слева*) и пишут $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=a$ $\left(\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=a\right)$, если для любого $\varepsilon>0$ существует число $\delta(\varepsilon)>0$ такое, что из условия $0<x-x_0<\delta(\varepsilon)$ $(-\delta(\varepsilon)<x-x_0<0)$ следует $|f(x)-a|<\varepsilon$. Аналогично вводится понятие одностороннего предела на бесконечности $\left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right.$ и $\left.\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right)$.

В задачах 4.1—4.3, пользуясь только определением

3. Непрерывность функции в точке. Классификация точек разрыва. Функция $y=f(x)$ с областью определения D называется *непрерывной* в точке x_0, если выполнены следующие три условия:

а) функция $y=f(x)$ определена в точке x_0, т. е. $x_0\in D$;

б) существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$;

в) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

щению аргумента $\Delta x=x-x_0$.

Если в точке x_0 нарушено хотя бы одно из условий а)—в), то x_0 называется точкой разрыва функции $y=f(x)$. При этом различают следующие случаи:

а) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ существует, но функция не определена в точке x_0 или нарушено условие $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$. В этом случае x_0 называется *точкой устранимого разрыва* функции.

б) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ не существует. Если при этом существуют оба односторонних предела $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ (очевидно, не равные друг другу), то x_0 называется *точкой разрыва 1-го рода*.

в) В остальных случаях x_0 называется *точкой разрыва 2-го рода*.

27

Найти точки разрыва функции, исследовать их характер, в случае устранимого разрыва доопределить функцию «по непрерывности»:

4.112. $f(x)=\dfrac{1}{x^2(x-1)}$. **4.113.** $f(x)=\dfrac{|3x-5|}{3x-5}$.

4.114. $f(x)=\dfrac{(1+x)^n-1}{x}$, $n\in\mathbb{N}$. **4.115.** $f(x)=\dfrac{1}{x}\sin x$.

$$\textbf{4.124.}\quad f(x)=\begin{cases} 2^x, & -1\leqslant x<1,\\ x-1, & 1<x\leqslant 4,\\ 1, & x=1.\end{cases}$$

Ответы:

4.101. 2. **4.102.** 1/6. **4.109.** $A=3$. **4.110.** $a=2$. **4.111.** $b=\pi a/2$. **4.112.** $x_1=0$, $x_2=1$ — точки разрыва второго рода. **4.113.** $x=5/3$ — точка разрыва первого рода. **4.114.** $x=0$ — точка устранимого разрыва; $f(0)=n$. **4.115.** $x=0$ — точка устранимого разрыва; $f(0)=1$. **4.116.** $x=0$ — точка устранимого разрыва; $f(0)=1$. **4.117.** $x_1=2$,

разрыва, $f(1)=0$; $x_2=-1$ — точка разрыва второго рода. **4.123.** $x=0$ — точка устранимого разрыва; $f(0)=1/2$. **4.124.** $x=1$ — точка разрыва первого рода. **4.125.** $x=1$ — точка разрыва первого рода. **4.126.** $x=2{,}5$ — точка разрыва первого рода. **4.127.** $x=\pi/4$ — точка разрыва первого