Коллоквиум 2: Непрерывность и дифференцирование

1. **Непрерывности функции и классификация разрывов**
Определение непрерывной функции в точке (через ε-δ и неравенства, ε-δ-окрестности, окрестности) и на множестве. Лемма о связи непрерывности и предела. Лемма о характеристике непрерывности в терминах односторонних пределов. Определение точек разрыва и их классификация.

Определение 43 (Понятие непрерывности функции).
Функция $f : E \to \mathbb{R}$ называется непрерывной в точке $x_0 \in E$, если

$$\forall V(f(x_0))\ \exists U(x_0) : \forall x \in U(x_0) \cap E \quad f(x) \in V(f(x_0))$$

или, что то же самое,

$$\forall V(f(x_0))\ \exists U(x_0) : f\left(U(x_0) \cap E\right) \subset V(f(x_0))$$

Замечание 82.
Естественно, приведенное определение может быть переписано и на языке $\varepsilon - \delta$, и на языке соответствующих окрестностей.

Предполагая, что $E \subset \mathbb{R}$, факт непрерывности функции $f : E \to \mathbb{R}$ в точке x_0 записывается так:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in E : |x - x_0| < \delta \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Или так:

$$\forall V_\varepsilon(f(x_0))\ \exists U_\delta(x_0) : \forall x \in U_\delta(x_0) \cap E \quad f(x) \in V_\varepsilon(f(x_0))$$

Или, наконец, так:

$$\forall V_\varepsilon(f(x_0))\ \exists U_\delta(x_0) : f\left(U_\delta(x_0) \cap E\right) \subset V_\varepsilon(f(x_0))$$

Определение 44 (Понятие функции, непрерывной на множестве).
Функция $f : E \to \mathbb{R}$ называется непрерывной на множестве $D \subset E$, если она непрерывна в каждой точке множества D.

Обозначается это так: $f \in C(D)$.

Лемма 33 (Связь непрерывности и предела).
Пусть $f : E \to \mathbb{R}$, $x_0 \in E$.

1. Для того чтобы функция $f : E \to \mathbb{R}$ была непрерывной в точке x_0, предельной для E, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

2. Если точка x_0 не является предельной для E, то f непрерывна в x_0.

Доказательство. 1. Сначала рассмотрим первое утверждение. Докажем необходимость. Пусть функция f непрерывна в точке x_0, предельной для E, тогда

$$\forall V(f(x_0))\ \exists U(x_0) : \forall x \in U(x_0) \cap E \quad f(x) \in V(f(x_0)).$$

В частности,

$$\forall x \in \overset{o}{U}(x_0) \cap E \quad f(x) \in V(f(x_0)).$$

Тем самым, мы пришли к тому, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Докажем достаточность. Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, тогда

$$\forall V(f(x_0))\ \exists \overset{o}{U}(x_0) : \forall x \in \overset{o}{U}(x_0) \cap E \quad f(x) \in V(f(x_0)).$$

Так $f(x_0) \in V(f(x_0))$, то на самом деле выполняется и то, что

$$\forall x \in U(x_0) \cap E \quad f(x) \in V(f(x_0)),$$

и мы приходим к факту непрерывности $f(x)$ в точке x_0.

2. Теперь докажем второе утверждение. Если x_0 не является предельной точкой для множества E, то существует окрестность $U(x_0)$, не содержащая других, кроме x_0, точек из E. А тогда если $\varepsilon > 0$, то

$$x \in U(x_0) \cap E \ \Rightarrow (x = x_0) \ \Rightarrow \ |f(x) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon,$$

что и завершает доказательство. □

П

Лемма 34 (Характеристика непрерывности в терминах односторонних пределов). Пусть $f : E \to \mathbb{R}$ и x_0 — предельная для E. Если существуют (в смысле определения) односторонние пределы $f(x_0+0)$ и $f(x_0-0)$, то непрерывность функции f в точке равносильна равенству

$$f(x_0+0) = f(x_0-0) = f(x_0).$$

Если существует (в смысле определения) лишь один из односторонних пределов $f(x_0 \pm 0)$, то непрерывность функции f в точке равносильна равенству

$$f(x_0 \pm 0) = f(x_0)$$

Доказательство. Эта лемма – комбинация леммы 33 и теоремы 24. □

- [ ] критерий существования предела в терминах односторонних:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \quad \Leftrightarrow \quad f(x_0+0) = f(x_0-0) = A$$

определение непрерывности функции в x0:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

<u>Упр.</u>

Определение 45 (Понятие точки разрыва).
Пусть $f : E \to \mathbb{R}$. Если $x_0 \in \mathbb{R}$ – предельная для E и f не непрерывна в точке x_0, то точка x_0 называется точкой разрыва для функции f.

Определение 46 (Понятие устранимого разрыва).
Пусть $f : E \to \mathbb{R}$ и $x_0 \in \mathbb{R}$. Если существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \in \mathbb{R}$, но значение функции в точке x_0 либо не определено, либо отличается от A, то x_0 называется точкой устранимого разрыва функции f.

Определение 47 (Понятие разрыва 1-ого рода (скачка)).
Пусть $f : E \to \mathbb{R}$. Если существуют односторонние пределы $f(x_0 \pm 0) \in \mathbb{R}$, но

$$f(x_0 + 0) \neq f(x_0 - 0),$$

то точка x_0 называется точкой разрыва первого рода или скачком.

Определение 48 (Понятие разрыва 2-ого рода).
Пусть $f : E \to \mathbb{R}$, x_0 – предельная для E. Если не существует хотя бы одного из односторонних пределов $f(x_0 \pm 0)$ в $\mathbb{R}$, то точка x_0 называется точкой разрыва второго рода.

Если при этом разрыв 2 рода произошёл по причине бесконечности одного или двух односторонних пределов, то уточняют, что x0 -- точка **бесконечного разрыва**.

Если при этом разрыв 2 рода произошёл по причине несуществования предела (с одной или двух сторон) в расширенном R, то уточняют, что x0 -- точка **существенного разрыва**.

2. **Локальные свойства непрерывных функций**
Определение непрерывной функции в точке (через ε-δ и неравенства, ε-δ-окрестности, окрестности). Определение точек разрыва и их классификация. Теорема о пяти локальных свойствах непрерывной функции (локальные свойства, непрерывность суммы, произведения и отношения функций). Теорема о непрерывности композиции функций.

См. билет 1

Теорема 26 (Локальные свойства непрерывных функций).
Пусть функция $f : E \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке x_0. Тогда:

1. Функция $f(x)$ ограничена в некоторой окрестности x_0.
2. Если $f(x_0) \neq 0$, то существует окрестность $U(x_0)$ такая, что в $U(x_0) \cap E$ знаки $f(x)$ и $f(x_0)$ совпадают.

Пусть, кроме того, $g : E \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке x_0. Тогда:

(в) Функция $f(x) + g(x)$ непрерывна в x_0.

(г) Функция $f(x)g(x)$ непрерывна в x_0.

(д) Функция $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ непрерывна в x_0, если $g(x_0) \neq 0$.

Доказательство. Первые два пункта доказывается также как соответствующие пункты в локальных свойствах (18) функций, имеющих предел, и остаются в качестве упражнения.

Докажем, например, третий пункт. Если x_0 – не предельная точка для E, то функция $f(x)+g(x)$, чья область определения – это множество E, автоматически непрерывна в точке x_0. Если же точка x_0 – предельная точка для E, то, используя определение непрерывности через предел, а также арифметические свойства пределов (19), имеем

$$f(x)+g(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} f(x_0)+g(x_0),$$

что и доказывает непрерывность суммы. Остальные пункты доказываются аналогично и остаются в качестве упражнения. □

3) x_0 – не предельная т. E

$f(x)+g(x)$ опр. на E $\Rightarrow$ автоматич. непр. в x_0

x_0 – предельная т. E

$f(x)+g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} f(x_0)+g(x_0)$ по арифметическим операциям пределов

4) и 5) по аналогии с 3).

Теорема 27 (О непрерывности композиции).
Пусть $f: E_1 \to E_2$, $g: E_2 \to \mathbb{R}$, функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in E_1$, а функция $g(y)$ непрерывна в точке $y_0 = f(x_0) \in E_2$. Тогда функция $g(f(x))$ непрерывна в точке x_0.

Доказательство. Так как $g(y)$ непрерывна в точке y_0, то

$$\forall V(g(y_0))\ \exists U(y_0) : \forall y \in U(y_0)\cap E_2 \quad g(y) \in V(g(y_0)).$$

Так как $f(x)$ непрерывна в точке x_0, а $f(x_0)=y_0$, то по $U(y_0)$

$$\exists W(x_0) : \forall x \in W(x_0)\cap E_1 \quad f(x) \in U(y_0),$$

и, так как $f: E_1 \to E_2$, то $f(x) \in U(y_0)\cap E_2$, откуда

$$\forall x \in W(x_0)\cap E_1 \quad g(f(x)) \in V(g(f(x_0))),$$

что и доказывает непрерывность $g(f(x))$ в точке x_0. □

3. **Теорема Вейерштрасса**
Определение непрерывной функции в точке (через ε-δ и неравенства, ε-δ-окрестности, окрестности). Определение точек разрыва и их классификация. Лемма о замкнутости отрезка. Теорема Вейерштрасса.

