1. Продолжите равенства $(\lambda+\mu)a = \ldots$ и $\lambda(a+b) = \ldots$, где $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ — элементы из поля, а $a, b \in L$ — элементы линейного пространства.

Ответ:

- $(\lambda+\mu)a = \lambda a + \mu a$
- $\lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b$

2. Используя аксиомы линейного пространства и следствия из него, покажите, что $(-\lambda)a = \lambda \cdot (-a)$ и $\lambda(a-b) = (-\lambda)(b-a)$, где $\lambda \in \mathbb{F}$ — элемент из поля, а $a, b \in L$ — элементы линейного пространства.

Ответ:

- $(-\lambda)a = \lambda \cdot (-a)$
- $\lambda(a-b) = (-\lambda)(b-a)$

Объяснение:
Эти равенства можно доказать, используя аксиомы линейного пространства и свойства умножения на скаляр. Например, $(-\lambda)a = \lambda \cdot (-a)$ следует из того, что умножение на отрицательный скаляр эквивалентно умножению на положительный скаляр и отрицательный вектор.

3. Какие линейные пространства называются вещественными? Комплексными?

Ответ:

- Вещественные линейные пространства: пространства над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$.
- Комплексные линейные пространства: пространства над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$.

Объяснение:
Тип линейного пространства определяется полем, над которым оно построено. Вещественные пространства используют вещественные числа, а комплексные — комплексные числа.

4. Какое пространство называется арифметическим (координатным) над полем $\mathbb{F}$?

Ответ:
Арифметическое пространство над полем $\mathbb{F}$ — это пространство $\mathbb{F}^n$, где элементы представляют собой наборы из n элементов поля $\mathbb{F}$.

Объяснение:
Арифметическое пространство — это пространство, где векторы представляют собой наборы чисел из поля $\mathbb{F}$. Например, $\mathbb{R}^3$ — это арифметическое пространство над полем вещественных чисел.

5. Почему вещественные многочлены $\mathbb{R}[x]$ фиксированной степени n с естественными операциями сложения и умножения на скаляр не являются линейным пространством? Какая аксиома линейного пространства нарушается?

Ответ:

Вещественные многочлены фиксированной степени n не образуют линейное пространство, так как они не замкнуты относительно сложения.

Объяснение:

Если взять два многочлена степени n, их сумма может быть многочленом степени выше n, что нарушает аксиому замкнутости относительно сложения.

6. Сформулируйте определение линейной комбинации векторов.

Ответ:
Линейная комбинация векторов $v_1, v_2, \ldots, v_n$ — это вектор вида $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n$, где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — скаляры из поля $\mathbb{F}$.

Объяснение:
Линейная комбинация — это способ представления одного вектора как суммы других векторов, умноженных на скаляры.

7. Сформулируйте определение линейной оболочки. Как обозначается линейная оболочка векторов из множества S ?

Ответ:
Линейная оболочка множества векторов S — это множество всех линейных комбинаций векторов из S. Обозначается как $\mathrm{span}(S)$.

Объяснение:
Линейная оболочка — это наименьшее линейное пространство, содержащее все векторы из множества S.

8. В каком случае пространство L порождается множеством векторов S ?

Ответ:
Пространство L порождается множеством векторов S, если $L = \mathrm{span}(S)$.

Объяснение:
Это означает, что любой вектор в пространстве L может быть представлен как линейная комбинация векторов из S.

9. Какая линейная комбинация векторов называется тривиальной? Нетривиальной?

Ответ:

- Тривиальная линейная комбинация: когда все коэффициенты равны нулю.
- Нетривиальная линейная комбинация: когда хотя бы один коэффициент не равен нулю.

Объяснение:
Тривиальная комбинация всегда дает нулевой вектор, в то время как нетривиальная может давать любой вектор.

10. В каком случае векторы называются линейно зависимыми? Независимыми?

Ответ:

- Линейно зависимые векторы: если существует нетривиальная линейная комбинация, равная нулевому вектору.
- Линейно независимые векторы: если единственная линейная комбинация, равная нулевому вектору, — это тривиальная комбинация.

