ТМ 1

1 Дайте определение линейной формы

Определение 1.1. **Линейной формой** на пространстве V называется такая функция $f : V \to \mathbb{K}$, что $\forall v, v_1, v_2 \in V$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ выполняется:

(а) Аддитивность: $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$.

(б) Однородность: $f(\lambda v) = \lambda f(v)$.

2 Что будет являться образом линейной комбинации относительно линейной формы?

Замечание 1.1. Для любого линейного отображения $f : V \to U$ справедливо, что образом линейной комбинации произвольных векторов $v_i \in V$ будет линейная комбинация образов этих векторов:

$$f\left(\sum_i \alpha_i v_i\right) = \sum_i \alpha_i f(v_i)$$

3 Приведите общий вид линейной формы, определяемый координатами вектора-аргумента

в произвольном базисе.

Пример 1.1. Пусть E – пространство геометрических векторов (на плоскости или в пространстве) с введенным скалярным произведением $\langle x, y\rangle$. Линейную форму $f(v)$ можно задать как

$$f(v) = \langle a, v\rangle,$$

где $a \in E$ – фиксированный вектор.

4 Что называется коэффициентами линейной формы?

Определение 1.2. **Коэффициентами** φ_i линейной формы f называются значения этой линейной формы на базисных векторах пространства.

$$f(e_i) = \varphi_i$$

5 Как найти значение линейной формы, зная ее коэффициенты в некотором базисе, а

также координаты вектора-аргумента в этом же базисе?

Теорема 1.1. *Задание линейной формы эквивалентно заданию ее значений на базисных формах, т.е. заданию ее коэффициентов.*

Доказательство. Пусть в выбранном базисе $\{e_i\}_{i=1}^n$ линейного пространства V линейная форма f задана набором коэффициентов $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$. Тогда $\forall v = \sum_{i=1}^n v^i e_i \in V$:

$$f(v) = f\left(\sum_{i=1}^n v^i e_i\right) = \sum_{i=1}^n f(v^i e_i) = \sum_{i=1}^n v^i f(e_i) = \sum_{i=1}^n v^i \varphi_i$$

Таким образом получаем, что образ любого вектора однозначно определен координатами этого векторами и коэффициентами линейной формы, где оба набора чисел найдены *в одном и том же базисе.*

6 Как определяется равенство линейных форм?

Определение 2.1. Линейные формы f и g будем называть **равными**, если

$$f = g \qquad \Leftrightarrow \qquad f(v) = g(v), \quad \forall v \in V$$

7 Какая линейная форма называется нуль-формой?

Определение 2.2. Линейная форма θ называется **нулевой (нуль-формой)**, если

$$\theta(v) = 0, \qquad \forall v \in V$$

8 Как определяется сумма линейных форм?

Определение 2.3. **Суммой** линейных форм f и g называется отображение $h = f + g$, для которого справедливо

$$h(v) = f(v) + g(v), \qquad \forall v \in V$$

9 Какое пространство называется сопряженным пространством?

Теорема 2.1. *Множество линейных форм V^*, заданных на линейном пространстве V образует линейное (сопряженное) пространство.*

10 Какие значения принимает fj(ei), если {ei} и {fj} — сопряженные базисы?

Рассмотрим некоторый базис $\{e_i\}_{i=1}^n$ в пространстве V. Введем набор линейных форм $\{f^j\}_{j=1}^n$ следующим образом:

$$f^j(v) = v_j,$$

которая возвращает j-ю координату вектора $v \in V$ в базисе $\{e_i\}_{i=1}^n$.

Очевидно, что для линейных форм из этого набора справедливо

$$f^j(e_i) = \delta_i^j = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad i = j, \\ 0, & \text{если} \quad i \neq j \end{cases}$$

11 Как может быть задан базис сопряженного пространства?

Лемма 2.2. *Набор линейных форм $\{f^j\}_{j=1}^n$ является базисом в сопряженном пространстве V^*.*

12 Как преобразуются коэффициенты линейной формы при преобразованиях базиса?

