"Теоретический минимум. Раздел 1 (весна)."

Дисциплина - Линейная алгебра
Поток - XXXX

Работу выполнил *Пивоваров Константин*, itmo.isu 413036
Telegram - @kyloren20001
Работу выполнил *Матвеев Илья*, itmo.isu 409097
Telegram - @hep2014
Автор методички - тов. Свинцов

Дата - 2025.03.21

г. Санкт-Петербург
2025

☰ **Оглавление**

- 29 Какое свойство определяет матрицу, соответствующую антисимметричной форме?
- 30 Запишите закон преобразования матрицы билинейной формы при преобразовании базиса?
- 31 Какое отображение называется квадратичной формой?
- 32 Что такое однородный полином степени два и как он связан с квадратичной формой?
- 33 Как выглядит квадратичная форма, построенная по антисимметричной билинейной форме?
- 34 Как определяется матрица квадратичной формы?
- 35 Дайте определение полилинейной формы.
- 36 Что такое валентность полилинейной формы? Поясните обозначения.
- 37 Какой валентностью обладает скалярное произведение векторов как полилинейная форма?
- 38 Какой валентностью обладает смешанное произведение векторов как полилинейная форма?
- 39 Как определяется сумма полилинейных форм?
- 40 Как определяется произведение полилинейной формы на скаляр?
- 41 Как определяется произведение полилинейных форм?
- 42 Какой алгебраической структурой обладает множество полилинейных форм вместе с операцией сложения?
- 43 Какой алгебраической структурой обладает множество полилинейных форм вместе с операциями сложения и умножения на скаляр?
- 44 Обладает ли операция умножения полилинейных форм свойством коммутативности? Поясните ответ.
- 45 Как может быть найден тензор полилинейной формы?
- 46 В чем заключается смысл немого суммирования?
- 47 Для какой цели служит тензор полилинейной формы?
- 48 Что является тензором билинейной формы?
- 49 Что является тензором линейной формы?
- 50 Как при помощи немого суммирования записать закон преобразования координат вектора?
- 51 Как при помощи немого суммирования записать закон преобразования коэффициентов линейных форм?
- 52 Запишите закон преобразования компонент тензора полилинейной формы при преобразованиях базиса?
- 53 Как выглядит закон преобразования тензора типа (2, 0)?
- 54 Как выглядит закон преобразования тензора типа (1, 1)?
- 55 Как выглядит закон преобразования тензора типа (0, 2)?
- 56 Какой валентностью будет обладать полилинейная форма валентности (p, q)

после операции свертки?

- 57 Как определяется операция свертки тензора?
- 58 Дайте определение символа Кронекера.
- 59 Каким свойством обладает символ Кронекера?
- 60 Как записывается скалярное произведение при помощи операции свертки?
- 61 Дайте определение символа Леви-Чивита.
- 62 Каким свойством обладает символ Леви-Чивита?
- 63 Как записывается векторное произведение при помощи символа Леви-Чивита?
- 64 Запишите способ нахождения смешанного произведения при помощи символа Леви-Чивита.
- 65 Как может быть найден определитель квадратной матрицы при помощи символа Леви-Чивита?
- 66 Дайте определение линейному отображению между произвольными пространствами.
- 67 Что называется линейным отображением растяжения?
- 68 Запишите матрицу тождественного отображения.
- 69 Какой вид имеет матрица проектирования на подпространство параллельно его прямому дополнению?
- 70 Какой вид имеет матрица оператора растяжения на $\lambda \in \mathbb{K}$?
- 71 Как может быть найдена матрица линейного отображения?
- 72 Покажите как найти координаты образа вектора относительно линейного отображения, если оно задано матрицей.
- 73 Какой алгебраической структурой наделено множество линейных отображений с введенными операциями сложения и умножения на скаляр?
- 74 Какому матричному пространству изоморфно множество $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(X, Y)$? Поясните введенные обозначения.
- 75 Что такое композиция линейных отображений?
- 76 Как найти матрицу линейного отображения, если оно задано как композиция отображений ϕ и ψ?
- 77 Запишите закон преобразования матрицы линейного отображения при замене базиса.
- ПРАВИЛА ТМ

1. Дайте определение линейной форме.

> Линейной формой на пространстве $V(\mathbb{K})$ называется такая функция $f: V \to \mathbb{K}$, что $\forall v, v_1, v_2 \in V,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}$ выполняется
>
> $$f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2).\ f(\lambda v) = \lambda f(v).$$

2 Что будет являться образом линейной комбинации относительно линейной формы?

Страница: 2

Замечание 1.1. Для любого линейного отображения $f: V \to U$ справедливо, что образом линейной комбинации произвольных векторов $v_i \in V$ будет линейная комбинация образов этих векторов:

$$f\left(\sum_i \alpha_i v_i\right) = \sum_i \alpha_i f(v_i).$$

Пример 1.1. Пусть E — пространство геометрических векторов (на плоскости или в пространстве) с введенным скалярным произведением $\langle x, y\rangle$. Линейную форму $f(v)$ можно задать как

$$f(v) = \langle a, v\rangle,$$

где $a \in E$ — фиксированный вектор.

3 Приведите общий вид линейной формы, определяемый координатами вектора-аргумента в произвольном базисе.

