ТЕОРМИН ЛИНАЛ

1.

Опр. 2.1. Комплексным числом называется элемент z декартова произведения $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$z = (a, b), \quad a, b \in \mathbb{R},$$

снабженного двумя операциями, *индуцированными* из $\mathbb{R}$:

- $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$;
- $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$;

2.

- $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$;
- $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$;

3.

Ассоциативность сложения.

$$((a, b) + (c, d)) + (e, f) = (a, b) + ((c, d) + (e, f))$$

Коммутативность сложения.

$$(a, b) + (c, d) = (c, d) + (a, b)$$

4.

Ассоциативность относительно операции умножения.

$$((a, b) \cdot (c, d)) \cdot (e, f) = (a, b) \cdot ((c, d) \cdot (e, f))$$

Коммутативность относительно операции умножения.

$$(a, b) \cdot (c, d) = (c, d) \cdot (a, b)$$

5.

Существование нулевого элемента. Нулевым элементом называют такой элемент, который не изменяет другой при операции сложения. В множестве комплексных чисел таковым является $(0, 0)$. Действительно,

$$\exists\, (\alpha, \beta)\colon\ (a, b) + (0, 0) = (a, b)$$

6.

Существование противоположного элемента. Противоположным элементом к элементу (a, b) называют такой элемент, который в сумме с (a, b) дает нулевой элемент.

$$\exists\, (\alpha, \beta) : (a, b) + (\alpha, \beta) = (0, 0)$$

Из этого требования следует, что $\alpha = -a$ и $\beta = -b$. Следовательно противоположным элементом к (a, b) будем называть элемент $(-a, -b)$. Можно

7.

Существование единицы. Единичным элементом, единицей, называют такой элемент, который не меняет комплексное число при умножении на него.

$$\exists\, (\alpha, \beta)\colon\ (a, b) \cdot (\alpha, \beta) = (a, b)$$

Единичным элементом множества комплексных чисел является элемент (1,0).

8.

Существование обратного элемента. Обратный элемент — это такой, который при умножении на исходное комплексное число дает единицу.

$$\exists\, (\alpha, \beta)\colon\ (a, b) \cdot (\alpha, \beta) = (1, 0)$$

Мы получили общий вид для обратного элемента:

$$(\alpha, \beta) = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right)$$

9.

Опр. 3.1. Алгебраической формой комплексного числа $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ называется представление его в следующем виде:

$$z = a + ib,$$

где символ i называется **мнимой единицей** и обладает свойством $i^2 = -1 \in \mathbb{R}$.

10.

Опр. 3.4. Тригонометрической формой комплексного числа $z \in \mathbb{C}$ называется представление его в следующем виде:

$$z = (\rho \cos \psi, \rho \sin \psi) = \rho(\cos \psi, \sin \psi).$$

11.

Опр. 3.2. Пусть $z = a + ib \in \mathbb{C}$ - комплексное число, тогда

- $\overline{z} = a - ib$ называется числом, **комплексно сопряженным** к z;

12.

Опр. 3.2. Пусть $z = a + ib \in \mathbb{C}$ - комплексное число, тогда

- $|z| = \sqrt{N(z)} = \sqrt{a^2 + b^2}$ называется **модулем** комплексного числа.

13.

Теорема 3.1. *(Формула Муавра) Пусть $z \in \mathbb{C}$ и $n \in \mathbb{N}$, тогда*

$$|z^n| = |z|^n, \quad \arg(z^n) = n \cdot \arg(z).$$

Для любого натурального числа n и любого вещественного числа φ:
(cos(φ) + i*sin(φ))^n = cos(n*φ) + i*sin(n*φ)

14.

Декартово произведение множеств – это операция, которая создает новое множество, состоящее из всех возможных упорядоченных наборов элементов исходных множеств.
Декартово произведение множеств на себя:

$$A^n = A \times A \times \cdots \times A = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in A \text{ для всех } i = 1, 2, \ldots, n\}$$

Декартово произведение нескольких множеств (A и B):
A × B = { (a, b) | a ∈ A, b ∈ B }

15.

Опр. 1.1. Внутренним законом композиции на множестве M называется отображение $M \times M \to M$ декартова произведения $M \times M$ в M. Значение

$$(x, y) \mapsto z \in M$$

называется композицией элементов x и y относительно этого закона.

16.

Опр. 1.2. Закон композиции называется **ассоциативным**, если для любых трех элементов $x, y, z \in M$ имеет место следующее свойство:

$$(x * y) * z = x * (y * z).$$

17.

