УНИВЕРСИТЕТ ИТМО
Факультет программной инженерии и компьютерной техники
Дисциплина «Дискретная математика»

Курсовая работа
Часть 1
Вариант 125

Студент
Пчелкин Илья Игоревич
P3106

Преподаватель
Поляков Владимир Иванович

Санкт-Петербург, 2024 г.

Функция $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ принимает значение 1 при $8 \leq |x_5x_2x_4 - 1x_1x_3| < 12$ и неопределенное значение при $x_5x_2x_4 = 7$.

Таблица истинности

№	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$x_5x_2x_4$	$1x_1x_3$	$x_5x_2x_4$	f
0	0	0	0	0	0	0	4	0	0
1	0	0	0	0	1	4	4	4	1
2	0	0	0	1	0	1	4	1	0
3	0	0	0	1	1	5	4	5	1
4	0	0	1	0	0	0	5	0	0
5	0	0	1	0	1	4	5	4	1
6	0	0	1	1	0	1	5	1	0
7	0	0	1	1	1	5	5	5	1
8	0	1	0	0	0	2	4	2	0
9	0	1	0	0	1	6	4	6	1
10	0	1	0	1	0	3	4	3	0
11	0	1	0	1	1	7	4	7	d
12	0	1	1	0	0	2	5	2	0
13	0	1	1	0	1	6	5	6	1
14	0	1	1	1	0	3	5	3	1
15	0	1	1	1	1	7	5	7	d
16	1	0	0	0	0	0	6	0	0
17	1	0	0	0	1	4	6	4	1
18	1	0	0	1	0	1	6	1	0
19	1	0	0	1	1	5	6	5	1
20	1	0	1	0	0	0	7	0	0
21	1	0	1	0	1	4	7	4	1
22	1	0	1	1	0	1	7	1	1
23	1	0	1	1	1	5	7	5	0
24	1	1	0	0	0	2	6	2	1
25	1	1	0	0	1	6	6	6	0
26	1	1	0	1	0	3	6	3	1
27	1	1	0	1	1	7	6	7	d
28	1	1	1	0	0	2	7	2	1
29	1	1	1	0	1	6	7	6	0
30	1	1	1	1	0	3	7	3	1
31	1	1	1	1	1	7	7	7	d

Аналитический вид

Каноническая ДНФ:

$$\begin{aligned} f = {} & \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}\,x_5 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,x_4\,x_5 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\,\overline{x_4}\,x_5 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\,x_4\,x_5 \vee \overline{x_1}\,x_2\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}\,x_5 \vee \overline{x_1}\,x_2\,x_3\,\overline{x_4}\,x_5 \vee \\ & \vee \overline{x_1}\,x_2\,x_3\,x_4\,\overline{x_5} \vee x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}\,x_5 \vee x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,x_4\,x_5 \vee x_1\,\overline{x_2}\,x_3\,\overline{x_4}\,x_5 \vee x_1\,\overline{x_2}\,x_3\,x_4\,\overline{x_5} \vee x_1\,x_2\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}\,\overline{x_5} \vee \\ & \vee x_1\,x_2\,\overline{x_3}\,x_4\,\overline{x_5} \vee x_1\,x_2\,x_3\,\overline{x_4}\,\overline{x_5} \vee x_1\,x_2\,x_3\,x_4\,\overline{x_5} \end{aligned}$$

Каноническая КНФ:

$$\begin{aligned} f = {} & (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5)\,(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee x_5)\,(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee x_5)\,(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee x_5) \\ & (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5)\,(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee x_5)\,(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee x_5)\,(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5) \\ & (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee x_5)\,(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee x_5)\,(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5})\,(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4 \vee \overline{x_5}) \\ & (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee \overline{x_5}) \end{aligned}$$

Минимизация булевой функции методом Квайна–Мак-Класки

Кубы различной размерности и простые импликанты

$K^0(f)$		
m_1	00001	✓
m_3	00011	✓
m_5	00101	✓
m_9	01001	✓
m_{17}	10001	✓
m_{24}	11000	✓
m_7	00111	✓
m_{13}	01101	✓
m_{14}	01110	✓
m_{19}	10011	✓
m_{21}	10101	✓
m_{22}	10110	✓
m_{26}	11010	✓
m_{28}	11100	✓
m_{11}	01011	✓
m_{30}	11110	✓
m_{15}	01111	✓
m_{27}	11011	✓
m_{31}	11111	✓