Аналогично с линейной независимостью. Предположим, что линейная комбинация форм с некоторыми коэффициентами α_i равна нуль-форме.

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f^i = \theta$$

Применяя эту нуль-форму к произвольному базисному вектору, получим

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f^i\right)(e_k) = \theta(e_k) = 0$$

Учитывая также свойства линейности и их определение

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f^i(e_k) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha_k f^k(e_k) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha_k = 0$$

13 Как преобразуются базисные линейные формы при преобразованиях базиса?

Замечание 2.1. Каждому базису в пространстве V может быть найден и притом единственный сопряженный базис, связанный с ним соотношением, которое указано выше.

Посмотрим теперь как преобразуется сопряженный базис при преобразовании базиса пространства X.

Теорема 2.2. *Пусть $\{f^i\}_{i=1}^n$ и $\{\widetilde{f}^l\}_{l=1}^n$ – базисы V^*, сопряженные соответственно базисам $\{e^j\}_{j=1}^n$ и $\{\widetilde{e}^k\}_{k=1}^n$. Тогда*

$$\widetilde{f}^l = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^l f^i$$

где $(\sigma_i^l) = S$ – элементы обратной матрицы перехода, полагая $(\tau_k^j) = T$ – матрица перехода из $\{e^j\}_{j=1}^n$ в $\{\widetilde{e}^k\}_{k=1}^n$.

14 Какое пространство называют вторым сопряженным?

Определение 3.1. Вторым сопряженным пространством называют $V^{**} = (V^*)^*$.

15 Как может быть установлен изоморфизм между пространством V и вторым сопряженным к нему?

Теорема 3.1. *Между пространствами V и V^{**} можно установить изоморфизм без использования базиса (канонический изоморфизм).*

16 Какой изоморфизм называют каноническим?

Канонический изоморфизм устанавливается отношением

$$\widehat{x} \leftrightarrow x : \qquad \widehat{v}(f) = f(v) \qquad \forall f \in V^*$$

17 Какое отображение называется билинейной формой?

Пусть V – линейное пространство над полем $\mathbb{K}$.

Определение 1.1. **Билинейной формой** на линейном пространстве $V(\mathbb{K})$ называется такая функция $b : V \times V \to \mathbb{K}$, что $\forall x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in V$, $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ выполняется:

(а) Линейность по первому аргументу:

$$b(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1 b(x_1, y) + \lambda_2 b(x_2, y)$$

(б) Линейность по второму аргументу:

$$b(x, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 b(x, y_1) + \lambda_2 b(x, y_2)$$

18 Как при помощи линейных форм может быть задана билинейная форма?

Пример 1.1. Пусть $f, g \in V^*$ – линейные формы в пространстве $V(\mathbb{K})$. Билинейная форма может быть задана как

$$b : V \times V \to \mathbb{K}, \qquad b(x, y) = f(x) \cdot g(y)$$

19 Запишите координатное представление любой билинейной формы?

Пример 1.3. Пусть $V = \mathbb{K}^n$ – арифметическое пространство. Билинейную форму можно задать как

$$b(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} \xi^i \eta^j,$$

где $x = (\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n)^T \in V$ и $y = (\eta^1, \eta^2, \ldots, \eta^n)^T \in V$.

20 Какая билинейная форма называется симметричной?

Определение 1.2. Билинейная форма $b \in \mathrm{Bil}_{\mathbb{K}}(V)$ называется **симметричной**, если выполняется $b(x, y) = b(y, x)$.

21 Какая билинейная форма называется антисимметричной?

Определение 1.3. Билинейная форма $b \in \mathrm{Bil}_{\mathbb{K}}(V)$ называется **антисимметричной**, если выполняется $b(x, y) = -b(y, x)$.

22.23 Как может быть найдена симметричная компонента билинейной формы?