Объяснение:
Линейная зависимость означает, что один вектор может быть выражен через другие, а линейная независимость — что это невозможно.

11. Дайте определение понятия системы векторов? Чем система отличается от множества?

Ответ:
Система векторов — это упорядоченный набор векторов. Множество векторов — это неупорядоченный набор векторов.

Объяснение:
В системе важен порядок векторов, в то время как в множестве порядок не имеет значения.

12. В каком случае система векторов называется линейно зависимой?

Ответ:
Система векторов называется линейно зависимой, если существует нетривиальная линейная комбинация векторов этой системы, равная нулевому вектору.

Объяснение:
Это означает, что один из векторов системы может быть выражен через другие векторы этой системы.

13. Может ли система, состоящая из одного вектора, быть линейно зависимой? Почему?

Ответ:
Да, если этот вектор — нулевой вектор.

Объяснение:
Нулевой вектор всегда линейно зависим, так как $\lambda \cdot 0 = 0$ для любого скаляра λ.

14. Сформулируйте определение базиса линейного пространства.

Ответ:
Базис линейного пространства — это линейно независимая система векторов, которая порождает это пространство.

Объяснение:
Базис позволяет любой вектор в пространстве представить как линейную комбинацию базисных векторов.

15. Может ли в линейно независимой системе векторов быть линейно зависимая подсистема? Почему?

Ответ:
Нет, не может.

Объяснение:
Если бы в линейно независимой системе была линейно зависимая подсистема, то вся система была бы линейно зависимой.

16. Укажите возможный базис пространства $\mathbb{F}^n$.

Ответ:
Одним из возможных базисов пространства $\mathbb{F}^n$ является стандартный базис $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, где e_i — вектор с единицей на i-й позиции и нулями на остальных.

Объяснение:
Этот базис линейно независим и порождает пространство $\mathbb{F}^n$.

17. Приведите пример базиса в пространстве матриц размерности 2×3.

Ответ:
Пример базиса в пространстве матриц размерности 2×3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Объяснение:
Эти матрицы линейно независимы и порождают пространство всех матриц размерности 2×3.

18. Что называется размерностью векторного пространства? Как обозначается размерность пространства L ?

Ответ:
Размерность векторного пространства — это количество векторов в любом его базисе. Обозначается как $\dim(L)$.

Объяснение:
Размерность показывает, сколько линейно независимых векторов нужно для порождения всего пространства.

19. Чему равна размерность пространства $\{0\}$?

Ответ:
Размерность пространства $\{0\}$ равна 0.

Объяснение:
Это пространство состоит только из нулевого вектора и не имеет базиса.

20. Какое линейное пространство называется конечномерным? Бесконечномерным?

Ответ:

- Конечномерное пространство: пространство, у которого есть конечный базис.
- Бесконечномерное пространство: пространство, у которого нет конечного базиса.

Объяснение:
Конечномерные пространства имеют конечную размерность, а бесконечномерные — бесконечную.

21. В каком случае подмножество $U \subset L$ будет являться подпространством L ?

Ответ:
Подмножество $U \subset L$ будет являться подпространством L, если U само является линейным пространством относительно тех же операций сложения и умножения на скаляр.

Объяснение:
Подпространство должно быть замкнуто относительно этих операций и содержать нулевой вектор.

22. Какие подпространства L называются тривиальными?

Ответ:
Тривиальные подпространства: $\{0\}$ и само пространство L.

Объяснение:
Эти подпространства содержат либо только нулевой вектор, либо все векторы пространства L.

23. Как связаны размерности подпространства и пространства, если они конечномерны?

Ответ:
Размерность подпространства всегда меньше или равна размерности пространства.

Объяснение:
Подпространство не может иметь большую размерность, чем само пространство.

24. Какое множество называется линейным многообразием? Как определяется его размерность?

Ответ:
Линейное многообразие — это множество вида $v + U$, где v — вектор, а U — подпространство. Размерность линейного многообразия равна размерности подпространства U.