$K^1(f)$		
m_1-m_3	000X1	✓
m_1-m_5	00X01	✓
m_1-m_9	0X001	✓
m_1-m_{17}	X0001	✓
m_5-m_7	001X1	✓
m_3-m_7	00X11	✓
m_9-m_{11}	010X1	✓
m_9-m_{13}	01X01	✓
m_3-m_{11}	0X011	✓
m_5-m_{13}	0X101	✓
m_{17}-m_{19}	100X1	✓
m_{17}-m_{21}	10X01	✓
m_{24}-m_{26}	110X0	✓
m_{24}-m_{28}	11X00	✓
m_3-m_{19}	X0011	✓
m_5-m_{21}	X0101	✓
m_{14}-m_{15}	0111X	✓
m_{13}-m_{15}	011X1	✓
m_{11}-m_{15}	01X11	✓
m_7-m_{15}	0X111	✓
m_{26}-m_{27}	1101X	✓
m_{28}-m_{30}	111X0	✓
m_{26}-m_{30}	11X10	✓
m_{19}-m_{27}	1X011	✓
m_{22}-m_{30}	1X110	
m_{11}-m_{27}	X1011	✓
m_{14}-m_{30}	X1110	✓
m_{30}-m_{31}	1111X	✓
m_{27}-m_{31}	11X11	✓
m_{15}-m_{31}	X1111	✓

$K^2(f)$		
m_1-m_3-m_5-m_7	00XX1	✓
m_1-m_3-m_9-m_{11}	0X0X1	✓
m_1-m_5-m_9-m_{13}	0XX01	✓
m_1-m_3-m_{17}-m_{19}	X00X1	
m_1-m_5-m_{17}-m_{21}	X0X01	
m_9-m_{11}-m_{13}-m_{15}	01XX1	✓
m_5-m_7-m_{13}-m_{15}	0X1X1	✓
m_3-m_7-m_{11}-m_{15}	0XX11	✓
m_{24}-m_{26}-m_{28}-m_{30}	11XX0	
m_3-m_{11}-m_{19}-m_{27}	XX011	
m_{26}-m_{27}-m_{30}-m_{31}	11X1X	
m_{14}-m_{15}-m_{30}-m_{31}	X111X	
m_{11}-m_{15}-m_{27}-m_{31}	X1X11	

$K^3(f)$	
m_1-m_3-m_5-m_7-m_9-m_{11}-m_{13}-m_{15}	0XXX1

$Z(f)$
1X110
X00X1
X0X01
11XX0
XX011
11X1X
X111X
X1X11
0XXX1

Таблица импликант

Вычеркнем строки, соответствующие существенным импликантам (это те, которые покрывают вершины, не покрытые другими импликантами), а также столбцы, соответствующие вершинам, покрываемым существенными импликантами. Затем вычеркнем импликанты, не покрывающие ни одной вершины.

Простые импликанты		0-кубы														
		0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
		0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
		0	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
		0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
		1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0
		1	3	5	7	9	13	14	17	19	21	22	24	26	28	30
	~~1X110~~											X				X
A	X00X1	X	X						X	X						
	~~X0X01~~	X		X					X		X					
	~~11XX0~~												X	X	X	X
B	XX011		X							X						
	~~11X1X~~													X		X
	~~X111X~~							X								X
	~~X1X11~~															
	~~0XXX1~~	X	X	X	X	X	X									

Ядро покрытия:

$$T = \begin{Bmatrix} 0XXX1 \\ X0X01 \\ X111X \\ 1X110 \\ 11XX0 \end{Bmatrix}$$

Получим следующую упрощенную импликантную таблицу:

Простые импликанты		0-кубы
		1
		0
		0
		1
		1
		19
A	X00X1	X
B	XX011	X

Метод Петрика:

Запишем булево выражение, определяющее условие покрытия всех вершин:

