ТЕОРМИН №2 ЛИНАЛ

1. Продолжите равенства $(\lambda+\mu)a = \ldots$ и $\lambda(a+b) = \ldots$, где $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ — элементы из поля, а $a, b \in L$ — элементы линейного пространства.

$\lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b$ для любых $a, b \in L$, $\lambda \in \mathbb{F}$;

$(\lambda+\mu)a = \lambda a + \mu a$ для любых $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$, $a \in L$;

2. Используя аксиомы линейного пространства и следствия из него, покажите, что $(-\lambda)a = \lambda \cdot (-a)$ и $\lambda(a-b) = (-\lambda)(b-a)$, где $\lambda \in \mathbb{F}$ — элемент из поля, а $a, b \in L$ — элементы линейного пространства.

Ответ:

- $(-\lambda)a = \lambda \cdot (-a)$
- $\lambda(a-b) = (-\lambda)(b-a)$

Объяснение:

Эти равенства можно доказать, используя аксиомы линейного пространства и свойства умножения на скаляр. Например, $(-\lambda)a = \lambda \cdot (-a)$ следует из того, что умножение на отрицательный скаляр эквивалентно умножению на положительный скаляр и отрицательный вектор.

3. Какие линейные пространства называются вещественными? Комплексными?

NtB. Элементы пространства L называются ***векторами***, поля $\mathbb{F}$ — ***скалярами*** или ***числами***. Векторные пространства над полем $\mathbb{R}$ называются ***вещественными***, над $\mathbb{C}$ — ***комплексными***.

4. Какое пространство называется арифметическим (координатным) над полем F?

Множество $\mathbb{F}^n$ столбцов высоты n с элементами из $\mathbb{F}$ относительно операций поэлементного сложения и умножения на числа — ***арифметическое*** или ***координатное*** пространство;

5. Почему вещественные многочлены R[x] фиксированной степени n с естественными операциями сложения и умножения на скаляр не являются линейным пространством? Какая аксиома линейного пространства нарушается?

Ответ:

Вещественные многочлены фиксированной степени n не образуют линейное пространство, так как они не замкнуты относительно сложения.

Объяснение:

Если взять два многочлена степени n, их сумма может быть многочленом степени выше n, что нарушает аксиому замкнутости относительно сложения.

6. Сформулируйте определение линейной комбинации векторов.

Опр. 2.1. Выражение вида $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n$ ($\lambda_i \in \mathbb{F}$) называется ***линейной комбинацией*** векторов $a_1, \ldots, a_n \in L$. Скаляры λ_i называются ***коэффициентами*** линейной комбинации. Говорят, что вектор $b \in L$ ***линейно выражается*** через векторы $a_1, \ldots, a_n$, если он равен некоторой их линейной комбинации.

7,8. Сформулируйте определение линейной оболочки. Как обозначается линейная оболочка векторов из множества S? В каком случае пространство L порождается множеством векторов S?

Опр. 2.2. ***Линейной оболочкой*** подмножества $S \subseteq L$ называется множество всех векторов из L, представимых в виде конечных линейных комбинаций элементов из S. Она обозначается $\langle S \rangle$. Говорят, что пространство L ***порождается*** множеством S, если $\langle S \rangle = L$

9. Какая линейная комбинация векторов называется тривиальной? Нетривиальной?

Опр. 2.3. Линейная комбинация $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n$ векторов $a_1, \ldots, a_n \in L$, где $\lambda_i \in \mathbb{F}$ называется ***тривиальной***, если $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$, и ***нетривиальной*** в противном случае.

10. В каком случае векторы называются линейно зависимыми? Независимыми?

Опр. 2.4. Векторы $a_1, a_2, \ldots, a_n \in L$ называются ***линейно зависимыми***, если существует их нетривиальная линейная комбинация, равная нулю, и ***линейно независимыми*** в противном случае.

11. Дайте определение понятия системы векторов? Чем система отличается от множества?

Система векторов – упорядоченный набор векторов.

NtB. Понятие ***системы векторов*** отличается от понятия множества векторов следующим:

1. Векторы системы занумерованы (если не менять сами векторы, но поменять лишь их нумерацию, получим уже другую систему);
2. Среди них могут быть равные.