Как может быть найдена антисимметричная компонента билинейной формы?

Замечание 1.3. Множество симметричных (антисимметричных) билинейных форм образует линейное подпространство $\mathrm{Bil}^S_{\mathbb{K}}(V)$ ($\mathrm{Bil}^{AS}_{\mathbb{K}}(V)$) в $\mathrm{Bil}_{\mathbb{K}}(V)$.

Из каждой билинейной формы может быть изготовлена симметричная форма:

$$b^S(x,y) = \frac{1}{2}(b(x,y) + b(y,x)), \qquad b^S \in \mathrm{Bil}^S_{\mathbb{K}}(V)$$

Аналогично может быть изготовлена антисимметричная форма:

$$b^{AS}(x,y) = \frac{1}{2}(b(x,y) - b(y,x)), \qquad b^{AS} \in \mathrm{Bil}^{AS}_{\mathbb{K}}(V)$$

24 Как восстановить билинейную форму, если известны ее симметрическая и антисимметричная компонента?

Лемма 1.3. Сумма симметричной и антисимметричной формы, построенных согласно процедуре выше, дает исходную билинейную форму.

25 Какая билинейная форма является симметричной и антисимметричной одновременно?

1.4. Пространство билинейных форм представляется в виде прямой суммы подпространств симметричных и антисимметричных билинейных форм.

26 Как могут быть найдены коэффициенты билинейной формы?

Определение 2.1. Коэффициентами β_{ij} билинейной формы $b(x,y)$ называются значения этой линейной формы на базисных векторах пространства.

$$b(e_i, e_j) = \beta_{ij}$$

27 Как устанавливается изоморфизм между пространством билинейных форм и пространством матриц?

Лемма 2.1. *Пространство билинейных форм* $\mathrm{Bil}_{\mathbb{K}}(V)$ *изоморфно пространству квадратных матриц* $M_n(\mathbb{K})$.

Доказательство. Изоморфизм устанавливается следующим образом:

$$\begin{gathered} b \leftrightarrow B \qquad b' \leftrightarrow B' \\ b + b' \leftrightarrow B + B' \\ \lambda b \leftrightarrow \lambda B \end{gathered}$$

28 Какое свойство определяет матрицу, соответствующую симметричной форме?

29 Какое свойство определяет матрицу, соответствующую антисимметричной форме?

Замечание 2.2. Матрица симметричной (антисимметричной) билинейной формы является симметричной (антисимметричной).

$$b^S \leftrightarrow B_S \qquad B_S = B_S^T$$
$$b^{AS} \leftrightarrow B_{AS} \qquad B_{AS} = -B_{AS}^T$$

В силу того, что матрица билинейной формы определяется как объект, зависящий от выбора базиса, то и смена базиса должна приводить к изменению матрицы билинейной формы. Действительно аналогичную ситуацию мы опять же уже встречали на примере строки коэффициентов линейной формы.

30 Запишите закон преобразования матрицы билинейной формы при преобразовании базиса?

Теорема 2.2. *Матрицы B и B' билинейной формы $b(x, y)$, заданные в базисах $\{e_i\}_{i=1}^n$ и $\{e'_j\}_{j=1}^n$ связаны соотношением*

$$B' = C^T BC,$$

где $C = (c_j^i)$ - матрица перехода от базиса $\{e_i\}_{i=1}^n$ к базису $\{e'_j\}_{j=1}^n$.

31 Какое отображение называется квадратичной формой?

Определение 3.1. Квадратичной формой на линейном пространстве V называется отображение $q(v)$, построенное из билинейной формы $b(x, y)$ следующим образом:

$$q : V \to \mathbb{K}, \qquad q(v) = b(v, v), \qquad \forall x \in V$$

32 Что такое однородный полином степени два и как он связан с квадратичной формой?

Лемма 3.1. *Квадратичная форма является однородным полиномом степени 2 от координат вектора.*

33 Как выглядит квадратичная форма, построенная по антисимметричной билинейной форме?