Объяснение:
Линейное многообразие — это сдвиг подпространства на вектор v.

25. При каком условии линейное многообразие называют гиперплоскостью в линейном пространстве? Как иначе называют гиперплоскость в пространстве $\dim V = 2$.

Ответ:
Линейное многообразие называют гиперплоскостью, если его размерность на единицу меньше размерности пространства. В пространстве $\dim V = 2$ гиперплоскость называется прямой.

Объяснение:
Гиперплоскость — это подпространство, размерность которого на единицу меньше размерности всего пространства.

26. При каком условии линейное многообразие является подпространством?

Ответ:
Линейное многообразие является подпространством, если оно проходит через начало координат (нулевой вектор).

Объяснение:
Подпространство должно содержать нулевой вектор.

27. В каком случае размерность подпространства $U \leqslant V$ совпадает с размерностью пространства V ?

Ответ:
Размерность подпространства U совпадает с размерностью пространства V, если $U = V$.

Объяснение:
Если подпространство совпадает с самим пространством, их размерности равны.

28. Напишите размерности пространства диагональных матриц $\mathrm{Mat}_n^D(\mathbb{R})$, пространства полиномов $\mathbb{R}[x] \leqslant n$ степени не выше n, комплексного арифметического пространства $\mathbb{C}n$.

Ответ:

- Размерность пространства диагональных матриц $\mathrm{Mat}_n^D(\mathbb{R})$ равна n.
- Размерность пространства полиномов $\mathbb{R}[x] \leqslant n$ степени не выше n равна $n + 1$.
- Размерность комплексного арифметического пространства $\mathbb{C}n$ равна n.

Объяснение:
Эти размерности определяются количеством линейно независимых элементов в каждом пространстве.

29. Какие линейные пространства называются изоморфными?

Ответ:
Линейные пространства называются изоморфными, если существует взаимно-однозначное линейное отображение между ними.

Объяснение:
Изоморфные пространства имеют одинаковую структуру и свойства.

30. Благодаря чему существует возможность построить изоморфизм между линейным пространством и координатным пространством той же размерности?

Ответ:
Изоморфизм между линейным пространством и координатным пространством той же размерности можно построить благодаря существованию базиса.

Объяснение:
Базис позволяет установить взаимно-однозначное соответствие между векторами линейного пространства и их координатами в координатном пространстве.

31. Почему изоморфность линейных пространств является отношением эквивалентности?

Ответ:
Изоморфность линейных пространств является отношением эквивалентности, так как она рефлексивна, симметрична и транзитивна.

Объяснение:

- Рефлексивность: любое пространство изоморфно самому себе.
- Симметричность: если L_1 изоморфно L_2, то L_2 изоморфно L_1.
- Транзитивность: если L_1 изоморфно L_2 и L_2 изоморфно L_3, то L_1 изоморфно L_3.

32. Назовите достаточное условие того, чтобы линейные пространства были изоморфными.

Ответ:
Достаточное условие для изоморфности линейных пространств — это равенство их размерностей.

Объяснение:
Если два линейных пространства имеют одинаковую размерность, они изоморфны.

33. Сформулируйте определение ранга матрицы.

Ответ:
Ранг матрицы — это максимальное количество линейно независимых строк (или столбцов) этой матрицы.

Объяснение:
Ранг показывает, сколько линейно независимых векторов можно найти в матрице.

34. Дайте определение базисного минора.

Ответ:
Базисный минор — это ненулевой минор максимального порядка в матрице.

Объяснение:
Базисный минор определяет базисные строки и столбцы матрицы.

35. Сформулируйте теорему о базисном миноре.

Ответ:
Теорема о базисном миноре утверждает, что ранг матрицы равен порядку её базисного минора.

Объяснение:
Эта теорема связывает ранг матрицы с её базисными минорами.

36. Как найти ранг ступенчатой матрицы?

Ответ:
Ранг ступенчатой матрицы равен количеству ненулевых строк.

Объяснение:
В ступенчатой матрице ненулевые строки линейно независимы.

