



UNIVERSIDAD
POLITÉCNICA
DE MADRID



INSTITUTO UNIVERSITARIO DE MICROGRAVEDAD “IGNACIO DA RIVA”
ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA AERONÁUTICA Y DEL ESPACIO

MASTER UNIVERSITARIO EN SISTEMAS ESPACIALES
CURSO 2018-2019

Ampliación de Matemáticas 2

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias con Fortran

Borja del Campo López
Imanol Sardón Delgado

8 de abril de 2019

Índice

1. Introducción	2
2. Esquemas temporales	2
2.1. Prince-Dormand 78	2
2.2. Adams-Bashforth-Moulton	2
2.3. Gragg-Bulirsch-Stoer	2
3. Estabilidad de los puntos de Lagrange	3
3.1. Obtención de los puntos de Lagrange	3
3.2. Órbitas alrededor de los puntos de Lagrange	3
3.3. Comparación de resultados con GMAT	7
4. Conclusiones	11
5. Bibliografía	11

Índice de figuras

1. Órbita alrededor del punto de Lagrange L1.	4
2. Órbita alrededor del punto de Lagrange L2.	4
3. Órbita alrededor del punto de Lagrange L3.	4
4. Órbita alrededor del punto de Lagrange L4.	5
5. Órbita alrededor del punto de Lagrange L5.	5
6. Órbita alrededor del punto de Lagrange L1.	6
7. Órbita alrededor del punto de Lagrange L2.	6
8. Órbita alrededor del punto de Lagrange L3.	6
9. Órbita alrededor del punto de Lagrange L4.	7
10. Órbita alrededor del punto de Lagrange L5.	7
11. Órbita alrededor del punto de Lagrange L1 con GMAT	8
12. Evolución temporal de la distancia del punto perturbado al punto L1	8
13. Órbita alrededor del punto de Lagrange L2 con GMAT	8
14. Evolución temporal de la distancia del punto perturbado al punto L2	9
15. Órbita alrededor del punto de Lagrange L3 con GMAT	9
16. Evolución temporal de la distancia del punto perturbado al punto L3	9
17. Órbita alrededor del punto de Lagrange L4 con GMAT	10
18. Evolución temporal de la distancia del punto perturbado al punto L4	10
19. Órbita alrededor del punto de Lagrange L5 con GMAT	10
20. Evolución temporal de la distancia del punto perturbado al punto L5	11

Índice de tablas

1. Autovalores de la matriz jacobiana del sistema	3
2. Tiempos de integración del problema	3

1. Introducción

En este informe se pretende continuar el trabajo realizado en el anterior cuatrimestre para la parte de programación de la asignatura Ampliación de Matemáticas 2.

En primer lugar, se va a profundizar en la parte de esquemas temporales, donde se van a describir el Prince-Dormand 78, el Adams-Bashforth-Moulton y el Gragg-Bulirsch-Stoer. Dado que se está empleando el lenguaje de programación Fortran, se han buscado los códigos correspondientes a estos esquemas temporales en Internet para adaptarlos a la programación realizada previamente para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias con condiciones iniciales numéricamente. Para ello, se han realizado los respectivos *wrappers* que permiten usar los argumentos de entrada que se venían usando en el trabajo del cuatrimestre anterior.

El otro tema en el que se va a profundizar es la estabilidad de los Puntos de Lagrange. Estos se volverán a calcular, y se obtendrán las órbitas alrededor de estos puntos de equilibrio en el que se perturbarán las condiciones iniciales para comprobar su estabilidad. Finalmente, se compararán los resultados obtenidos mediante Fortran con los datos proporcionados por el software de cálculo de órbitas GMAT.

2. Esquemas temporales

2.1. Prince-Dormand 78

El algoritmo Prince Dormand 78 es un esquema temporal Runge-Kutta embebido 78 que utiliza dos predicciones del vector de estado para estimar el error local y adaptar el paso temporal en consecuencia. La principal ventaja asociada a este método es la gran robustez que presenta mientras que la desventaja que tiene el método es el alto coste computacional.

Después de la búsqueda en Internet se ha conseguido localizar el Prince Dormand 78, también llamado DOPRI853. El código encontrado estaba escrito en la versión de Fortran de 2003 por lo que la creación del *wrapper* no ha sido demasiado problemática.

2.2. Adams-Bashforth-Moulton

El Adams-Bashforth-Moulton es un método lineal multipaso de paso variable y orden variable. A diferencia de los métodos de un solo paso que solo usan la información del punto inmediatamente anterior, como el de Euler, los de tipo multipaso utilizan información de varios puntos anteriores y de sus derivadas. Este método emplea dos fórmulas: un Adams-Bashforth predictor y un Adams-Moulton corrector. Con estos dos métodos se configura el estimador de Milne que permite obtener el error local. Una vez se conoce este error, se valida el paso temporal, es decir, se determina si el paso elegido es suficientemente pequeño para alcanzar la precisión requerida y lo suficientemente grande como para evitar operaciones innecesarias y que aumentan el tiempo de cálculo. Este método presenta la ventaja frente a los integradores Runge-Kutta de ser menos pesado computacionalmente.

El algoritmo Adams-Bashforth-Moulton u ODE113 se ha obtenido de Internet. El código que se ha encontrado está escrito en Fortran 77. Esto ha supuesto una dificultad añadida ya que ha habido que acondicionar el código poder utilizarlo (teniendo en cuenta una sintaxis diferente propia de código antiguo), además de crear su correspondiente *wrapper*.

2.3. Gragg-Bulirsch-Stoer

El método Gragg-Bulirsch-Stoer es un integrador tipo leapfrog simpléctico. El método leapfrog se emplea para integrar ecuaciones en las que la aceleración depende de una función de la posición únicamente, como es el caso del problema de los n cuerpos. Este método se basa en el intercalado en el cálculo de la posición y la velocidad en los puntos en los que se ha discretizado el dominio temporal, de ahí su denominación. El hecho de que se trate de un método simpléctico supone una ventaja muy importante para el problema que se quiere abordar, es decir, el problema de los n cuerpos. Esto hace que, aunque la energía del sistema no se conserve completamente tenga mucha estabilidad, por lo que es ideal para tiempos largos de integración.

Este algoritmo se denomina también ODEX y se ha encontrado una versión en Internet escrita en Fortran 77. Se han encontrado los mismos problemas de acondicionamiento del código ya descritos en el apartado del método Adams-Bashforth-Moulton para poder crear el *wrapper*.