12. В каком случае система векторов называется линейно зависимой?

Лемма 2.1. *Свойтсва линейно (не)зависимых систем:*

1. *Система векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда один из этих столбцов есть линейная комбинация остальных;*
2. *Если система векторов содержит линейно зависимую подсистему, то вся система линейно зависима;*
3. *Если система векторов линейно независима, то любая её подсистема тоже линейно независима.*

13. Может ли система, состоящая из одного вектора, быть линейно зависимой? Почему?

Система, состоящая из одного вектора, линейно зависима тогда и только тогда, когда этот вектор нулевой;

14. Сформулируйте определение базиса линейного пространства.

Опр. 3.1. Система векторов $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \subseteq L$ называется ***базисом*** векторного пространства L, если каждый вектор $a \in L$ единственным образом выражается через $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Коэффициенты этого выражения называются ***координатами*** вектора a в данном базисе.

15. Может ли в линейно независимой системе векторов быть линейно зависимая подсистема? Почему?

Ответ:

Нет, не может.

Объяснение:

Если бы в линейно независимой системе была линейно зависимая подсистема, то вся система была бы линейно зависимой.

16. Укажите возможный базис пространства F^n.

Единичные столбцы $(1, 0, \ldots, 0)^T$, $(0, 1, \ldots, 0)^T$, $\ldots$, $(0, 0, \ldots, 1)^T$ составляют базис пространства $\mathbb{F}^n$;

Одним из возможных базисов пространства $\mathbb{F}^n$ является стандартный базис $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, где e_i — вектор с единицей на i-й позиции и нулями на остальных.

17. Приведите пример базиса в пространстве матриц размерности 2 × 3.

Пример базиса в пространстве матриц размерности 2×3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Объяснение:

Эти матрицы линейно независимы и порождают пространство всех матриц размерности 2×3.

18, 19, 20. Что называется размерностью векторного пространства? Как обозначается размерность пространства L?

Чему равна размерность пространства {0}?

Какое линейное пространство называется конечномерным? Бесконечномерным?

Число элементов произвольного базиса (если он существует) в L называется ***размерностью*** пространства L и обозначается $\dim L$. В пространстве $\{0\}$ базисом по определению является пустая система (то есть его размерность равна нулю). Если базиса в смысле данного вышего определения не существует, то можно считать, что $\dim L = \infty$. Если $\dim L < \infty$, то пространство называется ***конечномерным***.

Бесконечномерное пространство: пространство, у которого нет конечного базиса.

21. В каком случае подмножество U ⊂ L будет являться подпространством L?

Опр. 1.1. Подмножество U векторного пространства L называется ***подпространством***, если

1. U является подгруппой аддитивной группы L;
2. $a \in U \Rightarrow \lambda a \in U$ для любого $\lambda \in \mathbb{F}$.

22. Какие подпространства L называются тривиальными?

В любом пространстве L есть «тривиальные» подпространства $\{0\} \leqslant L$, $L \leqslant L$;

23. Как связаны размерности подпространства и пространства, если они конечномерны?

Ответ:

Размерность подпространства всегда меньше или равна размерности пространства.

Объяснение:

Подпространство не может иметь большую размерность, чем само пространство.

24. Какое множество называется линейным многообразием? Как определяется его размерность?

Опр. 1.2. Пусть $U \leqslant L$, $a \in L$ — фиксированный вектор. Множество векторов вида $x = a + U = \{a + u \,|\, u \in U\}$ называется ***линейным многообразием*** размерности $\dim U$. Говорят, что оно параллельно подпространству U. Одномерное

25. При каком условии линейное многообразие называют гиперплоскостью в линейном пространстве? Как иначе называют гиперплоскость в пространстве dim V = 2.

Ответ:

Линейное многообразие называют гиперплоскостью, если его размерность на единицу меньше размерности пространства. В пространстве $\dim V = 2$ гиперплоскость называется прямой.

Объяснение:

Гиперплоскость — это подпространство, размерность которого на единицу меньше размерности всего пространства.

26. При каком условии линейное многообразие является подпространством?