См. билет 1

Лемма 35 (О замкнутости отрезка).
Пусть $x_n \in [a,b]$ – сходящаяся последовательность. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} x_n \in [a,b].$$

Доказательство. Пусть $A = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Допустим противное, пусть $A \notin [a,b]$. Тогда при $\varepsilon = \min(|a-A|, |b-A|)$ в ε-окрестности точки A нет точек из отрезка $[a,b]$, а значит и членов последовательности x_n, что невозможно согласно, например, пункту

3 леммы 21. Это противоречие завершает доказательство. □

ЛЕММА 21(св-ва последовательностей имеющих предел)

3. В любой окрестности $A \in \overline{\mathbb{R}}$ содержатся все элементы последовательности x_n, за исключением не более чем конечного числа.

Теорема 28 (Вейерштрасса).
Пусть $f \in C[a,b]$. Тогда:

1. f ограничена на $[a,b]$.
2. f достигает на $[a,b]$ наибольшего и наименьшего значений.

Доказательство. Докажем первый пункт. От противного, пусть f, например, не ограничена сверху. Тогда существует (сродни доказательству леммы 28) последовательность $x_n \in [a,b]$, что

$$f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Так как x_n ограничена, то, согласно теореме Больцано–Вейерштрасса (15),

$$\exists x_{n_k} : x_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} x_0.$$

Согласно лемме 35, $x_0 \in [a,b]$. Теперь мы приходим к противоречию с непрерывностью f в точке $x_0 \in [a,b]$: с одной стороны, из непрерывности следует, что

$$f(x_{n_k}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f(x_0) \in \mathbb{R},$$

а с другой стороны, из леммы 27,

$$f(x_{n_k}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Случай, когда f не ограничена снизу, рассматривается аналогично и остается в качестве упражнения.

Докажем второй пункт. Снова будем доказывать от противного. Пусть, например, супремум не достигается:

$$M = \sup_{x\in[a,b]} f(x), \quad f(x) \neq M \quad \text{при} \quad x \in [a,b].$$

Тогда функция

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$$

положительна на $[a,b]$ и, кроме того, по теореме 26, непрерывна на $[a,b]$. Значит, по доказанному в первом пункте, функция $g(x)$ ограничена. Тогда существует число $M_1 > 0$, что $g(x) < M_1$ на $[a,b]$. В то же время, при $x \in [a,b]$

$$\frac{1}{M - f(x)} < M_1 \;\Leftrightarrow\; M - f(x) > \frac{1}{M_1} \;\Leftrightarrow\; f(x) < M - \frac{1}{M_1},$$

что противоречит тому, что $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. □

4. **Теоремы Больцано-Коши**
   Определение непрерывной функции в точке (через ε-δ и неравенства, ε-δ-окрестности, окрестности). Определение точек разрыва и их классификация. Первая и вторая теоремы Больцано-Коши.

См. билет 1

Теорема 29 (Первая теорема Больцано–Коши).
Пусть $f \in C[a,b]$ и $f(a) \cdot f(b) < 0$. Тогда

$$\exists c \in (a,b) : f(c) = 0.$$

Доказательство. Пусть, для определенности, $f(a) > 0$, $f(b) < 0$. Обозначим $a_1 = a$, $b_1 = b$. Разделим отрезок $I_1 = [a_1, b_1]$ пополам точкой

$$c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}.$$

Если $f(c_1) = 0$, то доказательство закончено. Если $f(c_1) \neq 0$, то либо $f(c_1) > 0$, либо $f(c_1) < 0$. Из получившихся двух отрезков выберем тот, на концах которого значения функции все также имеют разный знак. Это значит, что в первом случае в качестве отрезка I_2 выберем отрезок $[c_1, b]$, а во втором случае в качестве отрезка I_2 выберем отрезок $[a, c_1]$. В любом из двух случаев концы нового отрезка обозначим a_2 и b_2.

Продолжаем по индукции. Если построен отрезок $I_{n-1} = [a_{n-1}, b_{n-1}]$, то на шаге $n \geq 2$ разделим отрезок I_{n-1} пополам точкой

$$c_{n-1} = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}.$$

Если $f(c_{n-1}) = 0$, то доказательство закончено. Если $f(c_{n-1}) \neq 0$, то либо $f(c_{n-1}) > 0$, либо $f(c_{n-1}) < 0$. В первом случае в качестве отрезка I_n выберем отрезок $[c_{n-1}, b_{n-1}]$, а во втором случае в качестве отрезка I_2 выберем отрезок $[a_{n-1}, c_{n-1}]$. В любом из двух случаев концы нового отрезка обозначим a_n и b_n.

Так как $a_n, b_n \in [a,b]$, то по теореме Больцано–Вейерштрасса (15)

$$\exists a_{n_k} : a_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} a_0, \quad \exists b_{n_k} : b_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} b_0,$$

причем $a_0, b_0 \in [a,b]$, что следует из леммы 35. Так как длина отрезка I_1 на каждой итерации уменьшается в два раза, то

$$b_n - a_n = \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

откуда $a_0 = b_0 = x_0 \in [a,b]$. Пользуясь непрерывностью f на $[a,b]$, имеем:

$$f(a_{n_k}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f(x_0), \quad f(b_{n_k}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f(x_0).$$

Так как, по построению, $f(a_{n_k}) > 0$, $f(b_{n_k}) < 0$, то, по теореме о предельном переходе в неравенствах (13),

$$(f(x_0) \geq 0) \ \wedge \ (f(x_0) \leq 0) \ \Rightarrow \ f(x_0) = 0,$$

и теорема доказана. □

Теорема 30 (Вторая теорема Больцано–Коши).
Пусть $f \in C[a,b]$, $f(a) = A$, $f(b) = B$, $A < B$. Тогда

$$\forall C \in (A, B)\ \exists c \in (a, b) : f(c) = C.$$

Доказательство. Пусть $C \in (A, B)$. Рассмотрим функцию

$$g(x) = f(x) - C.$$

Во-первых, эта функция непрерывна на $[a, b]$ как разность непрерывных функций. Во-вторых,

$$g(a) = A - C < 0, \quad g(b) = B - C > 0.$$

Значит, согласно первой теореме Больцано–Коши (29),

$$\exists c \in (a, b) : g(c) = 0 \ \Leftrightarrow\ f(c) - C = 0 \ \Leftrightarrow\ f(c) = C,$$

что и доказывает теорему. □

5. **Непрерывность и монотонность функции**
   Определение возрастания и убывания функции, монотонной функции. Определение непрерывной функции в точке (через ε-δ и неравенства, ε-δ-окрестности, окрестности). Критерий непрерывности монотонной функции. Теорема об обратной функции.

Определение 37 (Понятия возрастания и убывания функции).
Пусть $f : E \to \mathbb{R}$. Говорят, что функция f возрастает на E, если

$$\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \quad f(x_1) \le f(x_2).$$

Говорят, что функция f строго возрастает на E, если

$$\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \quad f(x_1) < f(x_2).$$

Говорят, что что функция f убывает на E, если

$$\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \quad f(x_1) \ge f(x_2).$$

Говорят, что функция f строго убывает на E, если

$$\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \quad f(x_1) > f(x_2).$$

Определение 38.
Про возрастающую (строго возрастающую, убывающую, строго убывающую) функцию также говорят, что она монотонна.

См. билет 1

Теорема 32 (Критерий непрерывности монотонной функции).
Пусть f – монотонная на $\langle a, b\rangle$ функция. Тогда:

1. f не может иметь разрывов второго рода.
2. Непрерывность f равносильна тому, что множество ее значений – промежуток.

Доказательство. Пусть, например, f возрастает.

1. Докажем первый пункт. Пусть $x_0 \in (a, b\rangle$, $x_1 \in \langle a, x_0)$. В силу возрастания f, имеем

$$f(x_1) \le f(x) \le f(x_0), \quad x \in (x_1, x_0).$$

По теореме Вейерштрасса (22), f имеет предел при $x \to x_0 - 0$. Согласно теореме о предельном переходе в неравенствах (13),

$$f(x_1) \le f(x_0 - 0) \le f(x_0).$$

Аналогично доказывается, что для $x_0 \in \langle a, b)$, $x_1 \in (x_0, b\rangle$

$$f(x_0) \le f(x_0 + 0) \le f(x_1).$$

Тем самым, установлено существование (в $\mathbb{R}$) односторонних пределов, что и доказывает утверждение.

2. Докажем второй пункт. В силу теоремы о сохранении промежутка (31), в доказательстве нуждается лишь достаточность. Пусть $f(\langle a, b\rangle)$ – промежуток. Докажем непрерывность f в любой точке $x_0 \in (a, b\rangle$ слева. Если это не так, то

$$f(x_0 - 0) < f(x_0).$$

Пусть $y \in (f(x_0 - 0), f(x_0))$. Тогда, если $x_1 \in (a, x_0)$, то

$$y \in [f(x_1), f(x_0)] \subset f(\langle a, b\rangle),$$

а значит y – значение функции. Но, как показано в доказательстве первого пункта,

$$f(x) \le f(x_0 - 0) < y, \quad x \in (a, x_0),$$

$$f(x) \ge f(x_0) > y, \quad x \in [x_0, b\rangle,$$

а значит f не принимает значение y, что приводит к противоречию. Аналогичным образом доказывается непрерывность f в каждой точке множества $\langle a, b)$ справа. □

Теорема 33 (Об обратной функции).
Пусть $f \in C(\langle a, b\rangle)$ и строго монотонна,

$$m = \inf_{\langle a,b\rangle} f, \quad M = \sup_{\langle a,b\rangle} f.$$

Справедливы следующие утверждения:

1. $f : \langle a, b\rangle \to \langle m, M\rangle$ – биекция.
2. f^{-1} строго монотонна и имеет тот же характер монотонности, что и f.
3. $f^{-1} \in C(\langle m, M\rangle)$.

