

КОМП'ЮТЕРНИЙ ПРАКТИКУМ №4

Гоголева Поліна ФБ-12

Вивчення криптосистеми RSA та алгоритму електронного підпису; ознайомлення з методами генерації параметрів для асиметричних криптосистем

1. Написати функцію пошуку випадкового простого числа з заданого інтервалу або заданої довжини, використовуючи датчик випадкових чисел та тести перевірки на простоту. В якості датчика випадкових чисел використовуйте вбудований генератор псевдовипадкових чисел вашої мови програмування. В якості тесту перевірки на простоту рекомендовано використовувати тест Міллера-Рабіна із попередніми пробними діленнями.

Як же боляче це було по цим вашим математичним поясненням у методичці... і хоч вже існуюча реалізація тесту Міллера-Рабіна, котру я знайшла в інтернеті чомусь була набагато коротша, я написала свою, котра косо-киво, але працює!

Намагалась робити покроково, як вказано у методичці.

От її код

```
import random

def gcd(a, b):
    while b:
        a, b = b, a % b
    return a

def mod_exp(x, d, p):
    result = 1
    x = x % p

    while d > 0:
        if d % 2 == 1:
            result = (result * x) % p
        d = d // 2
        x = (x * x) % p

    return result

def trial_division(n):
    if n < 2:
        return False
    for i in range(2, 100):
        if n % i == 0:
            return False
```

```

    return True

def miller_rabin_test(p, k=10):
    if not trial_division(p): # Перевірка на простоту за допомогою решти
        return False

    # Крок 0: Знаходимо розклад  $p - 1 = d * 2^s$ 
    d, s = p - 1, 0
    while d % 2 == 0:
        d //= 2
        s += 1

    # Лічильник
    count = 0

    is_pseudo_prime = False

    # Крок 3. Повторюємо k разів
    while count < k:
        # Крок 1: Вибираємо випадкове число x
        x = random.randint(2, p - 1)

        # Знаходимо gcd(x, p)
        g = gcd(x, p)

        # Якщо gcd(x, p) > 1, то p - складене число
        if g > 1:
            return False
        else:
            # Крок 2: Перевіряємо, чи є p сильно псевдопростим за основою x
            if mod_exp(x, d, p) == 1 or mod_exp(x, d, p) == p - 1:
                is_pseudo_prime = True
            else:
                for r in range(1, s):
                    xr = mod_exp(x, d * (2 ** r), p)
                    if xr == p - 1:
                        is_pseudo_prime = True
                        break
                    elif xr == 1:
                        continue
                    else:
                        return False

            if is_pseudo_prime:
                count += 1

    return True

# Тестування
p = 2659 # Приклад простого числа
result = miller_rabin_test(p)
if result:

```

```

    print(f"{p} сильно псевдопросте (може бути простим).")
else:
    print(f"{p} складене число.")

```

```

0161 == C:\Users\Polya\Desktop\KPI\crypto\crypto-23-24\cp4\gogolev
317 сильно псевдопросте (може бути простим).
PS C:\Users\Polya\Desktop\KPI\crypto\crypto-23-24\cp4\gogolev
Data\Local\Programs\Python\Python311\python.exe' 'c:\Users\Po
0168' '--' 'c:\Users\Polya\Desktop\KPI\crypto\crypto-23-24\cp
599 сильно псевдопросте (може бути простим).
PS C:\Users\Polya\Desktop\KPI\crypto\crypto-23-24\cp4\gogolev
Data\Local\Programs\Python\Python311\python.exe' 'c:\Users\Po
0173' '--' 'c:\Users\Polya\Desktop\KPI\crypto\crypto-23-24\cp
600 складене число.
PS C:\Users\Polya\Desktop\KPI\crypto\crypto-23-24\cp4\gogolev
Data\Local\Programs\Python\Python311\python.exe' 'c:\Users\Po
0195' '--' 'c:\Users\Polya\Desktop\KPI\crypto\crypto-23-24\cp
2659 сильно псевдопросте (може бути простим).
PS C:\Users\Polya\Desktop\KPI\crypto\crypto-23-24\cp4\gogolev
Data\Local\Programs\Python\Python311\python.exe' 'c:\Users\Po
0201' '--' 'c:\Users\Polya\Desktop\KPI\crypto\crypto-23-24\cp
2660 складене число.
PS C:\Users\Polya\Desktop\KPI\crypto\crypto-23-24\cp4\gogolev
Data\Local\Programs\Python\Python311\python.exe' 'c:\Users\Po
0206' '--' 'c:\Users\Polya\Desktop\KPI\crypto\crypto-23-24\cp
2659 сильно псевдопросте (може бути простим).
PS C:\Users\Polya\Desktop\KPI\crypto\crypto-23-24\cp4\gogolev

