Практика 15. Исследование функций.

§ 4. Исследование функций и построение графиков

1. Возрастание и убывание функции. Экстремум. Функция $y=f(x)$ называется *возрастающей* (*убывающей*) в интервале (a, b), если из неравенства $x_1 < x_2$, где $x_1, x_2 \in (a, b)$ следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ (соответственно $f(x_1) > f(x_2)$).

Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b) и $f'(x) > 0$ при всех $x \in (a, b)$, то функция $f(x)$ возрастает на (a, b); если же $f'(x) < 0$ при всех $x \in (a, b)$, то $f(x)$ убывает на этом интервале.

В простейших случаях область определения функции $y=f(x)$ можно разбить на конечное число *интервалов монотонности*. Каждый из интервалов монотонности ограничен *критическими точками*, в которых $f'(x)=0$ или $f'(x)$ не существует.

Если существует такая окрестность $U_\delta(x_0)$ точки x_0, что для всякой точки $x \neq x_0$ этой окрестности выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$ (или $f(x) < f(x_0)$), то точка x_0 называется *точкой минимума* (*максимума*) функции $y=f(x)$, а число $f(x_0)$ — *минимумом* (*максимумом*) этой функции. Точки минимума и максимума функции называются ее *точками экстремума*.

Необходимое условие экстремума. Если x_0 — точка экстремума функции $f(x)$, то $f'(x_0)=0$ или $f'(x_0)$ не существует, т. е. x_0 — критическая точка этой функции.

Обратное, вообще говоря, неверно.

Достаточные условия экстремума непрерывной функции. 1) Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ критической точки x_0, за исключением, быть может, самой этой точки. Если при этом в интервалах $(x_0-\delta, x_0)$ и $(x_0, x_0+\delta)$ производная $f'(x)$ имеет противоположные знаки, то x_0 — точка экстремума, причем, если $f'(x) > 0$ при $x \in (x_0-\delta, x_0)$ и $f'(x) < 0$ при $x \in (x_0, x_0+\delta)$, то x_0 — точка максимума, а если $f'(x) < 0$ при $x \in (x_0-\delta, x_0)$ и $f'(x) > 0$ при $x \in (x_0+\delta, x_0)$, то x_0 — точка минимума. Если же $f'(x)$ при $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$, $x \neq x_0$, сохраняет знак, то точка x_0 не является точкой экстремума.

2) Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема в критической точке x_0 и в некоторой ее окрестности. Если $f''(x_0) < 0$, то x_0 — точка максимума функции $f(x)$, если $f''(x_0) > 0$, то x_0 — точка минимума. Если же $f''(x_0)=0$, то требуются дополнительные исследования.

Пример 1. Найти интервалы монотонности и точки экстремума функции $f(x)=\dfrac{|x-1|}{x^2}$.

◀ Находим производную:

$$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{x-2}{x^3} & \text{при } x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1), \\ \dfrac{2-x}{x^3} & \text{при } x \in (1, +\infty). \end{cases}$$

Приравнивая ее нулю, получаем $x=2$. Таким образом, критическими точками (с учетом тех точек, где производная не существует) являются: $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=2$. Они разбивают область определения $f(x)$ на четыре интервала монотонности: $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$ и $(2, +\infty)$. Так как $f'(x) > 0$ при $x \in (-\infty, 0) \cup (1, 2)$ и $f'(x) < 0$ при $x \in (0, 1) \cup (2, +\infty)$, то $f(x)$ монотонно возрастает при $x \in (-\infty, 0) \cup (1, 2)$, монотонно убывает при $x \in (0, 1) \cup (2, +\infty)$, в точке $x_3=2$ достигает максимум $\left(f(2)=\dfrac{1}{4}\right)$, а в точке $x_2=1$ — минимум $(f(1)=0)$. Полученные результаты удобно свести в следующую таблицу:

Таблица 4.1

x	$(-\infty,\ 0)$	0	$(0,\ 1)$	1	$(1,\ 2)$	2	$(2,\ +\infty)$
$f(x)$	↗	$+\infty$	↘	0	↗	$\frac{1}{4}$	↘
$f'(x)$	+	не сущ.	−	не сущ.	+	0	−