37. Сформулируйте теорему о ранге суммы и произведения матриц.

Ответ:
Теорема о ранге суммы и произведения матриц утверждает, что:

- Ранг суммы двух матриц не превосходит суммы их рангов.
- Ранг произведения двух матриц не превосходит минимального из рангов этих матриц.

Объяснение:
Эти неравенства помогают оценить ранг сложных матричных выражений.

38. О чём говорит характеристика совместности СЛАУ? Несовместности?

Ответ:

- Совместность СЛАУ: система имеет хотя бы одно решение.
- Несовместность СЛАУ: система не имеет решений.

Объяснение:
Совместность означает, что существует набор значений переменных, удовлетворяющий всем уравнениям системы.

39. Напишите теорему Кронекера-Капелли.

Ответ:
Теорема Кронекера-Капелли утверждает, что система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг расширенной матрицы равен рангу матрицы коэффициентов.

Объяснение:
Эта теорема дает критерий совместности системы линейных уравнений.

40. Что можно сказать о решениях СЛАУ, если $rk(A \mid b) = rk(A) = n$, где n - количество неизвестных, $rk(A \mid b), rk(A)$ - ранги расширенной матрицы и матрицы коэффициентов соответственно?

Ответ:
Если $rk(A \mid b) = rk(A) = n$, то система имеет единственное решение.

Объяснение:
Это означает, что система совместна и определена однозначно.

41. Что можно сказать о решениях СЛАУ, если $rk(A \mid b) = rk(A) + 1$, где $rk(A \mid b), rk(A)$ ранги расширенной матрицы и матрицы коэффициентов соответственно?

Ответ:
Если $rk(A \mid b) = rk(A) + 1$, то система несовместна.

Объяснение:
Это означает, что не существует решений, удовлетворяющих всем уравнениям системы.

42. Что можно сказать о решениях СЛАУ, если $rk(A \mid b) = rk(A) < n$ где n - количество неизвестных, $rk(A \mid b), rk(A)$ - ранги расширенной матрицы и матрицы коэффициентов соответственно?

Ответ:
Если $rk(A \mid b) = rk(A) < n$, то система имеет бесконечно много решений.

Объяснение:
Это означает, что система совместна, но не определена однозначно.

43. В каком случае СЛАУ называется однородной? Неоднородной?

Ответ:

- Однородная СЛАУ: система, в которой все свободные члены равны нулю.
- Неоднородная СЛАУ: система, в которой хотя бы один свободный член не равен нулю.

Объяснение:
Однородные системы имеют нулевой вектор в качестве решения.

44. Какой алгебраической структурой обладает множество решений однородной СЛАУ?

Ответ:
Множество решений однородной СЛАУ обладает структурой линейного пространства.

Объяснение:
Это означает, что любая линейная комбинация решений также является решением.

45. Когда однородная СЛАУ имеет ненулевое решение?

Ответ:
Однородная СЛАУ имеет ненулевое решение, если ранг матрицы коэффициентов меньше количества неизвестных.

Объяснение:
Это означает, что система имеет бесконечно много решений.

46. Чему равна размерность пространства X решений однородной СЛАУ с n неизвестными и матрицей коэффициентов A ?

Ответ:
Размерность пространства решений однородной СЛАУ равна $n - rk(A)$, где $rk(A)$ — ранг матрицы коэффициентов.

Объяснение:
Это следует из теоремы о размерности пространства решений однородной системы.

47. Сформулируйте определение ФСР (фундаментальной системы решений).

Ответ:
Фундаментальная система решений (ФСР) — это базис пространства решений однородной СЛАУ.

Объяснение:
ФСР состоит из линейно независимых решений, которые порождают все пространство решений.

48. Что называется общим решением однородной СЛАУ?

Ответ:
Общее решение однородной СЛАУ — это выражение, представляющее все решения системы в виде линейной комбинации базисных решений.

Объяснение:
Общее решение позволяет получить любое решение системы, изменяя коэффициенты линейной комбинации.

