Занятие 6. Предел функции

I. предел функции по определению Коши
II. предел функции по определению Гейне
III. исследование сходимости функции (в командах)
IV. вычисление пределов по арифметическим свойствам (методами раскрытия неопределённостей)

Источники:

[Марон] И.А. Марон Дифференциаольное исчисление в примерах и задачах
[Кудрявцев] Кудрявцев Л.Д. и др. Сборник задач по математическому анализу Том 1 (2003)

Составила: Шиманская Г.С., Правдин К.В.
Редакторы: Правдин К.В.

В аудитории

I. Предел функции по определению Коши

Исходя из определения предела функии по Коши, докажите следующие равенства:

Задача 1. Исходя из определения предела функии по Коши, докажите следующие равенства:

а) $\lim\limits_{x\to 1}(3x-8)=-5$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x+1}{3x+9}=\dfrac{5}{3}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{(1-x)^2}=+\infty$; г) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x^2-4x}=2$

[Марон 1.9.3 (а, б, в), Кудрявцев с. 175 Пример 1 – решения см. ниже]

II. Предел функции по определению Гейне

Задача 2. Пользуясь определением предела функции по Гейне и теоремами о пределах последовательностей, докажите, что $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x+1}{5x+4}=\frac{1}{2}$.

[Марон 1.9.1 – решение см. ниже]

Задача 3. Докажите, что предел не существует:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to 0}2^{\frac{1}{x}}$

[Кудрявцев с. 176 Пример 2 – решение см. ниже]

III. Исследование сходимости функции (в командах)

Задача 4. Дана функция $f(x)=\left(\frac{2x-3}{3x+8}\right)^{4x+11}$. Известно, что $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$.

1. Постройте график функции $f(x)$ в графическом редакторе Desmos: https://www.desmos.com/
2. Проиллюстрируйте сходимость (расходимость) функции на бесконечностях:
   a. сформулируйте определение конечного предела и бесконечных пределов функции в терминах $\varepsilon-\delta$ и неравенств;
   b. выберите по три различных положительных числа $\varepsilon_1>\varepsilon_2>\varepsilon_3$ для $x\to+\infty$ и $x\to-\infty$ отдельно;
   c. для каждого такого числа изобразите на графике соответствующую ε-окрестность пределов (для $x\to+\infty$ и $x\to-\infty$ отдельно);
3. для каждого выбранного ε найдите на графике наибольшую δ-окрестность переменных x, в которой все значения функции $f(x)$ попадают в ε-окрестность, или установите, что такой окрестности нет.

Варианты:

1) $f(x)=\left(\dfrac{2x-3}{3x+8}\right)^{4x+11}$; 2) $f(x)=\left(\dfrac{1-x^2}{2-7x^2}\right)^{x-13}$; 3) $f(x)=\left(\dfrac{x^3-1}{3x^3+1}\right)^{x^3-3}$; 4) $f(x)=\left(\dfrac{1-x}{2-10x}\right)^{5x-3}$;

5) $f(x)=\left(\dfrac{3x-1}{2x+11}\right)^{1-3x}$; 6) $f(x)=\left(\dfrac{4+3x}{5+x}\right)^{7x+2}$; 7) $f(x)=\left(\dfrac{13x+8}{10x-1}\right)^{x^3-1}$; 8) $f(x)=\left(\dfrac{5-3x}{1-2x}\right)^{0,3x-3}$.

Консультация

IV. Вычисление пределов по арифметическим свойствам (методами раскрытия неопределённостей)

Для всех основных элементарных функций в любой точке их области определения имеет место равенство:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f\left(\lim_{x\to a} x\right) = f(a).$$

Это свойство непрерывности функции в точке, оно будет доказано в лекциях позднее (см. раздел 2).

Задача 5. Вычислить пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^5+9x+7}{3x^6+x^3+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+3x^2-9x-2}{x^3-x-6}$; в) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{\sqrt{6x^2+3}+3x}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^p-1}{x^q-1}$ $(p,q\in\mathbb{N})$.

Ответы: [Марон 1.10.1, решения см. ниже]

а) 4 ; б) $\dfrac{15}{11}$; в) 1 ; г) $\dfrac{p}{q}$.