Заметим, что в рассматриваемом примере первое достаточное условие позволяет определить характер каждой из критических точек данной функции. В то же время второе достаточное условие неприменимо в точке x_2, так как в этой точке не существует первая производная. ▶

$\ldots(0)=g^{\ldots}(0)=0,\ k\in N.$

Для указанных функций найти интервалы возрастания и убывания и точки экстремума:

4.4. $y=x\sqrt{1-x^2}$. **4.5.** $y=\frac{2x^2-1}{x^4}$. **4.6.** $y=\frac{x}{\ln x}$.
4.7. $y=x-2\sin x$. **4.8.** $y=x-2\ln x$.
4.9. $y=\ln x-\operatorname{arctg} x$. **4.10.** $y=e^x\cos x$.
4.11. $y=x^x$. **4.12.** $y=\operatorname{ch}^2 x+1$.

Наибольшее (*наименьшее*) *значение* непрерывной функции $f(x)$ на данном отрезке $[a, b]$ достигается или в критических точках, или на концах этого отрезка.

Определить наибольшее M и наименьшее m значения следующих функций на указанных отрезках (а если отрезок не указан, то во всей области определения):

4.13. $y=-3x^4+6x^2$; $[-2, 2]$. **4.14.** $y=x+2\sqrt{x}$; $[0, 4]$.

по шоссе и по железной дороге была наименьшей.

4.27. Окно имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом (рис. 50). Задан периметр p этой фигуры.

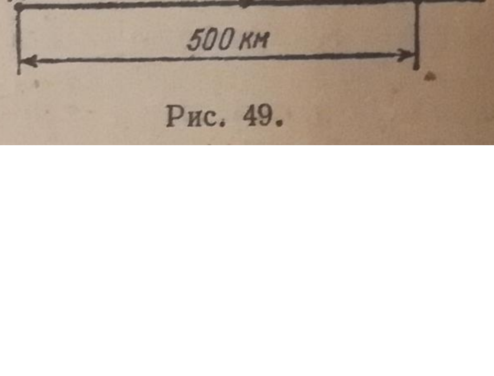

Рис. 49.

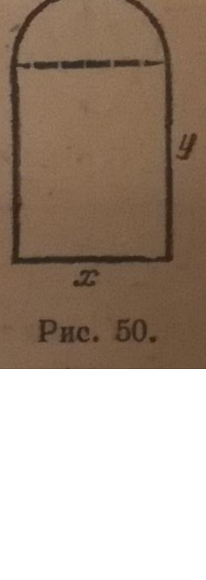

Рис. 50.

ника.

4.30. Периметр осевого сечения цилиндра равен $6a$. Найти наибольший объем такого цилиндра.

4.31. Цилиндр вписан в конус с высотой h и радиусом основания r. Найти наибольший объем вписанного цилиндра.

4.32. Найти наименьший объем конуса, описанного около шара, радиуса r.

4.33. Найти наибольший объем конуса при заданной

2. **Направление выпуклости. Точки перегиба.** График дифференцируемой функции $y=f(x)$ называется *выпуклым вниз* (или *вогнутым*

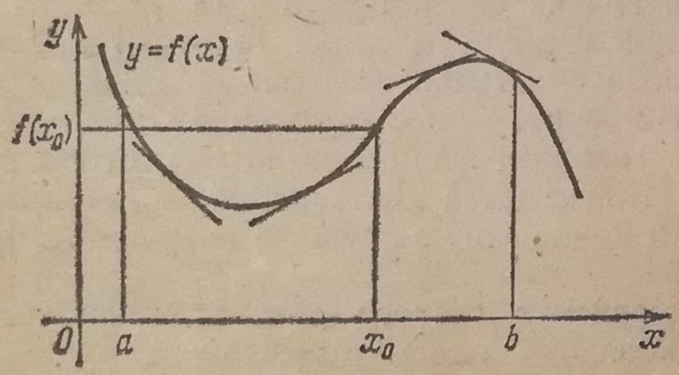

Рис. 52.

вверх) на интервале (a, b), если дуга кривой на этом промежутке расположена выше касательной, проведенной к графику функции $y=f(x)$ в любой точке $x \in (a, b)$.