3. Estabilidad de los puntos de Lagrange

3.1. Obtención de los puntos de Lagrange

Similarmente a como se ha hecho en el trabajo del primer cuatrimestre, la obtención de los puntos de Lagrange se ha realizado empleando el algoritmo Newton-Rhapson. Se han tomado las ecuaciones del problema de los tres cuerpos restringido y se han obtenido los ceros del sistema de ecuaciones mediante el Newton-Rhapson. Para hallar todos los puntos de Lagrange se varían las condiciones iniciales en posición del sistema de ecuaciones (las condiciones iniciales en velocidad son nulas) de tal manera que estas sean del orden de las coordenadas del punto concreto que se quiere obtener. Una vez se tienen los cinco ceros del sistema se han comparado con las posiciones conocidas de los puntos de Lagrange a modo de comprobación.

3.2. Órbitas alrededor de los puntos de Lagrange

A continuación se representarán las órbitas de los puntos de Lagrange perturbados alrededor de los puntos originales. Para comprobar la estabilidad de dichos puntos se van a seguir los siguientes pasos:

1. Reducción del sistema de orden n a n ecuaciones de orden 1.
2. Linealización mediante desarrollos en serie de potencias alrededor del punto de Lagrange correspondiente.
3. Obtención de los autovalores de la matriz jacobiana del sistema

Dependiendo del valor de la parte real de estos autovalores se obtendrá el carácter de estabilidad de los diferentes puntos. Si todos tienen parte real negativa, el punto es asintóticamente estable; si alguno tiene parte real positiva, el punto es inestable; y si alguno tiene parte real nula y los demás tienen parte real negativa, el punto es marginalmente estable.

En la siguiente tabla se muestran los autovalores de la matriz jacobiana del sistema correspondientes a cada punto de Lagrange.

Tabla 1: Autovalores de la matriz jacobiana del sistema

	L1	L2	L3	L4	L5
λ_1	$2.08+0i$	$-1.79+0i$	$-0.15 \cdot 10^{-4} - 1.01i$	$-0.19 \cdot 10^{-4} - 0.98i$	$-0.26 \cdot 10^{-4} - 0.98i$
λ_2	$-2.08+0i$	$1.79+0i$	$-0.15 \cdot 10^{-4} + 1.01i$	$-0.19 \cdot 10^{-4} + 0.98i$	$-0.26 \cdot 10^{-4} + 0.98i$
λ_3	$-0.52 \cdot 10^{-4} - 2.26i$	$0.57 \cdot 10^{-4} - 2.10i$	$0.16+0i$	$0.19 \cdot 10^{-4} - 0.24i$	$0.26 \cdot 10^{-4} - 0.24i$
λ_4	$-0.52 \cdot 10^{-4} + 2.26i$	$0.57 \cdot 10^{-4} + 2.10i$	$-0.16+0i$	$0.19 \cdot 10^{-4} + 0.24i$	$0.26 \cdot 10^{-4} + 0.24i$
λ_5	$0-2.09i$	$0-1.90i$	$0-1.01i$	$0-i$	$0-i$
λ_6	$0+2.09i$	$0+1.90i$	$0+1.01i$	$0+i$	$0+i$

Además de esta comprobación, se representan gráficamente las órbitas de puntos ligeramente perturbados respecto a los puntos críticos en las figuras de 1 a 5 para tiempos de integración de cada órbita recogidos en la tabla 2. En las figuras se podrá apreciar cómo en aquellos estables el movimiento tenderá a la posición de equilibrio mientras que en los inestables el movimiento será divergente. En las siguientes gráficas se muestran estas órbitas para los cinco puntos de Lagrange, calculadas mediante la resolución directa del problema de los tres cuerpos restringido y mediante la linealización de dicho problema.

Tabla 2: Tiempos de integración del problema

	L1	L2	L3	L4	L5
t_f	π	π	2π	10π	10π

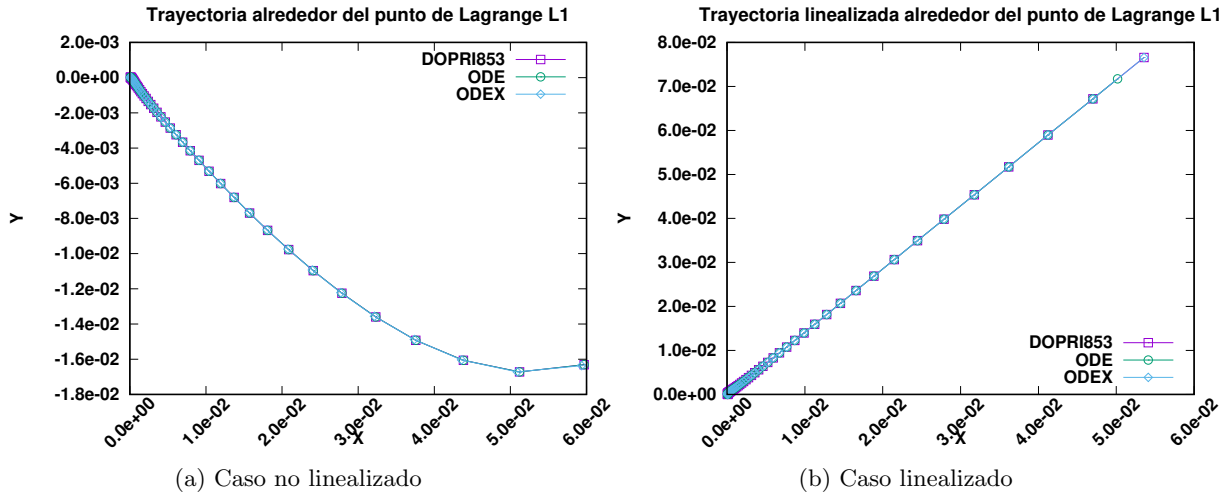


Figura 1: Órbita alrededor del punto de Lagrange L1.