Страница: 3

Теорема 1.1. Задание линейной формы эквивалентно заданию ее значений на базисных векторах, т.е. заданию ее коэффициентов.

Доказательство. Пусть в выбранном базисе $\{e_i\}_{i=1}^n$ линейного пространства V линейная форма f задана набором коэффициентов $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$. Тогда $\forall v = \sum_{i=1}^n v^i e_i \in V:$

$$f(v) = f\left(\sum_{i=1}^n v^i e_i\right) = \sum_{i=1}^n f\left(v^i e_i\right) = \sum_{i=1}^n v^i f(e_i) = \sum_{i=1}^n v^i \varphi_i.$$

Таким образом, получаем, что образ любого вектора однозначно определен координатами этого вектора и коэффициентами линейной формы, где оба набора чисел найдены в одном и том же базисе.

4 Что называется коэффициентами линейной формы?

Страница: 3

📖 **Определение**

1.2. Коэффициентами φi линейной формы f называются значения этой линейной формы на базисных векторах пространства.

$$f(ei) = \varphi i$$

5 Как найти значение линейной формы, зная ее коэффициенты в некотором базисе, а также координаты вектора-аргумента в этом же базисе?

Страница: 3

Если f имеет координаты $\{\phi_i\}$, а вектор x имеет координаты $\{x^i\}$ в одном и том же базисе $\{e_i\}$, то

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i x^i$$

6 Как определяется равенство линейных форм?

Страница: 3

📖 **Определение**

2.1. Линейные формы f и g будем называть равными, если

$$f = g \quad \Leftrightarrow \quad f(v) = g(v), \quad \forall v \in V.$$

7 Какая линейная форма называется нуль-формой?

Страница: 3

📖 **Определение 2.2.**

Линейная форма θ называется нулевой (нуль-формой), если

$$\theta(v) = 0, \quad \forall v \in V.$$

8 Как определяется сумма линейных форм?

Страница: 3

Рассмотрим множество линейных форм, заданных в линейном пространстве V.

Очевидно, что мы можем определить действия на множестве форм.

Определение

2.3. Суммой линейных форм f и g называется отображение $h = f + g$, для которого справедливо

$$h(v) = f(v) + g(v), \quad \forall v \in V.$$

9 Какое пространство называется сопряженным пространством?

Страница: 4

Теорема 2.1. Множество линейных форм V^*, заданных на линейном пространстве V, образует линейное (сопряженное) пространство.

10 Какие значения принимает $f^j(e_i)$, если $\{e_i\}$ и $\{f^j\}$ — сопряженные базисы?

Страница: 4

$$f^j\left(e_i\right) = \delta_i^j = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad i = j, \\ 0, & \text{если} \quad i \neq j. \end{cases}$$

если базисы - сопряженные

11 Как может быть задан базис сопряженного пространства?

Страница: 4

Рассмотрим некоторый базис $\{e_i\}_{i=1}^n$ в пространстве V. Введем набор линейных форм $\left\{f^j\right\}_{j=1}^n$ следующим образом:

$$f^j(v) = v_j,$$

которая возвращает j-ю координату вектора $v \in V$ в базисе $\{e_i\}_{i=1}^n$.
Очевидно, что для линейных форм из этого набора справедливо

$$f^j\left(e_i\right) = \delta_i^j = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad i = j, \\ 0, & \text{если} \quad i \neq j. \end{cases}$$

Лемма 2.2. Набор линейных форм $\left\{f^j\right\}_{j=1}^n$ является базисом в сопряженном пространстве V^*.

12 Как преобразуются коэффициенты линейной формы при преобразованиях базиса?

Страница: 5

Замечание 2.1. Каждому базису в пространстве V может быть найден и притом единственный сопряженный базис, связанный с ним соотношением, которое указано выше.

Посмотрим теперь, как преобразуется сопряженный базис при преобразовании базиса пространства X.

Теорема 2.2. Пусть $\{f^i\}_{i=1}^n$ и $\left\{\tilde{f}^l\right\}_{l=1}^n$ — базисы V^*, сопряженные соответственно базисам $\{e^j\}_{j=1}^n$ и $\{\tilde{e}^k\}_{k=1}^n$. Тогда

$$\tilde{f}^l = \sum_{i=1}^n \sigma_i^l f^i,$$

где $\left(\sigma_i^l\right) = S$ — элементы обратной матрицы перехода, полагая $\left(\tau_k^j\right) = T$ матрицей перехода из $\{e^j\}_{j=1}^n$ в $\{\tilde{e}^k\}_{k=1}^n$.

13 Как преобразуются базисные линейные формы при преобразованиях базиса?

Страница: 5

Теорема 2.3. Преобразование координат формы в V^* при переходе от базиса $\{f^i\}_{i=1}^n$ к базису $\left\{\tilde{f}^l\right\}_{l=1}^n$ имеет вид

$$\tilde{\eta}_l = \sum_{i=1}^n \tau_l^i \eta_i, \quad \left(\tilde{\eta}^1, \tilde{\eta}^2, \ldots, \tilde{\eta}^n\right) = \left(\eta^1, \eta^2, \ldots, \eta^n\right) \cdot T.$$

Доказательство.

$$\tilde{\eta}_l = f\left(\tilde{e}_l\right) = \sum_{i=1}^n \eta_i f^i \left(\sum_{j=1}^n \tau_l^j e_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \eta_i \tau_l^j f^i\left(e_j\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \eta_i \tau_l^j \delta_j^i = \sum_{i=1}^n \tau_l^i \eta_i.$$

Замечание 2.2. Координаты линейной формы преобразуются точно по такому же закону, что и сам базис пространства V. По этой причине их также называют ковекторами.