$Y = A \vee B$

Возможны следующие покрытия:

$$C_1 = \begin{Bmatrix} T \\ A \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0XXX1 \\ X0X01 \\ X111X \\ 1X110 \\ 11XX0 \\ X00X1 \end{Bmatrix} \qquad C_2 = \begin{Bmatrix} T \\ B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0XXX1 \\ X0X01 \\ X111X \\ 1X110 \\ 11XX0 \\ XX011 \end{Bmatrix}$$

$S_1^a = 18$ $S_2^a = 18$

$S_1^b = 24$ $S_2^b = 24$

Рассмотрим следующее минимальное покрытие:

$$C_{\min} = \begin{Bmatrix} 0XXX1 \\ X0X01 \\ X111X \\ 1X110 \\ 11XX0 \\ X00X1 \end{Bmatrix}$$

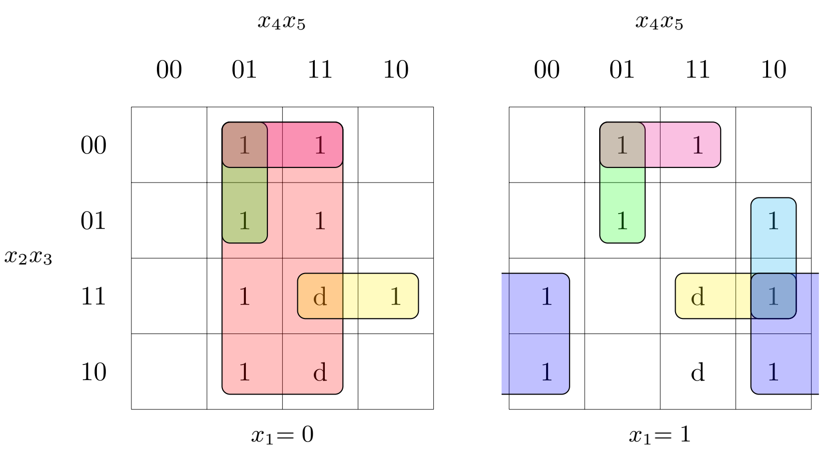
$$S^a = 18$$
$$S^b = 24$$

Этому покрытию соответствует следующая МДНФ:

$$f = \overline{x_1}\, x_5 \vee \overline{x_2}\,\overline{x_4}\, x_5 \vee x_2\, x_3\, x_4 \vee x_1\, x_3\, x_4\, \overline{x_5} \vee x_1\, x_2\, \overline{x_5} \vee \overline{x_2}\,\overline{x_3}\, x_5$$

Минимизация булевой функции на картах Карно

Определение МДНФ

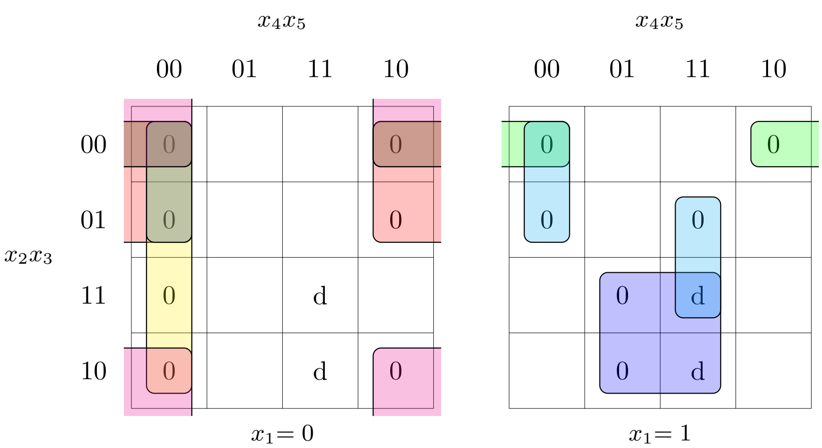


$$C_{\min} = \begin{Bmatrix} 0XXX1 \\ X0X01 \\ X111X \\ 1X110 \\ 11XX0 \\ X00X1 \end{Bmatrix}$$

$$S^a = 18$$
$$S^b = 24$$

$$f = \overline{x_1}\, x_5 \vee \overline{x_2}\,\overline{x_4}\, x_5 \vee x_2\, x_3\, x_4 \vee x_1\, x_3\, x_4\, \overline{x_5} \vee x_1\, x_2\, \overline{x_5} \vee \overline{x_2}\,\overline{x_3}\, x_5$$