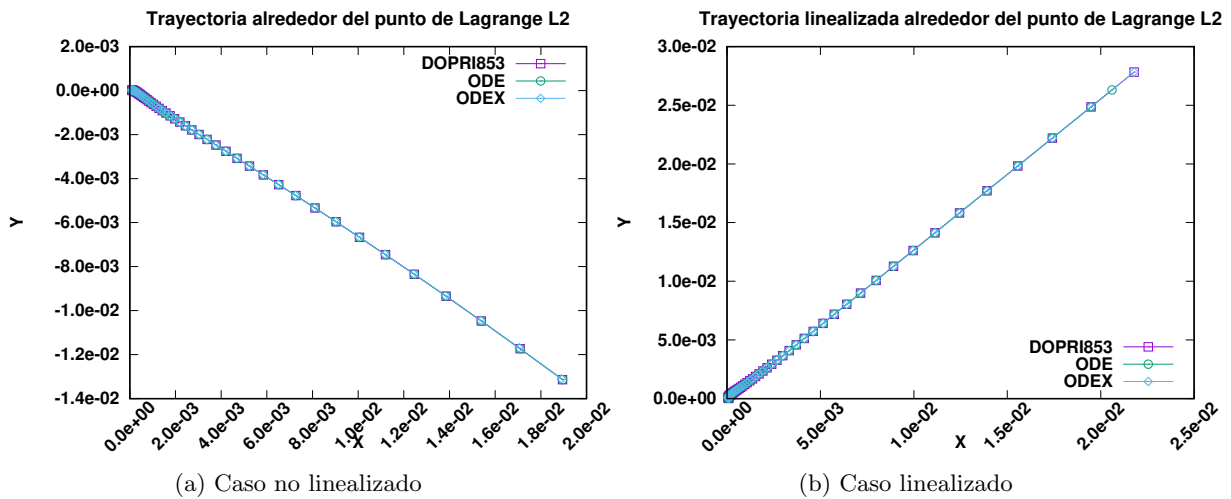


Figura 2: Órbita alrededor del punto de Lagrange L2.

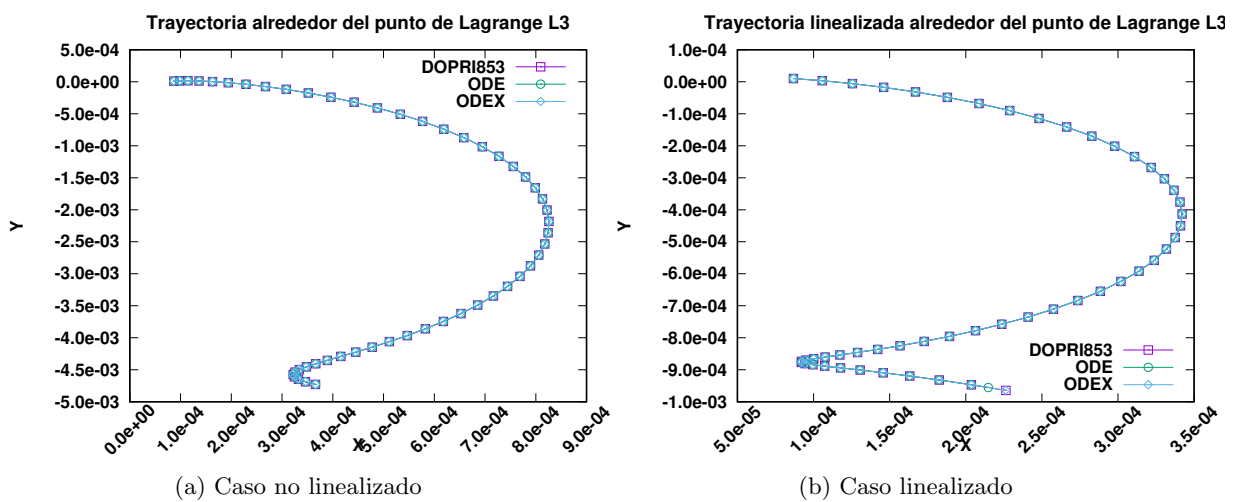


Figura 3: Órbita alrededor del punto de Lagrange L3.

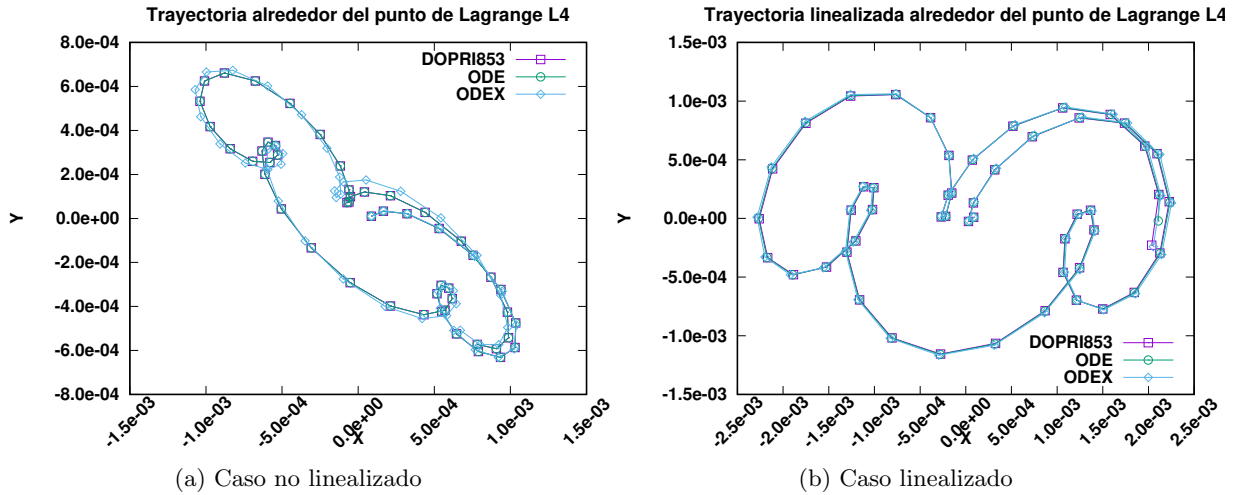


Figura 4: Órbita alrededor del punto de Lagrange L4.