Доказательство. Будем считать, что f строго возрастает.

1. Докажем первый пункт. В силу строгого возрастания f,

$$(x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle) \wedge (x_1 < x_2) \;\Rightarrow\; (f(x_1) < f(x_2)),$$

откуда f – инъекция. То, что $f(\langle a, b\rangle) = \langle m, M\rangle$ следует из теоремы о сохранении промежутка (31). Итого, f – биекция между указанными множествами.

2. Докажем второй пункт. Пусть $x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$, $y_1 < y_2$. Тогда, так как $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$, то $x_1 < x_2$ в силу строгого возрастания f.

3. Докажем третий пункт. Его утверждение следует из теоремы 32. □

6. **Равномерная непрерывность**
   Определение непрерывной функции на множестве (через ε-δ и неравенства, ε-δ-окрестности, окрестности). Определение равномерно непрерывной функции на множестве (через ε-δ и неравенства, ε-δ-окрестности, окрестности). Лемма о связи равномерной непрерывности и непрерывности функции. Теорема Кантора.

См. билет 1

Определение 62 (Понятие равномерной непрерывности).
Пусть $f : E \to \mathbb{R}$. Функция f называется равномерно непрерывной на множестве $D \subset E$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \; \forall x, x' \in D : \; |x - x'| < \delta \;\; |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

Лемма 59.
Если f равномерно непрерывна на D, то f непрерывна на D.

Если $f : E \to \mathbb{R}$ равн. непр. на $D \subset E$, то
f непр. на $D \subset E$

□ очевидно из сравнения опр-ий ■

Теорема 47 (Кантора).
Непрерывная на отрезке функция равномерно непрерывна на этом отрезке.

P.S. В доказательстве упоминается лемма о замкнутости отрезка (лемма 35)

Лемма 35 (О замкнутости отрезка).
Пусть $x_n \in [a, b]$ – сходящаяся последовательность. Тогда

$$\lim_{n \to \infty} x_n \in [a, b].$$

Доказательство. Будем доказывать от противного. Пусть f непрерывна, но не равномерно непрерывна на $[a, b]$. Значит,

$$\exists \varepsilon_0 : \ \forall \delta \ \exists x, x' \in [a, b] : \ |x - x'| < \delta, \quad \text{но, в то же время,} \quad |f(x) - f(x')| \geq \varepsilon_0.$$

Пусть $\delta_n = \dfrac{1}{n}$, тогда

$$\exists x_n, x'_n \in [a, b] : \ |x_n - x'_n| < \delta_n, \quad \text{но, в то же время,} \quad |f(x_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon_0.$$

Так как $x_n \in [a, b]$, то, согласно теореме Больцано–Вейерштрасса (15), из последовательности x_n можно выделить сходящуюся подпоследовательность

$$x_{n_k} \xrightarrow[k \to \infty]{} x_0,$$

где $x_0 \in [a, b]$ согласно лемме 35. Но тогда

$$(|x_n - x'_n| < \delta_n) \wedge (\delta_{n_k} \xrightarrow[k \to \infty]{} 0) \ \Rightarrow \ (x'_{n_k} \xrightarrow[k \to \infty]{} x_0).$$

В силу непрерывности функции f в точке x_0,

$$\lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = f(x_0) = \lim_{k \to \infty} f(x'_{n_k}),$$

что оказывается несовместимым с неравенством $|f(x_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon_0$. Полученное противоречие завершает доказательство. □

7. **Производная и дифференциал**
   Определение производной функции, дифференцируемости функции, дифференциала. Теорема о связи производной и дифференцируемости. Лемма о непрерывности дифференцируемой функции. Определение касательной к графику функции. Лемма об уравнении касательной. Геометрический смысл производной и дифференциала. Определение вертикальной касательной.

Определение 63 (Понятие производной функции).
Пусть $f : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$, x_0, $x_0 + h \in \langle a, b \rangle$. Предел

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

если он существует в $\overline{\mathbb{R}}$, называется производной функции f в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$.

Определение 64 (Понятие дифференцируемости функции).
Пусть $f : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$, x_0, $x_0 + h \in \langle a, b \rangle$. Функция f называется дифференцируемой в точке x_0, если существует такое число A, что

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = Ah + o(h), \quad h \to 0.$$

Определение 66 (Понятие дифференцируемости на множестве).
Говорят, что функция f дифференцируема на множестве E, если она дифференцируема в каждой точке этого множества.

Определение 65 (Понятие дифференциала).
Линейная по h функция Ah в определении дифференцируемости называется дифференциалом функции f в точке x_0 и обозначается $df(x_0)$. В итоге,

$$df(x_0)(h) = Ah.$$

Теорема 48 (О связи производной и дифференцируемости).
Функция $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $x_0 \in \langle a, b\rangle$ тогда и только тогда, когда она имеет в этой точке конечную производную. В этом случае $A(x_0) = f'(x_0)$.

Доказательство. Необходимость. Пусть функция f дифференцируема в точке x_0, значит

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = Ah + o(h), \quad x_0 + h \in \langle a, b\rangle, \quad h \to 0.$$

Поделив на h, получим

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = A + o(1).$$

Переходя к пределу при $h \to 0$, получаем, что предел правой части равен A, значит

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = A,$$

то есть, согласно определению и введенным обозначениям,

$$f'(x_0) = A = A(x_0).$$

Достаточность. Согласно теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой (25), имеем

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) + \alpha(h), \quad \alpha(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0, \quad x_0 + h \in \langle a, b\rangle,$$

откуда

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + o(h),$$

то есть функция дифференцируема в точке x_0 и

$$A = A(x_0) = f'(x_0).$$

Лемма 60 (О непрерывности дифференцируемой функции).
Если функция $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $x_0 \in \langle a, b\rangle$, то она непрерывна в точке x_0.

Доказательство. В представлении

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + o(h), \quad x_0 + h \in \langle a, b\rangle, \quad h \to 0,$$

достаточно перейти к пределу при $h \to 0$. Тогда

$$\lim_{h\to 0} (f(x_0 + h) - f(x_0)) = 0,$$

откуда

$$\lim_{h\to 0} f(x_0 + h) = f(x_0),$$

что и означает непрерывность функции в точке x_0 (лемма 33). □

Определение 68.
Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, f дифференцируема в точке $x_0 \in \langle a, b\rangle$. Предельное положение AC секущей AB графика функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0.

Лемма 61 (Об уравнении касательной).
Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, f дифференцируема в точке $x_0 \in \langle a, b\rangle$. Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 имеет вид

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Доказательство. Угловой коэффициент, согласно сказанному выше, равен $k_{AC} = f'(x_0)$. Осталось воспользоваться уравнением прямой с заданным коэффициентом наклона и проходящей через точку $(x_0, f(x_0))$. □

Определение 69.
Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, f непрерывна в точке $x_0 \in \langle a, b\rangle$ и $f'(x_0) = \pm\infty$. Прямая $x = x_0$ называется (вертикальной) касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0.

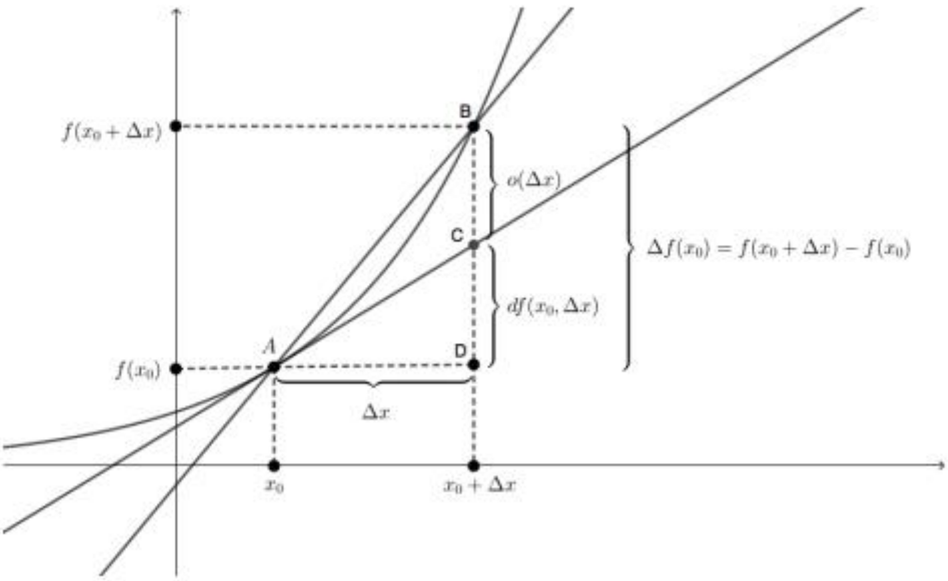

Рис. 4. Касательная и дифференциал

Посмотрим на рисунок 4. Пусть функция f дифференцируема в точке x_0. Проведем секущую AB через точки

$$A = (x_0, f(x_0)), \quad B = (x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x)),$$

лежащие на графике функции. На рисунке $\Delta x \geq 0$, но, конечно же, это не обязательно так. Устремляя Δx к нулю, точка B будет двигаться (по графику функции) к точке A, а секущая AB будет стремиться занять предельное положение AC. Угловой коэффициент секущей AB равен

$$k_{AB} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \operatorname{tg}(BAD).$$

В силу дифференцируемости функции f в точке x_0,

$$k_{AC} = \lim_{\Delta x \to 0} k_{AB} = f'(x_0) = \operatorname{tg}(CAD).$$

Замечание 127.
Рисунок 4 показывает связь приращения функции, производной этой функции, дифференциала и $o(\Delta x)$. Можно сформулировать следующий геометрический смысл дифференциала: дифференциал есть приращение касательной к графику функции, отвечающее приращению аргумента Δx.

