① Исследовать функцию на непрерывность

а) $f(x)=\begin{cases} x^2-1, & x<-1 \\ x^3+1, & |x|\le 1 \\ x, & x>1 \end{cases}$

Элементарные функции непрерывны на своей области определения, поэтому $f(x)$ непрерывна на $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,\infty)$.

Проверим точки -1; 1

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to-1-0} f(x)=\lim_{x\to-1-0}(x^2-1)=0 \\ &\lim_{x\to-1+0} f(x)=\lim_{x\to-1+0}(x^3+1)=0 \\ &f(-1)=(-1)^3+1=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(x) \text{ непрерывна в точке } x=-1$$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to1-0} f(x)=\lim_{x\to1-0}(x^3+1)=2 \\ &\lim_{x\to1+0} f(x)=\lim_{x\to1+0}(x)=1 \\ &f(1)=1^3+1=2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{в точке } x=1 \text{ ф-я } f(x) \text{ имеет разрыв 1 рода (скачок)}$$

б) $f(x) = \frac{|x+2|}{x^2+3x+2} = \frac{|x+2|}{(x+1)(x+2)}$

$f(x)$ непрерывна на $(-\infty,-1)\cup(-2,-1)\cup(-1,\infty)$

Проверим точки $-1, -2$.

$\lim\limits_{x\to -1-0} \frac{|x+2|}{(x+1)(x+2)} = \lim\limits_{x\to -1-0} \frac{\cancel{(x+2)}}{(x+1)\cancel{(x+2)}} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to -1+0} \frac{|x+2|}{(x+1)(x+2)} = \lim\limits_{x\to -1+0} \frac{\cancel{(x+2)}}{(x+1)\cancel{(x+2)}} = +\infty$

точка $x=-1$ разрыв 2 рода

$\lim\limits_{x\to -2-0} \frac{|x+2|}{(x+1)(x+2)} = \lim\limits_{x\to -2-0} \frac{-\cancel{(x+2)}}{(x+1)\cancel{(x+2)}} = 1$

$\lim\limits_{x\to -2+0} \frac{|x+2|}{(x+1)(x+2)} = \lim\limits_{x\to -2+0} \frac{\cancel{(x+2)}}{(x+1)\cancel{(x+2)}} = -1$

точка $x=-2$ разрыв 1 рода

в) $f(x) = 3^{\frac{3}{x^2-4}}$ непрерывна на $(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,\infty)$

$\lim\limits_{x\to -2-0} 3^{\frac{3}{x^2-4}} = 3^{+\infty} = \infty$

$\lim\limits_{x\to -2+0} 3^{\frac{3}{x^2-4}} = 3^{-\infty} = 0$

точка $x=-2$ - разрыв 2 рода

$\lim\limits_{x\to +2-0} 3^{\frac{3}{x^2-4}} = 3^{-\infty} = 0$

$\lim\limits_{x\to 2+0} 3^{\frac{3}{x^2-4}} = 3^{\infty} = \infty$

точка $x=2$ - разрыв 2 рода

2. $y=\frac{1}{2}\ln\frac{x+\sqrt{x}+1}{x-\sqrt{x}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}x}{1-x}$

$$\left(\frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{x}+1)-\frac{1}{2}\ln(x-\sqrt{x}+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}x}{1-x}\right)'=$$

$$=\frac{1+\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2(x+\sqrt{x}+1)}-\frac{1-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2(x-\sqrt{x}+1)}+\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt{3}x}{1-x}\right)^2}\cdot\frac{\sqrt{3}-\sqrt{3}x+\sqrt{3}x}{(1-x)^2}$$

3. a) $y=(\cos(x+2))^{\ln x}$

$$y'=\left(e^{\ln\cos(x+2)\ln x}\right)'=e^{\ln\cos(x+2)\ln x}\left(\frac{-\sin(x+2)}{\cos(x+2)}\cdot\ln x+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{x}\ln\cos(x+2)\right)=(\cos(x+2))^{\ln x}\left(-\operatorname{tg}(x+2)\ln x+\frac{\ln\cos(x+2)}{x}\right).$$

3.б) $y=\sqrt[5]{\frac{(1-x)^4\sqrt{(4+x)^3}}{(x+2)^3}}$,

$$\ln y=\frac{4}{5}\ln(1-x)+\frac{3}{10}\ln(4+x)-\frac{3}{5}\ln(x+2),$$

$$\frac{y'}{y}=-\frac{4}{5}\frac{1}{1-x}+\frac{3}{10}\frac{1}{4+x}-\frac{3}{5}\frac{1}{x+2},$$

$$y'=\sqrt[5]{\frac{(1-x)^4\sqrt{(4+x)^3}}{(x+2)^3}}\left(\frac{4}{5}\frac{1}{x-1}+\frac{3}{10}\frac{1}{4+x}-\frac{3}{5}\frac{1}{x+2}\right).$$

3в) $\begin{cases}x=\sin t-\cos t\\ y=\sin t+\cos t\end{cases}$ $t\in[0,\pi]$

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{\cos t-\sin t}{\cos t+\sin t}$$