Если же на интервале (a, b) всякая касательная располагается выше дуги кривой, то график дифференцируемой функции на этом интервале называется *выпуклым вверх* (или *вогнутым вниз*) (на рис. 52 график функции $y=f(x)$ является выпуклым вниз на интервале (a, x_0) и выпуклым вверх на интервале (x_0, b)).

Если функция дважды дифференцируема на (a, b) и $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$), то ее график является выпуклым вниз (вверх) на этом интервале.

В простейших случаях область определения функции $f(x)$ можно разбить на конечное число интервалов с постоянным направлением выпуклости. Каждый из этих интервалов ограничен точками, в которых $f''(x)=0$, либо $f''(x)$ не существует. Точка $(x_0, f(x_0))$, в которой направление выпуклости графика функции меняется на противоположное, называется *точкой перегиба* (см. рис. 52).

Достаточное условие точки перегиба. Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема в некоторой окрестности $U_\delta(x_0)$ точки x_0, в которой $f''(x_0)=0$ или $f''(x_0)$ не существует. Если при этом в интервалах $(x_0-\delta, x_0)$ и $(x_0, x_0+\delta)$ производная $f''(x)$ имеет противоположные знаки, то x_0 — точка перегиба.

Пример 2. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба имеет противоположные знаки, то x_0 — точка перегиба.

Пример 2. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции $y=\frac{|x-1|}{x^2}$.

◀ Находим вторую производную:

$$f''(x)=\begin{cases}\frac{2(3-x)}{x^4}, & x\in(-\infty,\ 0)\cup(0,\ 1),\\ \frac{2(x-3)}{x^4}, & x\in(1,\ +\infty).\end{cases}$$

Следовательно, критическими точками первой производной являются точки $x_1=0$, $x_2=1$ $x_3=3$. При этом в точках x_1 и x_2 вторая производная не существует (в частности, $f''_-(1)=4$, а $f''_+(1)=-4$), а в точке x_3 она равна нулю.

Получаем четыре интервала выпуклости: $(-\infty,\ 0)$, $(0\ \ 1)$, $(1,\ 3)$, $(3,\ +\infty)$. Исследуя знак второй производной в каждом из этих интервалов, выводим, что график функции является выпуклым вниз на интервалах $(-\infty,0)$, $(0,\ 1)$, $(3,\ +\infty)$ и выпуклым вверх на интервале $(1,\ 3)$. Следовательно, точки x_2 и x_3 являются точками перегиба графика функции, а x_1 не является. Полученные результаты удобно свести в следующую таблицу:

Таблица 4.2

x	$(-\infty,\ 0)$	0	$(0,\ 1)$	1	$(1,\ 3)$	3	$(3,\ +\infty)$
$f(x)$	⌣	$+\infty$	⌣	0	⌢	$\frac{2}{9}$	⌣
$f''(x)$	+	не сущ.	+	не сущ.	−	0	+

▶

Найти интервалы выпуклости графика функции $y=f(x)$, точки перегиба и угловые коэффициенты k касательных в точках перегиба:

4.40. $y=x^7+7x+1$. **4.41.** $y=x^4+6x^2$.

4.42. $y=\sqrt[3]{(x-2)^5}+3$. **4.43.** $y=\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}$.

4.44. $y=\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)^2}$. **4.45.** $y=xe^{2x}+1$.

3. Асимптоты. Пусть для функции $y=f(x)$ существует такая прямая, что расстояние от точки $M(x, f(x))$ графика функции до этой прямой стремится к нулю при бесконечном удалении точки M от начала координат. Тогда такая прямая называется *асимптотой* графика функции.

Если при этом координата x точки M стремится к конечному числу a, то полупрямая $x=a$ ($y>0$ либо $y<0$) является вертикальной асимптотой. Для существования вертикальной асимптоты в точке $x=a$ необходимо и достаточно, чтобы хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x\to a\pm 0} f(x)$ был равен бесконечности.

Непрерывные функции не имеют вертикальных асимптот.