Опр. 1.3. Закон композиции называется **коммутативным**, если для любой пары элементов $x, y \in M$ имеет место свойство

$$x * y = y * x.$$

18.

Опр. 2.1. Нейтральным элементом относительно закона композиции $x * y$ называется элемент $e \in M$, такой что:

$$e * x = x = x * e, \quad \forall x \in M.$$

19.

Опр. 2.2. Элемент $\theta \in M$ называется **поглощающим** относительно закона композиции $x * y$, если имеет место следующее свойство:

$$\forall x \in M \quad x * \theta = \theta = \theta * x.$$

20.

Опр. 2.3. Элемент y называется **обратным** к элементу x относительно внутреннего закона композиции с нейтральным элементом e, если

$$y * x = e = x * y.$$

21.

Опр. 2.4. Множество M с заданным на нем одним или несколькими законами композиции называется **алгебраической структурой**.

22.

Внешний закон композиции:
Это операция, которая сочетает элемент из множества M с элементом из другого множества K:
• : K × M → M
(отображение K на M в M)

23.

Опр. 3.1. Алгебраическая структура G называется **группой** если выполняются следующие требования (аксиомы группы):

(а) ассоциативность: $x * (y * z) = (x * y) * z$;

(б) нейтральный элемент: $\exists e \in G: \quad \forall x \in G \quad x * e = x = e * x$;

(в) обратный элемент: $\forall x \in G \quad \exists x^{-1}: \quad x * x^{-1} = e = x^{-1} * x$;

24.

Магма:

Это алгебраическая структура, состоящая из множества M с одной бинарной операцией *:

*: M × M → M

25.

Полугруппа:

Это алгебраическая структура (M, *), в которой операция * ассоциативна:

(x * y) * z = x * (y * z)

для всех x, y, z ∈ M.

26.

Моноид:

Это алгебраическая структура (M, *), которая является полугруппой и имеет нейтральный элемент e:

1. **Ассоциативность:** (x * y) * z = x * (y * z)
2. **Нейтральный элемент:** e * x = x * e = x

27.

Опр. 1.1. Закон композиции $\circ$ называется **дистрибутивным слева** относительно закона $*$, если для любых элементов $x, y, z \in M$ имеет место равенство

$$x \circ (y * z) = (x \circ y) * (x \circ z)\,.$$

28 (в добавление к 27 вопросу)

NtB 1.2. Соответственно, **дистрибутивность справа** означает выполнение следующего равенства:

$$\forall x, y, z \in M \quad (y * z) \circ x = (y \circ x) * (z \circ x)\,.$$

Если закон дистрибутивен и слева и справа, то он называется **двояко дистрибутивным**.

29.

Опр. 1.2. Кольцом R называется множество замкнутое относительно двух согласованно заданных на нем бинарных операций (обычно обозначаемых через $+$ и $\cdot$), удовлетворяющих следующим требованиям:

- R - абелева группа относительно $''+''$ (0 - нейтральный элемент);
- R - коммутативный моноид относительно $''\cdot''$ (1 - нейтральный элемент);
- Законы $+$ и $\cdot$ согласованы ($''\cdot''$ дистрибутивен относительно $''+''$):

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$$

30.

Кольцо $\mathbb{Z}_m$ вычетов по модулю $m \in \mathbb{Z}$:

$$x \equiv y \mod m, \quad y \in \{0, 1, \ldots, m-1\}\,.$$

31.

Опр. 3.1. **Многочленом от одной переменной** с коэффициентами из кольца R будем называть формальную бесконечную сумму следующего вида:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$

где отличны от нуля только *некоторые* **коэффициенты** $a_0, a_1, a_2, \ldots \in R$, а x является **формальной переменной**.

32.

Опр. 3.2. Говорят, что многочлен $p(x)$ **делится на многочлен** $q(x)$ (пишут $p \,\vdots\, q$), если существует такой многочлен $g(x)$, что $p(x) = g(x) \cdot q(x)$.

33.

Лемма 3.1. *Свойства делимости многочленов:*

- *если* $p(x) \vdots q(x)$ *и* $q(x) \vdots r(x)$, *тогда* $p(x) \vdots r(x)$;
- *пусть* $p(x), q(x) \vdots g(x)$, *тогда*

$$\forall a(x), b(x) \in R[x] \quad a(x)p(x) + b(x)q(x) \vdots g(x)$$

34.
Опр. 3.3. Два многочлена $p(x)$ и $q(x)$ называются **ассоциированными**, если $p(x) = \alpha \cdot q(x)$, где $\alpha \in R$, $\alpha \neq 0$.