49. Опишите способ задания подпространства как решения однородной СЛАУ?

Ответ:
Подпространство можно задать как множество решений однородной СЛАУ.

Объяснение:
Это означает, что любое решение системы принадлежит этому подпространству.

50. Запишите теорему о структуре решений неоднородной СЛАУ.

Ответ:
Теорема о структуре решений неоднородной СЛАУ утверждает, что общее решение неоднородной СЛАУ можно представить как сумму частного решения и общего решения соответствующей однородной СЛАУ.

Объяснение:
Это означает, что любое решение неоднородной системы можно получить, добавив частное решение к любому решению однородной системы.

51. Запишите альтернативу Фредгольма.

Ответ:
Альтернатива Фредгольма утверждает, что для линейного оператора A и вектора b одно из следующих утверждений верно:

1. Уравнение $Ax = b$ имеет решение.
2. Сопряженное уравнение $A^*y = 0$ имеет ненулевое решение.

Объяснение:
Эта альтернатива связывает решения прямого и сопряженного уравнений.

52. Пусть $U, W \leqslant L$. Как определяется сумма U и W ?

Ответ:
Сумма подпространств U и W определяется как множество всех сумм векторов из U и W:
$U + W = \{u + w \mid u \in U, w \in W\}$

Объяснение:
Сумма подпространств — это наименьшее подпространство, содержащее оба подпространства.

53. Из каких элементов состоит пересечение подпространств U и W ? Как обозначается пересечение пространств?

Ответ:
Пересечение подпространств U и W состоит из всех векторов, принадлежащих обоим подпространствам:
$U \cap W = \{v \mid v \in U \text{ и } v \in W\}$

Объяснение:
Пересечение подпространств — это наибольшее подпространство, содержащееся в обоих подпространствах.

54. Какой из операций с подпространствами U и V определяется наименьшее подпространство, содержащее оба эти подпространства?

Ответ:
Сумма подпространств U и V определяет наименьшее подпространство, содержащее оба эти подпространства.

Объяснение:
Сумма подпространств — это наименьшее подпространство, которое включает все векторы из обоих подпространств.

55. Какой из операций с подпространствами U и V определяется наибольшее подпространство, которое содержится в обоих подпространствах?

Ответ:
Пересечение подпространств U и V определяет наибольшее подпространство, которое содержится в обоих подпространствах.

Объяснение:
Пересечение подпространств — это наибольшее подпространство, которое включает только те векторы, которые принадлежат обоим подпространствам.

56. В каком случае базис называется согласованным с подпространством?

Ответ:
Базис называется согласованным с подпространством, если он содержит базис этого подпространства.

Объяснение:
Согласованный базис позволяет легко работать с подпространством в контексте всего пространства.

57. Напишите формулу Грассмана.

Ответ:
Формула Грассмана для подпространств U и W пространства V:
$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$

Объяснение:
Эта формула связывает размерности суммы и пересечения подпространств.

58. В каком случае сумма подпространств U и W называется прямой? Как обозначается прямая сумма этих пространств?

Ответ:
Сумма подпространств U и W называется прямой, если $U \cap W = \{0\}$. Обозначается как $U \oplus W$.

Объяснение:
Прямая сумма означает, что подпространства не пересекаются, кроме нулевого вектора.

59. Сформулируйте необходимое и достаточное условие, при котором сумма двух подпространств является прямой.

Ответ:
Сумма двух подпространств U и W является прямой тогда и только тогда, когда $U \cap W = \{0\}$.

Объяснение:
Это условие гарантирует, что подпространства не пересекаются, кроме нулевого вектора.

60. Пусть $U \leqslant V$. Какое пространство называется прямым дополнением U в V?

Ответ:
Пространство W называется прямым дополнением U в V, если $V = U \oplus W$.

Объяснение:
Прямое дополнение позволяет разложить пространство V на два непересекающихся подпространства.

61. Пусть $\oplus_{i=1}^{n} U_i = V$. Что называется проекцией вектора $v \in V$ на подпространство U_i?