Задача 6. Вычислить пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{3x^2-4}-\dfrac{x^2}{3x+2}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+1}-3x\right)$; в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+5\sqrt[5]{x}}{\sqrt{3x-2}-\sqrt[3]{2x-3}}$;

г) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2-3}-5x\right)$; д) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$; е) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\sqrt{2x^2+3}}{4x+2}$; ж) $\lim\limits_{x\to\infty}5^{\frac{2x}{x+3}}$.

Ответы: [Марон 1.10.2, решения см. ниже]

а) $\dfrac{2}{9}$; б) 0 ; в) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$; г) $+\infty$; д) $\dfrac{1}{2}$; е) $\pm\dfrac{\sqrt{2}}{4}$; ж) 25.

Задача 7. Вычислить пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-2}{\sqrt[3]{26+x}-3}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{\sqrt[4]{x+17}-2}$; в) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1+\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[5]{x}}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[k]{1+x}-1}{x}$ $(k\in\mathbb{N})$; д) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{\sqrt{3}-2\cos x}$; е) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\dfrac{\cos x}{\sqrt[3]{(1-\sin x)^2}}$; ж) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{2\sin^2 x+\sin x-1}{2\sin^2 x-3\sin x+1}$.

Ответы: [Марон 1.10.3, решения см. ниже]

а) 54 ; б) 32 ; в) $\dfrac{5}{3}$; г) $\dfrac{1}{k}$; д) 1 ; е) $\mp\infty$; ж) -3.

Самостоятельно

I. Предел функции по определению Коши

Задача 8. Исходя из определения предела функии по Коши, докажите следующие равенства:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}=2$; б) $\lim\limits_{x\to -7}\dfrac{5x^2+34x-7}{x+7}=-36$; в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-1}{3x+2}=\dfrac{2}{3}$

[Марон 1.9.6 (б, –, д)]

II. Предел функции по определению Гейне

Задача 9. Докажите, что предел не существует:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{x}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos x$

[Кудрявцев с. 184 № 7 (1), № 8 (1)]

Решения – Занятие

Марон 1.9.1

1.9.1. Пользуясь определением предела по Гейне (т. е. на языке последовательностей) и теоремами о пределах последовательностей, доказать, что

$$\lim_{x \to 2} \frac{3x+1}{5x+4} = \frac{1}{2}.$$

Решение. Рассмотрим любую последовательность $x_1, x_2, \ldots$ значений x, удовлетворяющую двум условиям: 1) числа $x_1, x_2, \ldots$ принадлежат области существования функции $f(x) = (3x+1)/(5x+4)$ (т. е. $x_n \neq -4/5$); 2) последовательность $\{x_n\}$ сходится к числу 2, т. е. $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 2$.

Этой последовательности $\{x_n\}$ соответствует последовательность значений функции

$$\frac{3x_1+1}{5x_1+4}; \quad \frac{3x_2+1}{5x_2+4}; \quad \ldots;$$

причем на основании теорем о пределах (§ 1.7)

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} \frac{3x_n+1}{5x_n+4} = \frac{\lim (3x_n+1)}{\lim (5x_n+4)} = \frac{6+1}{10+4} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, независимо от выбора последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к числу 2 ($x_n \neq -4/5$), соответствующие последовательности значений функции $f(x_n)$ сходятся к числу $1/2$. А это на основании определения предела функции значит, что

$$\lim_{x \to 2} \frac{3x+1}{5x+4} = \frac{1}{2}.$$

Марон 1.9.3 (а)

Решение. а) Согласно «$\varepsilon - \delta$»-определению нам надо доказать, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из неравенства $|x-1| < \delta$ следует $|f(x) - (-5)| = |f(x) + 5| < \varepsilon$.

Другими словами, необходимо решить неравенство

$$|3x - 8 + 5| = 3|x-1| < \varepsilon.$$

Последнее неравенство показывает, что как только $|x-1| < \varepsilon/3 = \delta$, выполняется требуемое неравенство $|f(x)+5| < \varepsilon$. Следовательно, $\lim\limits_{x \to 1} (3x-8) = -5$.