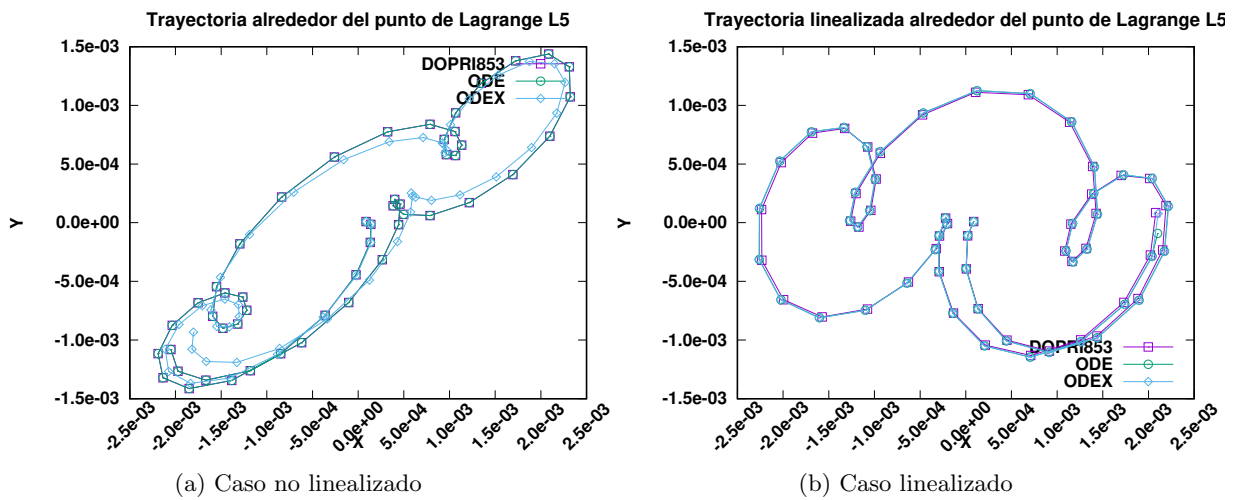


Figura 5: Órbita alrededor del punto de Lagrange L5.

Tanto en estas figuras como en la Tabla 1 se puede reconocer el carácter de estabilidad de cada uno de los puntos de Lagrange, obteniéndose que los puntos L1, L2 y L3 son inestables mientras que L4 y L5 son estables, ya que la órbitas no divergen.

En las gráficas se observa que, para las órbitas propagadas del problema sin linealizar, los puntos inestables con los esquemas temporales *dopri853*, *ode(113)*, *odex* se ajustan con bastante fidelidad, mientras que para los puntos estables, pese a conservar cierta consistencia en la forma, se observa a simple vista que los resultados son distintos. La estabilidad del problema se vuelve a comprobar en las soluciones del problema linealizado donde los puntos inestables escapan de sus puntos críticos y los estables actúan como centros.

Los errores cometidos entre los distintos esquemas se muestra en las Figuras de 6 a 10. La diferencia entre los esquemas *dopri853* y *ode* es mucho menor que la del esquema *odex* para el problema no linealizado. Esta tendencia se invierte en el caso linealizado, donde se observan grandes diferencias del esquema *ode* frente al resto. Debido a los distintos tiempos de integración empleados para cada caso, no se aprecia el comportamiento oscilatorio del error en los puntos L1 y L2, mientras que para los puntos L4 y L5 del problema linealizado se ve que el error entre los métodos oscila a una frecuencia similar con una amplitud creciente con el tiempo y una desfase entre los dos casos.

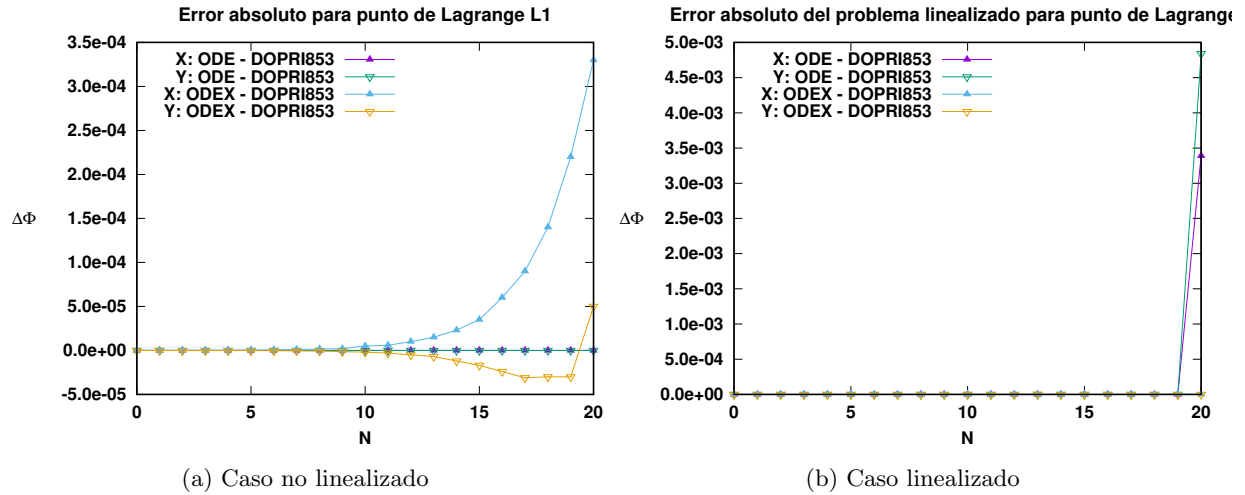


Figura 6: Órbita alrededor del punto de Lagrange L1.

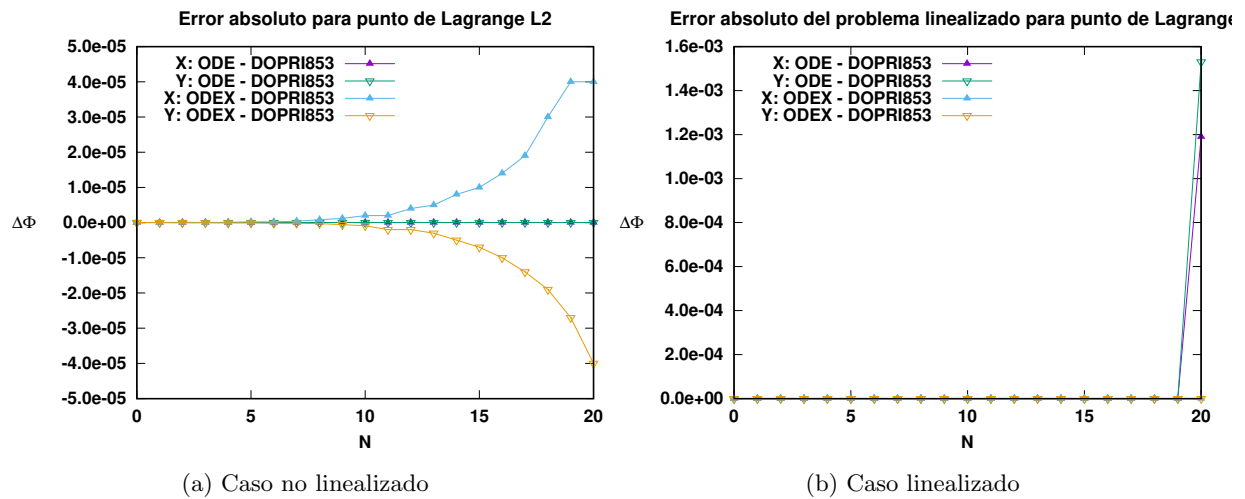


Figura 7: Órbita alrededor del punto de Lagrange L2.

