Занятие 2. Множества

I. грани множества
II. метод математической индукции

Источники:

[Ефимов, Демидович] Сборник задач по математике для втузов. В 4-х частях. Ч. 1. Линейная алгебра и основы математического анализа. Под ред. А. В. Ефимова и Б. П. Демидовича. 1993.

[Родина] Т. В. Родина, Е. С. Трифанова. Задачи и упражнения по математическому анализу I (для спец. «Прикладная математика и информатика»). Уч. пособие. СПб: СПбГУ ИТМО, 2011.

[Кудрявцев] Кудрявцев Л. Д. и др. Сборник задач по математическому анализу. Том 1. 2003.

Составила: Рванова А.С.
Редакторы: Лебедева А.Д., Правдин К.В.

Занятие

I. Грани множества

Задача 1. Докажите эквивалентность приведенных ниже определений супремума.

Определение 1.

Пусть $X \subset \mathbb{R}$.

$s = \sup X \overset{def}{\Leftrightarrow} (\forall x \in X)\ (x \le s)\ \wedge\ (\forall \varepsilon > 0)\ (\exists x_\varepsilon \in X)\ (x_\varepsilon + \varepsilon > s)$

Определение 2.

Рассмотрим множество $B = \{b \mid (\forall x \in X)\ (b \ge x)\}$ – множество верхних граней множества $X \subset \mathbb{R}$.

$s = \sup X \overset{def}{\Leftrightarrow} (s \in B)\ \wedge\ (\forall b \in B)\ (s \le b)$

[? Ефимов, 1.72]

Задача 2. Найдите точные верхнюю и нижнюю грани множества $(1, 2]$, а также максимум и минимум, если они существуют.

Ответы: [Ефимов, пример 3 с. 15 – решение]

$\sup(1,2] = 2, \quad \inf(1,2] = 1, \quad \max(1,2] = 2, \quad \min(1,2]$ не сущ.

Задача 3. Пусть $X = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}$. Укажите наименьший и наибольший элементы этого множества, если они существуют. Каковы множества верхних и нижних граней для множества X? Найти $\sup X$ и $\inf X$.

Ответы: [Ефимов, 1.73]

а) $\min X$ не существует; $\max X = 1$
б) $[1;\ +\infty)$; $(-\infty; 0]$; $\sup X = 1$; $\inf X = 0$

Задача 4. Пусть $X \subset \mathbb{R}$ – произвольное ограниченное множество. Докажите, что множество $-X = \{x \mid -x \in X\}$ также ограничено и справедливы равенства $\sup(-X) = -\inf X$, $\inf(-X) = -\sup X$.

[Ефимов, 1.80]

Задача 5. Докажите, что множество $\left\{a_n = \frac{2n+1}{n+1}, n \in \mathbb{N}\right\}$ ограничено. Укажите наименьший и наибольший элементы этого множества, если они существуют. Найдите супремум и инфимум этого множества.

Ответы: [Родина, пример 2.24 – решение]
наименьший элемент: 3/2; наибольший элемент не существует; инфимум: 3/2; супремум: 2

Задача 6. Докажите, что множество значений функции $f(x) = 5^{\cos x}$ ограничено (в этом случае говорят, что функция ограничена). Укажите наименьший и наибольший элементы этого множества, если они существуют. Найдите супремум и инфимум этого множества.

Ответы: [Родина, пример 2.27 – решение]
наименьший элемент: 1/5; наибольший элемент: 5; инфимум: 1/5; супремум: 5

II. Метод математической индукции

Задача 7. Докажите, что для любого натурального числа n выполняется равенство:

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

[Кудрявцев, с. 14, пример 4 – решение, Родина, пример 1.4 – решение]

Задача 8. Найдите сумму:

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}.$$

Задача 9. Докажите, для любого натурального числа n величина $5^{2n-1}+2^{2n+2}$ делится на 21.

Задача 10. Докажите, что при любых натуральных n справедливо неравенство $3^n>2^n+n$.

Консультация

I. Грани множества

Задача 11. Пусть $X,Y\subset\mathbb{R}$, X,Y – произвольные ограниченные сверху множества. Докажите, что множество $X+Y=\{x+y\mid x\in X, y\in Y\}$ ограничено сверху и $\sup(X+Y)=\sup X+\sup Y$.

[Ефимов, 1.81]

Задача 12. Найдите $\max X$, $\min X$, $\sup X$, $\inf X$, если множество X состоит из элементов, являющихся членами последовательности $\{x_n\}$: $x_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\cdots+\frac{1}{3^n}$.

Ответы: $\max X$ не сущ., $\min X=\frac{1}{4}$, $\sup X=\frac{1}{2}$, $\inf X=\frac{1}{4}$.

Задача 13. Сформулируйте определение неограниченного множества.