14 Какое пространство называют вторым сопряженным?

Страница: 6

Отметим, что операцию нахождения сопряженного пространства можно применять итеративно.

Определение

3.1. Вторым сопряженным пространством называют $V^{**} = (V^*)^*$.
Элементами второго сопряженного пространства являются функции, также обладающие линейностью, от линейных форм.

15 Как может быть установлен изоморфизм между пространством V и вторым сопряженным к нему?

Страница: 6

Теорема 3.1. Между пространствами V и V^{**} можно установить изоморфизм без использования базиса (канонический изоморфизм).

Доказательство. Рассмотрим элементы второго сопряженного пространства $\hat{v}, \widehat{u} \in V^{**}$:

$$\begin{array}{rr} \hat{v} : V^* \to \mathbb{K}, & \hat{v}(f) \in \mathbb{K} \\ \hat{v}(f+g) = \hat{v}(f) + \hat{v}(g), & \hat{v}(\alpha f) = \alpha \hat{v}(f) \\ (\hat{v} + \hat{u})(f) = \hat{v}(f) + \hat{u}(f), & (\alpha \hat{v})(f) = \alpha \hat{v}(f) \end{array}$$

16 Какой изоморфизм называют каноническим?

Страница: 6

изоморфизм без использования базиса

Канонический изоморфизм устанавливается отношением

$$\widehat{x} \leftrightarrow x : \quad \hat{v}(f) = f(v) \quad \forall f \in V^*.$$

17 Какое отображение называется билинейной формой?

Страница: 7

Определение

Билинейной формой на пространстве $V(\mathbb{K})$ называется такая функция $b : V \times V \to \mathbb{K}$, что $\forall x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in V,\ \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ выполняется

$$b(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1 b(x_1, y) + \lambda_2 b(x_2, y)$$

$$b(x, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 b(x, y_1) + \lambda_2 b(x, y_2)$$

18 Как при помощи линейных форм может быть задана билинейная форма?

Страница: 7

Замечание 1.1. Билинейная форма при фиксировании одного из аргументов есть ничто иное, как линейная форма согласно определению, которое было введено ранее. Отсюда сразу следует первый пример.

Пример 1.1. Пусть $f, g \in V^*$ — линейные формы в пространстве $V(\mathbb{K})$. Билинейная форма может быть задана как

$$b : V \times V \to \mathbb{K}, \quad b(x, y) = f(x) \cdot g(y).$$

19 Запишите координатное представление любой билинейной формы?

Страница: 7

Пример 1.2. Скалярное произведение геометрических векторов на плоскости (в пространстве) линейно по каждому из аргументов, а следовательно, является билинейной формой.

Пример 1.3. Пусть $V = \mathbb{K}^n$ — арифметическое пространство. Билинейную форму можно задать как

$$b(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} \xi^i \eta^j,$$

где $x = \left(\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n\right)^T \in V$ и $y = \left(\eta^1, \eta^2, \ldots, \eta^n\right)^T \in V$.

20 Какая билинейная форма называется симметричной?

Страница: 8

> Билинейная форма b называется симметричной, если $b(x, y) = b(y, x)$.

21 Какая билинейная форма называется антисимметричной?

Страница: 8

> Билинейная форма b называется антисимметричной, если $b(x, y) = -b(y, x)$

22 Как может быть найдена симметричная компонента билинейной формы?

Страница: 8

Замечание 1.3. Множество симметричных (антисимметричных) билинейных форм образует линейное подпространство $\mathrm{Bil}_{\mathbb{K}}^{S}(V)$ $\left(\mathrm{Bil}_{\mathbb{K}}^{AS}(V)\right)$ в $\mathrm{Bil}_{\mathbb{K}}(V)$.

Из каждой билинейной формы может быть изготовлена симметричная форма:

$$b^S(x,y) = \frac{1}{2}(b(x,y) + b(y,x)), \quad b^S \in \mathrm{Bil}_{\mathrm{K}}^S(V).$$

23 Как может быть найдена антисимметричная компонента билинейной формы?

Страница: 8

Аналогично может быть изготовлена антисимметричная форма:

$$b^{AS}(x,y) = \frac{1}{2}(b(x,y) - b(y,x)), \quad b^{AS} \in \mathrm{Bil}_{\mathrm{K}}^{AS}(V).$$

24 Как восстановить билинейную форму, если известны ее симметрическая и антисимметричная компонента?

Страница: 8
Лемма 1.3. Сумма симметричной и антисимметричной форм, построенных согласно процедуре выше, дает исходную билинейную форму.

25 Какая билинейная форма является симметричной и антисимметричной одновременно?