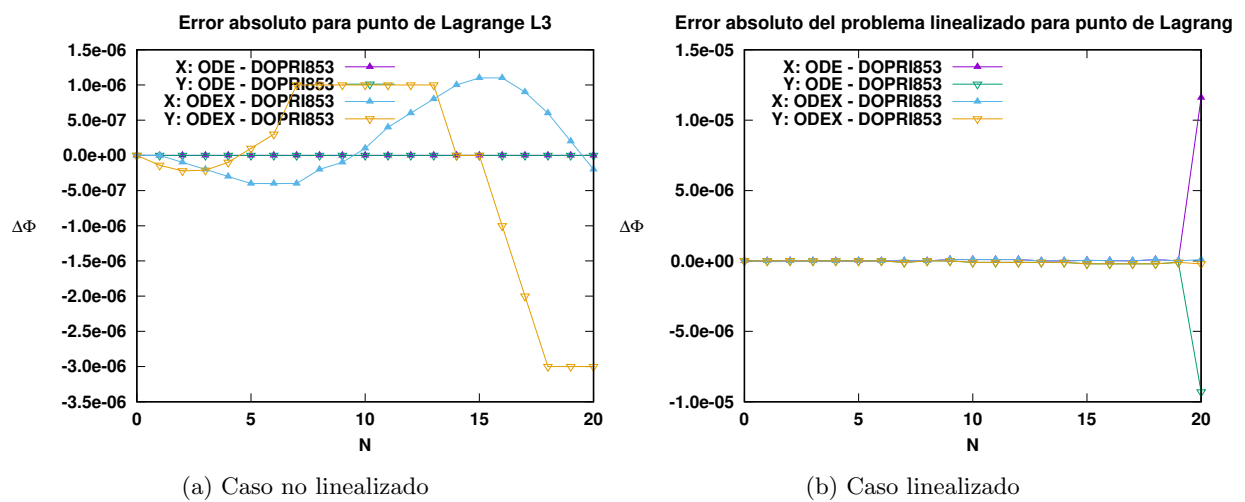


Figura 8: Órbita alrededor del punto de Lagrange L3.

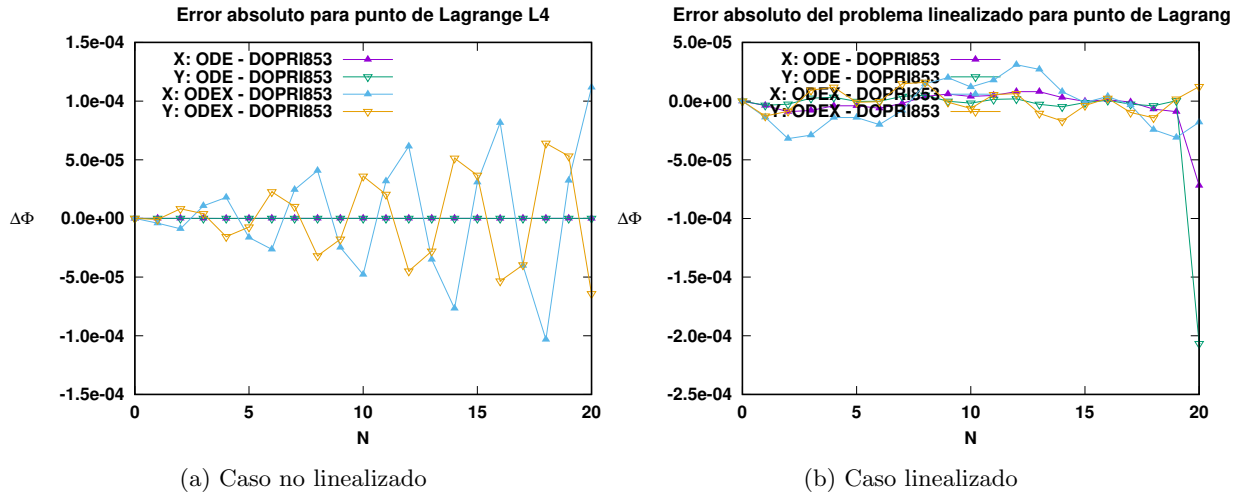


Figura 9: Órbita alrededor del punto de Lagrange L4.

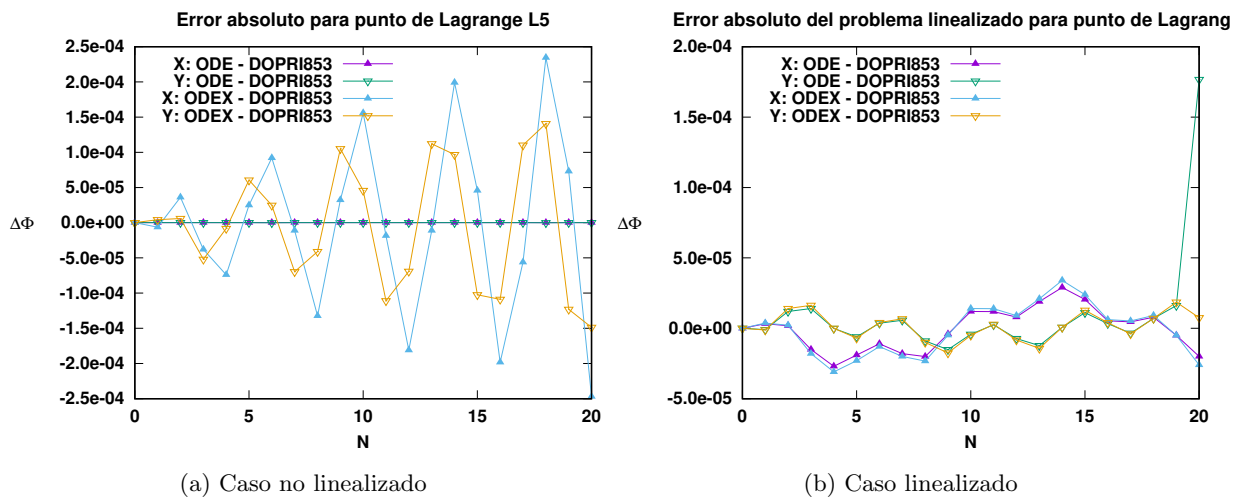


Figura 10: Órbita alrededor del punto de Lagrange L5.