Определение МКНФ



$$C_{\min} = \begin{Bmatrix} 00XX0 \\ X00X0 \\ 0XX00 \\ X0X00 \\ 11XX1 \\ 0X0X0 \\ 1X111 \end{Bmatrix}$$

$$S^a = 22$$
$$S^b = 29$$

$$f = (x_1 \vee x_2 \vee x_5)\,(x_2 \vee x_3 \vee x_5)\,(x_1 \vee x_4 \vee x_5)\,(x_2 \vee x_4 \vee x_5)\,(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_5})\,(x_1 \vee x_3 \vee x_5)\,(\overline{x_1} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5})$$

Преобразование минимальных форм булевой функции

Факторизация и декомпозиция МДНФ

$$f = \overline{x_1}\,x_5 \vee \overline{x_2}\,\overline{x_4}\,x_5 \vee x_2\,x_3\,x_4 \vee x_1\,x_3\,x_4\,\overline{x_5} \vee x_1\,x_2\,\overline{x_5} \vee \overline{x_2}\,\overline{x_3}\,x_5 \qquad S_Q = 24 \quad \tau = 2$$

$$f = x_5\,\left(\overline{x_1} \vee \overline{x_2}\,\left(\overline{x_3} \vee \overline{x_4}\right)\right) \vee x_1\,\overline{x_5}\,\left(x_2 \vee x_3\,x_4\right) \vee x_2\,x_3\,x_4 \qquad S_Q = 21 \quad \tau = 5$$

$$\varphi = x_1\,\left(x_2 \vee x_3\,x_4\right)$$

$$\overline{\varphi} = \overline{x_1} \vee \overline{x_2}\,\left(\overline{x_3} \vee \overline{x_4}\right)$$

$$f = x_5\,\overline{\varphi} \vee \varphi\,\overline{x_5} \vee x_2\,x_3\,x_4 \qquad S_Q = 17 \quad \tau = 6$$

Факторизация и декомпозиция МКНФ

$$\begin{aligned} f = &\left(x_1 \vee x_2 \vee x_5\right)\left(x_2 \vee x_3 \vee x_5\right)\left(x_1 \vee x_4 \vee x_5\right)\left(x_2 \vee x_4 \vee x_5\right) \\ &\left(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_5}\right)\left(x_1 \vee x_3 \vee x_5\right)\left(\overline{x_1} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}\right) \end{aligned} \qquad S_Q = 29 \quad \tau = 2$$

$$f = \left(x_5 \vee x_1\,x_2 \vee x_3\,x_4\right)\left(\overline{x_1} \vee \overline{x_5} \vee \overline{x_2}\,\left(\overline{x_3} \vee \overline{x_4}\right)\right)\left(x_1 \vee x_2 \vee x_5\right) \qquad S_Q = 20 \quad \tau = 4$$

$$\varphi = \overline{x_3} \vee \overline{x_4}$$

$$\overline{\varphi} = x_3\,x_4$$

$$f = \left(x_5 \vee x_1\,x_2 \vee \overline{\varphi}\right)\left(\overline{x_1} \vee \overline{x_5} \vee \overline{x_2}\,\varphi\right)\left(x_1 \vee x_2 \vee x_5\right) \qquad S_Q = 19 \quad \tau = 4$$

Синтез комбинационных схем

Будем анализировать схемы на следующих наборах аргументов:

$$f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0]) = 0$$
$$f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 0]) = 0$$
$$f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 1]) = 1$$
$$f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 1]) = 1$$

Булев базис

Схема по упрощенной МДНФ:

$$f = x_5\,\overline{\varphi} \vee \varphi\,\overline{x_5} \vee x_2\,x_3\,x_4 \quad (S_Q = 17, \tau = 6)$$

