Системы счисления и двоичная запись

Савицкий Илья Павлович и Тетерин Дмитрий Юрьевич

Июль 2022

Определения

Определение

Система счисления - знаковая система, в которой приняты определенные правила записи чисел.

Определение

Цифры - знаки, при помощи которых записываются числа.

Определение

Алфавит системы счисления - совокупность цифр.

Непозиционные системы счисления

- Унарная
  Самая первая из всех созданных. Алфавит: $|$
  $5_{10} = |||||$
- Римская
  Самая известная на данный момент. Значение символа диктуется не абсолютным, а относительным положением в числе.
- ... и много много других архаизмов, которые показали свою нежизнеспособность тем, что с ними сложно проводить арифметику

Знакомые нам системы счисления

Пример

Десятичная система счисления состоит из цифр:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$$

Это её алфавит.

Как работает алфавит?

Пример

Как составить *любое* число при помощи алфавита?

$$548 = 5 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 8$$

или

$$548 = 5 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0$$

Определение

10 в, в данном случае, называется **основанием** системы счисления. (поэтому система и называется десятичной)

Как мы считаем?

Алфавит: $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$

$$0$$
$$1$$
$$\dots$$
$$9$$
$$10$$
$$11$$
$$\dots$$
$$19$$
$$\dots$$
$$99$$
$$100$$

Двоичная система счисления

Пример

Двоичная система счисления состоит из цифр:

$$0, 1$$

Идея состоит в том, что специальные электрические элементы внутри компьютеров, называемые транзисторами, могут находиться только в двух состояниях: HIGH и LOW.

Двоичный счет

Алфавит: $0, 1$

0	0
1	1
2	10
3	11
4	100
5	101
6	110
7	111
8	1000
9	1001
10	1010

Интересная особенность

Все арифметические правила *сохраняются* в двоичной системе счисления.

Пример

$$10011_2 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

Сложение и умножение в ДСС

+	0	1
0	0	1
1	1	10

×	0	1
0	0	0
1	0	1

Пример

$$\begin{array}{r} 10000011 \\ -\ 10000001 \\ \hline 10 \end{array}$$

Основная формула

Определение

Развернутая форма записи

$$A_q = \pm\left(a_{n-1} \cdot q^{n-1} + a_{n-2} \cdot q^{n-2} + \ldots + a_0 \cdot q^0 + \ldots + a_{-1} \cdot q^{-1} + \ldots + a_{-m} \cdot q^{-m}\right)$$

, где
A - число
q - основание системы счисления
a_i - цифры, принадлежащие алфавиту данной системы
n - количество целых разрядов числа
m - количество дробных разрядов числа
q^i - „вес“разряда

Перевод системы счисления в десятичную

Очевидно, что если записать число в развернутой форме, но считать все в привычной нам десятичной форме получится исходное число.

Пример

$$\begin{aligned} 10011_2 &= 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \\ &= 1 \cdot 16 + 0 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \\ &= 16 + 2 + 1 \\ &= 19_{10} \end{aligned}$$

Перевод десятичной системы счисления в двоичную

Пример

363	181	90	45	22	11	5	2	1
1	1	0	1	0	1	1	0	1

Итого, получаем число $363_{10} = 101101011_2$

Пример

314	157	78	39	19	9	4	2	1
0	1	0	1	1	1	0	0	1

Итого, получаем число $314_{10} = 100111010_2$

Шестнадцатеричная система счисления

На самом деле, можно придумать цифры после 9, но вместо этого, для оснований системы выше 10 принято использовать латинские буквы.

Определение

Шестнадцатеричная система счисления - система счления с основанием 16, где

$$A = 10$$

$$B = 11$$

$$C = 12$$

$$D = 13$$

$$E = 14$$

$$F = 15$$

Fast bin2hex и fast hex2bin

В системах счисления с основанием, равным степени двойки наблюдается интересная особенность: числа можно переводить посимвольно!

Пример

$$\underbrace{1}_{1}\underbrace{0001}_{1}\underbrace{0101}_{5}\underbrace{1010}_{A}\underbrace{1001}_{9}\underbrace{0010_2}_{2}$$

$$100010101101010010010_2 = 115A92_{16}$$

Пример

$$\underbrace{7}_{0111}\underbrace{3}_{0011}\underbrace{B_{16}}_{1011}$$

$$73B_{16} = 11100111011_2$$

Двоично-десятичная система счисления

Двоично-десятичная система счисления (BCD) повторяет идею fast bin2hex и fast hex2bin только для пары десятичной и двоичной систем счисления.

Пример

$$\underbrace{3}_{0011}\underbrace{1}_{0001}\underbrace{1_{10}}_{0001}$$

$$311_{10} = 1100010001_{BCD}$$

Симметричная троичная система счисления

Алфавит: $\overline{1}, 0, 1$

Сохраняется схема с позиционными аналогами, но цифра $\overline{1}$ теперь обозначает -1.

Десятичная система	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
Троичная несимметричная	-12	-11	-10	-2	-1	0	1	2	10	11	12
Троичная симметричная	$\overline{1}11$	$\overline{11}$	$\overline{1}0$	$\overline{1}1$	$\overline{1}$	0	1	$1\overline{1}$	10	11	$1\overline{11}$

Пример

$$
\begin{aligned}
1\overline{1}01\overline{1} &= 1 \cdot 3^4 + \overline{1} \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^1 + \overline{1} \cdot 3^0 \\
&= 81 - 27 + 3 - 1 \\
&= 56
\end{aligned}
$$