3.3. Comparación de resultados con GMAT

En este apartado se han calculado las órbitas resultantes de perturbar los puntos de Lagrange mediante el software GMAT. Esta perturbación consiste en desviar la posición de dichos puntos de Lagrange 10 km en las tres direcciones del espacio en coordenadas cartesianas, con las velocidades nulas en estas tres direcciones. Con estas condiciones se obtienen las órbitas mostradas a continuación, así como los gráficos que muestran la evolución temporal en días del módulo del radiovector que une el punto perturbado con el punto de Lagrange en kilómetros.

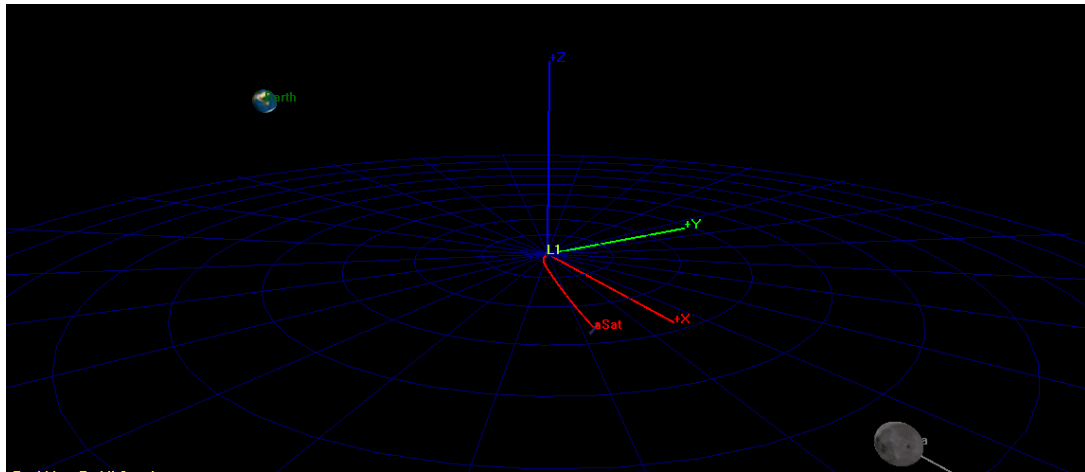


Figura 11: Órbita alrededor del punto de Lagrange L1 con GMAT

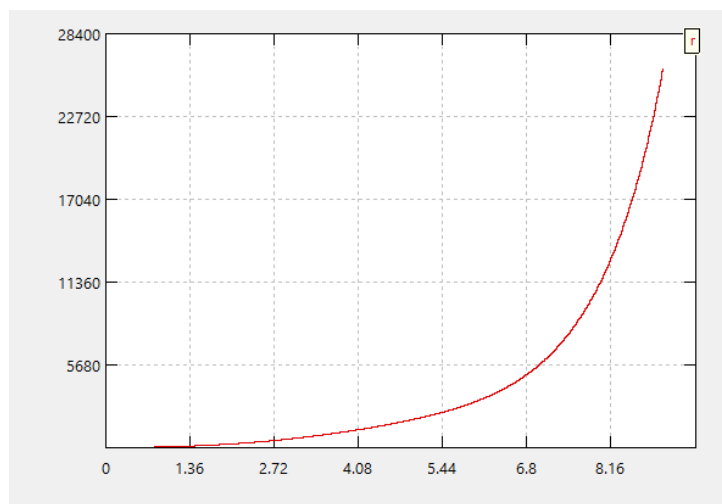


Figura 12: Evolución temporal de la distancia del punto perturbado al punto L1

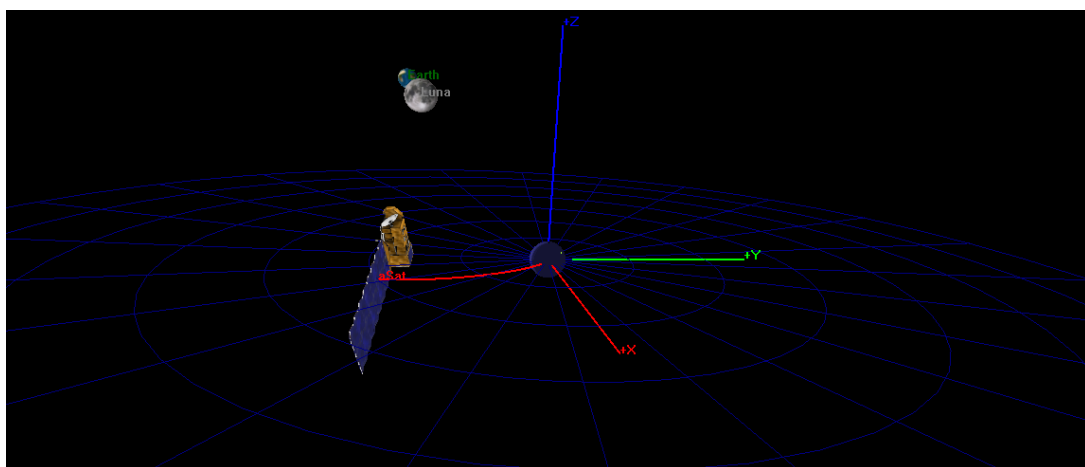


Figura 13: Órbita alrededor del punto de Lagrange L2 con GMAT

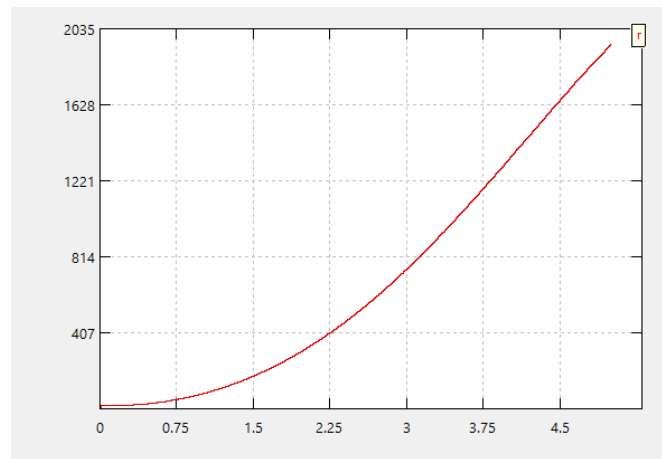


Figura 14: Evolución temporal de la distancia del punto perturbado al punto L2

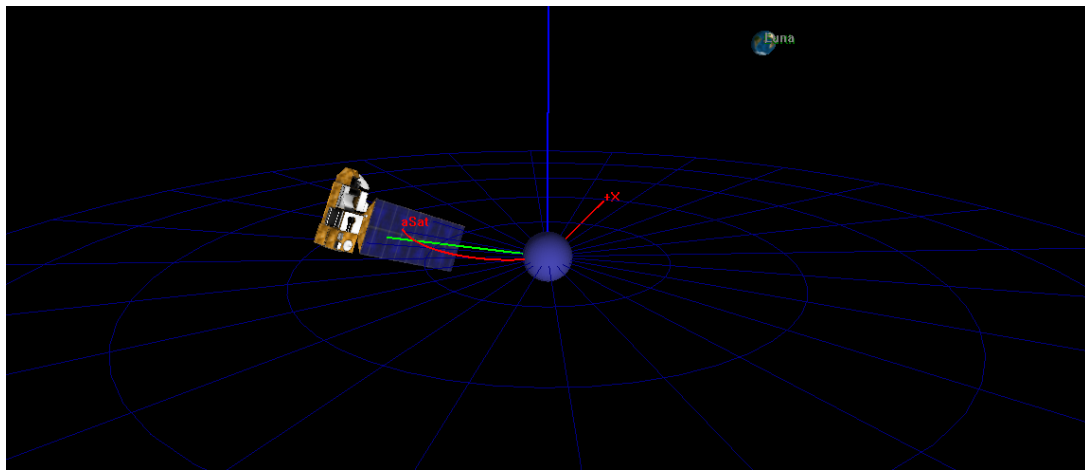


Figura 15: Órbita alrededor del punto de Lagrange L3 con GMAT

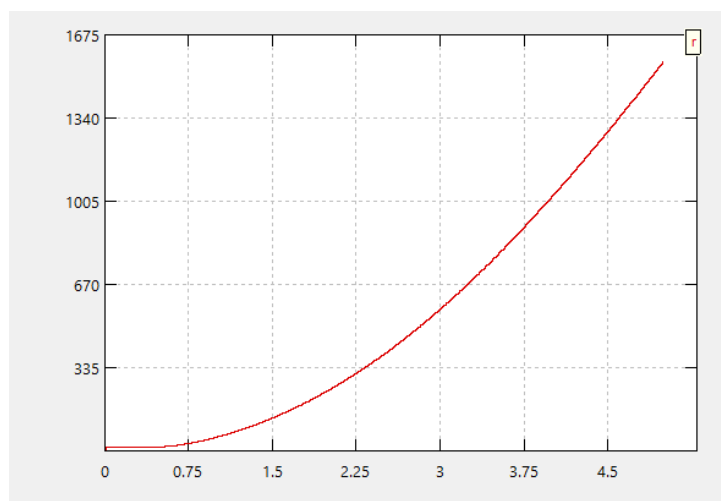


Figura 16: Evolución temporal de la distancia del punto perturbado al punto L3

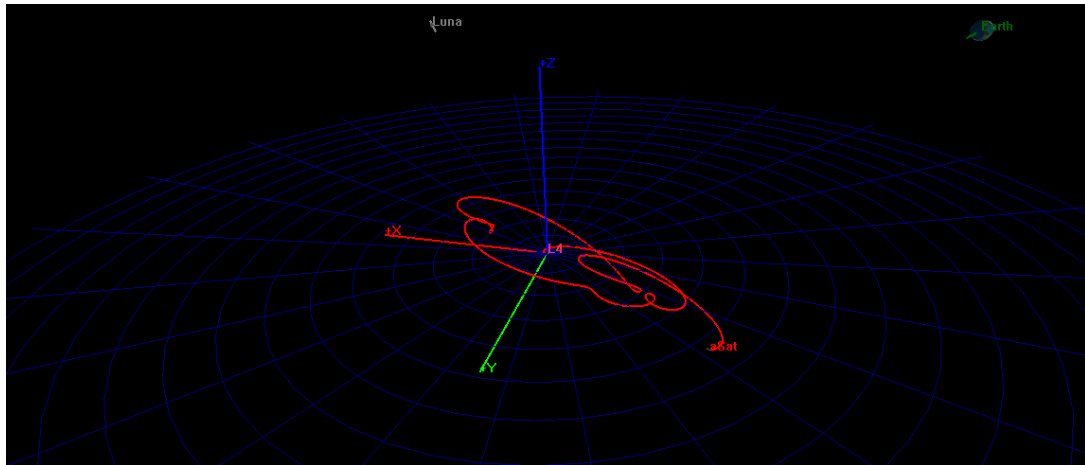


Figura 17: Órbita alrededor del punto de Lagrange L4 con GMAT

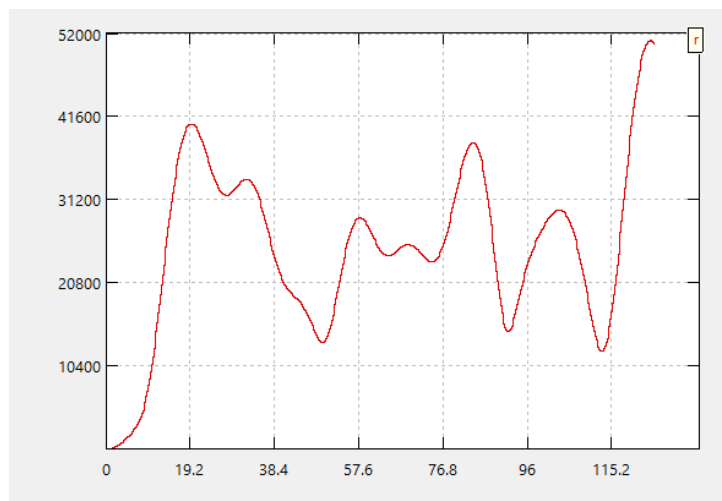


Figura 18: Evolución temporal de la distancia del punto perturbado al punto L4