Ответ:
Проекция вектора $v \in V$ на подпространство U_i — это уникальный вектор $u_i \in U_i$, такой что $v = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$, где $u_j \in U_j$ для всех j.

Объяснение:
Проекция позволяет разложить вектор на компоненты в каждом из подпространств.

62. Что позволяет представить конечномерное пространство в виде прямой суммы одномерных пространств?

Ответ:
Базис конечномерного пространства позволяет представить его в виде прямой суммы одномерных пространств.

Объяснение:
Каждый базисный вектор порождает одномерное подпространство, и их прямая сумма дает все пространство.

63. Дайте определение матрице перехода. Как она обозначается?

Ответ:
Матрица перехода — это матрица, которая переводит координаты вектора из одного базиса в другой. Обозначается как $C = (e \rightrightarrows \bar{e})$.

Объяснение:
Матрица перехода позволяет пересчитывать координаты вектора при смене базиса.

64. Как связать с помощью матрицы перехода две строки, элементы которых являются базисными векторами?

Ответ:
Матрица перехода связывает две строки базисных векторов следующим образом:
$\bar{e}_i = \sum_j C_{ji} e_j$

Объяснение:
Это означает, что каждый новый базисный вектор выражается через старые базисные векторы с коэффициентами из матрицы перехода.

65. Запишите свойства матрицы перехода.

Ответ:
Матрица перехода является квадратной и обратимой.

Объяснение:
Эти свойства гарантируют, что матрица перехода может быть использована для пересчета координат в обоих направлениях.

66. Пусть $C = (e \rightrightarrows \bar{e})$ – матрица перехода, $\widetilde{X}, X$ - координатные столбцы вектора $x \in V$ в базисе e и $\bar{e}$ соответственно. Запишите связь между перечисленными объектами.

Ответ:
Связь между координатными столбцами вектора x в базисах e и $\bar{e}$ задается следующим образом:
$\widetilde{X} = C^{-1}X$

Объяснение:
Это означает, что координаты вектора в новом базисе получаются умножением координат в старом базисе на обратную матрицу перехода.

67. Какое преобразование называется контравариантным?

Ответ:
Контравариантное преобразование — это преобразование координат вектора при смене базиса с использованием обратной матрицы перехода.

Объяснение:
Контравариантное преобразование позволяет сохранить вектор неизменным при смене базиса.

68. Что такое полная линейная группа и как она обозначается?

Ответ:
Полная линейная группа — это группа всех обратимых линейных преобразований пространства. Обозначается как $GL(n, \mathbb{F})$.

Объяснение:
Эта группа включает все линейные преобразования, которые имеют обратные.

69. Что такое специальная линейная группа и как она обозначается?

Ответ:
Специальная линейная группа — это группа всех линейных преобразований с определителем, равным 1. Обозначается как $SL(n, \mathbb{F})$.

Объяснение:
Эта группа включает линейные преобразования, которые сохраняют ориентацию.

70. Какие матрицы содержатся в унитреугольной группе?

Ответ:
Унитреугольная группа содержит все верхнетреугольные матрицы с единицами на диагонали.

Объяснение:
Эти матрицы имеют нули ниже главной диагонали и единицы на диагонали.

71. Каким свойством обладают ортогональные матрицы по определению?

Ответ:
Ортогональные матрицы обладают свойством $A^T A = I$, где A^T — транспонированная матрица, а I — единичная матрица.

Объяснение:
Это означает, что ортогональные матрицы сохраняют скалярное произведение и длины векторов.

72. Запишите общий вид матрицы поворота в двумерном пространстве.

Ответ:
Общий вид матрицы поворота на угол θ в двумерном пространстве:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Объяснение:
Эта матрица поворачивает векторы на угол θ против часовой стрелки.

73. Какие объекты необходимо задать, чтобы определить элемент евклидовой группы?

Ответ:
Для определения элемента евклидовой группы необходимо задать ортогональную матрицу и вектор переноса.

Объяснение:
Эвклидова группа включает повороты, отражения и переносы, которые сохраняют расстояния и углы.