35.
Опр. 3.4. Степенью $\deg(p)$ многочлена $p \in R[t]$ называется максимальный номер его ненулевого коэффициента. Если $\deg p = n \in \mathbb{N}_0$ то коэффициент a_n называется **старшим коэффициентом** многочлена p.

36.
NtB 3.3. Для нулевого многочлена $\theta(t)$ положим $\deg(\theta) = -\infty$.

37. Свойства степени при делении многочлена:
Лемма 3.4. *Свойства степени при делении многочленов:*

- *если* $f \vdots g, \quad f, g \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \deg(f) \geqslant \deg(g)$;
- *если* $f \vdots g, \quad \deg(f) = \deg(g) \quad \Rightarrow \quad f \sim g$.

38.
Связь степени остатка:
При делении многочлена p(x) на многочлен q(x) (где q(x) не является нулевым многочленом) остаток r(x) имеет степень: deg(r(x)) < deg(q(x))
39.
Опр. 3.6. Корнем многочлена $p(x) \in R[x]$ кратности m называется число $x_0 \in R$, такое что

$$p(x) \vdots (x - x_0)^m, \quad p(x) \not\vdots (x - x_0)^{m+1}.$$

40.
По теореме Безу, остаток от деления многочлена p(x) на (x - x_0) равен значению многочлена в точке x_0: r = p(x_0)

Если x_0 - корень многочлена $p(x)$ тогда $p(x_0) = 0$.
+ x0 – делитель p(x)

41.
Опр. 1.1. Делителем нуля в кольце R называется всякий элемент $x \neq 0$, такой что

$$\exists\, y \neq 0 : \quad xy = 0.$$

42.
Опр. 1.2. Областью целостности называется кольцо, в котором нет делителей нуля.
43.
Опр. 1.3. Элемент $z \neq 0$ называется **нильпотентом**, если

$$\exists n \in \mathbb{N} : \quad z^n = 0.$$

44.
Опр. 1.5. Полем называется ненулевое кольцо, в котором каждый ненулевой элемент обратим.

45.
Матрица — это прямоугольная таблица элементов из поля K, организованных в m строк и n столбцов:
A = | a_{11} a_{12} ... a_{1n} |
| a_{21} a_{22} ... a_{2n} |
| ... ... |
| a_{m1} a_{m2} ... a_{mn} |

Коэффициенты матрицы: Элементы a_{ij} называются коэффициентами или элементами матрицы, где: i — номер строки (i = 1, 2, ..., m). j — номер столбца (j = 1, 2, ..., n).
46.
Mat_K (m,n) - это множество всех m×n матриц с элементами из поля K. K – поле, из которого берутся элементы матрицы; m – количество строк в матрице; n – количество столбцов в матрице.
47.
Матрица называется **квадратной**, если число ее строк равно числу столбцов. **Единичная** матрица – это квадратная матрица, в которой все элементы главной диагонали равны 1, а все остальные элементы равны 0.

48.
NtB 3.1. Будем обозначать множество $m \times n$ матриц через $Mat_{\mathbb{K}}(m, n)$. Определим на этом множестве некоторые операции:

Сложение: если $A = \|a_{ij}\|$, $B = \|b_{ij}\|$ и $C = \|c_{ij}\|$, тогда

$$C = A + B \quad \Leftrightarrow \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

49.
NtB 3.1. Будем обозначать множество $m \times n$ матриц через $Mat_{\mathbb{K}}(m, n)$. Определим на этом множестве некоторые операции:

Умножение на число: если $A = \|a_{ij}\|$, $\lambda \in \mathbb{K}$ и $D = \|d_{ij}\|$, тогда

$$D = \lambda \cdot A \quad \leftrightarrow \quad d_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}.$$

50.
Если матрица A имеет размер m × p, а матрица B — размер p × n, то их произведение C = A * B определяется как матрица размера m × n, элементы которой вычисляются по формуле:

$$C = A \cdot B \quad \Leftrightarrow \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

Перемножить можно только такие матрицы, у которых число столбцов у первого сомножителя совпадает с числом строк второго сомножителя.
51.
При перемножении матриц получается матрица, число строк которой совпадает с числом строк первого сомножителя, а число столбцов - с числом столбцов второго. То есть $A_{n\times m} * A_{m\times k} = A_{n\times k}$
52.
Умножение матриц не является коммутативным:

- В общем случае для матриц A и B: A * B ≠ B * A

Причины:

- Размеры матриц могут не позволять выполнить обратное умножение.
- Даже если размеры позволяют, результаты умножения могут отличаться.
- Порядок множителей влияет на результат из-за особенностей определения умножения матриц.

