Занятие 4. Свойства предела последовательности

I. теоремы Вейерштрасса и о сжатой переменной
II. вычисление пределов по арифметическим свойствам (методами раскрытия неопределённостей)
III. второй замечательный предел

Источники:

[Ефимов, Демидович] Сборник задач по математике для втузов. В 4-х частях. Ч. 1. Линейная алгебра и основы математического анализа. Под ред. А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича. 1993.

[Родина] Т.В. Родина, Е.С. Трифанова Задачи и упражнения по математическому анализу I (для спец. «Прикладная математика и информатика»). Уч. пособие. СПб: СПбГУ ИТМО, 2011. 208с.

[Берман] Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. Уч. пособие. 2001.

[Бутузов] Бутузов В.Ф. и др. Математический анализ в вопросах и задачах. 2002.

[Кудрявцев] Кудрявцев Л.Д. и др. Сборник задач по математическому анализу. Том 1. 2003.

[Марон] Марон И.А. Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах (1970)

Составила: Рванова А.С.
Рецензент: Бойцев А.А.
Редакторы: Лебедева А.Д., Правдин К.В.

В аудитории

I. Теоремы Вейерштрасса и о сжатой переменной

Задача 1. Доказать, что последовательность с общим членом $x_n = \frac{2n-1}{3n+1}$ – возрастающая.

[Марон, 1.8.1 – решение (ниже)]

Задача 2. Даны последовательности. Указать, какие из этих последовательностей ограничены и какие из них не ограничены.

а) $x_n = \frac{5n^2}{n^2+3}$
б) $y_n = (-1)^n \frac{2n}{n+1} \sin n$
в) $z_n = n \cos \pi n$

[Марон, 1.8.3 – решение (ниже)] Ответ: a) ограничена; b) ограничена; c) не ограничена.

Задача 3. Доказать, что последовательность сходится и найти её предел.

$x_1 = \frac{x_0}{a+x_0};\ x_2 = \frac{x_1}{a+x_1};\ x_3 = \frac{x_2}{a+x_2};\ \dots\ ; x_n = \frac{x_{n-1}}{a+x_{n-1}}\ ; \dots \quad (a > 1,\ x_0 > 0)$

[Марон, 1.8.4 – решение (ниже)]

Ответ: 0

Задача 4. Доказать, что следующие последовательности сходятся, и найти их пределы:

$$x_1 = \sqrt{2};\quad x_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}};\quad x_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}};\dots;\quad x_n = \sqrt{2+\sqrt{2+\dots+\sqrt{2}}}\ (n\ \text{радикалов});\ \dots$$

[Марон, 1.8.7 – решение (ниже)] Ответ: 2

Задача 5. Найти пределы последовательностей с общими членами:

$$x_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}};\quad z_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}};\quad y_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

[Марон, 1.8.8 – решение (ниже)] Ответы: 1; 1; 1

II. Вычисление пределов по арифметическим свойствам (методами раскрытия неопределённостей)

Вычислить:

Задача 6. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{10n}{n^2+1}$

Ответ: 0

Задача 7. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-n}{n-\sqrt{n}}$

Ответ: $+\infty$

Задача 8. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5\cdot 3^n}{3^n-2}$

[Бутузов, с.26, №3 – решение] Ответ: 5

Задача 9. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$

[Бутузов, с.26, №4 – решение] Ответ: $\frac{1}{2}$

III. Второй замечательный предел

Задача 10. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2n+3}\right)^{3n}$

[Родина, пример 3.21] Ответ: e^{-3}

Консультация

II. Вычисление пределов по арифметическим свойствам (методами раскрытия неопределённостей)

Задача 11. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\operatorname{arctg}((-1)^n n)}{n^2+1}$.

[Родина, пример 3.12 – решение] Ответ: 0

Задача 12. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n}-3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\left(\frac{2}{5}\right)^n-3}$.

[Родина, пример 3.13 – решение] Ответ: $-\frac{2}{3}$

Задача 13. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n-\left(\frac{3}{4}\right)^n}{\frac{5}{n}-(-1)^n}$.

[Родина, пример 3.14 – решение] Ответ: -1

Задача 14. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-4n}{3n^2+n+1}$.

[Родина, пример 3.15 – решение] Ответ: $\frac{1}{3}$

Задача 15. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2-4n-3}{3n^3-8n+5}$

Ответ: 0

Задача 16. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-5n+1}{3n+7}$

Ответ: ∞

Задача 17. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt[3]{8n^3-n}}{n-\sqrt[4]{n^3+16}}$.

[Родина, пример 3.16 – решение]   Ответ: 3

Задача 18. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^5-3^{n+2}+2^n}{n^3+3^n}$.