```

Тепер додамо сюди ф-ю генерації випадкового простого числа з заданого інтервалу.

```

def generate_random_prime(start, end, k=10):
    while True:
        p = random.randint(start, end)
        if trial_division(p) and miller_rabin_test(p, k):
            return p

print(generate_random_prime(80, 580))

```

```

PS C:\Users\Polya\Desktop\KPI\crypto\crypto-23-24\cp4\gogolev
Data\Local\Programs\Python\Python311\python.exe' 'c:\Users\Po
0246' '--' 'c:\Users\Polya\Desktop\KPI\crypto\crypto-23-24\cp
317
PS C:\Users\Polya\Desktop\KPI\crypto\crypto-23-24\cp4\gogolev
Data\Local\Programs\Python\Python311\python.exe' 'c:\Users\Po
0251' '--' 'c:\Users\Polya\Desktop\KPI\crypto\crypto-23-24\cp
139
PS C:\Users\Polya\Desktop\KPI\crypto\crypto-23-24\cp4\gogolev
Data\Local\Programs\Python\Python311\python.exe' 'c:\Users\Po
0256' '--' 'c:\Users\Polya\Desktop\KPI\crypto\crypto-23-24\cp
373
PS C:\Users\Polya\Desktop\KPI\crypto\crypto-23-24\cp4\gogolev

```

2. За допомогою цієї функції згенерувати дві пари простих чисел p, q і p_1, q_1 довжини щонайменше 256 біт. При цьому пари чисел беруться так, щоб $pq \leq p_1q_1$; p і q – прості числа для побудови ключів абонента A , p_1 і q_1 – абонента B .

Згенеруємо 4 рандомних числа, порівняємо їх, двом більшим призначимо p_1 та q_1 , меншим p і q .

```
def generate_key_pairs():
    bit_length = 256

    # Generate 4 random prime numbers of 256 bits
    primes = [generate_random_prime(2**(bit_length-1), 2**bit_length - 1) for
_ in range(4)]

    # Sort the primes
    primes.sort()

    p, q = primes[:2]
    p1, q1 = primes[2:]

    return p, q, p1, q1

p, q, p1, q1 = generate_key_pairs()

print(f"Alice's public key (p, q): ({p}, {q})")
print(f"Bob's public key (p1, q1): ({p1}, {q1})")
```

Мій код ранився нескінченно довго і ламався, тож, признаюсь, я закинула його в аішку для дебагінгу та оптимізації, звідки отримала більш оптимізований варіант перевірки теста міллера-рабіна, бо проблема була саме у ньому, ще й працюємо ми з дуже великими числами. Тому тепер код виглядає так:

```
import random

def gcd(a, b):
    while b:
        a, b = b, a % b
    return a

def trial_division(n):
    if n < 2:
        return False
    for i in range(2, 100):
        if n % i == 0:
```

```

        return False
    return True

def miller_rabin_test(p, k=10):
    if p < 2:
        return False
    if p != 2 and p % 2 == 0:
        return False

    factorization_base = p - 1
    while factorization_base % 2 == 0:
        factorization_base //= 2

    for _ in range(k):
        witness = random.randint(1, p - 1)
        if gcd(witness, p) > 1:
            continue

        exponent = factorization_base
        residue = pow(witness, exponent, p)

        while exponent != p - 1 and residue != 1 and residue != p - 1:
            residue = (residue * residue) % p
            exponent *= 2

        if residue != p - 1 and exponent % 2 == 0:
            return False

    return True

''' Тестування
p = 2659 # Приклад простого числа
result = miller_rabin_test(p)
if result:
    print(f"{p} сильно псевдопросте (може бути простим).")
else:
    print(f"{p} складене число.") '''

def generate_random_prime(start, end, k=10):
    while True:
        p = random.randint(start, end)
        if trial_division(p) and miller_rabin_test(p, k):
            return p

#print (generate_random_prime(80,580))

def generate_key_pairs():
    bit_length = 256

    primes = [generate_random_prime(2**(bit_length-1), 2**bit_length - 1) for
_ in range(4)]