Замечание 3.3. Любой антисимметричной билинейной форме соответствует нулевая квадратичная форма.

34 Как определяется матрица квадратичной формы?

Замечание 3.4. Полагая, что билинейная форма описывается матрицей с коэффициентами β_{ij}, квадратичную форму можно также представить в виде:

$$q(v) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} v^i v^j = \sum_{i=1}^{n} \beta_{ii} (v^i)^2 + 2 \sum_{i<j} \beta_{ij} v^i v^j,$$

где v^i – i-я координата вектора v в выбранном базисе.

35 Дайте определение полилинейной формы.

Определение 1.1. **Полилинейной формой** на линейном пространстве $V(\mathbb{K})$ назовем отображение вида

$$\mathcal{A} : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{p} \times \underbrace{V^* \times \ldots \times V^*}_{q} \to \mathbb{K}$$

обладающее линейностью по каждому из аргументов

$$\mathcal{A}(x_1, \ldots, \alpha x_i' + \beta x_i'', \ldots, x_p; \varphi^1, \ldots, \varphi^q) =$$
$$= \alpha \mathcal{A}(x_1, \ldots, x_i', \ldots, x_p; \varphi^1, \ldots, \varphi^q) + \beta \mathcal{A}(x_1, \ldots, x_i'', \ldots, x_p; \varphi^1, \ldots, \varphi^q),$$

где $x_i \in V$ и $\varphi^j \in V^*$.

36 Что такое валентность полилинейной формы? Поясните обозначения.

Определение 1.2. **Валентностью** полилинейной формы называют пару чисел (p, q), определяющих количество векторов и ковекторов (линейных форм), являющихся аргументами данного отображения.

37 Какой валентностью обладает скалярное произведение векторов как полилинейная форма?

Пример 1.3. Билинейные формы над V — это отображения вида

$$g : V \times V \to \mathbb{K}$$

Таким образом, билинейная форма — это ПЛФ валентности $(2, 0)$. Примером билинейной формы служит скалярное произведение двух геометрических векторов

$$g(x_1, x_2) = (x_1, x_2),$$

а такж все другие примеры билинейных форм, которые рассматривались ранее.

38 Какой валентностью обладает смешанное произведение векторов как полилинейная форма?

Пример 1.4. Можно также рассмотреть трилинейные формы как отображения вида

$$\psi : V \times V \times V \to \mathbb{K}$$

являющиеся ПЛФ валентности $(3, 0)$. Отображения такого вида встречались в геометрии — это смешанное произведение трех векторов.

39 Как определяется сумма полилинейных форм?

Определение 2.3. Отображение $\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$ будем называть суммой полилинейных форм $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, если

$$\mathcal{C}(x_1, x_2, \ldots, x_p; \varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^q) =$$
$$= \mathcal{A}(x_1, x_2, \ldots, x_p; \varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^q) + \mathcal{B}(x_1, x_2, \ldots, x_p; \varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^q)$$

для любых наборов $x_1, x_2, \ldots, x_p \in V$ и $\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^q \in V^*$.

Лемма 2.1. *Отображение $\mathcal{C}$, определенное как сумма полилинейных форм $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \Omega_q^p$ является полилинейной формой из Ω_q^p*

40 Как определяется произведение полилинейной формы на скаляр?

Определение 2.4. Отображение $\lambda\mathcal{A}$ будем называть произведением полилинейной формы $\mathcal{A}$ на скаляр λ, если

$$(\lambda\mathcal{A})(x_1, x_2, \ldots, x_p; \varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^q) = \lambda \cdot \mathcal{A}(x_1, x_2, \ldots, x_p; \varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^q)$$

для любых наборов $x_1, x_2, \ldots, x_p \in V$ и $\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^q \in V^*$.

41 Как определяется произведение полилинейных форм?

