



Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова  
Факультет вычислительной математики и кибернетики  
Кафедра автоматизации систем вычислительных комплексов

Савицкий Илья Павлович

# Построение многопроцессорного расписания с использованием жадных стратегий и ограниченного перебора

Курсовая работа

**Научный руководитель:**  
Доцент, к.т.н  
Костенко Валерий Алексеевич

Москва, 2022

### **Аннотация**

Построение многопроцессорного расписания это NP-hard задача. Не существует полиномиального алгоритма. В данной работе приводится один из возможных вариантов решения задачи с дополнительными ограничениями на количество передач или сбалансированность распределения работ на процессорах при помощи алгоритма, сочетающего жадные стратегии и ограниченный перебор.

# Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Постановка задачи</b>	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>Обзор предметной области</b>	<b>8</b>
3.1	Критерии обзора . . . . .	8
3.2	Жадные алгоритмы . . . . .	8
3.3	Жадные алгоритмы с процедурой ограниченного перебора . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Алгоритм решения</b>	<b>10</b>
4.1	Дополнительные обозначения . . . . .	10
4.2	Словесное описание алгоритма . . . . .	10
4.3	Блок-схема алгоритма . . . . .	13
<b>5</b>	<b>Программная реализация алгоритма</b>	<b>14</b>
<b>6</b>	<b>Экспериментальное исследование алгоритма</b>	<b>15</b>
<b>7</b>	<b>Заключение</b>	<b>16</b>
<b>A</b>	<b>Классы входных данных</b>	<b>18</b>

# 1 Введение

Классическая задача построения расписания хорошо изучена и досконально описана в [1]. Поскольку данная задача принадлежит к классу NP-hard, не существует алгоритма, который за полиномиальное время даст точный ответ, но существуют алгоритмы, которые дают аппроксимированные результаты. Большинство таких алгоритмов разделяются на две категории: *конструктивные* и *итерационные*. Из основных примеров можно выделить (большинство из них упомянуты в [5]):

- Конструктивные алгоритмы
  1. Алгоритмы, основанные на поиске максимального потока в сети
  2. Алгоритмы, основанные на методах динамического программирования
  3. Алгоритмы, основанные на методе ветвей и границ
  4. Жадные алгоритмы
  5. Жадные алгоритмы с процедурой ограниченного перебора
- Итерационные алгоритмы
  1. Генетические алгоритмы
  2. Дифференциальная эволюция
  3. Алгоритм имитации отжига
  4. Алгоритм муравьиных колоний

Конструктивные алгоритмы работают, строя и дополняя частичные расписания до тех пор, пока все работы не будут размещены. Итерационные же алгоритмы строят приближения расписания и оптимизируют их.

В данной работе рассматриваются жадные алгоритмы с процедурой ограниченного перебора. Особенностью таких алгоритмов является баланс между двумя процессами построения расписания. Жадные стратегии строят расписание быстро, однако очень быстро могут зайти в тупик при построении расписания. В таком случае, если расписание строится с сильным отклонением от оптимального, процедура ограниченного перебора корректирует его.

## 2 Постановка задачи

### Дано

1. Ориентированный граф работ  $G$  без циклов, в котором дуги - зависимости по данным, а вершины - задания. Вершин  $n$ , дуг  $m$
2. Вычислительная система, состоящая из  $p$  различных процессоров
3. Матрица  $C_{ij}$  длительности выполнения работ на процессорах,  $i = 1 \dots n, j = 1 \dots p$
4. Матрица  $D_{kl}$  передач данных между процессорами,  $k = 1 \dots p, l = 1 \dots p, D_{kk} = 0$

### Определение расписания

Расписание программы определено, если

1. Множества процессор и работ
2. Привязка - всюду определенная на множестве работ функция, которая задает распределение работ по процессорам
3. Порядок - заданные ограничения на последовательность выполнения работ и является отношением частичного порядка, удовлетворяющим условиям ацикличности и транзитивности. Отношение порядка на множестве работ, распределенных на один процессор, является отношением полного порядка.

