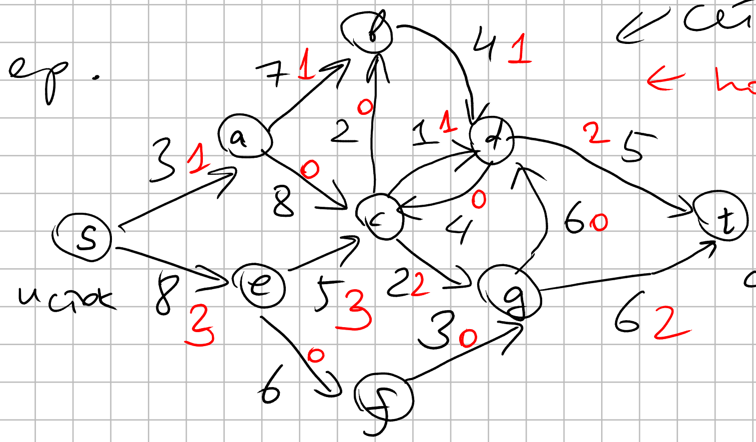
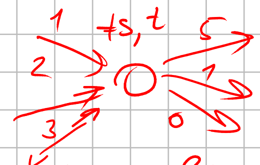
Потоки в сетях

Пример.



← сеть, чёрные c

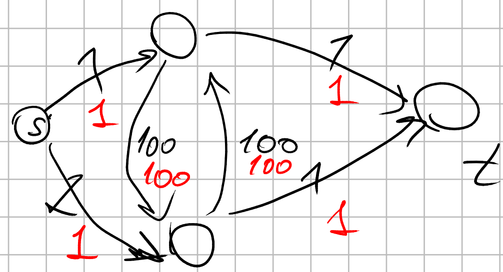
← поток, красные f



вход = выход

$$0 \le f(e) \le c(e)$$

Пример.



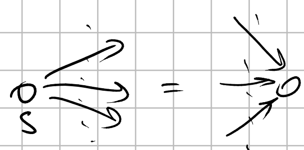
— поток корректный

Величина потока в примере 1: 4, в примере 2: 2

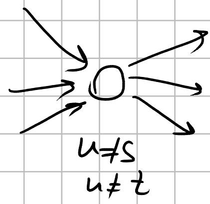
Th. Дана сеть (G, c), $G = (V, E)$, поток f на G.

Тогда

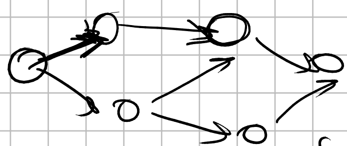
$$\sum_{u:\, e=(s,u)} f(e) = \sum_{u:\, e=(u,t)} f(e)$$



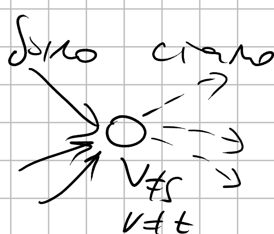
рассмотрим $\sum_{e\in E} f(e) = \sum_{v\in V} \sum_{e:\, e=(u,v)} f(e) =$



$$= \underbrace{\sum_{e:\, e=(u,s)} f(e)}_{0} + \sum_{e:\, e=(u,t)} f(e) +$$



$+ \sum_{v\in V\setminus\{s,t\}} \sum_{e:\, e=(u,v)} f(e) =$ вытекает +



$\sum_{v\in V\setminus\{s,t\}} \sum_{e:\, e=(v,u)} f(e) =$ вытекает +

$$\sum_{v\in V}\sum_{e:e=(v,u)} f(e) - \sum_{e:e=(s,u)} f(e) - \sum_{e:e=(t,u)} f(e) =$$

$=$ вытекает $+ \sum_{v\in V}\sum_{e:e=(v,u)} f(e) -$ втекает $- 0 =$

$=$ вытекает $-$ втекает $+ \sum_{e\in E} f(e)$

$\Rightarrow \cancel{\sum_{e\in E} f(e)} =$ вытекает $-$ втекает $\cancel{+ \sum_{e\in E} f(e)}$

$\Rightarrow$ вытекает $=$ втекает

$$\sum_{e:e=(u,t)} f(e) = \sum_{e:e=(s,u)} f(e)$$

размер потока

$w(f)$

Опр. Эта величина называется величиной (размер) потока.