8. **Основные правила дифференцирования (производная суммы, произведения и частного)**
   Определения производной и дифференциала функции. Теорема о производной и дифференциале суммы, произведения, частного функций.

См. билет 7

Теорема 49 (О производной суммы, произведения и частного).
Пусть $f, g : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$, дифференцируемы в точке x_0. Тогда:

1. Их сумма дифференцируема в точке x_0 и
$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$
2. Их произведение дифференцируемо в точке x_0 и
$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$
3. Их частное дифференцируемо в точке x_0 при условии, что $g(x_0) \neq 0$, и
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Доказательство. Согласно определению,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \quad g'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x_0+\Delta x) - g(x_0)}{\Delta x},$$

причем оба предела конечны.

1. Докажем первый пункт. Так как

$$\Delta(f+g)(x_0) = f(x_0+\Delta x) + g(x_0+\Delta x) - f(x_0) - g(x_0) =$$

$$= f(x_0+\Delta x) - f(x_0) + g(x_0+\Delta x) - g(x_0),$$

то

$$(f+g)'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(f+g)(x_0)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x_0+\Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + g'(x_0).$$

2. Докажем второй пункт. Так как

$$\Delta(fg)(x_0) = f(x_0+\Delta x)g(x_0+\Delta x) - f(x_0)g(x_0) =$$

$$= f(x_0+\Delta x)g(x_0+\Delta x) - f(x_0)g(x_0+\Delta x) + f(x_0)g(x_0+\Delta x) - f(x_0)g(x_0),$$

то

$$(fg)'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(fg)(x_0)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)g(x_0+\Delta x) - f(x_0)g(x_0+\Delta x)}{\Delta x} +$$

$$+ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0)g(x_0+\Delta x) - f(x_0)g(x_0)}{\Delta x}.$$

Рассмотрим первый из двух пределов:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)g(x_0+\Delta x) - f(x_0)g(x_0+\Delta x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} g(x_0+\Delta x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = g(x_0)f'(x_0),$$

где $\lim\limits_{\Delta x \to 0} g(x_0+\Delta x) = g(x_0)$ в силу непрерывности функции $g(x)$ в точке x_0 (лемма 60). Теперь рассмотрим второй из двух пределов:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0)g(x_0+\Delta x) - f(x_0)g(x_0)}{\Delta x} =$$

$$= f(x_0) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x_0+\Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} = f(x_0)g'(x_0).$$

Тем самым,

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

3. Третий пункт предлагается доказать самостоятельно. □

Из связи производной и дифференциала сразу вытекает следующее следствие.

Следствие 16 (О дифференциале суммы, произведения и частного).
В условиях предыдущей теоремы справедливы следующие соотношения:

1. $d(f+g)(x_0) = df(x_0) + dg(x_0)$.
2. $d(fg)(x_0) = g(x_0)df(x_0) + f(x_0)dg(x_0)$.
3. $d\left(\dfrac{f}{g}\right)(x_0) = \dfrac{g(x_0)df(x_0) - f(x_0)dg(x_0)}{g^2(x_0)}$, при $g(x_0) \neq 0$.

9. **Основные правила дифференцирования (производная композиции функций и обратной функции)**
   Определения производной и дифференциала функции. Теорема о производной и дифференциале композиции функций. Теорема о производной и дифференциале обратной функции.

См. билет 7

Теорема 50 (О производной композиции).
Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \langle c, d\rangle$, $g : \langle c, d\rangle \to \mathbb{R}$, f дифференцируема в точке $x_0 \in \langle a, b\rangle$, g дифференцируема в точке $y_0 = f(x_0)$. Тогда функция $g(f)$ дифференцируема в точке x_0 и

$$(g(f))'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0).$$

Доказательство. Так как $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x), \quad \Delta x \to 0.$$

Так как $g(y)$ дифференцируема в точке y_0, то

$$g(y_0 + \Delta y) - g(y_0) = g'(y_0)\Delta y + o(\Delta y), \quad \Delta y \to 0,$$

где в представлении $o(\Delta y) = \alpha(\Delta y)\Delta y$, $\alpha(\Delta y) \xrightarrow[y \to y_0]{} 0$, можно считать, что $\alpha(0) = 0$.

Положив

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - y_0,$$

можно заметить, что $\Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$ в силу непрерывности f (лемма 60). Тогда

$$g(f(x_0 + \Delta x)) - g(f(x_0)) = g'(y_0)(f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) + o(f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) =$$

$$= g'(y_0)(f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)) + o(f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)) =$$
$$= g'(y_0)f'(x_0)\Delta x + g'(y_0)o(\Delta x) + o(f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)).$$

Так как

$$o(f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)) = \alpha(f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x))(f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)),$$

то, используя непрерывность α в нуле и утверждение из замечания 90 легко убедиться (сделайте это), что

$$g'(y_0)o(\Delta x) + \alpha(f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x))(f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)) = o(\Delta x), \quad \Delta x \to 0,$$

а значит композиция $g(f)$ дифференцируема в точке x_0 и

$$(g(f))'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0).$$

□

Как и ранее, отметим следующее следствие.

Следствие 17 (О дифференциале композиции).
В условиях предыдущей теоремы,

$$d(g(f))(x_0) = dg(y_0)(df(x_0)).$$

Иными словами, дифференциал композиции – это композиция дифференциалов.

Теорема 51 (О производной обратной функции).
Пусть функции $f : \langle a, b\rangle \to \langle c, d\rangle$ и $f^{-1} : \langle c, d\rangle \to \langle a, b\rangle$ – взаимно обратные, причем f непрерывна в точке $x_0 \in \langle a, b\rangle$, а f^{-1} непрерывна в точке $y_0 = f(x_0)$. Если f дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0) \neq 0$, то f^{-1} дифференцируема в точке y_0, причем

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Доказательство. Необходимо вычислить

$$(f^{-1})'(y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f^{-1}(y_0 + \Delta y) - f^{-1}(y_0)}{\Delta y}.$$

Положим

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0), \quad \Delta x = f^{-1}(y_0 + \Delta y) - f^{-1}(y_0).$$

В силу непрерывности функции f в точке x_0 и непрерывности обратной функции f^{-1} в точке y_0, выполнено

$$(\Delta x \to 0) \;\Leftrightarrow\; (\Delta y \to 0).$$

Кроме того, так как функции взаимно обратны, то

$$(\Delta x \neq 0) \;\Leftrightarrow\; (\Delta y \neq 0).$$

Тогда

$$(f^{-1})'(y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f^{-1}(y_0 + \Delta y) - f^{-1}(y_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

□

Традиционно, отметим следующее следствие.

Следствие 18 (О дифференциале обратного отображения).
В условиях предыдущей теоремы,

$$df^{-1}(y_0) = (df(x_0))^{-1}.$$

10. **Французские теоремы (Ферма, Ролля)**
Определение возрастания и убывания функции, монотонной функции, точек локального максимума, минимума и экстремума. Теорема Ферма, геометрический смысл. Теорема Ролля, геометрический смысл.

См. билет 5

Определение 70 (Понятия локального максимума и минимума).
Пусть $f : E \to \mathbb{R}$.

Точка $x_0 \in E$ называется точкой локального максимума (строгого локального максимума) функции f, если

$$\exists \overset{o}{U}(x_0) : \; \forall x \in \overset{o}{U}(x_0) \cap E \;\Rightarrow\; f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) < f(x_0)).$$

Точка $x_0 \in E$ называется точкой локального минимума (строгого локального минимума) функции f, если

$$\exists \overset{o}{U}(x_0) : \; \forall x \in \overset{o}{U}(x_0) \cap E \;\Rightarrow\; f(x) \geq f(x_0) \quad (f(x) > f(x_0)).$$

Определение 71 (Понятие точек экстремума).
Точки локального максимума (строго локального максимума) и точки локального минимума (строгого локального минимума) называются точками экстремума (строгого экстремума).

Теорема 54 (Ферма).
Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $x_0 \in (a, b)$. Если x_0 – точка экстремума, то $f'(x_0) = 0$.

Доказательство. Для определенности будем полагать, что x_0 – точка локального максимума. При достаточно малом $\Delta x < 0$, из определения точки локального максимума получаем, что

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0,$$

значит, по теореме о предельном переходе в неравенствах (13),

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0.$$

При достаточно малом $\Delta x > 0$, из определения точки максимума получаем, что

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq 0,$$

значит, по теореме о предельном переходе в неравенствах (13),

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq 0.$$

Сравнивая два неравенства, приходим к тому, что $f'(x_0) = 0$. □

Отметим следующее замечание.

Замечание 133.
Геометрически теорема Ферма означает, что касательная в точке «внутреннего» экстремума дифференцируемой функции параллельна оси Ox.

Теорема 55 (Ролля).
Пусть $f \in C[a, b]$ и дифференцируема на (a, b), причем $f(a) = f(b)$. Тогда

$$\exists \xi \in (a, b) : f'(\xi) = 0.$$

Доказательство. Если f постоянна на отрезке $[a, b]$, то утверждение, очевидно, верно.