### Способы представления расписаний

1. Графическая форма представления

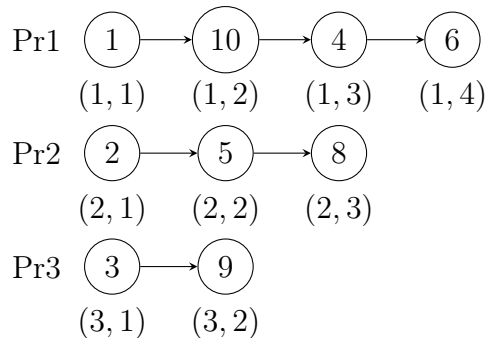


Рис. 1: Графическое представление расписания

В такой форме представления расписания каждой задаче сопоставляется пара из номера процессора и порядкового номера работы на процессоре.

2. Временная диаграмма

	$t = 0$	1	2	3	4	5
Pr1	$T_1$	$T_{10}$	$T_4$	$T_6$		
Pr2		$T_2$	$T_5$	$T_8$		
Pr3	$T_3$		$\emptyset$		$T_9$	

Рис. 2: Представление расписания в виде временной диаграммы

В такой форме представления расписания каждой задаче сопоставляется пара из номера процессора и времени старта задачи на процессоре.

Доказано, что эти формы полностью эквивалентны и, имея одну, возможно построить другую. В предложенном решении расписание строится в виде временной диаграммы, поскольку эта форма легче воспринимается человеком.

## Требуется

1. Построить расписание  $HP$ , то есть для  $i$ -й работы определить время начала ее выполнения  $s_i$  и процессор  $p_i$  на котором она будет выполняться
2. В расписании требуется минимизировать время выполнения набора работ, данных в графе  $G$
3. В задаче так же присутствуют дополнительные ограничения, котрым расписание обязано удовлетворять.

Ограничения на корректность расписания следующие:

1. Каждый процессор может одновременно выполнять не больше одной работы;
2. Прерывание работ недопустимо, перенос частично выполненной работы на другой процессор недопустим;
3. Если между двумя работами есть зависимость на данным, то между завершением работы-отправителя и стартом работы-получателя должен быть интервал времени, не меньший чем задержка на передачу данных между ними (с учетом привязки работ к процессорам и маршрута передачи данных).

## Различные постановки задачи

1. Задача с однородными процессорами (длительность выполнения работы не зависит от того, на каком процессоре она выполняется) и дополнительными ограничениями на количество передач:
  - $CR = \frac{m_{ip}}{m} < 0.4$ , где  $m_{ip}$  - количество передач данных между работами на каждый процессор
  - $CR2 = \frac{m_{2edg}}{m} < 0.05$ , где  $m_{2edg}$  - количество дуг, начальный и конечный узлы которых назначены на процессоры, не соединенных напрямую
2. Задача с однородными процессорами и дополнительным ограничением сбалансированности распределения работ:

- $BF = \lceil 100 \cdot \left( \frac{a_{max} \cdot p}{n} - 1 \right) \rceil < 10$ , где  $a_{max}$  - наибольшее, по всем процессорам, количество работ на процессоре
3. Задача с неоднородными процессорами, но без дополнительных ограничений на расписание

## 3 Обзор предметной области

Обзоры других алгоритмов приведены в [2, 4]

### 3.1 Критерии обзора

Ниже приведены критерии, по которым будут рассматриваться и сравниваться алгоритмы

1. Насколько сильно поставленная в статье задача отличается от решаемой. Можно ли взять алгоритм, описанный в статье за базу для алгоритма для решения данной задачи.
2. Порядок сложности алгоритма.
3. На данных какой размерности протестирован алгоритм.