[Родина, пример 3.17 – решение]   Ответ: -9

Задача 19. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}$.

[Берман, 258]   Ответ: 0

Задача 20. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^2}-3\sqrt[n]{n}+2}{\sqrt[n]{n}-1}$.

[Родина, пример 3.19 – решение]   Ответ: -1

Задача 21. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n}\right)$.

[Родина, пример 3.20]   Ответ: 1

III. Второй замечательный предел

Задача 22. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2n+1}{4n-3}\right)^{2n+3}$

[Родина, пример 3.22]   Ответ: 0

Задача 23. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{5^{n+2}\cdot n^3+9}$

[Родина, пример 3.23]   Ответ: 5

Задача 24. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^3+1}{n^3}\right)^{n^2+1}$

Ответ: 1

Задача 25. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^2-n}{n^2+1}\right)^{n^2+n+1}$

Ответ: 0

Самостоятельно

I. Теорема Вейерштрасса и о сжатой переменной

Задача 26. Доказать, что последовательность с общим членом $x_n=\frac{10^n}{n!}$ убывает при $n\geq 10$.

[Марон, 1.8.2 – решение (ниже)]

Задача 27. Доказать, что последовательность сходится:

$$x_n=\frac{1}{5+1}+\frac{1}{5^2+1}+\frac{1}{5^3+1}+\dots+\frac{1}{5^n+1}$$

$$\left(\text{т. е.}\ \ x_1=\frac{1}{5+1};\ \ x_2=\frac{1}{5+1}+\frac{1}{5^2+1};\ \ x_3=\frac{1}{5+1}+\frac{1}{5^2+1}+\frac{1}{5^3+1};\ \ \dots\right)$$

[Марон, 1.8.5 – решение (ниже)]

Задача 28. Пользуясь теоремой о существовании предела монотонной ограниченной последовательности, доказать сходимость следующих последовательностей:

а) $x_n=\frac{n^2-1}{n^2}$

б) $x_n = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$

[Марон, 1.8.6, б – указание (ниже)]

Задача 29. С помощью теоремы о «зажатой» последовательности доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1\ \ (a > 0)$.

[Марон, 1.8.9 – указание (ниже), Кудрявцев, с.131, пример 9 – решение]

II. Вычисление пределов по арифметическим свойствам (методами раскрытия неопределённостей)

Задача 30. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}\sin(n!)}{n+2}$

[Бутузов, с.28, №24а] Ответ: 0

Задача 31. $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

[Бутузов, с.28, №24б] Ответ: 0

Задача 32. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}$

[Бутузов, с.28, №24в] Ответ: $\frac{1}{3}$

Задача 33. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+2)! - (n+1)!}$.

[Берман, 259] Ответ: 1

Задача 34. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1+2+3+\cdots+n}{n+2} - \frac{n}{2}\right)$.

[Берман, 262] Ответ: $-\frac{1}{2}$

Задача 35. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}\right)$.

[Ефимов, Демидович 1.244] Ответ: 1

III. Второй замечательный предел

Задача 36. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2^n+3}{2^n+1}\right)^n$

[Кудрявцев, 175 (2)] Ответ: 1

Задача 37. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+n}{n^2+2n+2}\right)^n$

[Кудрявцев, 175 (4)] Ответ: $\frac{1}{e}$

Решения [Марон 1.8.1 – 1.8.9]

1.8.1. Доказать, что последовательность с общим членом $x_n = (2n-1)/(3n+1)$ — возрастающая.

Решение. Надо доказать, что $x_{n+1} > x_n$ для любого n, т. е. надо доказать, что

$$\frac{2n+1}{3n+4} > \frac{2n-1}{3n+1}.$$

Последнее неравенство равносильно очевидному неравенству

$$6n^2+5n+1 > 6n^2+5n-4.$$

Значит, $x_{n+1} > x_n$, ч.т.д.

1.8.2. Дана последовательность с общим членом

$$x_n = 10^n/n!.$$

Доказать, что эта последовательность убывает при $n \geqslant 10$.

Решение.

$$x_{n+1} = \frac{10^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{10^n}{n!} \cdot \frac{10}{n+1} = x_n \frac{10}{n+1}.$$

Так как $10/(n+1) < 1$ при $n \geqslant 10$, то с этого номера $x_{n+1} < x_n$, а это значит, что последовательность при $n \geqslant 10$ убывает.

1.8.3. Даны последовательности:

а) $x_n = \dfrac{5n^2}{n^2+3}$; б) $y_n = (-1)^n \dfrac{2n}{n+1} \sin n$;

в) $z_n = n \cos \pi n$.

Указать, какие из этих последовательностей ограничены и какие из них не ограничены.