[Родина, пример 2.29 – решение]

Задача 14. Докажите, что множество $\left\{a_n=\frac{1-n^4}{n^3+5},\ n\in\mathbb{N}\right\}$ неограничено.

[Родина, пример 2.30 – решение]

II. Метод математической индукции

Задача 15. Найдите сумму $1\cdot 1!+2\cdot 2!+\cdots+n\cdot n!,\ n\in\mathbb{N}.$

Задача 16. Докажите справедливость формулы для любого натурального n:

$$\frac{x}{1-x^2}+\frac{x^2}{1-x^4}+\frac{x^4}{1-x^8}+\cdots+\frac{x^{2^{n-1}}}{1-x^{2^n}}=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{x-x^{2^n}}{1-x^{2^n}},\qquad |x|\neq 1.$$

Последовательность Фибоначчи определяется следующими условиями:
$a_0=0, a_1=1, a_{n+1}=a_n+a_{n-1}$. Докажите, что имеют место следующие соотношения:

1. $a_{n+2}=a_0+a_1+\cdots+a_n+1$
2. $a_{n+1}a_{n+2}-a_na_{n+3}=(-1)^n$

Задача 17. Докажите, что при любых натуральных n справедливо неравенство Бернулли:
$(1+x)^n\geq 1+nx$ при $x\geq -1$.

[Кудрявцев, с.16, №9, Родина, пример 1.14 – решение, пример из лекции]

Задача 18. Докажите, что при любом натуральном n справедливо неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\geq\sqrt{n}\,.$$

[Родина, пример 1.10 – решение]

Самостоятельно

I. Грани множества

Задача 19. Докажите эквивалентность приведенных ниже определений инфимума.

Определение 1.

Пусть $X\subset\mathbb{R}$.

$i=\inf X \overset{def}{\Longleftrightarrow} (\forall x\in X)\,(x\geq i)\ \wedge\ (\forall\varepsilon>0)\,(\exists x_\varepsilon\in X)\,(x_\varepsilon-\varepsilon<i)$

Задача 20. Для следующих множеств найдите $\max X$, $\min X$, $\sup X$ и $\inf X$, если они существуют:

а) $X=\left\{x\in\mathbb{R}\,|\,x=\frac{1}{2^n},\ n\in\mathbb{N}\right\}$
б) $X=[-1{,}1]$
в) $X=\{\,x\in\mathbb{Z}\,|\,-5\leq x<0\,\}$
г) $X=\{\,x\in\mathbb{R}\,|\,x<0\,\}$
д) $X=\left\{x\in\mathbb{R}\,|\,x=\frac{m}{n},\ m,n\in\mathbb{N},\ m<n\right\}$

Ответы: [Ефимов, 1.74–1.78]

а) 1/2; не существует; 1/2; 0

б) 1; -1; 1; -1.

в) не существует; -5; 0; -5.

г) не существует; не существует; 0; не существует

д) не существует; не существует; 1; 0

Задача 21. Пусть $X\subset\mathbb{R}$ – ограниченное сверху и $Y\subset\mathbb{R}$ – ограниченное снизу множества. Докажите, что множество $X-Y=\{x-y|\,x\in X,y\in Y\}$ ограничено сверху и $\sup(X-Y)=\sup X-\inf Y$.

[Ефимов, 1.82]

Задача 22. Докажите, что множество $\left\{a_n=\frac{(-1)^n n+100}{2^n},n\in\mathbb{N}\right\}$ ограничено.

[Родина, пример 2.26 – решение]

Задача 23. Докажите, что множество значений функции $f(x)=\log_4(x^2+3)-\log_2(1+|x|)$ ограничено.

[Родина, пример 2.28 – решение]

Задача 24. Докажите, что множество $\{a_n=2^{(-1)^n n},n\in\mathbb{N}\}$ неограниченно.

[Родина, пример 2.31 – решение]

II.Метод математической индукции

Задача 25. Докажите, что для любого натурального числа n выполняется равенство:

$$\frac{1^2}{1\cdot3}+\frac{2^2}{3\cdot5}+\cdots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$$

Задача 26. Найдите сумму $1^3+2^3+\cdots+n^3,\ n\in\mathbb{N}$.

Задача 27. Докажите, что сумма кубов трех последовательных натуральных чисел делится на 9.

[Родина, пример 1.8 – решение]

Задача 28. Докажите, что при любых натуральных $n \geq 10$ справедливо неравенство $2^n > n^3$.

Задача 29. Последовательность Фибоначчи определяется следующими условиями: $a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$. Докажите, что имеют место следующие соотношения:

а) $a_{2n+1} = 1 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n}$
б) $a_{2n+2} = a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n+1}$
в) $a_n a_{n+1} = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$
г) $a_n^2 - a_{n-1}a_{n+1} = (-1)^{n+1}$