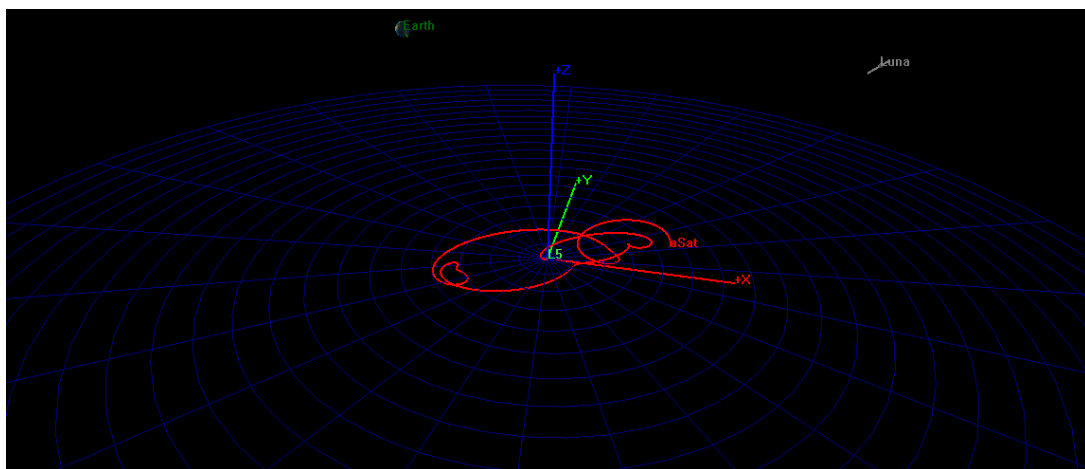


Figura 19: Órbita alrededor del punto de Lagrange L5 con GMAT

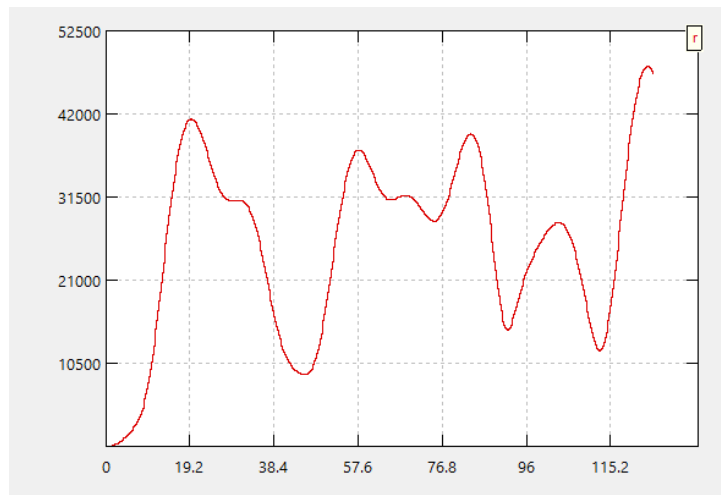


Figura 20: Evolución temporal de la distancia del punto perturbado al punto L5

Se puede observar cómo los resultados obtenidos con GMAT corroboran lo ya obtenido mediante el código escrito en Fortran. En el caso de los primeros tres puntos de Lagrange (L1, L2 y L3) se aprecia tanto en la figura de la órbita como en la gráfica del radio en función del tiempo, la existencia de un movimiento divergente y por lo tanto, la existencia de un punto inestable. Por otro lado, para los puntos L4 y L5 el movimiento oscila en torno a dichos puntos, tratándose en este caso de los correspondientes dos puntos estables de sistema Tierra-Luna.

4. Conclusiones

En primer lugar, se quiere destacar que los algoritmos ya existentes en Fortran que implementan soluciones numéricas, como es el caso de los esquemas temporales utilizados en este trabajo, están escritos en versiones antiguas del lenguaje. Esto se debe a que el funcionamiento de estos es muy satisfactorio y a que al tratarse de un código escrito siguiendo convenciones de un lenguaje antiguo es difícil de manejar y de entender con precisión qué hace internamente dicho código. Estos dos factores hacen que hasta la fecha nadie ha creído rentable la reescritura de estos códigos en una versión de Fortran más moderna. Este hecho ha supuesto un contratiempo a la hora de la reutilización del código y del proceso de *wrapping* posterior.