Если f не постоянна, то, по теореме Вейерштрасса (28), на отрезке $[a, b]$ существуют точки, в которых функция принимает свои наибольшее M и наименьшее m значения, причем $M \neq m$. Значит, хотя бы одно из этих значений принимается внутри интервала (a, b) в некоторой точке ξ. Значит, по теореме Ферма (54), $f'(\xi) = 0$. □

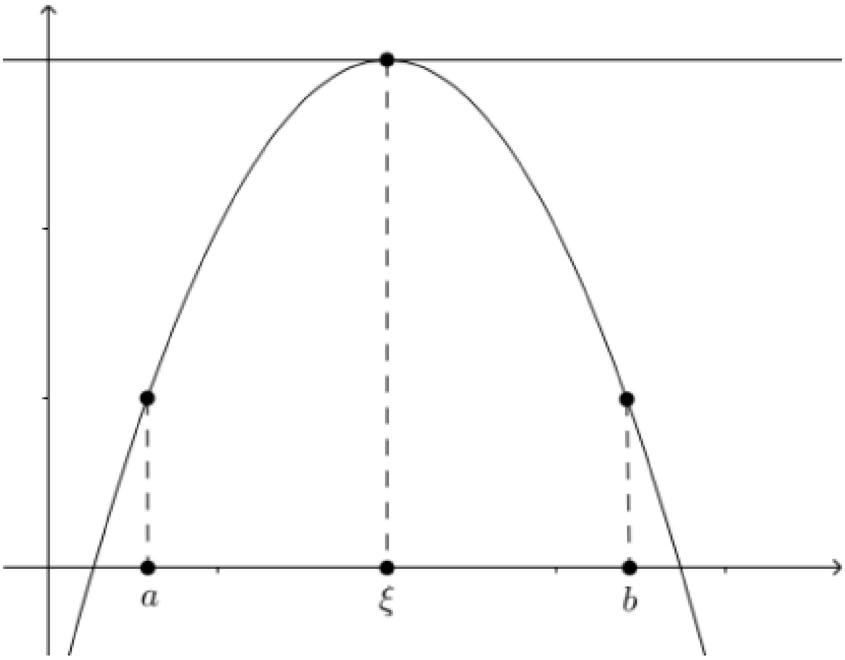

Рис. 6. Теорема Ролля

Замечание 134.
Еще раз подчеркнем геометрический смысл теоремы Ролля: если дифференцируемая функция на концах отрезка принимает равные значения, то на этом отрезке существует хотя бы один экстремум, рисунок 6.

11. **Французские теоремы (Лагранжа)**
 Определения производной и дифференциала функции. Теорема Лагранжа, геометрический смысл. Определение возрастания и убывания функции, монотонной функции. Критерий монотонности функции. Критерий постоянства функции.

См. билет 7

Теорема 56 (Лагранжа).
Пусть $f \in C[a,b]$ и дифференцируема на (a,b). Тогда

$$\exists \xi \in (a,b): \ f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a).$$

Доказательство. Пусть

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Прямым вычислением проверяется, что $g(a) = g(b)$, причем $g \in C[a,b]$ как разность непрерывных функций, и дифференцируема на (a,b) как разность дифференцируемых функций. Значит, согласно теореме Ролля (55),

$$\exists \xi \in (a,b): \ g'(\xi) = 0,$$

откуда

$$f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \ \Leftrightarrow \ f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a).$$

□

Замечание 135.
Геометрически теорема Лагранжа означает, что на интервале (a,b) существует касательная к графику функции $y = f(x)$, параллельная секущей, проходящей через точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$, см. рисунок 7.

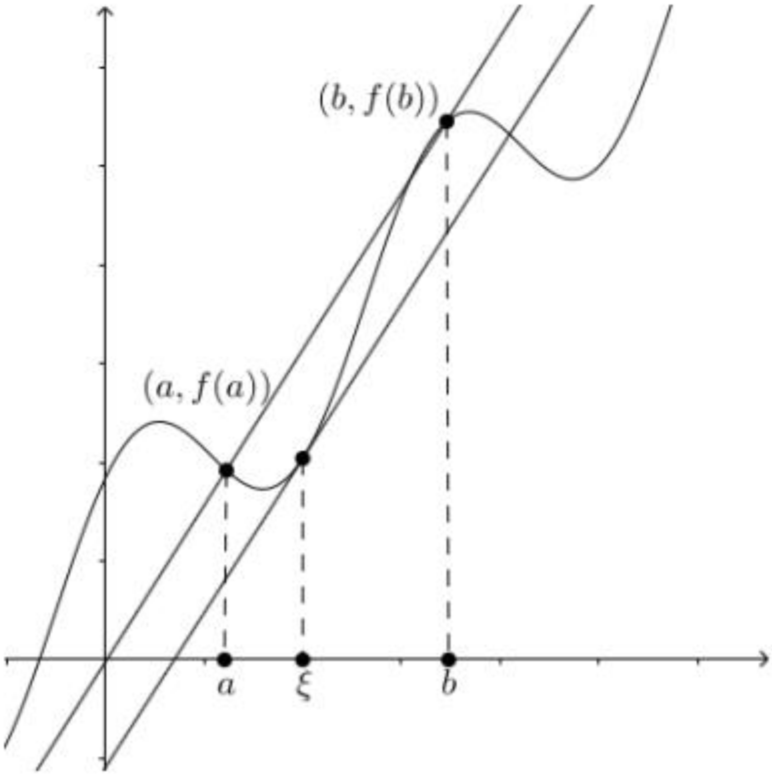

Рис. 7. Теорема Лагранжа

См. билет 5

Теорема 57 (Критерий монотонности функции).
Пусть $f \in C[a,b]$ и дифференцируема на (a,b). Тогда:

1. Для того чтобы функция f возрастала (убывала) на $[a,b]$ необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) \geq 0$ $(f'(x) \leq 0)$ на (a,b).
2. Для строгого возрастания (строгого убывания) функции на $[a,b]$ достаточно, чтобы $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ на (a,b).

Доказательство. Пусть функция $f(x)$ возрастает.
Докажем необходимость. Пусть $x_0 \in (a,b)$, тогда при $\Delta x \neq 0$ имеем

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \geq 0,$$

значит, по теореме о предельном переходе в неравенстве (13),

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \geq 0.$$

Докажем достаточность. Пусть $x_1, x_2 \in [a,b]$, $x_1 < x_2$. По теореме Лагранжа (56) найдется $\xi \in (a,b)$, что

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1).$$

Так как $f'(x) \geq 0$ на (a,b) и $x_2 - x_1 > 0$, то $f(x_2) \geq f(x_1)$. Так как x_1, x_2 – произвольные, получаем определение возрастающей функции.

Если же $f'(x) > 0$ на (a,b), то $f(x_2) > f(x_1)$ и мы приходим к определению строго возрастающей функции. □

Теорема 58 (Критерий постоянства функции).
Пусть $f \in C[a,b]$ и дифференцируема на (a,b). Для того чтобы f была постоянной на $[a,b]$ необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) = 0$ на (a,b).

Доказательство. Необходимость очевидна.

Достаточность. Если $f'(x) = 0$ на (a,b), то для любых двух точек $x_1, x_2 \in [a,b]$ таких, что $x_1 < x_2$, по теореме Лагранжа (56)

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) = 0,$$

то есть $f(x_2) = f(x_1)$. В силу произвольности точек x_1, x_2 функция постоянна. □

12. **Французские теоремы (Коши)**
    Определения производной и дифференциала функции. Теорема о пределе производной. Теорема Коши, геометрический смысл.

См. билет 7

Теорема 59 (О пределе производной).
Пусть $f \in C[a,b]$ и дифференцируема на (a,b). Если

$$A = \lim_{x \to a+0} f'(x) \in \overline{\mathbb{R}},$$

то $f'_+(a) = A$.

□ $[a; a+\Delta x]$ $\Delta x > 0$ $\Rightarrow$ по т. Лагранжа

$\exists\, \xi \in (a; a+\Delta x)$: $f(a+\Delta x) - f(a) = f'(\xi)\,\Delta x$

$$\frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} = f'(\xi), \quad a < \xi < a+\Delta x < b$$

$$f'_+(a) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \lim_{\xi \to a+0} f'(\xi) \quad ■$$

Теорема 60 (Коши).
Пусть $f, g \in C[a,b]$ и дифференцируемы на (a,b). Тогда $\exists \xi \in (a,b)$, что выполняется

$$(f(b) - f(a))\, g'(\xi) = (g(b) - g(a))\, f'(\xi).$$

Если, кроме того, $g'(x) \neq 0$ на (a,b), то

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = g(x)\,(f(b) - f(a)) - f(x)\,(g(b) - g(a))\,.$$

Прямые вычисления показывают, что $\varphi(a) = \varphi(b)$. Кроме того, из условий теоремы следует, что $\varphi \in C[a,b]$ и дифференцируема на (a,b). Значит, по теореме Ролля (55) найдется $\xi \in (a,b)$, что $\varphi'(\xi) = 0$, то есть

$$g'(\xi)\,(f(b) - f(a)) = f'(\xi)\,(g(b) - g(a))\,.$$

Если $g'(x) \neq 0$ на (a,b), то $g(b) \neq g(a)$ (иначе по теореме Ролля нашлась бы точка из интервала (a,b), в которой производная бы обращалась в ноль), а значит

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

□

Замечание 139.
Геометрическая интерпретация к теореме Коши та же, что и к теореме Лагранжа. Пусть $g'(t) \neq 0$ на (a,b). Тогда, и это можно доказать, либо $g'(t) > 0$ на (a,b), либо $g'(t) < 0$ на (a,b), а значит система

$$\begin{cases} x = g(t) \\ y = f(t) \end{cases}, \quad t \in [a,b]$$

задает функцию $y = f(g^{-1}(x))$ параметрически. Тогда в выражении

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

слева стоит коэффициент наклона хорды, соединяющей концы графика функции $y = f(g^{-1}(x))$, а справа – коэффициент наклона касательной к графику этой функции в некоторой промежуточной точке ξ (см. теорему 53).