Марон 1.9.3 (б)

б) Согласно «$\varepsilon - M$»-определению предела надо показать, что для любого $\varepsilon > 0$ можно найти число $M > 0$ такое, что для всех $x > M$ будет выполняться неравенство

$$\left| \frac{5x+1}{3x+9} - \frac{5}{3} \right| < \varepsilon. \qquad (*)$$

Преобразуя это неравенство, получим

$$\left| \frac{5x+1}{3x+9} - \frac{5}{3} \right| = \frac{14}{|3x+9|} < \varepsilon.$$

Так как $x>0$, то остается решить неравенство

$$\frac{14}{3x+9}<\varepsilon,$$

откуда

$$x>\frac{14-9\varepsilon}{3\varepsilon};$$

таким образом, $M=(14-9\varepsilon)/3\varepsilon$.

Итак, для $\varepsilon>0$ мы нашли $M=(14-9\varepsilon)/3\varepsilon$ такое, что для всех значений $x>M$ выполняется неравенство (*). Это и означает, что

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x+1}{3x+9}=\frac{5}{3}.$$

Пусть, например, $\varepsilon=0{,}01$; тогда $M=\dfrac{14-0{,}09}{0{,}03}=463\dfrac{2}{3}$.

Марон 1.9.3 (в)

в) Нужно доказать, что для всякого $K>0$ существует такое $\delta>0$, что из неравенства

$$|x-1|<\delta$$

всегда следует неравенство

$$\left|\frac{1}{(1-x)^2}\right|=\frac{1}{(1-x)^2}>K.$$

Выберем произвольное число $K>0$ и решим неравенство

$$\frac{1}{(1-x)^2}>K. \qquad (**)$$

Отсюда

$$|1-x|<1/\sqrt{K} \qquad (K>0).$$

Таким образом, если положить $\delta=1/\sqrt{K}$, то как только $|x-1|<\delta$, будет справедливо неравенство (**). А это означает, что $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{(1-x)^2}=+\infty$.

Кудрявцев с. 175 Пример 1

Пример 1. Доказать, используя определение Коши предела функции, что $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-16}{x^2-4x}=2$.

▲ Рассмотрим функцию $f(x)=\dfrac{x^2-16}{x^2-4x}$ в некоторой окрестности точки $x=4$, например на интервале $(2;5)$.

Возьмем произвольное положительное число ε и преобразуем $|f(x)-2|$ при $x\neq4$ следующим образом:

$$\left|\frac{x^2-16}{x^2-4x}-2\right|=\left|\frac{x+4}{x}-2\right|=\frac{|x-4|}{x}.$$

Учитывая, что $x\in(2;5)$, получаем неравенство

$$\left|\frac{x^2-16}{x^2-4x}-2\right|<\frac{|x-4|}{2},$$

из которого видно, что если взять $\delta = 2\varepsilon$, то для всех $x \in (2;5)$ и удовлетворяющих неравенствам $0 < |x-4| < \delta$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{x^2-16}{x^2-4x} - 2\right| < \frac{\delta}{2} = \varepsilon.$$

Согласно определению Коши число $a = 2$ является пределом функции $f(x) = \dfrac{x^2-16}{x^2-4x}$ в точке $x = 4$. ▲

Кудрявцев с. 176 Пример 2

Пример 2. Доказать, что функция $f(x) = \sin(\pi/x)$ не имеет предела в точке $x = 0$.

▲ Возьмем две последовательности $x_n = 1/n$ и $x_n' = 2/(4n+1)$, сходящиеся к точке $x = 0$.

Рассмотрим соответствующие последовательности $\{f(x_n)\}$ и $\{f(x_n')\}$ значений функции. Так как последовательность $f(x_n) = \sin n\pi$ сходится к нулю, а последовательность $f(x_n') = \sin(\pi(4n+1)/2)$ — к единице, то предел функции $f(x) = \sin(\pi/x)$ в точке $x = 0$ не существует. ▲

Решения – Консультация

Марон 1.10.1

а) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{4x^5+9x+7}{3x^6+x^3+1} = \left(\dfrac{0}{0}\right)$

Решение. а) Так как пределы числителя и знаменателя существуют и предел знаменателя отличен от нуля, то можно пользоваться теоремой о пределе частного:

$$\lim_{x\to1}\frac{4x^5+9x+7}{3x^6+x^3+1} = \frac{\lim\limits_{x\to1}(4x^5+9x+7)}{\lim\limits_{x\to1}(3x^6+x^3+1)} = \frac{4+9+7}{3+1+1} = 4.$$

б) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3+3x^2-9x-2}{x^3-x-6} = \left(\dfrac{0}{0}\right)$