Определение 2.5. Произведением полилинейных форм $\mathcal{A} \in \Omega_{q_1}^{p_1}$ и $\mathcal{B} \in \Omega_{q_2}^{p_2}$ называют отображение $\mathcal{C} = \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$ определяемое как

$$\mathcal{A}(x_1, \ldots, x_{p_1}; \varphi^1, \ldots, \varphi^{q_1}) \cdot \mathcal{B}(x_{p_1+1}, \ldots x_{p_1+p_2}; \varphi^{q_1+1}, \ldots \varphi^{q_1+q_2}) =$$
$$= \mathcal{C}(x_1, \ldots, x_{p_1}, x_{p_1+1}, \ldots x_{p_1+p_2}; \varphi^1, \ldots, \varphi^{q_1}, \varphi^{q_1+1}, \ldots \varphi^{q_1+q_2})$$

42 Какой алгебраической структурой обладает множество полилинейных форм вместе с

операцией сложения?

Множество полилинейных форм вместе с операцией сложения образует **абелеву группу** (или коммутативную группу).

43 Какой алгебраической структурой обладает множество полилинейных форм вместе с

операциями сложения и умножения на скаляр?

Множество полилинейных форм вместе с операциями сложения и умножения на скаляр образует **векторное пространство** (или линейное пространство).

44 Обладает ли операция умножения полилинейных форм свойством коммутативности?

Поясните ответ.

Операция умножения полилинейных форм, вообще говоря, **не коммутативна**. Это означает, что для произвольных полилинейных форм f и g выполнение равенства f·g=g·f не гарантировано. Коммутативность зависит от конкретного вида полилинейных форм и их свойств. В общем случае умножение полилинейных форм не коммутативно.

45 Как может быть найден тензор полилинейной формы?

Определение 3.1. **Тензором** полилинейной формы $\mathcal{C}$ валентности (p,q) называется набор из n^{p+q} скаляров, определяемых как действие полилинейной формы на всевозможных наборах базисных векторов.

$$c_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q} = \mathcal{C}(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_p}; f^{j_1}, f^{j_2}, \dots, f^{j_q}),$$

где индексы $i_1, i_2, \dots, i_p$ и $j_1, j_2, \dots, j_q$ принимают значения $1, .., n$, где $n = \dim V$ — это размерность пространства V.

46 В чем заключается смысл немого суммирования?

Замечание о немом суммировании

Прежде чем перейдем к дальнейшим рассуждениям, отметим следующий факт. Наличие большого количества индексов в случае анализа линейных объектов нередко приводит к большому количеству суммирований как в теоретических выкладках, так и в практических приложениях тензоров. По этой причине вводится так называемое **правило суммирования Эйнштейна**, или соглашение о немом суммировании. В контексте данной темы договоримся о следующем:

(а) Если в одночлене присутствует одинаковый верхний и нижний индекс, то подразумевается суммирование по нему:

$$a^i b_i = \sum_i a^i b_i$$

(б) Индекс, по которому происходит суммирование, называют немым в силу того, что его обозначение не принципиально, т.е.

$$a^i b_i = a^j b_j = a^k b_k$$

(в) Необходимо соблюдение баланса индексов. Если индекс не является немым, то в левой и правой частях равенства должны присутствовать одни и те же индексы, а также должен быть неизменным их порядок, т.е.

$$a_{ik} b^{kl} = c_i^l$$

57 Как определяется операция свертки тензора?

Определение 2.1. Сверткой полилинейной формы $\mathcal{A} \in \Omega_q^p$ называется отображение, результатом которого является функция $\mathcal{B}$ от $p-1$ векторного аргумента и $q-1$ ковекторного аргумента, определяемая как

$$\mathcal{B}(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_p; \varphi^1, \dots, \varphi^{l-1}, \varphi^{l+1}, \dots, \varphi^q) =$$
$$= \mathcal{A}(x_1, \dots, x_{k-1}, \mathbf{e_r}, x_{k+1}, \dots, x_p; \varphi^1, \dots, \varphi^{l-1}, \mathbf{f^r}, \varphi^{l+1}, \dots, \varphi^q)$$

полагая, что в правой части производится суммирование по немому индексу r.