13. **Французские теоремы (Лопиталя)**
Определения производной и дифференциала функции. Теорема Лопиталя.

См. билет 7

Теорема 61 (Правило Лопиталя).
Пусть f, g дифференцируемы на (a, b), $g'(x) \neq 0$ на (a, b) и

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Тогда в любом из двух случаев:

1. $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \lim\limits_{x \to a+0} g(x) = 0.$
2. $\lim\limits_{x \to a+0} |g(x)| = +\infty.$

выполняется

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

Доказательство. Докажем первый пункт. Так как

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to a+0} g(x) = 0,$$

то функции f и g можно доопределить по непрерывности, положив $f(a) = g(a) = 0$. Пусть $c \in (a, b)$. Тогда $f, g \in C[a, c]$ и дифференцируемы на (a, c). Так как $g'(x) \neq 0$, то, согласно теореме Коши (60),

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \quad a < \xi < x < c.$$

При $x \to a + 0$ выполняется $\xi \to a + 0$, а значит

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = A \;\Rightarrow\; \lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

Докажем второй пункт. Пусть $A \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$. Тогда найдется $\delta_0 < (b - a)$, что при $x \in (a, a + \delta_0)$ справедливо неравенство

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - A\right| < \varepsilon.$$

В частности, при $x \in (a, a + \delta_0)$ функция $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ ограничена, то есть

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}\right| \leq M.$$

Пусть $x \in (a, a + \delta_0)$, рассмотрим преобразования

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a + \delta_0)}{g(x)} + \frac{f(a + \delta_0)}{g(x)} =$$

$$= \frac{g(x) - g(a + \delta_0)}{g(x)} \cdot \frac{f(x) - f(a + \delta_0)}{g(x) - g(a + \delta_0)} + \frac{f(a + \delta_0)}{g(x)} =$$

$$= \left(1 - \frac{g(a + \delta_0)}{g(x)}\right) \cdot \frac{f(x) - f(a + \delta_0)}{g(x) - g(a + \delta_0)} + \frac{f(a + \delta_0)}{g(x)}.$$

На отрезке $[x, a + \delta_0]$ функции f и g непрерывны, а на интервале $(x, a + \delta_0)$ дифференцируемы, значит, по теореме Коши (60),

$$\frac{f(x) - f(a + \delta_0)}{g(x) - g(a + \delta_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \quad a < x < \xi < a + \delta_0.$$

Так как $|g(x)| \to +\infty$, то по ранее заданному ε, можно найти $\delta_1 < \delta_0$, что при $x \in (a, a + \delta_1)$ справедливы оценки

$$\left|\frac{g(a + \delta_0)}{g(x)}\right| < \varepsilon, \quad \left|\frac{f(a + \delta_0)}{g(x)}\right| < \varepsilon.$$

Тогда, при $x \in (a, a+\delta_1)$,

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - A\right| = \left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - A - \frac{g(a+\delta_0)}{g(x)} \cdot \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} + \frac{f(a+\delta_0)}{g(x)}\right| \le$$
$$\le \left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - A\right| + \left|\frac{g(a+\delta_0)}{g(x)} \cdot \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\right| + \left|\frac{f(a+\delta_0)}{g(x)}\right| \le$$
$$\le \varepsilon + \varepsilon \cdot M + \varepsilon = \varepsilon(2+M).$$

В силу произвольности ε отсюда следует требуемое.

Пусть теперь $A = +\infty$ и $\varepsilon > 0$. Тогда найдется $\delta_0 < (b-a)$, что при $x \in (a, a+\delta_0)$ справедливо неравенство

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Так как $\lim\limits_{x \to a+0} |g(x)| = +\infty$, можно найти $\delta_1 < \delta_0$ так, чтобы при $x \in (a, a+\delta_1)$ выполнялось

$$\left|\frac{g(a+\delta_0)}{g(x)}\right| < \frac{1}{2}, \quad \left|\frac{f(a+\delta_0)}{g(x)}\right| < \frac{1}{2}.$$

Используя аналогичные выкладки, что и ранее, при $x \in (a, a+\delta_1)$ имеем

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \left(1 - \frac{g(a+\delta_0)}{g(x)}\right)\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} + \frac{f(a+\delta_0)}{g(x)} > \left(1 - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2\varepsilon} - \frac{1}{2}.$$

В силу произвольности ε отсюда следует требуемое.

Случай $A = -\infty$ доказывается аналогично предыдущему пункту и остается в качестве упражнения. □

14. **Формула Тейлора**
    Определения производной и дифференциала функции. Определения производной и дифференциала высшего порядка. Определение многочлена Тейлора. Теорема о формуле Тейлора с остатком в форме Пеано. Теорема о единственности многочлена Тейлора.Теорема о характеристике остаточного члена в формуле Тейлора (без доказательства). Следствия об остаточных членах в формах Лагранжа и Коши.

См. билет 7

Определение 72 (Производная высшего порядка).
Пусть $(n-1) \in \mathbb{N}$ и определена функция $f^{(n-1)} : E_{n-1} \to \mathbb{R}$ – производная $(n-1)$-ого порядка функции f. Обозначим через E_n множество точек $x \in E_{n-1}$, для которых

$$E_{n-1} \cap (x-\delta, x+\delta)$$

– невырожденный промежуток при некотором $\delta > 0$, и в которых функция $f^{(n-1)}$ дифференцируема. Положим

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}\right)'(x), \quad x \in E_n.$$

Введенная функция называется производной порядка n, или, короче, n-ой производной функции f. При этом функция f называется n раз дифференцируемой на множестве E_n.

Определение 74 (Дифференциал высшего порядка).
Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $f : E \to \mathbb{R}$ – n раз дифференцируемая в точке $x_0 \in E$ функция, $h \in \mathbb{R}$. Величина

$$d^n f(x_0)(h) = d\left(d^{n-1} f(x)(h)\right)(h),$$

называется n-ым дифференциалом функции f в точке x_0, соответспвующим приращению h.

Определение 75 (Понятие многочлена Тейлора).
Пусть функция f имеет в точке x_0 все производные до порядка n включительно. Многочлен

$$P_n(x, x_0) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

называется многочленом Тейлора порядка n функции f в точке x_0. В случае $x_0 = 0$ многочлен Тейлора часто называют многочленом Маклорена.

Теорема 63 (Формула Тейлора с остатком в форме Пеано).
Пусть функция f в точке x_0 имеет производные до порядка n включительно. Тогда справедлива формула Тейлора с остатком в форме Пеано:

$$f(x) = P_n(x, x_0) + o((x - x_0)^n), \quad x \to x_0.$$

Доказательство. Положим $\varphi(x) = f(x) - P_n(x, x_0)$. Для доказательства утверждения достаточно показать, что

$$\varphi(x) = o((x - x_0)^n), \quad x \to x_0,$$

а для этого достаточно доказать, что

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

Так как функция φ имеет n производных в точке x_0, то все производные до $(n-1)$ порядка включительно определены как минимум на некотором промежутке $\langle \alpha, \beta \rangle$, причем $x_0 \in \langle \alpha, \beta \rangle$. Используем теорему Коши (60) несколько раз, учитывая, что $x \in \langle \alpha, \beta \rangle$, и что, согласно лемме 62,

$$\varphi^{(k)}(x_0) = 0, \quad k \in \{0, \ldots, n\}.$$

Имеем:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{(x - x_0)^n - (x_0 - x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} \frac{\varphi'(\xi_1)}{n(\xi_1 - x_0)^{n-1}} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{\varphi'(\xi_1) - \varphi'(x_0)}{n((\xi_1 - x_0)^{n-1} - (x_0 - x_0)^{n-1})} = \lim_{x \to x_0} \frac{\varphi''(\xi_2)}{n(n-1)(\xi_2 - x_0)^{n-2}} = \ldots =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{\varphi^{(n-1)}(\xi_{n-1})}{n!(\xi_{n-1} - x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\varphi^{(n-1)}(\xi_{n-1}) - \varphi^{(n-1)}(x_0)}{n!(\xi_{n-1} - x_0)} = \frac{\varphi^{(n)}(x_0)}{n!} = 0,$$

где ξ_1 лежит между x и x_0, ξ_2 между ξ_1 и x_0, и так далее, ξ_{n-1} между ξ_{n-2} и x_0. Предпоследнее равенство верно в силу существования $\varphi^{(n)}(x_0)$ и того, что

$$(x \to x_0) \Rightarrow (\xi_{n-1} \to x_0).$$

$\square$

ЛЕММА 62 ИЗ ДОК-ВА

Лемма 62.
Пусть $P_n(x, x_0)$ — многочлен Тейлора порядка n функции f в точке x_0. Тогда

$$\left(P_n(x, x_0)\right)^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0), \quad k \in \{0, \ldots, n\}.$$

Теорема 64 (О единственности многочлена Тейлора).
Если существует многочлен

$$Q_n(x, x_0) = a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)^n,$$

удовлетворяющий условию

$$f(x) = Q_n(x, x_0) + o((x - x_0)^n), \quad x \to x_0,$$

то он единственен.

