

DEDUCCIÓN DE LA EXPRESIÓN DE LA SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN CUADRÁTICA

Sea $ax^2+bx+c=0$ la ecuación cuadrática para la que se quiere encontrar la solución.

Para tener una expresión más sencilla vamos normalizar por a y así tenemos:

$$x^2+\left(\frac{b}{a}\right)x+\frac{c}{a}=0$$

Si definimos por comodidad $b_1=\frac{b}{a}$ y $c_1=\frac{c}{a}$ y aplicamos los cambios, la ecuación cuadrática quedaría:

$$x^2+b_1x+c_1=0$$

Si llevamos c_1 al otro lado de la igualdad, la ecuación queda de la siguiente forma:

$$x^2+b_1x=-c_1$$

Sabemos que $(x+p)^2=x^2+2px+p^2$ Estamos buscando la forma $x^2+2px+p^2$ para sustituirla por $(x+p)^2$ Por lo tanto, si sumamos $\left(\frac{b_1}{2}\right)^2$ en ambos miembros tendremos el cuadrado que buscamos.

$$x^2+b_1x+\left(\frac{b_1}{2}\right)^2=-c_1+\left(\frac{b_1}{2}\right)^2\Rightarrow\left(x+\frac{b_1}{2}\right)^2=-c_1+\left(\frac{b_1}{2}\right)^2$$

Ahora se puede retirar el cuadrado y llevarlo al otro miembro como una raíz cuadrada. Esto da DOS soluciones posibles que se representan con el símbolo \pm .

$$x+\frac{b_1}{2}=\pm\sqrt{-c_1+\left(\frac{b_1}{2}\right)^2}$$

Despejando x de la ecuación y reorganizándola se obtiene:

$$x=-\frac{b_1}{2}\pm\sqrt{-c_1+\left(\frac{b_1}{2}\right)^2}\Rightarrow x=-\frac{b_1}{2}\pm\sqrt{\frac{b_1^2-4c_1}{4}}$$

Si reducimos nos queda la siguiente expresión:

$$x=\frac{-b_1\pm\sqrt{b_1^2-4c_1}}{2}$$

Sustituyendo b_1 y c_1 por sus correspondientes valores $b_1=\frac{b}{a}$ y $c_1=\frac{c}{a}$ la expresión queda de la forma:

$$x=\frac{-\frac{b}{a}\pm\sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2-4\frac{c}{a}}}{2}$$

Si la racionalizamos para simplificarla tenemos:

$$\frac{-\frac{b}{a}\pm\sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2-4\frac{c}{a}}}{2}=\frac{-\frac{b}{a}\pm\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-4\frac{c}{a}}}{2}=\frac{-\frac{b}{a}\pm\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-4\frac{ac}{a^2}}}{2}=\frac{-\frac{b}{a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{a^2}}}{2}=\frac{-\frac{b}{a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a}}{2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Y así se obtiene que las expresiones para las 2 soluciones de la ecuación cuadrática son:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ y } x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$