3г) ф-я $y=y(x)$ задана неявно:

$$xy+\ln(xy)=1$$

$$y+xy'+\frac{1}{xy}(y+xy')=0$$

$$(y+xy')\left(1+\frac{1}{xy}\right)=0\Rightarrow y+xy'=0\Rightarrow y'=-\frac{y}{x}$$

4. а) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2} = \left|\dfrac{0}{0}\right| = \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\frac{2}{2\sqrt{1+2x}}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{4}} = \dfrac{4}{3}$

б) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{\ln x} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x}{1/x} = 2$

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x+e^{-x}-2}{\sin^2 x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-e^{-x}}{2\sin x\cos x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x+e^{-x}}{2(\cos^2 x-\sin^2 x)} = \dfrac{2}{2} = 1$

5. Найти $f^{(n)}(x)$ и написать формулу Тейлора этой функции с остатком в форме Пеано в точке x_0:

а) $f(x) = \dfrac{4}{x+3}$, $x_0 = -1$

$f'(x) = -4(x+3)^{-2}$ $\qquad$ $f'(-1) = -1$

$f''(x) = 4\cdot(-1)(-2)(x+3)^{-3}$ $\qquad$ $f''(-1) = 1$

...

$f^{(n)}(x) = 4\cdot(-1)(-2)\ldots(-n)(x+3)^{-n-1} = 4(-1)^n n!(x+3)^{-n-1}$

Докажем по индукции. 1) база. $n=1$ $\quad f'(x) = 4\cdot(-1)(x+3)^{-1-1}$. верно.

2) индукционный переход. Пусть верно: $f^{(n)}(x) = 4\cdot(-1)^n n!(x+3)^{-n-1}$.

$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)' = 4(-1)^n n!(-n-1)(x+3)^{-n-2} = 4(-1)^{n+1}(n+1)!(x+3)^{-(n+1)-1}$

формула доказана. $\qquad f^{(n)}(0) = 4(-1)^n n!\dfrac{1}{2^{n+1}} = \dfrac{(-1)^n n!}{2^{n-1}}$

напишем формулу Тейлора до порядка n:

$\dfrac{4}{x+3} = 2-(x+1)+(x+1)^2+\ldots+\dfrac{(-1)^n}{2^{n-1}}(x+1)^n+o\left((x+1)^n\right)$.

5 б) $y = f(x) = \ln(3x-5)$, $x_0 = 3$

$$f'(x) = \frac{3}{3x-5} = \frac{1}{x-5/3} = \left(x-\frac{5}{3}\right)^{-1} \quad f'(3) =$$

$$f''(x) = (-1)\left(x-\frac{5}{3}\right)^{-2}$$

$$\ldots$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)\ldots(-n+1)\left(x-\frac{5}{3}\right)^{-n} = (-1)^{n-1}(n-1)!\left(x-\frac{5}{3}\right)^{-n}$$

Докажем по индукции. 1) База при $n=1$ $f'(x) = (-1)^0 \cdot 0! \left(x-\frac{5}{3}\right)^{-1}$.

2) индукционный переход. ∃ верно при n:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\left(x-\frac{5}{3}\right)^{-n}$$

$$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)' = (-1)^{n-1}(n-1)!(-n)\left(x-\frac{5}{3}\right)^{-n-1} = (-1)^{(n+1)-1}((n+1)-1)!\left(x-\frac{5}{3}\right)^{-(n+1)}.$$

Формула для $f^{(n)}$ доказана.

Построим формулу Тейлора.

$$f^{(n)}(3) = (-1)^{n-1}(n-1)!\left(\frac{4}{3}\right)^{-n}$$

$$\ln(3x-5) = \ln 4 + \left(\frac{4}{3}\right)^{-1}(x-3) - \left(\frac{4}{3}\right)^{-2}\frac{(x-3)^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\left(\frac{4}{3}\right)^{-n}\frac{1}{n}(x-3)^n +$$

$$+ o\left((x-3)^n\right)$$

5в) $f(x) = \sqrt{x+2}$, $x_0 = 1$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x+2)^{-1/2}$$

$$f''(x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)(x+2)^{-3/2}$$

$$\ldots$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)(x+2)^{\frac{1}{2}-n}$$

Докажем ф-лу по индукции. 1) База $n=1$ $f'(x) = \left(\frac{1}{2}-1+1\right)(x+2)^{\frac{1}{2}-1}$ верно.

2) инд. переход. ∃ верно для n. $f^{(n)}(x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\ldots\left(\frac{3}{2}-n\right)(x+2)^{1/2-n}$.

$$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)' = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\ldots\left(\frac{3}{2}-n\right)\left(\frac{1}{2}-n\right)\cdot(x+2)^{1/2-n-1} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\ldots\left(\frac{3}{2}-n\right)\left(\frac{3}{2}-(n+1)\right)(x+2)^{\frac{1}{2}-(n+1)}$$, т. е. формула $f^{(n)}$ доказана

Формула Тейлора.

$$\sqrt{x+2} = \sqrt{3} + \frac{1}{2\sqrt{3}}(x-1) + \ldots + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\ldots\left(\frac{3}{2}-n\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{3^n}(x-1)^n + o\left((x-1)^n\right)$$