Если же координата x точки M стремится к $+\infty$ или $-\infty$, то имеем наклонную асимптоту $y=kx+b$, для существования которой необходимо и достаточно существование двух пределов

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=k \quad \text{и} \quad \lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=b.$$

При этом указанные пределы могут быть различными при $x\longrightarrow+\infty$ (для правой наклонной асимптоты) и при $x\longrightarrow-\infty$ (для левой наклонной асимптоты).

Пример 3. Найти асимптоты графика функции $y=\dfrac{|x-1|}{x^2}$.

◀ Так как функция непрерывна на всей оси, кроме точки $x=0$, то вертикальная асимптота может существовать лишь в этой точке.

Имеем:

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{|x-1|}{x^2}=\lim_{x\to 0-0}\frac{|x-1|}{x^2}=+\infty,$$

и, следовательно, прямая $x=0$ — вертикальная асимптота.

Найдем наклонные асимптоты. Так как

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{|x-1|}{x^2}}{x}=0=k \quad \text{и} \quad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{|x-1|}{x^2}-0\cdot x\right)=0=b,$$

то прямая $y=0\cdot x+0=0$ является правой наклонной (в данном случае горизонтальной) асимптотой.

Совершенно аналогично находим, что та же прямая $y=0$ является и левой наклонной асимптотой. ▶

Найти асимптоты графиков указанных функций:

4.52. $y=\sqrt[5]{\dfrac{x}{x-2}}$. **4.53.** $y=\sqrt[3]{x^3-x^2}$.

4.54. $y=\sqrt{|x^2-3|}/x$. **4.55.** $y=3x+\operatorname{arctg} 5x$.

симум, если $\varphi(x_0)<0$ и n четное; экстремума нет, если n нечетное.
4.3. ● Воспользоваться первым достаточным условием экстремума.
4.4. На $(-1, -1/\sqrt{2})\cup(1/\sqrt{2}, 1)$ убывает, на $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ возрастает; $y_{\min}=y(-1/\sqrt{2})=-1/\sqrt{2}$, $y_{\max}=y(1/\sqrt{2})=1/2$.
4.5. На $(-\infty, -1)\cup(0, 1)$ возрастает, на $(-1, 0)\cup(1, +\infty)$ убы-