Страница: 9
Единственная форма, удовлетворяющая сразу $b(x,y) = b(x,y) \quad b(x,y) = -b(x,y)$, есть нудевая форма

26 Как могут быть найдены коэффициенты билинейной формы?

Страница: 9

Предположим, что V — конечномерное линейное пространство. Зафиксируем в V базис $\{e_i\}_{i=1}^n$, где $n = \dim V$.

> 🕮 **Определение**
>
> 2.1. Коэффициентами β_{ij} билинейной формы $b(x,y)$ называются значения этой билинейной формы на базисных векторах пространства:

$$b\left(e_i, e_j\right) = \beta_{ij}.$$

Доказательство. Пусть в выбранном базисе $\{e_i\}_{i=1}^n$ линейного пространства V билинейная форма $b(x,y)$ задана набором коэффициентов $\{\beta_{ij}\}_{i,j=1}^n$. Тогда $\forall x = \sum_{i=1}^n \xi^i e_i, y = \sum_{j=1}^n \eta^j e_j$:

$$b(x,y)=b\left(\sum_{i=1}^{n}\xi^i e_i,\sum_{j=1}^{n}\eta^j e_j\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\xi^i\eta^j b\left(e_i,e_j\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\xi^i\eta^j\beta_{ij}.$$

По аналогии с линейными формами, коэффициенты которых можно представить в виде вектора-строки, существует аналогичное представление для билинейной формы.

27 Как устанавливается изоморфизм между пространством билинейных форм и пространством матриц?

Страница: 10

> **Определение**
>
> 2.2. Матрицей билинейной формы $b(x,y)$ называется матрица B, составленная из её коэффициентов.

Лемма 2.1. Пространство билинейных форм $\mathrm{Bil}_{\mathbb{K}}(V)$ изоморфно пространству квадратных матриц $M_n(\mathbb{K})$.

Доказательство. Изоморфизм устанавливается следующим образом:

$$\begin{gathered} b\leftrightarrow B,\quad b'\leftrightarrow B',\\ b+b'\leftrightarrow B+B',\\ \lambda b\leftrightarrow\lambda B. \end{gathered}$$

Соответствие между линейными операциями с билинейными формами и матрицами проверяется непосредственной проверкой определений.

28 Какое свойство определяет матрицу, соответствующую симметричной форме?

Страница: 10

Замечание 2.2. Матрица симметричной (антисимметричной) билинейной формы является симметричной (антисимметричной):

$$\begin{aligned} b^S&\leftrightarrow B_S, & B_S&=B_S^T,\\ b^{AS}&\leftrightarrow B_{AS}, & B_{AS}&=-B_{AS}^T. \end{aligned}$$

29 Какое свойство определяет матрицу, соответствующую антисимметричной форме?

Страница: 10

Замечание 2.2. Матрица симметричной (антисимметричной) билинейной формы является симметричной (антисимметричной):

$$b^S \leftrightarrow B_S, \qquad B_S = B_S^T,$$
$$b^{AS} \leftrightarrow B_{AS}, \quad B_{AS} = -B_{AS}^T.$$

30 Запишите закон преобразования матрицы билинейной формы при преобразовании базиса?

Страница: 10

Теорема 2.2. Матрицы B и B' билинейной формы $b(x, y)$, заданные в базисах $\{e_i\}_{i=1}^n$ и $\{e'_j\}_{j=1}^n$, связаны соотношением

$$B' = C^T B C,$$

где $C = \left(c^i_j\right)$ — матрица перехода от базиса $\{e_i\}_{i=1}^n$ к базису $\{e'_j\}_{j=1}^n$.

Доказательство. Полагая, что известна матрица перехода $C = \left(c^i_j\right)$, компоненты нового базиса можно выразить через векторы старого базиса как

$$e'_j = \sum_{i=1}^n c^i_j e_i.$$

Воспользуемся этим, чтобы получить компоненты матрицы билинейной формы в новом базисе:

$$\beta'_{ij} = b\left(e'_i, e'_j\right) = b\left(\sum_{k=1}^n c^k_i e_k, \sum_{l=1}^n c^l_j e_l\right) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n c^k_i c^l_j b\left(e_k, e_l\right) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n c^k_i c^l_j \beta_{kl}.$$

31 Какое отображение называется квадратичной формой?

Страница: 11

Квадратичной формой на линейном пространстве V называется отображение $q(v)$, построенное из билинейной формы $b(x, y)$ следующим образом:

$$q : V \to \mathbb{K}, \quad q(v) = b(v, v), \quad \forall x \in V$$

32 Что такое однородный полином степени два и как он связан с квадратичной формой?

Страница: 11

Квадратичная форма является однородным полиномом степени
2 от координат вектора.

33 Как выглядит квадратичная форма, построенная по антисимметричной билинейной форме?

Страница: 12

Любой антисимметричной билинейной форме соответствует
нулевая квадратичная форма.

34 Как определяется матрица квадратичной формы?

Страница: 12

Замечание 3.4. Полагая, что билинейная форма описывается матрицей с коэффициентами β_{ij}, квадратичную форму можно также представить в виде:

$$q(v)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}v^iv^j=\sum_{i=1}^{n}\beta_{ii}\left(v^i\right)^2+2\sum_{i<j}\beta_{ij}v^iv^j,$$

где v^i — i-я координата вектора v в выбранном базисе.