$$\varphi = x_1\,\left(x_2 \vee x_3\,x_4\right)$$

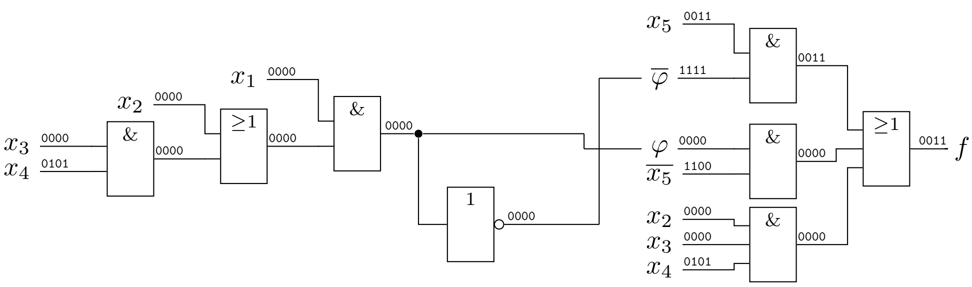
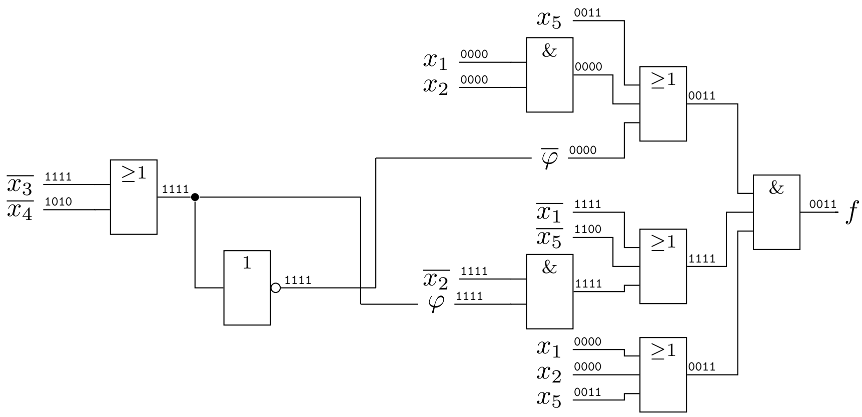


Схема по упрощенной МКНФ:

$$f = (x_5 \vee x_1\,x_2 \vee \overline{\varphi})\;(\overline{x_1} \vee \overline{x_5} \vee \overline{x_2}\,\varphi)\;(x_1 \vee x_2 \vee x_5) \quad (S_Q = 19, \tau = 4)$$

$$\varphi = \overline{x_3} \vee \overline{x_4}$$



Сокращенный булев базис (И, НЕ)

Схема по упрощенной МДНФ в базисе И, НЕ:

$$f = \overline{\overline{x_5\,\overline{\varphi}}\;\overline{\varphi\,\overline{x_5}}\;\overline{x_2\,x_3\,x_4}} \quad (S_Q = 23, \tau = 10)$$

$$\varphi = x_1\,\overline{\overline{x_2}\;\overline{x_3\,x_4}}$$

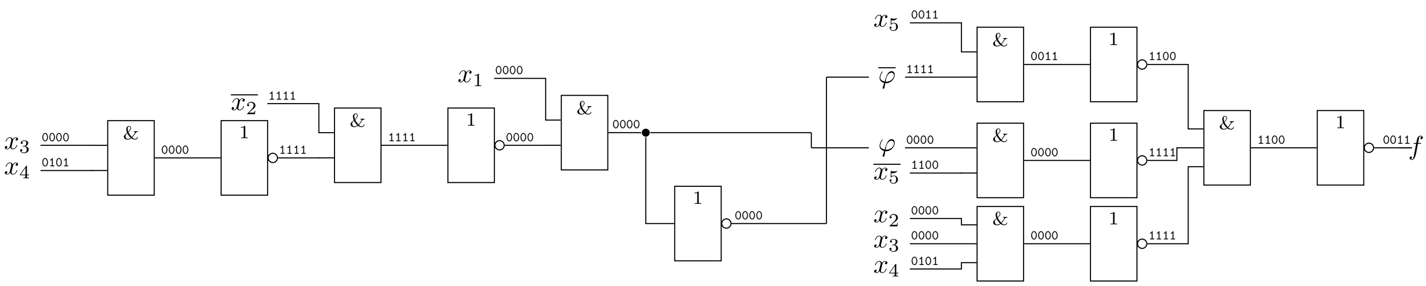
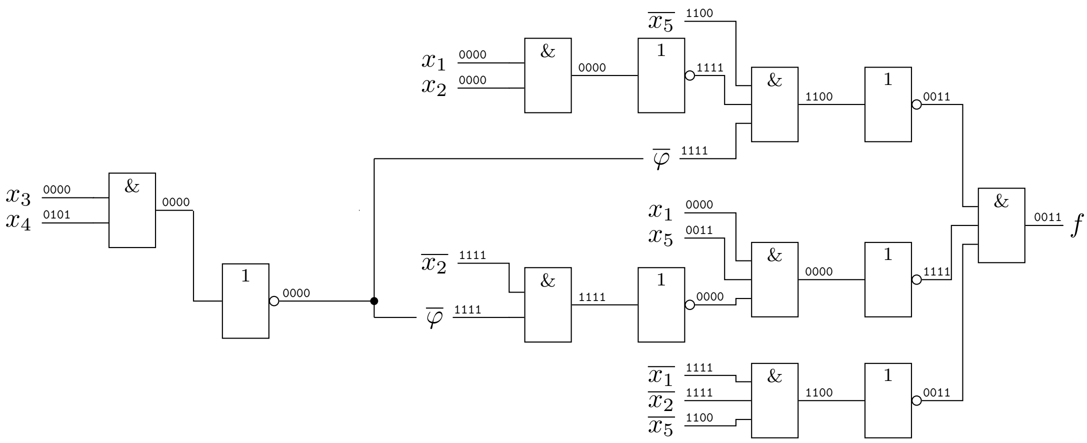