### 3.2 Жадные алгоритмы

Жадные алгоритмы подразумевают декомпозицию задачи на ряд более простых подзадач. На каждом шаге решение принимается исходя из принципа получения оптимального решения для очередной подзадачи. То есть, на каждом шаге алгоритм делает выбор, оптимальный с точки зрения получения решения очередной подзадачи, предполагая, что эти локально-оптимальные решения приведут к приемлемому решению задачи. Какие-либо жадные стратегии, гарантированно получающие оптимальное расписание, на настоящий момент времени неизвестны, за исключением небольшого числа вариантов задач составления расписаний не принадлежащих к классу NP-полных. Например, известен жадный алгоритм, получающий точное решение для задачи обслуживания одним процессором максимального числа работ из заданного набора работ с фиксированными сроками начала и окончания [3]. Набор локальных критериев оптимизации сильно зависит от класса архитектуры. Для архитектур, в которых возможно последствие (распределяемый в расписание рабочий интервал оказывает влияние на времена инициализации ранее распределенных рабочих интервалов) возникает проблема выбора локальных критериев оптимизации, позволяющих учесть эффект последствия (на настоящий момент времени какие-либо обоснованные решения этой проблемы не известны). Кроме того, единого локального критерия (или набора и способа их использования), приводящего к наилучшему конечному результату, для решения всех подзадач не существует. Более того, при усложнении архитектуры набор и способ использования локальных критериев оказывает более сильное влияние на конечный результат. Таким образом, применение жадных алгоритмов для составления расписаний классом архитектур без последствия или даже без разделяемых ресурсов, если их влияние на значение функции построения временной диаграммы не может быть локализовано, а также проблемой выбора критериев оптимизации индивидуально для каждой подзадачи.

### 3.3 Жадные алгоритмы с процедурой ограниченного перебора

Жадные алгоритмы в чистом виде применяются редко из-за того, что в результате их работы часто получаются решения очень далекие от оптимальных, так как они склонны застревать в локальных минимумах оптимизирующей функции. Для того чтобы исправить этот недостаток был предложен подход [5], сочетающий жадные алгоритм и ограниченный перебор.

В основу предлагаемых в работе алгоритмов, сочетающих жадные стратегии и ограниченный перебор, положены следующие основные принципы:



- на каждом шаге работы алгоритма делается локально-оптимальный выбор в соответствии с используемыми жадными критериями,
- на каждом шаге производится проверка того, что «жадный выбор не закрывает пути к оптимальному решению»,
- вызов процедуры ограниченного перебора, если проверка условия «жадный выбор не закрывает пути к оптимальному решению» дала отрицательный результат.

Предложенный метод построения алгоритмов сочетающих жадные стратегии и ограниченный перебор дает возможность задавать требуемый баланс между точностью и сложностью алгоритма путем выбора значения максимально допустимой глубины перебора. Метод допускает настройку на частную задачу путем подбора жадных критериев.

В разобранном в статье [5] алгоритме рассматривается классический вариант задачи построения многопроцессорного расписания без учета дополнительных критериев, однако эти критерии легко учитываются как дополнительные условия при проверке оптимальности текущего расписания, построенного жадным алгоритмом.

Этот алгоритм детерминирован и имеет несколько параметров, один из которых – глубина перебора в процедуре ограниченного перебора. При установке малой глубины перебора можно создать неточное, но верное начальное приближение расписания для других алгоритмов, например для генетических алгоритмов, имитации отжига или дифференциальной эволюции. Притом, алгоритм конструктивен, нет потребности задания критерия останова алгоритма.

В крайнем случае, когда все задачи распределяются в соответствии с жадными критериями и процедура ограниченного перебора не вызывается алгоритм имеет сложность  $O(n \log n)$ .

- Достоинства:

1. Возможность балансировать между точностью и сложностью благодаря изменению глубины перебора.
2. Не зависит от начальных условий, т.к. алгоритм детерминированный.
3. Возможность получить расписание для поддерева работ.

- Недостатки:

1. Необходимо подбирать жадные критерии в ходе эксперимента.
2. Время работы алгоритма может быть большим, если процедура ограниченного перебора будет вызываться слишком часто.