NtB. Линейное многообразие является подпространством только при условии $a \in U$. При этом оно совпадает с U.

27. В каком случае размерность подпространства U ⩽ V совпадает с размерностью пространства V ?

Ответ:

Размерность подпространства U совпадает с размерностью пространства V, если $U = V$.

Объяснение:

Если подпространство совпадает с самим пространством, их размерности равны.

28. Напишите размерности пространства диагональных матриц Mat^D_n (R), пространства полиномов $R[x]_{\leqslant n}$ степени не выше n, комплексного арифметического пространства C_n.

Ответ:

- Размерность пространства диагональных матриц $\mathrm{Mat}_n^D(\mathbb{R})$ равна n.
- Размерность пространства полиномов $\mathbb{R}[x] \leqslant n$ степени не выше n равна $n+1$.
- Размерность комплексного арифметического пространства $\mathbb{C}n$ равна n.

Объяснение:
Эти размерности определяются количеством линейно независимых элементов в каждом пространстве.

29. Какие линейные пространства называются изоморфными?

Опр. 2.1. Векторные пространства U и V над полем $\mathbb{F}$ называются ***изоморфными***, если существует такое биективное отображение $\varphi : V \to U$, что

- $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ для любых $a, b \in V$;
- $\varphi(\lambda a) = \lambda\varphi(a)$ для любых $\lambda \in \mathbb{F}$, $a \in V$.

30. Благодаря чему существует возможность построить изоморфизм между линейным пространством и координатным пространством той же размерности?

Ответ:
Изоморфизм между линейным пространством и координатным пространством той же размерности можно построить благодаря существованию базиса.

Объяснение:
Базис позволяет установить взаимно-однозначное соответствие между векторами линейного пространства и их координатами в координатном пространстве.

31. Почему изоморфность линейных пространств является отношением эквивалентности?

NtB. Изоморфность линейных пространств — это отношение эквивалентности, т.к. оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

32. Назовите достаточное условие того, чтобы линейные пространства были изоморфными.

Ответ:
Достаточное условие для изоморфности линейных пространств — это равенство их размерностей.

33. Сформулируйте определение ранга матрицы.

Опр. 3.1. ***Рангом системы векторов*** называется размерность её линейной оболочки. ***Строчным рангом матрицы*** называется ранг системы её строк. ***Столбцовым рангом матрицы*** называется ранг системы её столбцов.

34. Дайте определение базисного минора.

Опр. 3.2. ***Минорным рангом матрицы*** называется наибольший порядок отличного от нуля минора матрицы. Сам этот минор называется ***базисным***.

35. Сформулируйте теорему о базисном миноре.

Теорема 3.1. ***(о базисном миноре)*** *Столбцы (строки), пересекающие базисный минор матрицы, линейно независимы. Любой столбец (строка) матрицы является линейной комбинацией базисных.*

36. Как найти ранг ступенчатой матрицы?

Ранг ступенчатой матрицы равен числу ненулевых строк.

37. Сформулируйте теорему о ранге суммы и произведения матриц.

Теорема 3.3. ***(о ранге суммы и произведения матриц)*** *Имеют место следующие свойства:*

- $\operatorname{rank}(A+B) \leqslant \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B$;
- $\operatorname{rank}(AB) \leqslant \min\{\operatorname{rank} A, \operatorname{rank} B\}$.

38. О чём говорит характеристика совместности СЛАУ? Несовместности?

Ответ:

- Совместность СЛАУ: система имеет хотя бы одно решение.
- Несовместность СЛАУ: система не имеет решений.

Объяснение:
Совместность означает, что существует набор значений переменных, удовлетворяющий всем уравнениям системы.

39. Напишите теорему Кронекера-Капелли.

Теорема 1.1. ***(Кронекера-Капелли)*** *СЛАУ совместна тогда и только тогда, когда ранг её матрицы коэффициентов равен рангу расширенной матрицы.*

40. Что можно сказать о решениях СЛАУ, если rk(A|b) = rk(A) = n, где n – количество неизвестных, rk(A|b), rk(A) – ранги расширенной матрицы и матрицы коэффициентов соответственно?