вает; $y_{\max}=y(-1)=y(1)=1$. **4.6.** На $(0, 1) \cup (1, e)$ убывает, на $(e, +\infty)$ возрастает; $y_{\min}=y(e)=e$. **4.7.** На $\left(\frac{\pi}{3}(6k-1), \frac{\pi}{3}(6k+1)\right)$ убывает, на $\left(\frac{\pi}{3}(6k+1), \frac{\pi}{3}(6k+5)\right)$ возрастает; $y_{\min}=$ $=y\left(2k\pi+\frac{\pi}{3}\right)=2k\pi+\left(\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}\right) \approx 2k\pi-0{,}685$, $y_{\max}=$ $=y\left(2k\pi+\frac{5\pi}{3}\right)=2(k+1)\pi-\left(\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}\right) \approx 2(k+1)\pi+0{,}685$, $k \in \mathbb{Z}$. **4.8.** На $(0, 2)$ убывает, на $(2, +\infty)$ возрастает; $y_{\min}=y(2)=$ $=2(1-\ln 2) \approx 0{,}61$. **4.9.** Возрастает во всей области определения. **4.10.** На $\left(\frac{\pi}{4}(8k-3), \frac{\pi}{4}(8k+1)\right)$ возрастает, на $\left(\frac{\pi}{4}(8k+1), \frac{\pi}{4}(8k+5)\right)$ убывает; $y_{\max}=y\left(2k\pi+\frac{\pi}{4}\right)=e^{2k\pi}\left(e^{\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx 1{,}55e^{2k\pi}$, $y_{\min}=y\left(2k\pi+\frac{5\pi}{4}\right)=-e^{2k\pi}\left(e^{\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx -1{,}55e^{2k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$. **4.11.** На $(0, 1/e)$ убывает, на $(1/e, +\infty)$ возрастает; $y_{\min}=y(1/e)=$ $=(1/e)^{\frac{1}{e}} \approx 0{,}69$. **4.12.** На $(-\infty, 0)$ убывает, на $(0, +\infty)$ возрастает; $y_{\min}=y(0)=2$. **4.13.** $M=3$, $m=-24$. **4.14.** $M=8$, $m=0$. **4.15.** $M=0{,}6$, $m=-1$. **4.16.** $M=1$, $m=0{,}6$. **4.17.** $M=2$, $m=\sqrt[3]{2} \approx$ $\approx 1{,}26$. **4.18.** $M=\pi/4$, $m=0$. **4.19.** $M=1$, $m=-1$. **4.20.** $M=1/\sqrt{e} \approx$ $\approx 0{,}61$, $m=-1/\sqrt{e} \approx -0{,}61$. **4.21.** ● Рассмотреть функцию $y=e^x-$ $-(1+x)$ и показать, что у нее существует единственный минимум: $y_{\min}=y(0)=0$. **4.25.** $\frac{av_1+bv_2}{v_1^2+v_2^2}$ с. **4.26.** $|AP|=\left(500-\frac{100}{\sqrt{3}}\right)$ км $\approx$ $\approx 442{,}3$ км. **4.27.** $x=\frac{2p}{4+\pi}$, $y=\frac{1}{2}\left(p-x-\frac{\pi x}{2}\right)$. **4.28.** $\alpha=\frac{2\pi}{3}$. **4.29.** $\frac{ah}{4}$. **4.30.** πa^3. **4.31.** $\frac{4}{27}\pi r^2 h$. **4.32.** $\frac{8}{3}\pi r^3$. **4.33.** $\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}e^3$. **4.34.** $2r^2$. **4.35.** $N(1, 1)$. **4.36.** $x=R\sqrt{2}$, $y=R/\sqrt{2}$. **4.37.** Разделить отрезок пополам. **4.38.** $r=\frac{RH\sqrt{R^2+H^2}}{(\sqrt{R^2+H^2}-R)(\sqrt{R^2+H^2}+2R)}$.
4.39. $h=(e^{2/3}-d^{2/3})^{3/2}$. **4.40.** На $(-\infty, 0)$ — выпуклость вверх, на
$(0, +\infty)$ — выпуклость вниз, $M(0, 1)$ — точка перегиба, $k=7$.
4.41. График всюду выпуклый вниз. **4.42.** На $(-\infty, 2)$ — выпуклость
вверх, на $(2, +\infty)$ — выпуклость вниз, $M(2, 0)$ — точка перегиба, $k=0$.
4.43. На $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ — выпуклость вниз, на $(-1, 1)$ — вы-
пуклость вверх, $M_1\left(-1, \sqrt[3]{2}\right)$ и $M_2\left(1, \sqrt[3]{2}\right)$ — точки перегиба,
$k_1=k_2=\infty$. **4.44.** График всюду выпуклый вверх. **4.45.** На
$(-\infty, -1)$ — выпуклость вверх, на $(-1, +\infty)$ — выпуклость вниз,
$M(-1, 1-e^{-2})$ — точка перегиба, $k=-e^{-2} \approx -0{,}14$. **4.46.** На
$(-\infty, 0)$ — выпуклость вверх, на $(0, +\infty)$ — выпуклость вниз, $M(0, 0)$ —
точка перегиба, $k=\infty$. **4.47.** На $(0, e^{-5/6})$ — выпуклость вверх, на

$(e^{-5/6}, +\infty)$ — выпуклость вниз, $M\left(e^{-5/6}, 1-\frac{5}{6}e^{-5/6}\right)$ — точка перегиба, $k=-\frac{3}{2}e^{-5/3} \approx -0{,}28$. **4.48.** $a=-\frac{3}{2}$, $b=\frac{9}{2}$. **4.49.** $\frac{1}{\sigma\sqrt{2}}$. **4.51.** ● Если x_0 — абсцисса точки перегиба, то $x_0 \operatorname{tg} x_0=2$. Тогда $y_0^2=y^2(x_0)=x_0^2 \sin^2 x_0=\frac{4x_0^2}{4+x_0^2}$. **4.52.** $x=2$, $y=1$. **4.53.** $y=x-\frac{1}{3}$.
... 0, $y=1$ (правая), $y=-1$ (левая). **4.55.** $y=3x+\frac{\pi}{2}$ (правая),