## 4 Алгоритм решения

### 4.1 Дополнительные обозначения

1.  $D = (d_1, d_2, \dots, d_l)$ , где  $l$  - количество вершин, доступных для добавления (т.е. у которых нет предшественников в графе  $G$ ) - множество вершин, доступных для добавления в расписание.
2.  $k$  - вектор длин критических путей от “головной” вершины до каждой вершины графа.
3.  $(s_i, p_i)$  - достаточное количество информации для размещения работы в расписании.

Жадные критерии

1.  $GR1$  - критерий, используемый в выборе работы на постановку
2.  $GR2$  - критерий, используемый в выборе места постановки работы

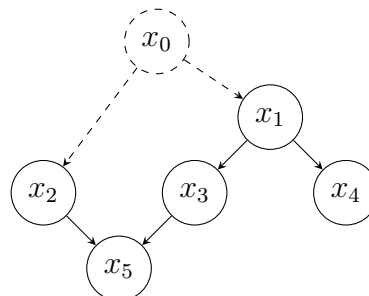
Процедуры ограниченного перебора

1.  $H1$  - процедура перебора для создания места для постановки работы. Минимизируемый критерий -  $s_i$
2.  $H2$  - процедура перебора для приближения времени старта работы к длине критического пути до нее. Минимизируемый критерий -  $\sum s_k$ , где  $s_k$  - времена начала  $k$  последних добавленных работ.

### 4.2 Словесное описание алгоритма

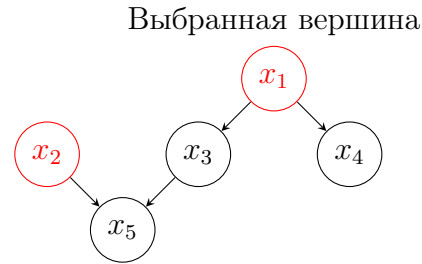
1. Сформировать множество вершин, у которых нет предшественников. Множество  $D = (d_1, d_2 \dots d_i)$  где  $d_i$  – номер работы, доступной для добавления в расписание (т.е. у которой нет предшественников в исходном графе)
2. В случае, если в множестве  $D$  одна вершина – обозначим ее за  $d$ , в противном случае – создадим фиктивную вершину с нулевой длительностью, у которой все потомки будут из множества  $D$ , и обозначим ее за  $d$

Фиктивная вершина



3. Зададим вектор  $k$  – вектор длин критических путей до вершин от  $d$ . При помощи алгоритма Дейкстры этот вектор заполняется значениями  $k_i$ , где  $i$  – номер вершины. Поскольку алгоритм Дейкстры работает со взвешенными графами, каждое ребро получает вес минимального времени работы на вычислительной системе вершины, из которой исходит

4. По жадному критерию  $GC1$  выбирается работа из множества  $D$  для размещения в расписании. Пусть выбранная работа –  $d_i$



5. Производится пробное размещение работы  $d$  в расписании с учетом жадного критерия  $GC2$  и дополнительных ограничений. В случае, если не получилось найти подходящее место для работы – запускается процедура ограниченного перебора  $H1$ . Становится известно  $s$  – время старта работы и  $p$  – процессор, на котором работа выполняется.
6. Если  $s_i$  больше длины критического пути (с точностью до  $\Delta$ , где  $\Delta$  – параметр алгоритма), то вызывается процедура ограниченного перебора  $H2$ . Если работу разместить не удалось – завершить алгоритм. Если  $s_i$  не превосходит длину критического пути (с точностью  $\Delta$ ), то работа размещается в расписании.
7.  $d_i$  удаляется из списка размещенных работ и в графе  $G$  удаляется соответствующая вершина и все дуги, исходящие из нее.
8. Обновляется множество  $D$ . Если  $D$  не пустое, то алгоритм переходит на пункт 4.

### Жадный критерий выбора работы $GC1$

- Максимальное количество потомков у работы

Такой выбор работы позволяет открыть максимально возможное количество кандидатов на следующую постановку задачи в расписание, а значит с минимальной вероятностью закрывает путь к оптимальному решению.