- $\operatorname{rank}(A \,|\, b) = \operatorname{rank} A = n$. Тогда однозначно определяется x_n, потом x_{n-1} и так далее до x_1, то есть решение единственно — такие системы называются ***определёнными***.

41. Что можно сказать о решениях СЛАУ, если rk(A|b) = rk(A) + 1, где rk(A|b), rk(A) – ранги расширенной матрицы и матрицы коэффициентов соответственно?

- $\operatorname{rank}(A \,|\, b) = \operatorname{rank} A + 1$. То есть возникло уравнение $0x_1 + \ldots + 0x_n = c$, $c \neq 0$. Это означает, что СЛАУ ***несовместна***;

42. Что можно сказать о решениях СЛАУ, если rk(A|b) = rk(A) < nгде n – количество неизвестных, rk(A|b), rk(A) – ранги расширенной матрицы и матрицы коэффициентов соответственно?

- $\operatorname{rank}(A \mid b) = \operatorname{rank} A < n$. В этом случае выберем переменные, коэффициенты при которых образуют базисный минор (эти переменные называются ***базисными***) и выразим их через оставшиеся переменные (они называются ***свободными***). Базисные переменные оказываются функциями от свободных — выражаются как линейные комбинации последних возможно с дополнительным ненулевым свободным членом. В таком случае имеется более одного решения, а сами системы называются ***неопределёнными***. Если поле $\mathbb{F}$ бесконечно, то и решений бесконечно много.

43. В каком случае СЛАУ называется однородной? Неоднородной?

- Однородная СЛАУ: система, в которой все свободные члены равны нулю.
- Неоднородная СЛАУ: система, в которой хотя бы один свободный член не равен нулю.

Объяснение:
Однородные системы имеют нулевой вектор в качестве решения.

44. Какой алгебраической структурой обладает множество решений однородной СЛАУ?

Ответ:
Множество решений однородной СЛАУ обладает структурой линейного пространства.

Объяснение:
Это означает, что любая линейная комбинация решений также является решением.

45. Когда однородная СЛАУ имеет ненулевое решение?

NtB. Однородная СЛАУ $Ax = 0$ всегда совместна. Если число уравнений в ней меньше числа неизвестных, то она всегда имеет ненулевое решение.

46. Чему равна размерность пространства X решений однородной СЛАУ с n неизвестными и матрицей коэффициентов A?

Теорема 2.1. ***(о "степени неопределённости" однородной СЛАУ)*** *Размерность пространства X решений однородной СЛАУ с n неизвестными и матрицей коэффициентов A равна*

$$\dim X = n - \operatorname{rank} A$$

47. Сформулируйте определение ФСР (фундаментальной системы решений).

Опр. 2.2. Базис пространства решений однородной СЛАУ называется ***фундаментальной системой решений*** (ФСР).

48. Что называется общим решением однородной СЛАУ?

Опр. 2.3. ***Общим решением однородной СЛАУ*** называется линейная комбинация векторов ФСР:

$$x_0 = \sum_{1}^{n-r} \lambda_i e_i, \qquad \forall \lambda_i \in \mathbb{F}$$

49. Опишите способ задания подпространства как решения однородной СЛАУ?

Ответ:

Подпространство можно задать как множество решений однородной СЛАУ.

Объяснение:

Это означает, что любое решение системы принадлежит этому подпространству.

50. Запишите теорему о структуре решений неоднородной СЛАУ.

Теорема 3.1. ***(о структуре решения СЛАУ)*** *Общее решение неоднородной СЛАУ вида $Ax = b$ является суммой общего решения однородной x_0 и произвольного частного решения $\widetilde{x}$ неоднородной:*

$$x = \widetilde{x} + x_0 = \widetilde{x} + \sum_{1}^{n-r} \lambda_i e_i, \qquad \forall \lambda_i \in \mathbb{F},$$

где $Ax_0 = 0$ и $A\widetilde{x} = b$.

51. Запишите альтернативу Фредгольма.