Доказательство. Сначала определим коэффициент a_0 из равенства

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \left(Q_n(x, x_0) + o((x - x_0)^n)\right) = a_0.$$

Далее, найдем коэффициент a_1 следующим образом:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - a_0}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \left(a_1 + a_2(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)^{n-1} + o((x - x_0)^{n-1})\right) = a_1.$$

Продолжая, найдем коэффициент a_n:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - (a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_{n-1}(x - x_0)^{n-1})}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} (a_n + o(1)) = a_n.$$

□

Теорема 65 (О характеристике остаточного члена).
Пусть f непрерывна вместе со своими первыми n производными на отрезке с концами x_0 и x, а во внутренних точках этого отрезка имеет производную порядка $(n + 1)$. Тогда для любой функции φ, непрерывной на данном отрезке и имеющей отличную от нуля производную во внутренних точках данного отрезка, найдется точка ξ, лежащая между x_0 и x, такая, что

$$r_n(x, x_0) = \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\varphi'(\xi) n!} f^{(n+1)}(\xi)(x - \xi)^n.$$

Следствие 20 (Остаточный член в форме Лагранжа).
Справедливо следующее соотношение для остаточного члена – остаточного члена в форме Лагранжа:

$$r_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

где ξ лежит между x и x_0.

Доказательство. Для доказательства достаточно в предыдущей теореме положить $\varphi(t) = (x - t)^{n+1}$. □

Следствие 21 (Остаточный член в форме Коши).
Справедливо следующее соотношение для остаточного члена – остаточного члена в форме Коши:

$$r_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x - \xi)^n(x - x_0),$$

где ξ лежит между x и x_0.

Доказательство. Для доказательства достаточно в предыдущей теореме положить $\varphi(t) = (x - t)$. □

15. **Исследование функции с помощью производных (монотонность и экстремумы)**
Определение возрастания и убывания функции, монотонной функции, точек локального максимума, минимума и экстремума. Теорема о необходимом условии экстремума. Теорема о первом достаточном условии экстремума. Теорема о втором достаточном условии экстремума. Классификация точек экстремума.

См. билет 5

См. билет 10

Теорема 69 (Необходимое условие экстремума).
Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$. Если $x_0 \in (a, b)$ – точка экстремума, то либо $f'(x_0) = 0$, либо f не дифференцируема в x_0.

Доказательство. Если f дифференцируема в точке x_0, то доказательство напрямую следует из теоремы Ферма (54). Иначе утверждение тривиально. □

Теорема Ферма (см. билет 10)

Теорема 70 (Первое достаточное условие экстремума).
Пусть $f : U(x_0) \to \mathbb{R}$, непрерывна в точке x_0 и дифференцируема на множествах $U_-(x_0) = \{x \in U(x_0) : x < x_0\}$ и $U_+(x_0) = \{x \in U(x_0) : x > x_0\}$. Тогда:

1. Если $f'(x) > 0$ при $x \in U_-(x_0)$ и $f'(x) < 0$ при $x \in U_+(x_0)$, то x_0 является точкой строгого локального максимума функции f.

2. Если $f'(x) < 0$ при $x \in U_-(x_0)$ и $f'(x) > 0$ при $x \in U_+(x_0)$, то x_0 является точкой строгого локального минимума функции f.
3. Если $f'(x) > 0$ при $x \in U_-(x_0)$ и $f'(x) > 0$ при $x \in U_+(x_0)$, то x_0 не является точкой экстремума функции f.
4. Если $f'(x) < 0$ при $x \in U_-(x_0)$ и $f'(x) < 0$ при $x \in U_+(x_0)$, то x_0 не является точкой экстремума функции f.

Доказательство. Докажем первое утверждение. Так как $f'(x) > 0$ при $x \in U_-(x_0) = (x_0 - \varepsilon, x_0)$ и f непрерывна в точке x_0, то, согласно сформулированной выше теореме 68, f строго возрастает на $(x_0 - \varepsilon, x_0]$. Значит, $f(x) < f(x_0)$ при $x \in U_-(x_0)$. Аналогично, так как $f'(x) < 0$ при $x \in U_+(x_0) = (x_0, x_0 + \varepsilon)$ и f непрерывна в точке x_0, то f строго убывает на $[x_0, x_0 + \varepsilon)$. Значит, $f(x) < f(x_0)$ при $x \in U_+(x_0)$. Тем самым проверено, что точка x_0 – точка строгого локального максимума.

Доказательство остальных пунктов проводится аналогичным образом и остается в качестве упражнения. □

Определение 77 (Классификация точек экстремума).
Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ и $x_0 \in (a, b)$ – точка экстремума f.

1. Если f дифференцируема в x_0, то экстремум называется гладким.
2. Если $f'(x_0-0) = +\infty$, $f'(x_0+0) = -\infty$, или $f'(x_0-0) = -\infty$, $f'(x_0+0) = +\infty$, то экстремум называется острым.
3. Если существуют (в $\overline{\mathbb{R}}$) $f'(x_0 \pm 0)$ и хотя бы одна из односторонних производных конечна, но $f'(x_0 - 0) \neq f'(x_0 + 0)$, то экстремум называется угловым.

Теорема 71 (Второе достаточное условие экстремума).
Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$ и f имеет в точке x_0 производные до порядка $n \in \mathbb{N}$ включительно, причем $f'(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, а $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Тогда:

1. Если n нечетно, то точка x_0 – не точка экстремума.
2. Если n четно, то точка x_0 – точка строгого локального минимума, если $f^{(n)}(x_0) > 0$, и точка строгого локального максимума, если $f^{(n)}(x_0) < 0$.

Доказательство. Воспользуемся формулой Тейлора с остатком в форме Пеано (теорема 63), тогда

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n(1 + \alpha(x)), \quad \alpha(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0.$$

Из последнего следует, что найдется δ, что при $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset \langle a, b\rangle$, знаки выражений

$$f(x) - f(x_0) \quad \text{и} \quad \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

совпадают.

Докажем первый пункт. При нечетном n выражение $(x - x_0)^n$ меняет знак при переходе через точку x_0, значит, по соображениям выше, меняет знак и выражение $f(x) - f(x_0)$, что означает, что x_0 – не точка экстремума.

Докажем второй пункт. Пусть, например, $f^{(n)}(x_0) > 0$. Тогда, так как $(x - x_0)^n > 0$ при $x \neq x_0$, то при $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $x \neq x_0$,

$$f(x) - f(x_0) > 0,$$

а значит x_0 – точка строгого локального минимума. Аналогичным образом разбирается случай, когда $f^{(n)}(x_0) < 0$. □

16. **Исследование функции с помощью производных (выпуклость и точки перегиба – 1)**
Определение выпуклой функции. Критерий выпуклости в терминах наклона хорд.

Определения производной и дифференциала функции. Критерий выпуклости дифференцируемой функции. Определение точки перегиба.

Определение 78 (Понятие выпуклой функции).
Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$. Если $\forall x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle$, $\lambda \in (0,1)$, выполняется

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \underset{\geq}{\leq} \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2),$$

то f называется выпуклой вниз (вверх) на $\langle a, b\rangle$.

Если $\forall x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle$, $x_1 \neq x_2$, $\lambda \in (0,1)$, выполняется

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \underset{>}{<} \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2).$$

то f называется строго выпуклой вниз (верх).

Теорема 72 (Критерий выпуклости в терминах наклона хорд).
Функция $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ выпукла вниз (вверх) на $\langle a, b\rangle$ тогда и только тогда, когда для любых $x, x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle$, что $x_1 < x < x_2$, выполняется

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \underset{\geq}{\leq} \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

При этом f строго выпукла вниз (вверх) тогда и только тогда, когда

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \underset{>}{<} \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

Доказательство. Продолжим начатые ранее преобразования. Из неравенства

$$f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$$

получим

$$(x_2 - x_1)f(x) \leq (x_2 - x)f(x_1) + (x - x_1)f(x_2).$$

Значит, так как

$$(x_2 - x_1)f(x) = (x_2 - x)f(x) + (x - x_1)f(x),$$

то

$$(x_2 - x)(f(x) - f(x_1)) \leq (x - x_1)(f(x_2) - f(x)),$$

откуда, делением на $(x_2 - x)(x - x_1)$, приходим к требуемому.

Доказательство достаточности опирается на те же рассуждения, но проводимые «в обратную сторону». Строгая выпуклость, при этом, дает строгие неравенства, и наоборот. $\square$

См. билет 7

Теорема 73 (Критерий выпуклости дифференцируемой функции).
Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, $f \in C(\langle a, b\rangle)$ и дифференцируема на (a, b). Тогда:

1. f выпукла вниз (вверх) на $\langle a, b\rangle$ тогда и только тогда, когда f' возрастает (убывает) на (a, b).
2. f строго выпукла вниз (вверх) на $\langle a, b\rangle$ тогда и только тогда, когда f' строго возрастает (убывает) на (a, b).

Доказательство. Будем рассматривать случай, когда функция выпукла вниз. Случай выпуклой вверх функции рассматривается аналогичным образом и остается в качестве упражнения.