### Жадный критерий выбора места работы в расписании $GC2$

- Скорейшее завершение частично построенного расписания

### Выбор места работы в расписании

- Взвешенная сумма.

$$crit = C_1 \cdot GC2 + C_2 \cdot CR + C_3 \cdot CR2$$

где  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$  – параметры алгоритма. Работа размещается на место с наибольшим значением параметра  $crit$ .

- Допускная система выбора

1. Список мест размещения работ ранжируется по  $GC2$ , после чего отсекаются верхние  $n\%$  работ, где  $n$  – параметр алгоритма

2. Такие же действия повторяются для каждого дополнительного ограничения
3. В конечном списке выбрать место по жадному критерию

При ранжировании задач по взвешенной сумме возможна ситуация, при которой будет выбрано место которое хорошо проходит по одному критерию, но очень плохо по другому и тогда расписание будет строиться в направлении ложного минимума. Поэтому в программной реализации было выбрано использование допускной системы выбора.

### Ограниченный перебор

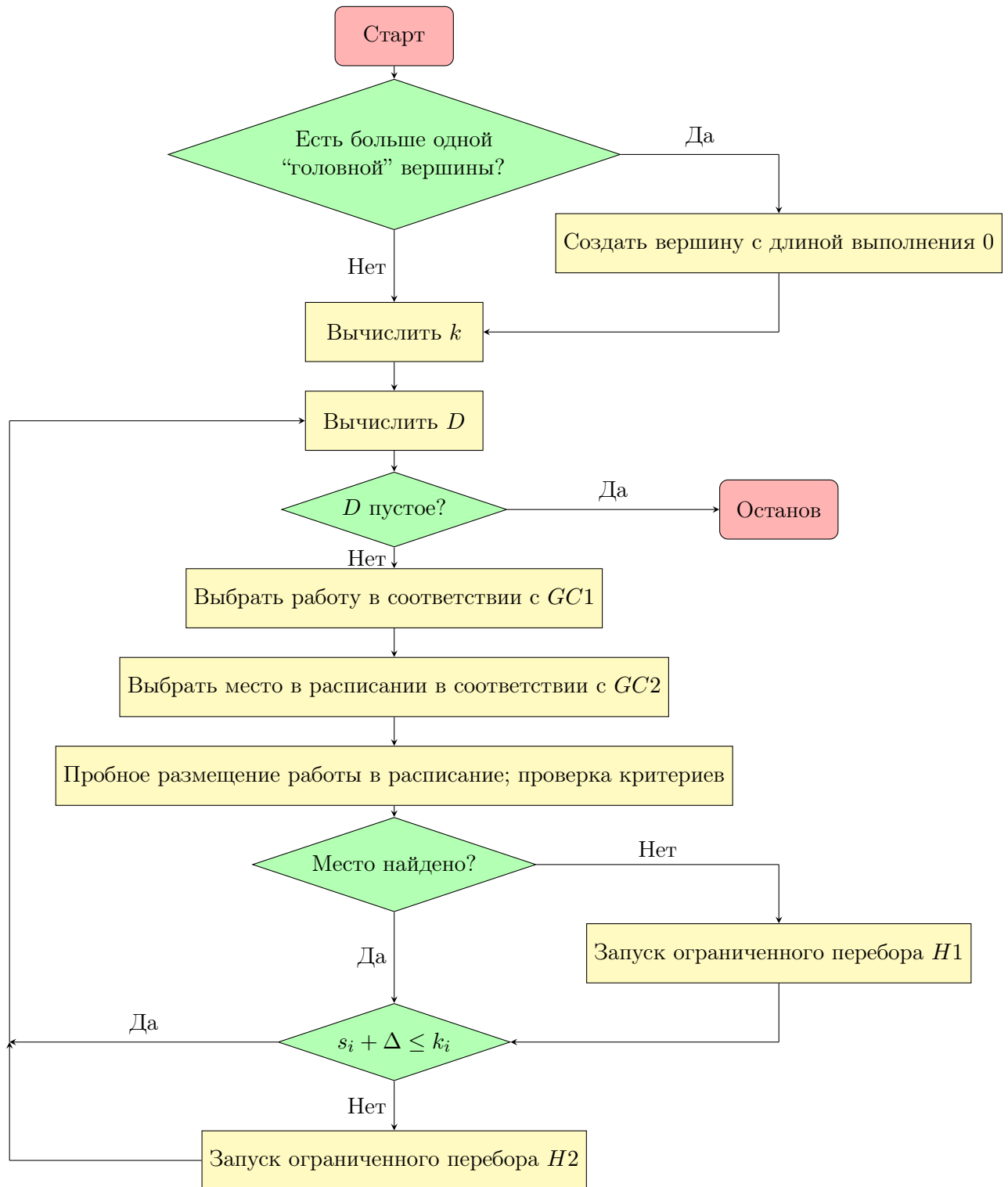
После неудачной пробной постановки работы в расписание алгоритм создает набор  $K = (k_1, k_2, \dots, k_t)$ , состоящий из  $t$  последних добавленных работ ( $t$  – параметр алгоритма). Далее, процедурой полного перебора пробуются различные расписания до тех пор, пока не получится расписание, удовлетворяющее критерию критичности пути до последней поставленной работы и удовлетворяющее дополнительным ограничениям.