Por otra parte, se han comprobado dos maneras de averiguar la estabilidad de un punto dado, en este caso los puntos de Lagrange, para el problema de los tres cuerpos (este método es extrapolable a otro tipo de problemas diferenciales reducibles a un sistema de ecuaciones de primer orden). La primera de ellas consiste en el análisis de la parte real de los autovalores de la matriz jacobiana del sistema mientras que el otro método consiste en observar la órbita de un punto perturbado respecto del punto del que se quiere obtener su estabilidad. Como se ha podido comprobar a lo largo del trabajo los resultados de ambos métodos coinciden entre sí y con lo que se espera del comportamiento de los puntos de Lagrange.

Adicionalmente existe otro método para comprobar el comportamiento alrededor de los puntos de Lagrange de cualquier sistema de un cuerpo primario y otro secundario. Este consiste en el empleo del software GMAT que implementa una variedad de esquemas temporales y que permite el uso de diferentes físicas, y que se ha empleado para corroborar los resultados obtenidos mediante el código de Fortran.

5. Bibliografía

- Hernández, J.A. <https://github.com/jahrWork/NumericalHUB/>. Github.
- Sardón, I.; del Campo, B. <http://www.github.com/IppSD/Semester1>. Github.
- DOPRI853 <https://github.com/jacobwilliams/dop853>. Github.
- ODEX <http://www.unige.ch/~hairer/prog/nonstiff/ode.f>. Fortran and Matlab Codes.
- ODE <http://netlib.org/ode/ode.f>. Netlib.