Теорема 3.2. ***(альтернатива Фредгольма)*** *Если в СЛАУ $Ax = b$ число уравнений равно числу неизвестных, то*

- *либо она имеет единственное решение при любых значениях правой части,*
- *либо однородная СЛАУ $Ax = 0$ обладает ненулевым решение.*

52. Пусть U, W ⩽ L. Как определяется сумма U и W?

Опр. 1.1. Пусть U и W — подпространства векторного пространства V. Минимальное подпространство, содержащее оба подпространства U и W, называется ***суммой*** подпространств U и W и обозначается $U+W$. То есть, если U, $W \leqslant U$, то $U + W = \{u + w \,|\, v \in U,\, w \in W\} \leqslant V$.

53. Из каких элементов состоит пересечение подпространств U и W? Как обозначается пересечение пространств?

Опр. 1.2. Пусть U и W — подпространства векторного пространства V. Пересечение $U \cap W$ множеств U и W замкнуто относительно операций из V и является подпространством V. Оно называется ***пересечением*** подпространств U и W. То есть $U \cap W = \{v \,|\, v \in U \;\vee\; v \in W\} \leqslant V$.

54. Какой из операций с подпространствами U и V определяется наименьшее подпространство, содержащее оба эти подпространства?

NtB. $U + W$ — наименьшее подпространство, содержащее как U, так W. Другими словами, это линейная оболочка оболочка объединения $U \cup W$.

55. Какой из операций с подпространствами U и V определяется наибольшее подпространство, которое содержится в обоих подпространствах?

NtB. $U \cap W$ — наибольшее подпространство, содержащееся в как U, так и в W.

56. В каком случае базис называется согласованным с подпространством?

Опр. 2.1. Базис пространства V называется ***согласованным*** с подпространством U, если U является линейной оболочкой какой-то части базисных векторов пространства V.

57. Напишите формулу Грассмана.

Следствие 2.1.1. *(**формула Грассмана**) Для любых двух конечномерных подпространств U и W произвольного векторного пространства V верно равенство* $\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$.

58. В каком случае сумма подпространств U и W называется прямой? Как обозначается прямая сумма этих пространств?

Опр. 3.1. Сумма $U + W$ называется ***прямой***, если для любого вектора $v \in U + W$ представление $v = u + w$, где $u \in U$, $w \in W$ единственно. Прямая сумма обозначается $U \oplus W$ или $U \dot{+} W$.

59. Сформулируйте необходимое и достаточное условие, при котором сумма двух подпространств является прямой.

Теорема 3.1. *Для того, чтобы сумма двух подпространств U и W была прямой, необходимо и достаточно, чтоб их пересечение было нулевым.*

60. Пусть $U \leqslant V$. Какое пространство называется прямым дополнением U в V?

Опр. 3.2. Пусть $U \leqslant V$. Подпространство $W \leqslant V$ называется ***прямым дополнением*** к U в V, если $V = U \oplus W$.

61. Пусть $\bigoplus^{n}_{i=1} U_i = V$. Что называется проекцией вектора $v \in V$ на подпространство U_i?

Ответ:

Проекция вектора $v \in V$ на подпространство U_i — это уникальный вектор $u_i \in U_i$, такой что $v = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$, где $u_j \in U_j$ для всех j.

Объяснение:

Проекция позволяет разложить вектор на компоненты в каждом из подпространств.

62. Что позволяет представить конечномерное пространство в виде прямой суммы одномерных пространств?

Ответ:

Базис конечномерного пространства позволяет представить его в виде прямой суммы одномерных пространств.

Объяснение:

Каждый базисный вектор порождает одномерное подпространство, и их прямая сумма дает все пространство.

63. Дайте определение матрице перехода. Как она обозначается?

Опр. 1.1. Невырожденная матрица T называется ***матрицей перехода*** от базиса $\{e_i\}_{i=1}^n$ к базису $\{\widetilde{e}_i\}_{i=1}^n$.

NtB 1.1. Для явного указания базисов, между которыми совершается преобразование перехода, будем вводить следующее обозначение для матрицы перехода

$$T = (e \rightsquigarrow \widetilde{e})$$

64. Как связать с помощью матрицы перехода две строки, элементы которых являются базисными векторами?