35 Дайте определение полилинейной формы.

Страница: 13

> 🕮 **Определение**
>
> 1.1. Полилинейной формой на линейном пространстве $V(\mathbb{K})$ назовем отображение вида

$$\mathcal{A}:\underbrace{V\times\ldots\times V}_{p}\times\underbrace{V^*\times\ldots\times V^*}_{q}\to\mathbb{K},$$

обладающее линейностью по каждому из аргументов:

$$\mathcal{A}\left(x_1,\ldots,\alpha x_i'+\beta x_i'',\ldots,x_p;\varphi^1,\ldots,\varphi^q\right)=$$
$$=\alpha\mathcal{A}\left(x_1,\ldots,x_i',\ldots,x_p;\varphi^1,\ldots,\varphi^q\right)+\beta\mathcal{A}\left(x_1,\ldots,x_i'',\ldots,x_p;\varphi^1,\ldots,\varphi^q\right),$$

где $x_i\in V$ и $\varphi^j\in V^*$.

36 Что такое валентность полилинейной формы? Поясните обозначения.

Страница: 13

> 🕮 **Определение**
>
> 1.2. Валентностью полилинейной формы называют пару чисел (p,q), определяющих количество векторов и ковекторов (линейных форм), являющихся аргументами данного отображения.

37 Какой валентностью обладает скалярное произведение векторов как полилинейная форма?

Страница: 14

Примером билинейной формы служит скалярное произведение двух геометрических векторов:

$$g(x_1, x_2) = (x_1, x_2),$$

а также все другие примеры билинейных форм, которые рассматривались ранее. Таким образом, билинейная форма — это ПЛФ валентности $(2, 0)$.

38 Какой валентностью обладает смешанное произведение векторов как полилинейная форма?

Страница: 14

Пример 1.3. Билинейные формы над V — это отображения вида

$$g : V \times V \to \mathbb{K}.$$

Таким образом, билинейная форма — это ПЛФ валентности $(2, 0)$. Примером билинейной формы служит скалярное произведение двух геометрических векторов:

$$g(x_1, x_2) = (x_1, x_2),$$

а также все другие примеры билинейных форм, которые рассматривались ранее.

Пример 1.4. Можно также рассмотреть трилинейные формы как отображения вида

$$\psi : V \times V \times V \to \mathbb{K},$$

являющиеся ПЛФ валентности $(3, 0)$. Отображения такого вида встречались в геометрии - это смешанное произведение трех векторов.

39 Как определяется сумма полилинейных форм?

Страница: 14

Определение

2.3. Отображение $\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$ будем называть суммой полилинейных форм $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, если

$$\mathcal{C}\left(x_1, x_2, \ldots, x_p; \varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^q\right) =$$
$$= \mathcal{A}\left(x_1, x_2, \ldots, x_p; \varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^q\right) + \mathcal{B}\left(x_1, x_2, \ldots, x_p; \varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^q\right)$$

для любых наборов $x_1, x_2, \ldots, x_p \in V$ и $\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^q \in V^*$.

Лемма 2.1. Отображение $\mathcal{C}$, определенное как сумма полилинейных форм $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \Omega_q^p$, является полилинейной формой из Ω_q^p.

40 Как определяется произведение полилинейной формы на скаляр?

Страница: 15

> **Определение**
>
> 2.4. Отображение $\lambda\mathcal{A}$ будем называть произведением полилинейной формы $\mathcal{A}$ на скаляр λ, если

$$(\lambda\mathcal{A})\left(x_1, x_2, \ldots, x_p; \varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^q\right) = \lambda \cdot \mathcal{A}\left(x_1, x_2, \ldots, x_p; \varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^q\right)$$

для любых наборов $x_1, x_2, \ldots, x_p \in V$ и $\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^q \in V^*$.

41 Как определяется произведение полилинейных форм?

Страница: 15

Лемма 2.2. Отображение $\lambda\mathcal{A}$, определенное как произведение полилинейной формы $\mathcal{A} \in \Omega_q^p$ на скаляр $\lambda \in \mathbb{K}$, является полилинейной формой из Ω_q^p.

42 Какой алгебраической структурой обладает множество полилинейных форм вместе с операцией сложения?

Страница: 15

Теорема 2.1. Множество Ω_q^p полилинейных форм валентности (p, q) образует линейное пространство.

43 Какой алгебраической структурой обладает множество полилинейных форм вместе с операциями сложения и умножения на скаляр?

Страница: 15

Относительно этих двух операций оно является линейным
пространством(пространством полилинейных форм)

44 Обладает ли операция умножения полилинейных форм свойством коммутативности? Поясните ответ.

Страница: 16
Обладает некоммутативностью

(a) **Некоммутативность**:

$$\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} \neq \mathcal{B} \cdot \mathcal{A}.$$

Данное свойство очевидно вытекает из определения произведения в силу того, что порядок произведения $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ определяет порядок аргументов в $\mathcal{C}$. Однако продемонстрируем это свойство на более простом примере. Рассмотрим следующие полилинейные формы, определенные как произведения обычных линейных форм $f^1, f^2 \in V^*$:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 = f^1 \cdot f^2 \quad &\Rightarrow \quad \mathcal{C}_1(x, y) = f^1(x) \cdot f^2(y), \\ \mathcal{C}_2 = f^2 \cdot f^1 \quad &\Rightarrow \quad \mathcal{C}_2(x, y) = f^2(x) \cdot f^1(y). \end{aligned}$$

45 Как может быть найден тензор полилинейной формы?