Докажем необходимость. Для этого в неравенстве

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}, \quad x, x_1, x_2 \in (a,b), \quad x_1 < x < x_2,$$

перейдем к пределу при $x \to x_1$, получив

$$f'(x_1) \le \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.$$

Переходя в том же неравенстве к пределу при $x \to x_2$, получим

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le f'(x_2).$$

В итоге,

$$f'(x_1) \le \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le f'(x_2),$$

откуда и следует возрастание производной. Используя доказанное, для строго выпуклой вниз функции, используя теорему Лагранжа (56), получим

$$f'(x_1) \le f'(\xi_1) = \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} < \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} = f'(\xi_2) \le f'(x_2)$$

при $x_1 < \xi_1 < x < \xi_2 < x_2$, $x_1, x_2 \in (a,b)$. Следовательно, строгая выпуклость вниз влечет строгое возрастание производной.

Докажем достаточность. Пусть $x_1, x_2 \in \langle a,b\rangle$, $x_1 < x_2$. Тогда, по теореме Лагранжа (56),

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}, \quad \xi_1 \in (x_1, x)$$

и

$$f'(\xi_2) = \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}, \quad \xi_2 \in (x, x_2).$$

Так как f' возрастает на (a,b), то $f'(\xi_1) \le f'(\xi_2)$, откуда

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$$

и функция f выпукла вниз (теорема 72). Если же f' строго возрастает, то $f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$, откуда

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} < \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x},$$

и функция f строго выпукла вниз (теорема 72) □

Определение 79 (Понятие точки перегиба).
Пусть $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$, причем

1. Существует $\delta > 0$, что на промежутках $(x_0-\delta, x_0]$, $[x_0, x_0+\delta)$ функция f имеет разный характер выпуклости.
2. $f'(x_0) \in \overline{\mathbb{R}}$.

Тогда x_0 называется точкой перегиба f.

17. **Исследование функции с помощью производных (выпуклость и точки перегиба – 2)** Определение выпуклой функции. Критерий выпуклости дважды дифференцируемой функции. Теорема о характеристике выпуклости в терминах касательных. Определение точки перегиба.

См. билет 16

Теорема 74 (Критерий выпуклости дважды дифференцируемой функции).
Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, $f \in C(\langle a, b\rangle)$ и дважды дифференцируема на (a, b). Тогда:

1. f выпукла вниз (вверх) на $\langle a, b\rangle$ тогда и только тогда, когда $f''(x) \geq 0$ на (a, b) ($f''(x) \leq 0$ на (a, b)).
2. Если $f''(x) > 0$ на (a, b) ($f''(x) < 0$ на (a, b)), то f строго выпукла вниз (вверх).

Теорема 75 (Характеристика выпуклости в терминах касательных).
Пусть f дифференцируема на $\langle a, b\rangle$. Тогда:

1. f выпукла вниз (вверх) на $\langle a, b\rangle$ тогда и только тогда, когда все точки графика функции f лежат не ниже (не выше) касательной, проведенной в произвольной точке промежутка $\langle a, b\rangle$, то есть
$$f(x) \underset{\leq}{\geq} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \forall x, x_0 \in \langle a, b\rangle.$$
2. f строго выпукла вниз (вверх) на $\langle a, b\rangle$ тогда и только тогда, когда все точки графика функции f, за исключением точки касания, лежат выше (ниже) касательной, проведенной в произвольной точке промежутка $\langle a, b\rangle$, то есть
$$f(x) \underset{<}{>} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad x, x_0 \in \langle a, b\rangle, \quad x \neq x_0.$$

Доказательство. Будем рассматривать случай, когда функция выпукла вниз. Случай выпуклой вверх функции рассматривается аналогичным образом и остается в качестве упражнения.

Докажем необходимость. Пусть $x_0 \in \langle a, b\rangle$. Уравнение касательной к графику функции в точке x_0 имеет вид
$$g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$
Применяя теорему Лагранжа (56), получим
$$f(x) - g(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = (f'(\xi) - f'(x_0))(x - x_0),$$
где ξ лежит между x и x_0. Так как f выпукла вниз, то f' возрастает на (a, b) (теорема 73) и знак выражения $f'(\xi) - f'(x_0)$ совпадает со знаком $x - x_0$. Значит,
$$f(x) - g(x) \geq 0, \quad x \in \langle a, b\rangle.$$
Если f строго выпукла вниз, то f' строго возрастает на (a, b) (теорема 73), откуда
$$f(x) - g(x) > 0, \quad x \in \langle a, b\rangle, \quad x \neq x_0.$$
Докажем достаточность. Пусть $x, x_0 \in \langle a, b\rangle$ и
$$f(x) - g(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) \geq 0.$$

Тогда при $x < x_0$ выполняется
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le f'(x_0),$$
а при $x > x_0$ выполняется
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ge f'(x_0).$$
Тем самым, для любого набора точек $x, x_1, x_2 \in (a, b)$ таких, что $x_1 < x < x_2$, выполняется
$$\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} \le \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x},$$
и, согласно теореме 72, f выпукла вниз. Легко понять, что строгое неравенство влечет строгую выпуклость, а значит утверждение доказано. □

18. **Исследование функции с помощью производных (асимптоты)**
    Определение асимптоты, виды асимптот. Теорема о формулах для коэффициентов наклонной асимптоты. Лемма о связи выпуклости и асимптоты.

Определение 80 (Понятие асимптоты).
Прямая l называется асимптотой графика функции f, если расстояние от точки $(x, f(x))$, лежащей на графике, до прямой l стремится к нулю при удалении точки $(x, f(x))$ на бесконечность от начала координат.

Определение 81 (Понятие вертикальной асимптоты).
Прямая $x = x_0$ называется вертикальной асимптотой графика функции f, если выполнено хотя бы одно из (четырех) условий:
$$\lim_{x \to x_0 \pm 0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to x_0 \pm 0} f(x) = -\infty$$

Определение 82 (Понятие наклонной асимптоты).
Прямая $g(x) = kx + b$ называется наклонной асимптотой графика функции f при $x \to \pm\infty$, если
$$\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - (kx + b)) = 0.$$
В случае, если $k = 0$, прямая $g(x) = b$ часто называется горизонтальной асимптотой.

Теорема 76 (Формулы для коэффициентов наклонной асимптоты).
Для того чтобы прямая $g(x) = k_{\pm\infty} x + b_{\pm\infty}$ была асимптотой графика функции f при $x \to \pm\infty$, необходимо и достаточно, чтобы существовали два конечных предела
$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k_{\pm\infty},$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=b_{\pm\infty}.$$

Доказательство. Рассмотрим случай $x \to +\infty$. Случай $x \to -\infty$ разбирается аналогичным образом.

Докажем необходимость. Пусть прямая $g(x) = kx + b$ является асимптотой графика функции f при $x \to +\infty$. Тогда выполняется условие

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(kx+b))=0$$

или соотношение

$$f(x) = kx + b + \alpha(x),$$

где $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha(x) = 0$. Обе части последнего равенства разделим на x, тогда

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{kx+b+\alpha(x)}{x} = k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x}.$$

Переходя к пределу при $x \to +\infty$, получим

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x}\right) = k.$$

Далее, соотношение $f(x) = kx+b+\alpha(x)$ переписывается в виде $f(x)-kx = b+\alpha(x)$. Переходя к пределу при $x \to +\infty$, получим

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx) = \lim_{x\to+\infty}(b+\alpha(x)) = b.$$

Докажем достаточность. Пусть существуют конечные пределы

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx) = b.$$

Тогда второе соотношение можно переписать в виде

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx)-b=0 \ \Leftrightarrow\ \lim_{x\to+\infty}(f(x)-(kx+b))=0,$$

что по определению означает, что $y = kx + b$ – наклонная асимптота. □

Лемма 65 (Выпуклость и асимптота).
Пусть $f : (x_0, +\infty) \to \mathbb{R}$ имеет асимптоту $g(x) = kx + b$ при $x \to +\infty$ и выпукла вниз (строго выпукла вниз) на $(x_0, +\infty)$. Тогда $f(x) \geq g(x)$ при $x > x_0$ ($f(x) > g(x)$ при $x > x_0$).

Доказательство. Докажем, для разнообразия, утверждение для строго выпуклой вниз функции. Если мы покажем, что функция $f(x)-kx$ строго убывает при $x > x_0$, то по теореме Вейерштрасса (22) при $x > x_0$

$$f(x) - kx > \lim_{x\to+\infty}(f(x) - kx) = b \;\Rightarrow\; f(x) > kx + b.$$

Пусть $x_0 < x < y$, рассмотрим

$$F(y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Заметим, что

$$\lim_{y\to+\infty} F(y) = \lim_{y\to+\infty} \frac{f(y)}{y} = k.$$

Покажем, что $F(y)$ строго возрастает. Пусть $y_1 > y$, положим $\lambda = \dfrac{y_1 - y}{y_1 - x}$, тогда $y = \lambda x + (1-\lambda)y_1$ и, пользуясь строгой выпуклостью вниз f, имеем

$$f(y) < \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y_1) \;\Rightarrow\; f(y) - f(x) < (1-\lambda)(f(y_1) - f(x)) \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; f(y) - f(x) < \frac{y-x}{y_1 - x}(f(y_1) - f(x)) \;\Leftrightarrow\; \frac{f(y) - f(x)}{y - x} < \frac{f(y_1) - f(x)}{y_1 - x},$$

что и означает требуемое. Значит, снова пользуясь строгим возрастанием и теоремой Вейерштрасса (22), имеем

$$F(y) < k \;\Leftrightarrow\; f(y) - f(x) < k(y - x) \;\Leftrightarrow\; f(y) - ky < f(x) - kx,$$

что завершает доказательство. $\square$