Решение. а) Последовательность $\{x_n\}$ ограничена, так как очевидно, что $0 < 5n^2/(n^2+3) < 5$ при всех n.

б) Последовательность $\{y_n\}$ ограничена:

$$|y_n| = |(-1)^n| \cdot \frac{2n}{n+1} |\sin n| < \frac{2n}{n+1} < 2.$$

в) Последовательность $\{z_n\}$ не ограничена, так как

$$|z_n| = |n \cos \pi n| = n.$$

1.8.4. Доказать, что последовательность

$$x_1 = \frac{x_0}{a+x_0};\quad x_2 = \frac{x_1}{a+x_1};\quad x_3 = \frac{x_2}{a+x_2};\quad \ldots;\quad x_n = \frac{x_{n-1}}{a+x_{n-1}};\quad \ldots$$

$(a > 1,\ x_0 > 0)$ сходится.

Решение. Докажем, что данная последовательность монотонна и ограничена. Во-первых, $x_n < x_{n-1}$, так как

$$x_n = \frac{x_{n-1}}{a+x_{n-1}} < x_{n-1}.$$

Следовательно, данная последовательность убывающая. Во-вторых, все ее члены положительны (по условию $a > 0$ и $x_0 > 0$), поэтому последовательность ограничена снизу. Итак, данная последовательность монотонна и ограничена, значит, имеет предел.

Вычислим предел последовательности. Сделаем это двумя способами. В первом мы вспомним метод математической индукции (кстати, он не требует предварительного доказательства существования предела, что мы уже сделали), а второй будет идейно новым.

Способ № 1 (не обязательно рассматривать)

Найдём общую формулу для общего члена, пользуясь методом математической индукции.

База индукции:

$$x_1 = \frac{x_0}{a + 1 \cdot x_0}$$

$$x_2 = \frac{x_1}{a + x_1} = \frac{\frac{x_0}{a + x_0}}{a + \frac{x_0}{a + x_0}} = \frac{x_0}{a(a + x_0) + x_0} = \frac{x_0}{a^2 + (a + 1)x_0}$$

$$x_3 = \frac{x_2}{a + x_2} = \frac{\frac{x_0}{a^2 + ax_0 + x_0}}{a + \frac{x_0}{a^2 + ax_0 + x_0}} = \frac{x_0}{a(a^2 + ax_0 + x_0) + x_0} = \frac{x_0}{a^3 + (a^2 + a + 1)x_0}$$

…

Индукционное предположение:

$$x_n = \frac{x_0}{a^n + (a^{n-1} + \dots + a + 1)x_0}$$

Шаг индукции:

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{a + x_n} = \frac{\frac{x_0}{a^n + (a^{n-1} + \dots + a + 1)x_0}}{a + \frac{x_0}{a^n + (a^{n-1} + \dots + a + 1)x_0}} = \frac{x_0}{a(a^n + (a^{n-1} + \dots + a + 1)x_0) + x_0} = \frac{x_0}{a^{n+1} + (a^n + \dots + a + 1)x_0}$$

По принципу математической индукции для всех номеров $n \in \mathbb{N}$ формула для x_n из индукционного предположения будет верна.

Вычислим предел последовательности x_n:

$$x_n = \frac{x_0}{a^n + (a^{n-1} + \dots + a + 1)x_0} = \frac{x_0}{a^n + \frac{1 - a^n}{1 - a}x_0} = \frac{(1 - a)x_0}{a^n(1 - a) + (1 - a^n)x_0} = \frac{(1 - a)x_0}{a^n(1 - a - x_0) + x_0}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(1 - a)x_0}{a^n(1 - a - x_0) + x_0} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(1 - a)x_0}{\lim\limits_{n\to\infty}(a^n(1 - a - x_0) + x_0)} = \frac{(1 - a)x_0}{\lim\limits_{n\to\infty} a^n \cdot (1 - a - x_0) + x_0} = \left| \begin{matrix} (1 - a) < 0 \\ (1 - a - x_0) < 0 \end{matrix} \right|$$

$$= \frac{(1 - a)x_0}{(+\infty) \cdot (1 - a - x_0) + x_0} = |\text{операции с } \infty \text{ определены}| = 0\,.$$

Способ № 2

Предположим, что предел $x_n = \frac{x_{n-1}}{a + x_{n-1}}$, который существует в $\mathbb{R}$, равен L. Тогда предел x_{n-1} тоже равен L. Тогда по арифметическим свойствам предела последовательности:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n-1}}{a + x_{n-1}}; \quad L = \frac{L}{a + L}; \quad aL + L^2 = L; \quad L(L + a - 1) = 0; \quad L = 0 \text{ или } L = 1 - a.$$

Предел последовательности единственный, выясним какой из них:

$(1 - a) < 0$, но $L \geq 0$, т.к. $x_n > 0$, поэтому $L \neq 1 - a$, значит $L = 0$.