Страница: 17

Зафиксируем в $V(\mathbb{K})$ базис $\{e_i\}_{i=1}^n$ и построим к нему сопряженный базис $\{f^j\}_{j=1}^n$ в пространстве V^*. Вспомним, что эти базисы связаны соотношением

$$f^j(e_i) = \delta_i^j = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Определение

3.1. Тензором полилинейной формы $\mathcal{C}$ валентности (p, q) называется набор из n^{p+q} скаляров, определяемых как действие полилинейной формы на всевозможных наборах базисных векторов:

$$c_{i_1 i_2 \ldots i_p}^{j_1 j_2 \ldots j_q} = \mathcal{C}\left(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_p}; f^{j_1}, f^{j_2}, \ldots, f^{j_q}\right),$$

где индексы $i_1, i_2, \ldots, i_p$ и $j_1, j_2, \ldots, j_q$ принимают значения $1, \ldots, n$, где $n = \dim V$ — это размерность пространства V.

46 В чем заключается смысл немого суммирования?

Страница: 17

Соглашение о немом (или индексном) суммировании (правило Эйнштейна) гласит, что если индекс повторяется сверху и снизу, то подразумевается сумма по этому индексу. Например, $x^i y_i = \sum_i x^i y_i$. Это упрощает запись тензорных выражений.
подробнее:

> Прежде чем перейдем к дальнейшим рассуждениям, отметим следующий факт. Наличие большого количества индексов в случае анализа линейных объектов нередко приводит к большому количеству суммирований как в теоретических выкладках, так и в практических приложениях тензоров. По этой причине вводится

> так называемое правило суммирования Эйнштейна, или соглашение о немом суммировании. В контексте данной темы договоримся о следующем:

```
- (а) Если в одночлене присутствует одинаковый верхний и нижний индекс, то подразумевается суммирование по нему:
- (б) Индекс, по которому происходит суммирование, называют немым в силу того, что его обозначение не принципиально, т.е.
- (в) Необходимо соблюдение баланса индексов. Если индекс не является немым, то в левой и правой частях равенства должны присутствовать одни и те же индексы, а также должен быть неизменным их порядок, т.е.
```

47 Для какой цели служит тензор полилинейной формы?

Страница: 18

Тензор хранит в виде массива (компонент) все значения полилинейной формы на базисных элементах. Это позволяет эффективно работать с формой: суммировать, умножать, делать свертки.

48 Что является тензором билинейной формы?

Страница: 20

Тензор билинейной формы b валентности $(2, 0)$ — это матрица $\beta_{ij} = b(e_i, e_j)$.

49 Что является тензором линейной формы?

Страница: 17

Тензор линейной формы f валентности $(1, 0)$ — это вектор (столбец или строка) её коэффициентов $\phi_i = f(e_i)$.

50 Как при помощи немого суммирования записать закон преобразования координат вектора?

Страница: 19

Если x^n — координаты в новом базисе, $T = (\tau^i_j)$ — матрица перехода, то

$$x^n = \tau^i_j x^j$$

(Суммирование по повторяющемуся индексу j.)

51 Как при помощи немого суммирования записать закон преобразования коэффициентов линейных форм?

Страница: 19

Для формы f с координатами η_i в старом базисе и η'_j в новом, при матрице перехода τ_i^j для векторов, имеет место

$$\eta'_j = \tau_j^i \eta_i$$

(где, строго говоря, τ_j^i — обратная к исходной, если мы говорим о переходе для ковекторов, но в индексной записи часто используют верхние/нижние индексы, чтобы учесть это автоматически).

52 Запишите закон преобразования компонент тензора полилинейной формы при преобразованиях базиса?

Страница: 20

Для тензора $a_{i_1\ldots i_p}^{j_1\ldots j_q}$ и новой системы базисов действует правило:

$$a'^{l_1\ldots l_q}_{k_1\ldots k_p} = \tau_{k_1}^{i_1} \cdots \tau_{k_p}^{i_p} \sigma_{j_1}^{l_1} \cdots \sigma_{j_q}^{l_q} a_{i_1\ldots i_p}^{j_1\ldots j_q}$$

где τ — матрица перехода для V, σ — матрица перехода для V^*.

53 Как выглядит закон преобразования тензора типа (2, 0)?

Страница: 20

Так как $(2,0)$-тензор имеет два нижних индекса, то при смене базиса

$$a'_{k_1 k_2} = \tau_{k_1}^{i_1} \tau_{k_2}^{i_2} a_{i_1 i_2}.$$

54 Как выглядит закон преобразования тензора типа (1, 1)?

Страница: 20

У тензора a_i^j один верхний индекс, один нижний. Тогда

$$a_k^l = \tau_k^i \sigma_j^l a_i^j$$

(Здесь τ отвечает за векторные индексы, σ — за ковекторные.)

