

## DEDUCCIÓN DE LA EXPRESIÓN DE LA SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN CUADRÁTICA

Sea  $ax^2 - bx + c = 0$  la ecuación cuadrática para la que se quiere encontrar la solución.

Para tener una expresión más sencilla vamos normalizar por  $a$  y así tenemos:

$$x^2 - \left(\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a} = 0$$

Si definimos por comodidad  $b_1 = \frac{b}{a}$  y  $c_1 = \frac{c}{a}$  y aplicamos los cambios, la ecuación cuadrática quedaría:

$$x^2 - b_1x + c_1 = 0$$

Si llevamos  $c_1$  al otro lado de la igualdad, la ecuación queda de la siguiente forma:

$$x^2 - b_1x = -c_1$$

Sabemos que  $(x-p)^2 = x^2 - 2px + p^2$  Estamos buscando la forma  $x^2 - 2px + p^2$  para sustituirla por  $(x-p)^2$  Por lo tanto, si sumamos  $\left(\frac{b_1}{2}\right)^2$  en ambos miembros tendremos el cuadrado que buscamos.

$$x^2 - b_1x + \left(\frac{b_1}{2}\right)^2 = -c_1 + \left(\frac{b_1}{2}\right)^2 \Rightarrow \left(x - \frac{b_1}{2}\right)^2 = -c_1 + \left(\frac{b_1}{2}\right)^2$$

Ahora se puede retirar el cuadrado y llevarlo al otro miembro como una raíz cuadrada. Esto da DOS soluciones posibles que se representan con el símbolo  $\pm$ .

$$x - \frac{b_1}{2} = \pm \sqrt{-c_1 + \left(\frac{b_1}{2}\right)^2}$$

Despejando  $x$  de la ecuación y reorganizándola se obtiene:

$$x = \frac{b_1}{2} \pm \sqrt{-c_1 + \left(\frac{b_1}{2}\right)^2} \Rightarrow x = \frac{b_1}{2} \pm \sqrt{\frac{b_1^2 - 4c_1}{4}}$$

Si reducimos nos queda la siguiente expresión:

$$x = \frac{b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - 4c_1}}{2}$$

Sustituyendo  $b_1$  y  $c_1$  por sus correspondientes valores  $b_1 = \frac{b}{a}$  y  $c_1 = \frac{c}{a}$  la expresión queda de la forma:

$$x = \frac{\frac{b}{a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 4\frac{c}{a}}}{2}$$

Si la racionalizamos para simplificarla tenemos:

$$\frac{\frac{b}{a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 4\frac{c}{a}}}{2} = \frac{\frac{b}{a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{a^2} - 4\frac{c}{a}}}{2} = \frac{\frac{b}{a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{a^2} - 4\frac{ac}{a^2}}}{2} = \frac{\frac{b}{a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{a^2}}}{2} = \frac{\frac{b}{a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a}}{2} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Y así se obtiene que las expresiones para las 2 soluciones de la ecuación cuadrática son:

$$x_1 = \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$