1.8.5. Доказать, что последовательность с общим членом

$$x_n=\frac{1}{5+1}+\frac{1}{5^2+1}+\frac{1}{5^3+1}+\ldots+\frac{1}{5^n+1}$$

$\left(\text{т. е. } x_1=\frac{1}{5+1};\ x_2=\frac{1}{5+1}+\frac{1}{5^2+1};\ x_3=\frac{1}{5+1}+\frac{1}{5^2+1}+\frac{1}{5^3+1};\ \ldots\right)$

сходится.

Решение. Последовательность x_n возрастает, так как $x_{n+1}=x_n+1/(5^{n+1}+1)$ и, следовательно, $x_{n+1}>x_n$. Кроме того, она ограничена сверху, поскольку $1/(5^n+1)<1/5^n$ при любом n и

$$x_n=\frac{1}{5+1}+\frac{1}{5^2+1}+\frac{1}{5^3+1}+\ldots+\frac{1}{5^n+1}<$$
$$<\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+\ldots+\frac{1}{5^n}=\frac{1/5-1/5^{n+1}}{1-1/5}=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{5^n}\right)<\frac{1}{4}.$$

Следовательно, предел последовательности существует.

1.8.6. б) *Указание.* Ограниченность последовательности вытекает из того, что $n!=1\cdot2\cdot3\cdots n\geqslant 2^{n-1}$ и поэтому

$$x_n\leqslant 2+1/2+1/2^2+\ldots+1/2^{n-1}=3-1/2^{n-1}<3.$$

1.8.7. Доказать, что следующие последовательности сходятся, и найти их пределы:

а) $x_1=\sqrt{2}$; $\quad x_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}$;

$$x_3=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}};\ \ldots;\ x_n=\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n\ \text{радикалов}};\ \ldots;$$

Решение. а) Очевидно, что $x_1<x_2<x_3<\ldots<x_n<x_{n+1}<\ldots$, т. е. наша последовательность *возрастающая*. Остается доказать, что эта последовательность ограничена.

Имеем $x_n=\sqrt{2+x_{n-1}}$, $n=2,\ 3,\ \ldots$ Так как $x_1=\sqrt{2}<2$, то $x_2=\sqrt{2+x_1}<\sqrt{2+2}=2$, $x_3=\sqrt{2+x_2}<\sqrt{2+2}=2$, ... Пусть доказано, что $x_{n-1}<2$. Тогда $x_n=\sqrt{2+x_{n-1}}<\sqrt{2+2}=2$. Таким образом, с помощью математической индукции мы доказали, что $x_n<2$, т. е. последовательность *ограничена*. Следовательно, она имеет конечный предел. Найдем его. Обозначим

$$\lim_{n\to\infty}x_n=y.$$

Далее, $x_n=\sqrt{2+x_{n-1}}$; возводя в квадрат, получим

$$x_n^2=2+x_{n-1}.$$

Перейдя в этом равенстве к пределу, получим

$$\lim_{n\to\infty} x_n^2 = \lim_{n\to\infty} (2 + x_{n-1}), \quad \text{или} \quad y^2 = 2 + y.$$

Корни полученного квадратного уравнения таковы:

$$y_1 = 2; \qquad y_2 = -1.$$

Отрицательный корень посторонний, так как $x_n > 0$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = y_1 = 2$.

1.8.8. Найти пределы последовательностей с общими членами:

$$x_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}; \qquad z_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}};$$

$$y_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}.$$

Решение. Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$. В самом деле,

$$|x_n - 1| = \left|\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} - 1\right| = \left|\frac{n - \sqrt{n^2+n}}{\sqrt{n^2+n}}\right| =$$

$$= \frac{n}{\sqrt{n^2+n}\,(n + \sqrt{n^2+n})} < \frac{1}{2n}.$$

Аналогично доказывается, что

$$\lim_{n\to\infty} z_n = 1.$$

Далее,

$$y_n < \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}}_{n} = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = z_n.$$

С другой стороны,

$$y_n > \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}}_{n} = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = x_n.$$

Таким образом,

$$x_n < y_n < z_n, \quad \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = 1$$

и по теореме о «зажатой» последовательности

$$\lim_{n\to\infty} y_n = 1.$$

1.8.9. *Указание.* Для всех n, начиная с некоторого, выполняются неравенства $1/n < a < n$. Поэтому $1/\sqrt[n]{n} < \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{n}$, причем $\lim \sqrt[n]{n} = \lim 1/\sqrt[n]{n} = 1$.