55 Как выглядит закон преобразования тензора типа (0, 2)?

Страница: 20

Такому тензору $a_{i_1 i_2}$ соответствуют оба индекса "внизу". Тогда

$$a'_{k_1 k_2} = \tau_{k_1}^{i_1} \tau_{k_2}^{i_2} a_{i_1 i_2}$$

(Аналогично пункту 53.)

56 Какой валентностью будет обладать полилинейная форма валентности (p, q) после операции свертки?

Страница: 21

Свертка «съедает» по одному векторному и одному ковекторному индексу, понижая p и q каждый на единицу. В результате получается форма валентности $(p-1, q-1)$.

57 Как определяется операция свертки тензора?

Страница: 21

В индексной записи свертка заключается в том, что один верхний индекс отождествляют с одним нижним и суммируют (немое суммирование). Например, если $a^{j_1 \dots j_q}_{i_1 \dots i_p}$, то свертка может идти по j_k и i_ℓ, порождая новую форму с на один верхний и нижний индекс меньше.

Определение

2.1. Сверткой полилинейной формы $\mathcal{A} \in \Omega^p_q$ называется отображение, результатом которого является функция $\mathcal{B}$ от $p-1$ векторного аргумента и $q-1$ ковекторного аргумента, определяемая как

$$\begin{aligned}
&\mathcal{B}\left(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_p; \varphi^1, \dots, \varphi^{l-1}, \varphi^{l+1}, \dots, \varphi^q\right) = \\
=&\mathcal{A}\left(x_1, \dots, x_{k-1}, \mathbf{e_r}, x_{k+1}, \dots, x_p; \varphi^1, \dots, \varphi^{l-1}, \mathbf{f}^r, \varphi^{l+1}, \dots, \varphi^q\right),
\end{aligned}$$

полагая, что в правой части производится суммирование по немому индексу r.

58 Дайте определение символа Кронекера.

Страница: 21

Определение

3.1. Символ Кронекера δ_{ij} — это дважды ковариантный тензор типа $(2,0)$, компоненты которого задаются как:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

59 Каким свойством обладает символ Кронекера?

Страница: 21

Замечание 3.1. Символ Кронекера является симметричным в том смысле, что для него выполняется свойство:

$$\delta_{ij} = \delta_{ji}.$$

60 Как записывается скалярное произведение при помощи операции свертки?

Страница: 22

С учетом свойства символа Кронекера он оказывается полезным при записи скалярного произведения в декартовой прямоугольной системе координат (ДПСК):

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a^i b^j g_{ij} = a^i b_i = \sum_{i=1}^{n} a^i b_i.$$

61 Дайте определение символа Леви-Чивита.

Страница: 22

Определение

3.2. Символ Леви-Чивиты ε_{ijk} — это трижды ковариантный тензор типа $(3, 0)$, компоненты которого в ДПСК задаются как:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1, & \text{если } (i, j, k) \text{ — чётная перестановка } (1, 2, 3), \\ -1, & \text{если } (i, j, k) \text{ — нечётная перестановка}, \\ 0, & \text{иначе (если есть повторяющиеся индексы)}. \end{cases}$$

62 Каким свойством обладает символ Леви-Чивита?

Страница: 22

Замечание 3.3. Символ Леви-Чивиты обладает свойством:

$$\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik} = -\varepsilon_{ikj}.$$

63 Как записывается векторное произведение при помощи символа Леви-Чивита?

Страница: 22

Перейдем к применению этого тензора в геометрии. Компоненты векторного произведения $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ в ДПСК выражаются через символ Леви-Чивиты:

$$c_i = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i = \varepsilon_{ijk} a^j b^k.$$

В координатной форме:

$$\mathbf{c} = \left(\varepsilon_{1jk} a^j b^k, \varepsilon_{2jk} a^j b^k, \varepsilon_{3jk} a^j b^k\right).$$

64 Запишите способ нахождения смешанного произведения при помощи символа Леви-Чивита.

Страница: 23

Смешанное произведение трёх векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ в $\mathbb{R}^3$:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \left(a^i\right) \cdot \left(\varepsilon_{ijk} b^j c^k\right) = \varepsilon_{ijk} a^i b^j c^k.$$

65 Как может быть найден определитель квадратной матрицы при помощи символа Леви-Чивита?

Страница: 24

Для квадратной матрицы $A = (A_{ij})$ размера $n \times n$ её определитель выражается как:

$$\det A = \varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} a_1^{i_1} a_2^{i_2} \ldots a_n^{i_n}.$$

66 Дайте определение линейному отображению между произвольными пространствами.

Страница: 25

Определение

1.1 Отображение $\varphi : V \to W$ линейного пространства V в линейное пространство W называется линейным, если $\forall x, x_1, x_2 \in V, \forall \alpha \in \mathbb{K}$ выполняются следующие свойства:

$$\varphi\left(x_1 + x_2\right) = \varphi\left(x_1\right) + \varphi\left(x_2\right), \quad \varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x).$$

67 Что называется линейным отображением растяжения?

Страница: 25
(в) Растяжение:

$$\varphi : V \to V \quad \varphi x = \lambda x, \quad \forall x \in V$$

68 Запишите матрицу тождественного отображения.

