

Конспект по пределам последовательностей и функций

Последовательности

- **Подпоследовательности**

- Подпоследовательность - это последовательность, составленная из элементов исходной последовательности, взятых в том же порядке, но не обязательно подряд.

- **Частичные пределы**

- Частичный предел - это предел подпоследовательности исходной последовательности.
- Множество частичных пределов последовательности содержит все возможные пределы её подпоследовательностей.

- **Может ли последовательность иметь предел, если сама последовательность предела не имеет?**

- Да, если последовательность ограничена и у неё есть подпоследовательности, которые сходятся.

- **Последовательность ограничена**

- **Лемма Больцано-Вейерштрасса:** Всякая ограниченная последовательность имеет сходящуюся подпоследовательность.
- Доказательство этой леммы: если последовательность ограничена, то можно выделить подпоследовательность, которая сходится к частичному пределу.
- Пример:

$$x_n = (-1)^n + \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \quad (1)$$

Эта последовательность ограничена и имеет частичные пределы.

- **Последовательность не ограничена**

- Если последовательность не ограничена, то у неё существует подпоследовательность, стремящаяся к $+\infty$ или $-\infty$.
- Пусть она не ограничена сверху, тогда можно найти подпоследовательность, элементы которой растут неограниченно.

Предел функции

- **Определение предела по Коши**

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x (0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon) \quad (2)$$

Это определение означает, что функция $f(x)$ стремится к A при x , стремящемся к a , если для любого положительного числа ε можно найти такое положительное число δ , что для всех x , удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$, значение $f(x)$ будет находиться в пределах ε от A .

- **Теорема об эквивалентности предела по Коши**

– Теорема: Предел функции по Коши эквивалентен пределу по Гейне.

- **Определение предела функции по Гейне**

– Предел функции $f(x)$ в точке a по Гейне определяется как значение, к которому стремится функция при стремлении аргумента к a по любой последовательности, сходящейся к a .