Определение

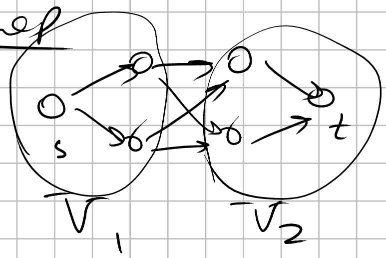
Разрез в сети (G, c). $G = (V, E)$

Разрез $C = (V_1, V_2)$

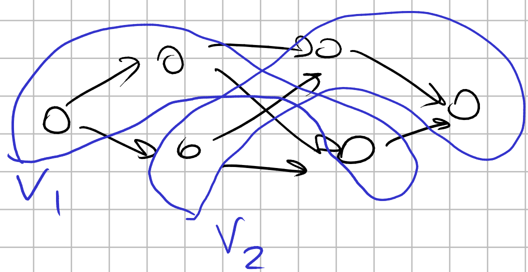
$s \in V_1 \quad t \in V_2 \quad V_1 \cup V_2 = V$

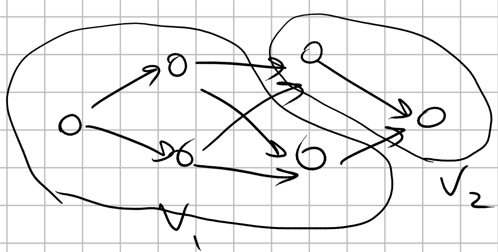
$V_1 \cap V_2 = \emptyset$

Пример



или



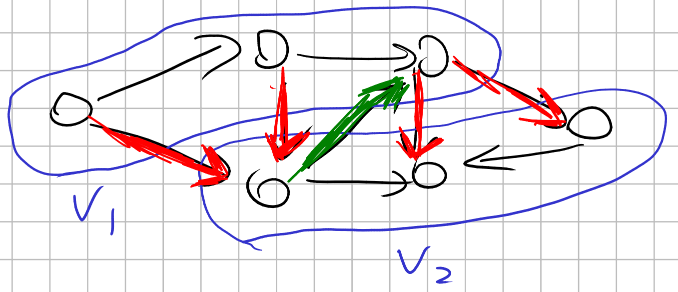


Определение. E_C — рёбра разреза: это все рёбра, которые идут из V_1 в V_2 или наоборот.

E_C^+ — прямые рёбра разреза (из V_1 в V_2)

E_C^- — обратные рёбра разреза (V_2 в V_1)

Пример



→ обратное E_c^-

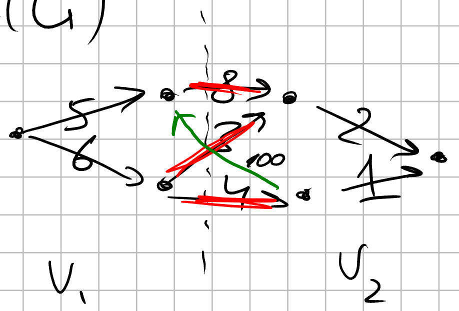
→ прямое E_c^+

$$E_c = E_c^- \cup E_c^+$$

Определение. Величина разреза $= \sum_{e \in E_c^+} c(e)$

Обозначение $c(C)$

Например.