Полученная функция $\mathcal{B}$ является полилинейной формой в силу того, что свойства линейности индуцируются из $\mathcal{A}$.

58 Дайте определение символа Кронекера.

Определение 3.1. Символ Кронекера δ_{ij} — это дважды ковариантный тензор типа $(2,0)$, компоненты которого задаются как:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

59 Каким свойством обладает символ Кронекера?

Замечание 3.1. Символ Кронекера является симметричным в том смысле, что для него выполняется свойство:

$$\delta_{ij} = \delta_{ji}$$

60 Как записывается скалярное произведение при помощи операции свертки?

С учетом этого свойства символ Кронекера оказывается полезным при записи скалярного произведения в ДПСК:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a^i b^j g_{ij} = a^i b_i = \sum_{i=1}^{n} a^i b_i.$$

61 Дайте определение символа Леви-Чивита.

Определение 3.2. Символ Леви-Чевиты ε_{ijk} — это трижды ковариантный тензор типа $(3,0)$, компоненты которого в ДПСК задаются как:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1, & \text{если } (i,j,k) \text{ — чётная перестановка } (1,2,3), \\ -1, & \text{если } (i,j,k) \text{ — нечётная перестановка}, \\ 0, & \text{иначе (если есть повторяющиеся индексы)}. \end{cases}$$

62 Каким свойством обладает символ Леви-Чивита?

Замечание 3.3. Символ Леви-Чивиты обладает свойством:

$$\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik} = -\varepsilon_{ikj},$$

которое называют антисимметричностью тензора. Это свойство напрямую следует из определения.

63 Как записывается векторное произведение при помощи символа Леви-Чивита?

Перейдем к применению этого тензора в геометрии. Компоненты векторного произведения $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ в ДПСК выражаются через символ Леви-Чевиты:

$$c_i = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i = \varepsilon_{ijk} a^j b^k.$$

В координатной форме:

$$\mathbf{c} = \left(\varepsilon_{1jk} a^j b^k, \varepsilon_{2jk} a^j b^k, \varepsilon_{3jk} a^j b^k \right).$$

64 Запишите способ нахождения смешанного произведения при помощи символа Леви-

Чивита.

Смешанное произведение трёх векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ в $\mathbb{R}^3$:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (a^i) \cdot (\varepsilon_{ijk} b^j c^k) = \varepsilon_{ijk} a^i b^j c^k.$$

Наконец перейдем к еще одному обобщению применения символа Леви-Чивиты не только на геометрические задачи. Вспомним, что в ДПСК смешанное произведение может быть найдено при помощи определителя:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \det \begin{pmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{pmatrix},$$

но тогда можно предположить, что и определитель произвольной тройки векторов может быть найден при помощи операции свертки векторов-столбцов матрицы с символом Леви-Чивиты.

65 Как может быть найден определитель квадратной матрицы при помощи символа Леви-

Чивита?

Для квадратной матрицы $A = (A_{ij})$ размера $n \times n$ её определитель выражается как:

$$\det A = \varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} a_1^{i_1} a_2^{i_2} \ldots a_2^{i_2}$$

Учтем, что в силу соглашения Эйнштейна здесь производится суммирование по всем индексам $i_1, i_2, \ldots, i_n$, а сам символ Леви-Чивиты принимает значение только $+1$ или -1. Это приводит нас к определителю матрицы n-го порядка

$$\det A = \sum_{\sigma(1,\ldots,n)} (-1)^{[\sigma]} a_1^{i_1} a_2^{i_2} \ldots a_2^{i_2}$$

В данном случае, под σ подразумевается преобразование переупорядочивания индексов.

66 Дайте определение линейному отображению между произвольными пространствами.

Пусть $V(\mathbb{K})$ и $W(\mathbb{K})$ — линейные пространства над полем $\mathbb{K}$.