Схема по упрощенной МКНФ в базисе И, НЕ:

$$f = \overline{\overline{x_5}\;\overline{x_1\,x_2}\;\overline{\varphi}}\;\overline{x_1\,x_5\,\overline{\overline{x_2}\,\overline{\varphi}}}\;\overline{\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_5}} \quad (S_Q = 24, \tau = 7)$$

$$\varphi = x_3\,x_4$$



Универсальный базис (И-НЕ, 2 входа)

Схема по упрощенной МДНФ в базисе И-НЕ с ограничением на число входов:

$$f = \overline{\overline{x_5\,\varphi}\;\overline{\overline{\overline{\overline{\varphi}}\;\overline{x_5}\;\overline{x_2\,\overline{\overline{x_3\,x_4}}}}}} \quad (S_Q = 24, \tau = 8)$$

$$\varphi = \overline{x_1\,\overline{\overline{\overline{x_2}}\;\overline{x_3\,x_4}}}$$

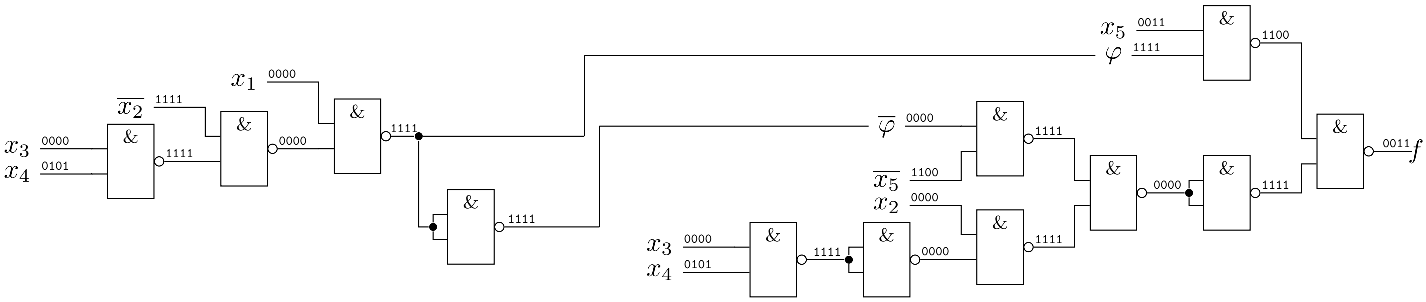


Схема по упрощенной МКНФ в базисе И-НЕ с ограничением на число входов:

$$f = \overline{\overline{\overline{\overline{x_5}\;\overline{\overline{\overline{\overline{x_1\,x_2}\;\overline{x_3\,x_4}}\;\overline{\overline{x_1}\;\overline{x_2}}}}}\;\overline{x_1\,\overline{\overline{x_5\,\overline{\overline{x_2}\;\overline{x_3\,x_4}}}}}}} \quad (S_Q = 26, \tau = 7)$$