Демо Кр1 (предел).

№1

Задание 1. Метод математической индукции (1 балл)

Докажите при помощи метода математической индукции, что при $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\dots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3\cdot(3n+1)}.$$

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\dots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3(3n+1)}$$

База $n=1$:

$$\frac{1}{1\cdot 4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3(3\cdot 1+1)} \Rightarrow \frac{1}{4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{12} \Rightarrow \frac{1}{4}=\frac{3}{12} \Rightarrow \frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

тогда:

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\dots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\frac{1}{(3(n+1)-2)(3(n+1)+1)}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3(3(n+1)+1)}$$

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{3(3n+1)}+\frac{1}{(3(n+1)-2)(3(n+1)+1)}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3(3(n+1)+1)}$$

$$\frac{3n+1-1}{3(3n+1)}+\frac{1}{(3n+1)(3n+4)}=\frac{3n+3+1-1}{3(3n+3+1)}$$

$$\frac{3n(3n+4)+3}{3(3n+1)(3n+4)}=\frac{3n+3}{3(3n+4)}$$

$$\frac{\cancel{3}(n(3n+4)+1)}{\cancel{3}(3n+1)(3n+4)}=\frac{\cancel{3}(n+1)}{\cancel{3}(3n+4)}$$

$$\frac{3n^2+4n+1}{(3n+1)(3n+4)}=\frac{n+1}{3n+4} \Rightarrow \frac{3n^2+3n+n+1}{(3n+1)(3n+4)}=\frac{n+1}{3n+4}$$

$$\frac{3n(n+1)+(n+1)}{(3n+1)(3n+4)}=\frac{n+1}{3n+4} \Rightarrow \frac{(n+1)(3n+1)}{(3n+1)(3n+4)}=\frac{n+1}{3n+4}$$

$$\Rightarrow \frac{n+1}{3n+4}=\frac{n+1}{3n+4}$$

№2.

Задание 2. Последовательность и её предел

Дана последовательность

$$x_n=\frac{2n+1}{n+1}.$$

$$x_n=\frac{2n+1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 2$$

$\forall \varepsilon>0\ \exists n_0=n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}: \forall n>n_0: |x_n-a|<\varepsilon$

$$\left|\frac{2n+1}{n+1}-2\right|<\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{2n+1-2n-2}{n+1}\right|<\varepsilon$$

$$\left|-\frac{1}{n+1}\right|<\varepsilon \Rightarrow \frac{1}{n+1}<\varepsilon \Rightarrow n+1 \quad \frac{1}{\varepsilon}$$

$$n>\frac{1}{\varepsilon}-1$$

- Докажите сходимость x_n, используя критерий Коши.

$\forall \varepsilon>0\ \exists N: \forall n,m\geq N: |x_n-x_m|<\varepsilon \Leftrightarrow \lim x_n = A \in \mathbb{R}$

$\varepsilon = \frac{1}{2}$; $n=N$; $m=2N$

$$\left|\frac{2N+1}{N+1}-\frac{4N+1}{2N+1}\right|<\frac{1}{2}$$

$$\left|\frac{(2N+1)^2-(4N+1)(N+1)}{(N+1)(2N+1)}\right|<\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{4N^2+4N+1-4N^2-4N-N-1}{(N+1)(2N+1)}<\frac{1}{2}$$

$$\frac{N}{2N^2+3N+1}<\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{N}{2N^2+2N+N+1}<\frac{1}{2}$$

$$\frac{N}{(N+1)(2N+1)}<\frac{1}{2}$$

$$\frac{N}{(N+1)(2N+1)}-\frac{1}{2}<0$$

$$\frac{2N-(N+1)(2N+1)}{2(N+1)(2N+1)}<0$$

$\Rightarrow \dfrac{-2N^2-N-1}{2(N+1)(2N+1)}<0$ — верно при любых натуральных N,

значит x_n — сходящая

- Докажите сходимость x_n и найдите её предел, используя теорему Вейерштрасса.

$x_n = \frac{2n+1}{n+1}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = 2$

следовательно x_n - огр. сверху $x_n < 2$

$x_n = \frac{2n+1}{n+1} \quad x_{n+1} = \frac{2n+3}{n+2}$

$x_{n+1} - x_n = \frac{(2n+3)(n+1)-(2n+1)(n+2)}{(n+1)(n+2)} =$

$= \frac{2n^2+2n+3n+3-2n^2-4n-n-2}{(n+1)(n+2)} =$

$= \frac{1}{(n+2)(n+1)} > 0$ при любом $n \in \mathbb{N}$

значит x_n явл. огр. возр. послед

$\Rightarrow x_n$ сходится к пределу $= 2$

- Найдите или укажите, что не существуют

$$\sup x_n, \quad \inf x_n, \quad \max x_n, \quad \min x_n.$$

$\sup x_n$

т.к. x_n явл. огр. возр. послед, то по теореме Вейерштрасса:

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup x_n = 2$

$\inf x_n \quad \min x_n$

т.к. $n \in \mathbb{N}$, то $\min x_n = x_1 = 1{,}5 = \inf x_n$

$\max x_n$

$\exists M = \max x_n$, тогда $M < 2$, значит

$M = \frac{M+M}{4} < \frac{M+2}{4} < \frac{2+2}{4} = 2$ - противоречие

значит $\nexists \max x_n$

$\boxed{\text{№3}}$

Задание 3. Подпоследовательности и их пределы

Дана последовательность

$$x_n = (-1)^n \left(\frac{n^2+3n+1}{3n^2+5}\right).$$

Найдите и обоснуйте множество частичных пределов последовательности x_n. Выпишите $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$.