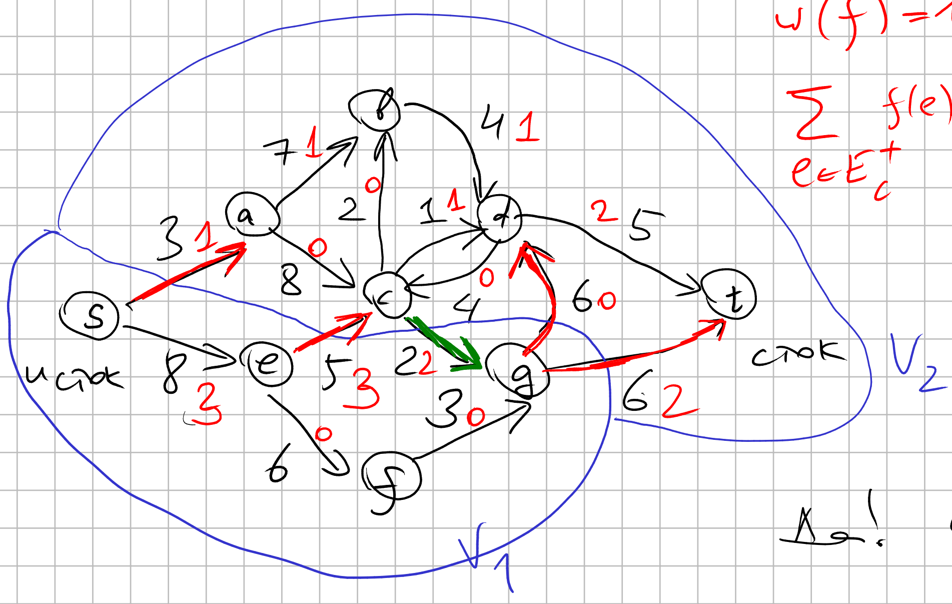
$C = (V_1, V_2)$

$c(C) = 8 + 3 + 4 = 15$

Утв. Пусть есть сеть (G, c), $G = (V, E)$, поток f, разрез $C = (V_1, V_2)$

Тогда $w(f) = \sum_{e \in E_c^+} f(e) - \sum_{e \in E_c^-} f(e)$

Пример.



$w(f) = 1 + 3 = 2 + 2 = 4$

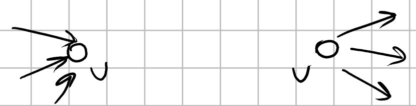
$\sum_{e \in E_c^+} f(e) = 1 + 3 + 0 + 2 = 6$

$\sum_{e \in E_c^-} f(e) = 2$

Да! $4 = 6 - 2$

посещаемость. — как обычно, мертво, PSg

Посчитаем сумму $\sum\limits_{v\in V_1}\left(-\sum\limits_{e:\, e=(u,v)} f(e) + \sum\limits_{e:\, e=(v,u)} f(e)\right) =$



$=$ 1) для $\forall v\in V_1\setminus\{s\}$ внутренняя $\Sigma-\Sigma=0$.

для $v=s$ получается $\underline{w(f)} = \sum\limits_{e:\, e=(s,u)} f(e)$

2) $$\sum_{\substack{e=(u,v)\\ u\in V_1,\, v\in V_1}} \big(f(e)-f(e)\big) + \underbrace{\sum_{e\in E_C^+} f(e) + \sum_{e\in E_C^-}\big[-f(e)\big]}_{\text{см. условие}} =$$

$= 0 +$ величина из условия. ∎

<u>Обозначение</u> $w(C,f)$ — величина (размер) потока через разрез

$$= \sum_{e\in E_C^+} f(e) - \sum_{e\in E_C^-} f(e).$$

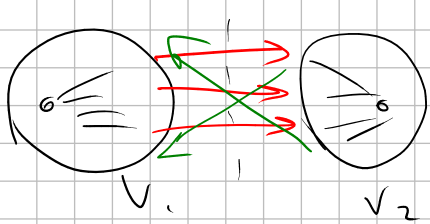
<u>Замечание</u> $\forall C$ $w(f) = w(C,f)$ — по Теореме.

<u>Замечание</u>. Будем решать задачу о максимальном потоке в сети, т.е. найти f: $w(f)\to\max$

<u>Утв.</u> <u>Дано</u> G, c — сеть, C — разрез.

Тогда $w(f)\le c(C)$.

<u>Д-во</u>



$$w(f) = w(C,f) = \sum_{e\in E_C^+} f(e) - \sum_{e\in E_C^-} f(e) \le$$

$(\le)$ $\sum\limits_{e\in E_C^+} f(e) \le \sum\limits_{e\in E_C^+} c(e) = c(C) \Rightarrow w(f) \le c(C)$

Следствие: В сети G $w(f_{max}) \le c(C_{min})$.

где $w(f_{max}) = \max\limits_{f\text{-поток}} w(f)$ $\qquad c(C_{min}) = \min\limits_{C\text{-разрез}} c(C)$