б) Непосредственно теорему о пределе частного применять здесь нельзя, так как предел знаменателя при $x \to 2$ равен нулю. Здесь и предел числителя при $x \to 2$ также равен нулю. Имеем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Для $x \neq 2$ имеем

$$\frac{x^3+3x^2-9x-2}{x^3-x-6} = \frac{(x-2)(x^2+5x+1)}{(x-2)(x^2+2x+3)} = \frac{x^2+5x+1}{x^2+2x+3}.$$

Таким образом, во всякой области, не содержащей точки $x = 2$, функции

$$f(x) = \frac{x^3+3x^2-9x-2}{x^3-x-6} \quad \text{и} \quad \varphi(x) = \frac{x^2+5x+1}{x^2+2x+3}$$

равны; следовательно, равны и их пределы. Но предел функции $\varphi(x)$ находится непосредственно:

$$\lim_{x\to2}\varphi(x) = \lim_{x\to2}\frac{x^2+5x+1}{x^2+2x+3} = \frac{15}{11},$$

следовательно, и

$$\lim_{x\to2} f(x) = \lim_{x\to2}\frac{x^3+3x^2-9x-2}{x^3-x-6} = \frac{15}{11}.$$

в) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x+1}{\sqrt{6x^2+3}+3x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)$

в) Так же как и в п. б), устраняем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$ преобразованием:

$$\lim_{x\to-1}\frac{x+1}{\sqrt{6x^2+3}+3x}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)\left(\sqrt{6x^2+3}-3x\right)}{3-3x^2}=$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{6x^2+3}-3x}{3(1-x)}=1.$$

г) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^p-1}{x^q-1}\ \ (p,q\in\mathbb{N})\ =\left(\dfrac{0}{0}\right)$

Вспомнить формулу: $x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\dots+x+1)$. Ответ: $\frac{p}{q}$.

Марон 1.10.2

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{3x^2-4}-\dfrac{x^2}{3x+2}\right)=\big((\pm\infty)-(\pm\infty)\big)$

Здесь имеем неопределенность вида $\infty-\infty$; произведем вычитание дробей

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{3x^2-4}-\frac{x^2}{3x+2}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+4x^2}{9x^3+6x^2-12x-8}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2+4/x}{9+6/x-12/x^2-8/x^3}=\frac{2}{9}.$$

Замечание. Мы видим, что в подобных примерах предел равен отношению коэффициентов при старшей степени x (если только степени многочленов одинаковы).

б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+1}-3x\right)=\big((+\infty)-(+\infty)\big)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{9x^2+1}+3x}=0\,.$

в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+5\sqrt[5]{x}}{\sqrt{3x-2}-\sqrt[3]{2x-3}}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

в) В подобных примерах полезно иметь в виду, что функция $f(x)=\sqrt[m]{p_n(x)}$, где $p_n(x)$ — многочлен степени n, стремится к бесконечности так же, как и функция $\sqrt[m]{x^n}$. Это позволяет выделить высшую степень x, входящую в данное выражение, и разделить числитель и знаменатель на эту степень x. В данном примере надо делить на $\sqrt{x}$; тогда получим

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+5\sqrt[5]{x}}{\sqrt{3x-2}+\sqrt[3]{2x-3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+3/\sqrt[6]{x}+5/\sqrt[10]{x^3}}{\sqrt{3-2/x}+\sqrt[6]{4/x-12/x^2+9/x^3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

г) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2-3}-5x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{2x^2-3}+\lim\limits_{x\to-\infty}(-5x)=(+\infty)+(+\infty)=+\infty$

д) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\Big(0\cdot\big((+\infty)-(+\infty)\big)\Big)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\cdot\dfrac{(x^2+1)-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}=\dfrac{1}{2}$

е) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\sqrt{2x^2+3}}{4x+2}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

е) При $x>0$ имеем $\sqrt{x^2}=x$, поэтому

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2(2+3/x^2)}}{x(4+2/x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{2+3/x^2}}{x(4+2/x)}=\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

При $x<0$ имеем $\sqrt{x^2}=-x$ и, следовательно,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2(2+3/x^2)}}{x(4+2/x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{2+3/x^2}}{x(4+2/x)}=-\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Замечание. Отсюда, между прочим, следует, что $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2x^2+3}}{4x+2}$ не существует.

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}5^{\frac{2x}{x+3}}=5^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{x+3}}=5^2=25$

$f(x)=5^x$ непрерывна в $x=2$ (доказательство будет в лекциях позднее).