$x_{2n} = \frac{n^2+3n+1}{3n^2+5}$

$x_{2n-1} = -\frac{n^2+3n+1}{3n+5}$

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+3n+1}{3n^2+5} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2(1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2})}{n^2(3+\frac{5}{n^2})} = \frac{1}{3}$

$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} -\frac{n^2+3n+1}{3n^2+5} = -\frac{1}{3}$

$E = \{-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\}$ – мн-во частичн. пределов

$\boxed{№4}$

Задание 4. Предел функции (1 балл)

- Докажите, используя определение предела по Коши, что

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = 2\,.$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x:\ 0 < |x - x_0| < \delta \quad |f(x) - A| < \varepsilon \Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = A$$

$$\left|\frac{x-1}{\sqrt{x}-1} - 2\right| < \varepsilon \Longleftrightarrow \left|\frac{x-1-2(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}-1}\right| < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < \frac{x-2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < \frac{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x} - \sqrt{x} - (\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}-1} < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1) - (\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}-1} < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < \sqrt{x} - 1 < \varepsilon$$

$$1 - \varepsilon < \sqrt{x} \qquad \sqrt{x} < 1 + \varepsilon$$

$$1 - 2\varepsilon + \varepsilon^2 < x \qquad x < 1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2$$

$$\delta = \min\{\varepsilon^2 + 2\varepsilon + 1;\ \varepsilon^2 - 2\varepsilon + 1\}$$

$$\Rightarrow 2-\delta<x<2+\delta$$

- Докажите, что предела не существует, используя определение предела по Гейне:

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right).$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0,\ x_n \neq x_0 \quad \Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)$$
$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$$

$$x_n = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad \tilde{x}_n = -\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$f(x_n) = \operatorname{arctg}\frac{1}{x_n} = \qquad f(\tilde{x}_n) = \operatorname{arctg} -\frac{1}{x_n} =$$

$$= \operatorname{arctg}\frac{1}{\frac{1}{n}} = \qquad = \operatorname{arctg} -\frac{1}{\frac{1}{n}} =$$

$$= \operatorname{arctg} n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\pi}{2} \qquad = \operatorname{arctg}(-n) \xrightarrow[n\to\infty]{} -\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{2} \neq -\frac{\pi}{2}$$

$$\Longrightarrow \lim \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) \nexists$$

$$\boxed{N\,5}$$

Задание 5. Вычисление пределов (4 балла)

Вычислите, используя арифметические свойства пределов, замечательные пределы и следствия из них:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n+4}-\sqrt{n^2-n+1}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n^2+3n+4}-\sqrt{n^2-n+1})(\sqrt{n^2+3n+4}+\sqrt{n^2-n+1})}{(\sqrt{n^2+3n+4}+\sqrt{n^2-n+1})} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3n+4-n^2+n-1}{\sqrt{n^2+3n+4}+\sqrt{n^2-n+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4n-1}{\sqrt{n^2+3n+4}+\sqrt{n^2-n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{4}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}} =$$

$$= 2$$

$$\lim_{x\to -1} \frac{4x^2+5x+1}{x^3+1}$$

$$\lim_{x\to -1} \frac{4(x+\frac{1}{4})\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)}(x^2-2x+1)} = \lim_{x\to -1} \frac{4x+1}{x^2-2x+1} =$$

$$= \frac{-4+1}{1+2+1} = -1$$

$\lim_{x\to 2} (3-x)^{1/\operatorname{tg}(x-2)}$

$$\lim_{x\to 2} (1-(x-2))^{\frac{1}{tg(x-2)}}$$

пусть $(x-2)=t$, тогда:

$$\lim_{t\to 0} (1+(-t))^{\frac{1}{tg t}} = \lim_{t\to 0} \left((1+(-t))^{-\frac{1}{t}}\right)^{\frac{-t}{tg t}} =$$

$$= \lim_{t\to 0} e^{-\frac{t}{tg t}} = e^{\lim\limits_{t\to 0} -\frac{t}{tg t}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$\lim_{x\to 0} \frac{x \arcsin(x/2)}{1-\cos 4x}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \cdot \frac{x}{2}}{\frac{16x^2}{2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{2x^2}}{16\cancel{x^2 \cdot 2}} = \frac{1}{16}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \arcsin\frac{x}{2} \cdot \cancel{\frac{x}{2}}}{(1-\cos 4x)\cdot \frac{x}{2}} = \lim_{x\to 0} \frac{16x^2}{(1-\cos 4x)\,16x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{16x}$$