### Расчет времени начала работы

Для того, чтобы рассчитать время начала для конкретной работы на процессоре  $p$  требуется:

1. Вычислить вектор  $PJ_{k=1}^L$ , где  $L$  – количество предшественников у работы. Элементами этого вектора будут являться суммы вида  $s_k + C_{kr} + D_{rj}$ , где  $r$  – номер процессора, на котором размещен предшественник.
2. Максимумом этого вектора и будет являться первое доступное начало выполнения работы на данном процессоре.  $n_j = \max PJ$

### 4.3 Блок-схема алгоритма



## 5 Программная реализация алгоритма

## 6 Экспериментальное исследование алгоритма

## 7 Заключение



## Список литературы

- [1] Edward G Coffman. *Computer and job-shop scheduling theory*. en. Nashville, TN: John Wiley & Sons, февр. 1976. ISBN: 0471163198.
- [2] Т.А. Тушкина К.В. Шахбазян. «Обзор методов составления расписаний для много-процессорных систем». en. В: *Журнал советской математики* 15.5 (1981), с. 651—669.
- [3] Thomas H. Cormen и др. *Introduction to Algorithms*. 2nd. The MIT Press, 2001. ISBN: 0262032937.
- [4] Robert I. Davis и Alan Burns. «A Survey of Hard Real-Time Scheduling for Multiprocessor Systems». В: *ACM Computing Surveys* 43.4 (окт. 2011).
- [5] В А Костенко. «АЛГОРИТМЫ КОМБИНАТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ, СОЧЕТАЮЩИЕ ЖАДНЫЕ СТРАТЕГИИ И ОГРАНИЧЕННЫЙ ПЕРЕБОР». В: *Известия Российской академии наук. Теория и системы управления* 2 (2017), с. 48—56.

## А Классы входных данных

В данных, присланных от Хуавей существует разделение на 2 класса.

1. Первый класс (примеры DAG\_A и DAG\_B) характеризуется относительно небольшим масштабом графа работ, небольшим числом процессоров, полнотой графа связности процессоров и одинаковыми задержками между любыми двумя процессорами.
2. Второй класс (примеры DAG\_C и DAG\_D) характеризуется относительно большим масштабом графа работ, большим числом процессоров

Таблица 1: Сравнение примеров из классов данных  
Примеры входных данных

Критерии	DAG_A	DAG_B	DAG_C	DAG_D
Масштаб графа работ	45 вершин; 75 ребер	1121 вершина; 6229 ребер	197494 вершин; 719389 ребер	1823309 вершин; 6172920 ребер
Разброс длительностей работ	1-10	1-10	все работы одной длины	все работы одной длины
Связность графа работ	1.66	5.55	3.64	3.83
Количество процессоров	2	10	256	4096
Полный граф связности процессоров	да	да	нет	да
Одинаковые задержки на передачу данных	да	да	да	нет