)пределение 1.1. Отображение $\varphi : V \to W$ линейного пространства V в инейное пространство W называется линейным, если $\forall x, x_1, x_2 \in V, \forall \alpha \in \mathbb{K}$ ыполяются следующие свойства

$$\varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2), \qquad \varphi(\alpha x) = \alpha \varphi(x)$$

67 Что называется линейным отображением растяжения?

(в) Растяжение:

$$\varphi\colon V \to V \qquad \varphi x = \lambda x, \qquad \forall x \in V$$

68 Запишите матрицу тождественного отображения.

(б) Тождественное отображение

$$\mathcal{I} \to E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

69 Какой вид имеет матрица проектирования на подпространство параллельно его прямому дополнению?

(в) Матрица проектора на V_1, если $V = V_1 \oplus V_2$, найденная в базисе, согласованном с обоими подпространствами

$$\mathcal{P}_{V_1}^{\|V_2} \to P_1 = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & \Theta \end{pmatrix}$$

так как

$$\mathcal{P}_{V_1}^{\|V_2} x = x, \qquad \mathcal{P}_{V_1}^{\|V_2} x = 0, \qquad \forall x \in V_1$$

70 Какой вид имеет матрица оператора растяжения на λ ∈ K

Матрица оператора растяжения (или гомотетии) на коэффициент $\lambda \in K$ (где K — поле, например, $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) имеет вид:

$$A = \lambda I,$$

где I — единичная матрица соответствующего размера. То есть, матрица A является диагональной, и все её диагональные элементы равны λ:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}.$$

71 Как может быть найдена матрица линейного отображения?

Матрица линейного отображения находится следующим образом:

1. Выбрать базисы в пространствах V и W.
2. Применить отображение к базисным векторам V и выразить результат через базис W.
3. Коэффициенты разложения записать в столбцы матрицы.

Матрица имеет размер $m \times n$, где $n = \dim(V)$, $m = \dim(W)$.

72 Покажите как найти координаты образа вектора относительно линейного отображения, если оно задано матрицей.

?????????????

73 Какой алгебраической структурой наделено множество линейных отображений с введенными операциями сложения и умножения на скаляр?

Множество линейных отображений HomK(X,Y)Hom*K*(*X*,*Y*) (где X*X* и Y*Y* — векторные пространства над полем K*K*) с операциями сложения и умножения на скаляр образует **векторное пространство** над полем K*K*.

74 Какому матричному пространству изоморфно множество HomK(X,Y). Поясните введенные обозначения.

Какому матричному пространству изоморфно множество $\mathrm{Hom}_K(X,Y)$? Поясните введённые обозначения.

Ответ:
Множество линейных отображений $\mathrm{Hom}_K(X,Y)$ изоморфно пространству матриц $M_{m\times n}(K)$, где:

- $n = \dim(X)$ — размерность пространства X,
- $m = \dim(Y)$ — размерность пространства Y,
- K — поле, над которым определены пространства X и Y.

Пояснение обозначений:

- $\mathrm{Hom}_K(X,Y)$ — это множество всех линейных отображений из X в Y.
- $M_{m\times n}(K)$ — это множество всех матриц размера $m \times n$ с элементами из поля K.

75 Что такое композиция линейных отображений?

Композиция линейных отображений — это последовательное применение двух отображений, результатом которого является новое линейное отображение. Она выражается через произведение матриц, если отображения заданы матрицами.

76 Как найти матрицу линейного отображения, если оно задано как композиция отображений ф и ψ?

Матрица композиции линейных отображений $\psi \circ \phi$ равна произведению матриц $B \cdot A$, где B — матрица ψ, а A — матрица ϕ.

77 Запишите закон преобразования матрицы линейного отображения при замене базиса.

Теорема 4.1. *Матрица оператора при замене базисов преобразуется как*

$$A'_\varphi = S^{-1} A_\varphi T$$