Th. Форда-Фалкерсона. $\underline{w(f_{max}) = c(C_{min})}$

в сети (G,c), $G = (V,E)$, $c(e)\in\mathbb{N}$

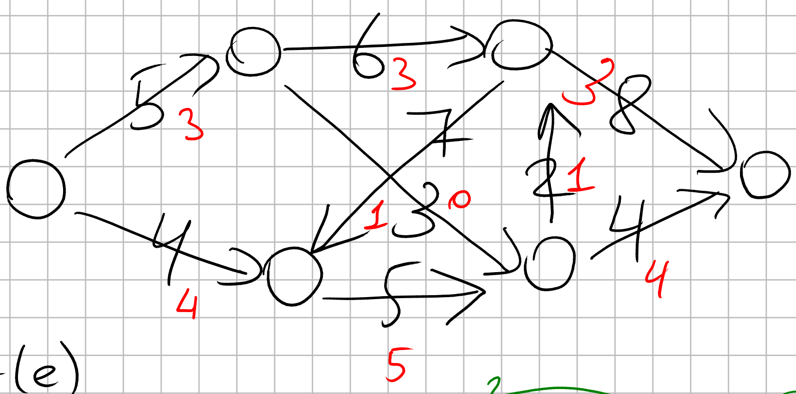
для простоты считаем, что пропускные способности целые

Опр. Дополнительный граф для потока.

$\overline{G}$ имеет $\overline{V} = V$

$\overline{E}$:

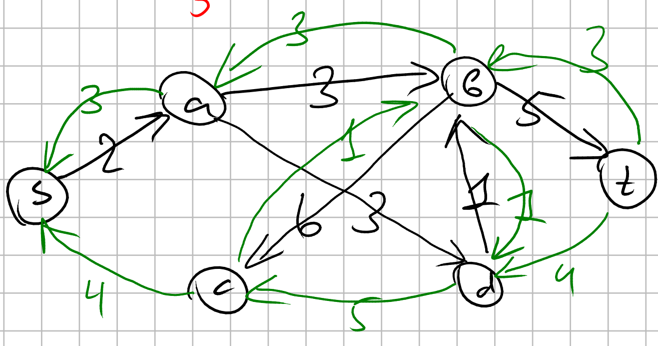
если $f(e) < c(e)$
$e = (u,v)$
то есть $e' = (u',v')$
$g(e') = c(e) - f(e)$



если $0 < f(e)$ $e = (u,v)$

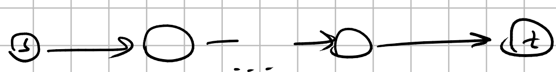
то есть $e'' = (v',u')$

$g(e'') = f(e)$



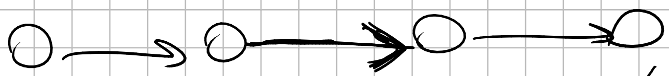
Д-во. Начнём с 0-го потока и будем его постепенно увеличивать.

Построим доп. граф $\overline{G}$ и найдем в нём путь из s в t.



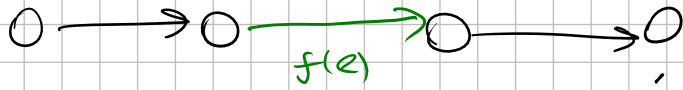
Найдем $\min g(e)$ на этом пути. $\exists$ это x

Вычтем в доп. графе $-x$ на каждом ребре:



1) $c(e) - f(e)$
$\to c(e) - f(e) - x$

$(f'(e) := f(e) + x)$



2) $f(e) - x$

$f'(e) := f(e) - x$

Поймем, что 1) новый поток f' остался потоком.

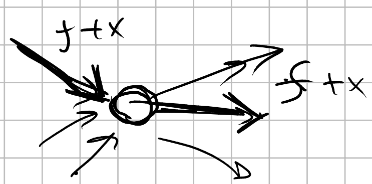
2) Величина потока увеличилась на x.

Проверим, что это поток. $0 \le f'(e) \le c(e)$

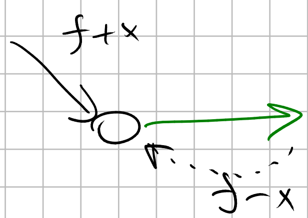
уменьшаем по обратному
увеличиваем по прямому
$c(e) - (f(e) + x) \ge 0$

В вершинах верно $\sum$ вход $= \sum$ исх.

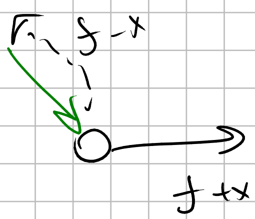
1)



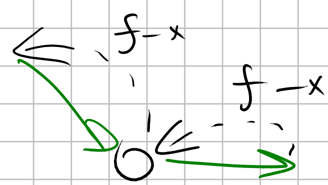
2)



3)



4)



Итого f' — поток.