53.
NtB 3.1. Будем обозначать множество $m \times n$ матриц через $Mat_{\mathbb{K}}(m, n)$. Определим на этом множестве некоторые операции:

Транспонирование: пусть $A \in Mat_{\mathbb{K}}(m, n)$, тогда $A^T \in Mat_{\mathbb{K}}(n, m)$:

$$A^T = \|\widetilde{a}_{i,j}\| : \quad \widetilde{a}_{ij} = a_{ji}$$

54.
Свойства операции транспонирования

(а) Согласованность со сложением матриц:

$$\forall A, B \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{K}}(m, n) : \quad (A + B)^T = A^T + B^T$$

(б) Согласованность с умножением матрицы на число:

$$\forall A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{K}}(m, n), \forall \alpha \in \mathbb{K} : \quad (\alpha A)^T = \alpha A^T$$

(в) Согласованность с умножением матриц:

$$\forall A, B \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{K}}(m, n) : \quad (A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

55.

Опр. 4.1. Определителем квадратной матрицы A называется число $|A|$, которое ставится ей в соответствие следующим образом:

1. Если $A_{1\times1} = (a)$, тогда $|A| = a$;
2. Если $A_{2\times2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, тогда $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$;

56.

3. Если $A_{3\times3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, тогда $|A|$ можно получить *разложением по первой строке*:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}, \end{vmatrix} = a_{11}\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{12}\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

57, 58.

Опр. 1.1. Системой линейных алгебраических уравнений называется система вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

При этом $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются *неизвестными*, $\{a_{ij}\}$ - *коэффициентами* системы и $b_1, b_2, \ldots b_m$ - *свободные члены*.

Свободными членами называются значения, стоящие в правой части уравнений. Неизвестными называются переменные, значения которых нужно найти, чтобы уравнения системы выполнялись.

59.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$Ax = b$$

60.

NtB 1.1. *Решить* систему линейных алгебраических уравнений значит найти такие значения ее неизвестных, при которых все уравнения системы окажутся верными равенствами.

61.

Расширенная матрица в рамках решения СЛАУ — это матрица, которая объединяет коэффициенты системы и столбец свободных членов.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \longrightarrow \tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right)$$

62.

Опр. 2.1. Эквивалентными преобразованиями матрицы называются следующие три вида преобразований:

(а) перестановка местами произвольных строк матрицы;

(б) умножение произвольной строки матрицы на число $\lambda \neq 0$;

(в) прибавление к произвольной строке матрицы другой строки;

63.

Методы Крамера и Гаусса – это два различных подхода к решению СЛАУ. Они применяются для нахождения значений неизвестных переменных.

64.

NtB 2.2. Метод Крамера заключается в вычислении определителя матрицы A и определителей, полученных из матрицы A подстановкой столбца b в эту матрицу:

65.

Метод Крамера применим только к квадратным системам с единственным решением, где $\det(A) \neq 0$.

66.

Метод Гаусса заключается в том, чтобы элементарными преобразованиями привести расширенную матрицу системы к верхнетреугольному виду и затем, используя метод подстановки найти решение:

67. (метод обратной матрицы)

Суть метода обратной матрицы:

Если матрица коэффициентов A квадратная и обратимая ($\det(A) \neq 0$), то решение СЛАУ можно найти с помощью обратной матрицы A^{-1}. Решение выражается как: $X = A^{-1} * b$

Где: X — столбец-матрица неизвестных. A^{-1} — обратная матрица к A. b — столбец свободных членов.

68. (метод Гаусса для поиска обратной матрицы)

- **метод Гаусса** - элементарными преобразованиями строк, необходимо из матрицы A получить единичную матрицу E, обратная матрица тогда возникнет из следующей конструкции:

$$[A|E] \sim \left[E|A^{-1}\right]$$

69. (метод союзной матрицы для поиска обратной матрицы)

- **метод союзной матрицы** - вычислив *союзную матрицу* $\widehat{A}$, найти A^{-1} с использованием следующей формулы:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\widehat{A}^T$$

70.

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} квадратной матрицы A называется число A_{ij}, вычисляемое по формуле: $A_{ij} = (-1)^{(i + j)} * M_{ij}$

Где: M_{ij} — минор элемента a_{ij}, то есть определитель матрицы, полученной из A удалением i-й строки и j-го столбца.