Марон 1.10.3

а) $\lim\limits_{x\to1}\frac{2x-2}{\sqrt[3]{26+x}-3}=\left(\frac{0}{0}\right)$

Решение *(метод подстановки)*. а) Положим $26+x=z^3$. Тогда $x=z^3-26$ и $z\to3$ при $x\to1$; отсюда

$$\lim_{x\to1}\frac{2x-2}{\sqrt[3]{26+x}-3}=\lim_{z\to3}\frac{2z^3-54}{z-3}=\lim_{z\to3}\frac{2(z-3)(z^2+3z+9)}{z-3}=$$
$$=\lim_{z\to3}2(z^2+3z+9)=54.$$

б) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x+1}{\sqrt[4]{x+17}-2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left|\text{замена } z=\sqrt[4]{x+17},\ z\to2,\ x=z^4-17\right|=\lim\limits_{z\to2}\frac{z^4-16}{z-2}=\lim\limits_{z\to2}\frac{(z-2)(z+2)(z^2+4)}{z-2}$
$=\lim\limits_{z\to2}(z+2)(z^2+4)=32.$

в) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{1+\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[5]{x}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left|\text{замена } z=\sqrt[15]{x},\ z\to-1,\ x=z^{15}\right|=\lim\limits_{z\to-1}\frac{1+z^5}{1+z^3}=\lim\limits_{z\to-1}\frac{(1+z)(1-z+z^2-z^3+z^4)}{(1+z)(1-z+z^2)}=\frac{5}{3}.$

г) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[k]{1+x}-1}{x}\ \ (k\in\mathbb{N})=\left(\frac{0}{0}\right)$

г) Положим $1+x=z^k$; тогда $x=z^k-1$ и $z\to1$ при $x\to0$. Следовательно,

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[k]{1+x}-1}{x}=\lim_{z\to1}\frac{z-1}{z^k-1}=\frac{1}{k}\ (\text{см. } \mathbf{1.10.1.}\ \text{г}).$$

д) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{\sqrt{3}-2\cos x}=\left(\frac{0}{0}\right)$

д) Положим $x-\pi/6=z$; отсюда $x=z+\pi/6$ и $z\to0$ при $x\to\pi/6$. Подставив, получим

$$\lim_{x\to\pi/6}\frac{\sin(x-\pi/6)}{\sqrt{3}-2\cos x}=\lim_{z\to0}\frac{\sin z}{\sqrt{3}-2\cos(z+\pi/6)}=$$
$$=\lim_{z\to0}\frac{\sin z}{\sqrt{3}-\sqrt{3}\cos z+\sin z}=\lim_{z\to0}\frac{2\sin(z/2)\cos(z/2)}{2\sqrt{3}\sin^2(z/2)+2\sin(z/2)\cos(z/2)}=$$
$$=\lim_{z\to0}\frac{\cos(z/2)}{\sqrt{3}\sin(z/2)+\cos(z/2)}=1.$$

е) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sqrt[3]{(1-\sin x)^2}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left|\text{замена } z=\frac{\pi}{2}-x,\ \ x=\frac{\pi}{2}-z,\ \ x\to 0\right|=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{\sqrt[3]{(1-\cos z)^2}}$$
$$=\lim_{z\to 0}\frac{2\sin\left(\frac{z}{2}\right)\cos\left(\frac{z}{2}\right)}{\sqrt[3]{\left(2\sin^2\left(\frac{z}{2}\right)\right)^2}}=\lim_{z\to 0}\frac{2\cos\left(\frac{z}{2}\right)}{\sqrt[3]{4\sin\left(\frac{z}{2}\right)}}=\frac{2}{0}=(\text{предел не существует})$$
$$=\left(\text{есть различные односторонние пределы при } x\to\frac{\pi}{2}\pm 0,\ \ z\to\mp 0\right)=\mp\infty.$$

ж) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin^2 x+\sin x-1}{2\sin^2 x-3\sin x+1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left|\text{замена } y=\sin x\,,\ \ x\to\frac{1}{2}\right|=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{2y^2+y-1}{2y^2-3y+1}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{2\left(y-\frac{1}{2}\right)(y+1)}{2\left(y-\frac{1}{2}\right)(y-1)}$$
$$=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{(y+1)}{(y-1)}=-3.$$