Страница: 26
(б) Тождественное отображение

$$\mathcal{I} \to E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

69 Какой вид имеет матрица проектирования на подпространство параллельно его прямому дополнению?

Страница: 26

В подходящем базисе (согласованном с подпространством) матрица проектора имеет блочный вид:

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где E — единичная подматрица, соответствующая выбранному подпространству, а нули — блоки, *уничтожающие* прямое дополнение.

70 Какой вид имеет матрица оператора растяжения на $\lambda \in \mathbb{K}$?

Страница: 26

Это диагональная матрица, у которой на диагонали стоит λ. В любом базисе она будет λE, где E — единичная матрица.

71 Как может быть найдена матрица линейного отображения?

Страница: 27

Берут образы базисных векторов $\varphi\left(\epsilon_i\right)$ и раскладывают их по базису пространства W. Коэффициенты разложения образуют столбцы матрицы линейного отображения.

72 Покажите как найти координаты образа вектора относительно линейного отображения, если оно задано матрицей.

Страница: 27

Пусть φ задано матрицей A. Если вектор x имеет координаты $\left\{x^i\right\}$, тогда образ $y = \varphi(x)$ имеет координаты, равные произведению A на столбец $\left\{x^i\right\}$. То есть $y = Ax$ в координатной форме.

73 Какой алгебраической структурой наделено множество линейных отображений с введенными операциями сложения и умножения на скаляр?

Страница: 28
Относительно этих операций $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ является линейным пространством.

74 Какому матричному пространству изоморфно множество $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(X, Y)$? Поясните введенные обозначения.

Страница: 28

Замечание 3.1. В силу того, что между отображением и его матрицей в фиксированной паре базисов пространств V и W устанавливается соответствие, которое к тому же сохраняет свойства линейности, можно утверждать, что пространство $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ изоморфно матричному пространству $M_{m\times n}(\mathbb{K})$:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) \simeq M_{m\times n}(\mathbb{K}).$$

75 Что такое композиция линейных отображений?

Страница: 28

> **Определение**
>
> 3.4. Отображение $\chi : V \to W$ называется композицией линейных отображений ψ и φ, если

$$\forall x \in V : \quad \chi(x) = (\psi \circ \varphi)(x) = \psi(\varphi(x)).$$

76 Как найти матрицу линейного отображения, если оно задано как композиция отображений ϕ и ψ?

Страница: 29

Следствие 3.1.1. Матрица композиции линейных отображений $\chi = \psi \circ \varphi$ определяется произведением матриц B_ψ и A_φ:

$$C_\chi = B_\psi \cdot A_\varphi.$$

77 Запишите закон преобразования матрицы линейного отображения при замене базиса.

Страница: 29

Теорема 4.1. Матрица оператора при замене базисов преобразуется как

$$A'_\varphi = S^{-1} A_\varphi T,$$

где S — матрица перехода от старого базиса к новому в пространстве V, а T — матрица перехода от старого базиса к новому в пространстве W.

ПРАВИЛА ТМ

Теоретический минимум
Теоретический минимум представляет собой письменный опрос студентов по определениям понятий и формулировкам утверждений, изученных в разделе.
Задача – мотивировать студентов запоминать теоретический материал, а также уметь

его воспроизводить.
Ответственный за проведение: куратор + практик.

Проведение:
- письменно
- индивидуально
- за ограниченное время (обычно не более 15 мин.)
- без помощи конспектов, учебников и других источников
- на практическом занятии
- в конце изучения раздела
- список вопросов известен заранее

Ответственный заранее готовит условия теоретического минимума в нескольких вариантах для каждого потока. Варианты формируются на основе списка вопросов (понятий и утверждений).
Список вопросов направляется студентам заранее. Варианты заранее не предоставляются. На занятии студент получает вариант с вопросами и на подписанных листах излагает определения понятий и формулировки утверждений.

Оформленные работы проверяются и оцениваются преподавателем после занятия в течение 1-2 недель. Результаты сообщаются студентам и выставляются в электронную ведомость БаРС.

Оценивание:
Теоретический минимум оценивается либо в 4 балла, либо в 0 баллов. 4 балла выставляется в случае правильного изложения студентом не менее 60% от суммарного количества вопросов из полученного варианта. В противном случае выставляется 0 баллов.
Ответ на вопрос считается верным, если представлена строгая, непротиворечивая, корректная и лаконичная формулировка соответствующего понятия или утверждения.
В случае ошибок ответ на вопрос может быть засчитан верным частично.

Дополнительные попытки:
Проведение теоретического минимума на практическом занятии считается 1-й попыткой. В случае пропуска 1-й попытки по уважительной причине студенту гарантируется ее возмещение в назначенное преподавателем время. При неуважительной причине пропуска попытка сгорает. В случае неуспеха на 1-й попытке студентам в течение двух недель предоставляется 2-я попытка. Она проводится в одно общее для всех время (в рамках практического потока). Пропуск по любой причине приводит к сгоранию этой попытки.
В конце семестра по согласованию с лидером курса может быть проведена 3-я последняя попытка.
Уважительность причины устанавливает Студенческий офис по заявлению студента.
Студенческий офис в случае положительного решения выдает письменное подтверждение, которое студент направляет ответственному