Ответ:

Матрица перехода связывает две строки базисных векторов следующим образом:

$\bar{e}_i = \sum_j C_{ji} e_j$

Объяснение:

Это означает, что каждый новый базисный вектор выражается через старые базисные векторы с коэффициентами из матрицы перехода.

65. Запишите свойства матрицы перехода.

Лемма 1.2. ***(свойства матрицы перехода)***

1. $(e \rightsquigarrow e) = E$;
2. $(e \rightsquigarrow f) = (e \rightsquigarrow g)(g \rightsquigarrow f)$;
3. $(e \rightsquigarrow f)$ *обратима и* $(e \rightsquigarrow f)^{-1} = (f \rightsquigarrow e)$.

66. Пусть C = (e ⇝ e) — матрица перехода, X, X – координатные столбцы вектора x ∈ V в базисе e и e соответственно. Запишите связь между перечисленными объектами.

Ответ:

Связь между координатными столбцами вектора x в базисах e и $\bar{e}$ задается следующим образом:

$\widetilde{X} = C^{-1} X$

Объяснение:

Это означает, что координаты вектора в новом базисе получаются умножением координат в старом базисе на обратную матрицу перехода.

Теорема 2.1. *Пусть V — конечномерное векторное пространство, e и $\widetilde{e}$ — базисы. Тогда для любого вектора $x \in V$ выполнено $\widetilde{X} = (\widetilde{e} \rightsquigarrow e)X$.*

67. Какое преобразование называется контравариантным?

NtB. Обратим внимание: чтобы получить столбец координат в новом базисе, нужно **слева** умножить столбец его координат в старом базисе на матрицу, **обратную** к матрице перехода от старого базиса к новому. Ещё говорят, что координаты вектора в базисе преобразуются ***контравариантно***. Полный смысл этого понятия будет раскрыт в следующих темах.

68. Что такое полная линейная группа и как она обозначается?

Опр. 3.1. Множество невырожденных квадратных матриц n-го порядка с операцией умножения называется **полной линейной группой** и обозначается $\mathrm{GL}(n)$.

69. Что такое специальная линейная группа и как она обозначается?

Опр. 3.2. **Специальной линейной группой** $\mathrm{SL}(n)$ называется группа, которая образована подмножеством $\mathrm{GL}(n)$ квадратных матриц, определитель которых равен 1.

70. Какие матрицы содержатся в унитреугольной группе?

Унитреугольная группа $\mathrm{UT}(n)$ — множество верхнетреугольных матриц, все диагональные элементы которых равны 1. В этом смысле, $\mathrm{UT}(n)$ является подгруппой как $\mathrm{T}(n)$, так и $\mathrm{SL}(n)$.

71. Каким свойством обладают ортогональные матрицы по определению?

Опр. 3.4. Вещественная квадратная матрица C называется ***ортогональной***, если $C^T = C^{-1}$, то есть $C^T C = CC^T = E$.

Лемма 3.2. *Произведение ортогональных матриц является ортогональной матрицей.*

Доказательство. Пусть A и B — ортогональные матрицы. Тогда

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = B^T A^T = (AB)^T$$

Откуда следует ортогональность произведения по определению. □

72. Запишите общий вид матрицы поворота в двумерном пространстве.

Опр. 3.5. Множество ортогональных матриц n-ного порядка называется ***ортогональной группой*** и обозначается $O(n)$.

Нетрудно заметить, что ортогональные матрицы 2×2 имеют один из следующих видов: $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$, угол можно считать принадлежащим $[0, 2\pi)$. В первом случае смысл — поворот на угол φ, и сама матрица называется ***матрицей поворота***. Во втором случае происходит композиция

73. Какие объекты необходимо задать, чтобы определить элемент евклидовой группы?

Опр. 3.6. Евклидовой группой $\mathrm{E}(n)$ называется множество преобразований вида

$$x \mapsto Ax + b,$$

где $x, b \in \mathbb{R}^n$ и $A \in \mathrm{O}(n)$ — ортогональная матрица.

Ответ:

Для определения элемента евклидовой группы необходимо задать ортогональную матрицу и вектор переноса.

Объяснение:

Эвклидова группа включает повороты, отражения и переносы, которые сохраняют расстояния и углы.