```

```

primes.sort()

p, q = primes[:2]
p1, q1 = primes[2:]

return p, q, p1, q1

p, q, p1, q1 = generate_key_pairs()

print(f"Alice's public key (p, q): ({p}, {q})")
print(f"Bob's public key (p1, q1): ({p1}, {q1})")

```

```

to-23-24\cp4\gogoleva_fb-12_cp4\test_lab4.py
Alice's public key (p, q): (58752760004566039709432185565892825109462451212364677092786060510565296576479, 95633224192071038875303342464942593092756261483594830132705592917365024694079)
Bob's public key (p1, q1): (10092821936370694095202595014188380775974382321497578611068405333404358879641, 10844030141460860955744484230322027929823985057711097040465552884234219763629)
PS C:\Users\Polya\Desktop\KPI\crypto\crypto-23-24\cp4\gogoleva_fb-12_cp4> cd 'c:\Users\Polya\Desktop\KPI\crypto\crypto-23-24\cp4\gogoleva_fb-12_cp4'; & 'c:\Users\Polya\AppData\Local\Programs\Python\Python311\python.exe' 'c:\Users\Polya\vscode\extensions\ms-python.python-2023.22.1\pythonFiles\Lib\python\debugpy\adapter\..\..\debugpy\launcher' '54665' '--' 'c:\Users\Polya\Desktop\KPI\crypto\crypto-23-24\cp4\gogoleva_fb-12_cp4\test_lab4.py'
to-23-24\cp4\gogoleva_fb-12_cp4\test_lab4.py
Alice's public key (p, q): (6097816827116143588024801288820772808195767397392961156488837121869473800951467, 85559264801878435328861544527190430387947337023881284453454975672456680656811)
Bob's public key (p1, q1): (92656422664201853132472201864548990110297521769444667339211536766076524891753, 103946353241894589627835633425402512798816961615102723893700326455340182695307)
PS C:\Users\Polya\Desktop\KPI\crypto\crypto-23-24\cp4\gogoleva_fb-12_cp4>

```

3. Написати функцію генерації ключових пар для RSA. Після генерування функція повинна повертати та/або зберігати секретний ключ (d, p, q) та відкритий ключ (n, e) . За допомогою цієї функції побудувати схеми RSA для абонентів A і B – тобто, створити та зберегти для подальшого використання відкриті ключі (e, n) , (e_1, n_1) та секретні d і d_1 .

```

def generate_rsa_keys(p, q, p1, q1):
    n = p * q
    phi_n = (p - 1) * (q - 1)

    while True:
        public_exponent = random.randint(2, phi_n - 1)
        gcd_result, private_exponent = gcd(phi_n, public_exponent)
        if gcd_result == 1:
            break

    n1 = p1 * q1
    phi_n1 = (p1 - 1) * (q1 - 1)

    while True:
        public_exponent_1 = random.randint(2, phi_n1 - 1)
        gcd_result_1, private_exponent_1 = gcd(phi_n1, public_exponent_1)
        if gcd_result_1 == 1:
            break

    public_key = (n, public_exponent)
    private_key = (private_exponent, p, q)

    public_key_1 = (n1, public_exponent_1)
    private_key_1 = (private_exponent_1, p1, q1)

    return public_key, private_key, public_key_1, private_key_1

```

```
# Generate RSA key pairs for Alice and Bob
p, q, p1, q1 = generate_key_pairs()
alice_public_key, alice_private_key, bob_public_key, bob_private_key =
generate_rsa_keys(p, q, p1, q1)

# Output the results
print("Alice's RSA Public Key:", alice_public_key)
print("Alice's RSA Private Key:", alice_private_key)
print("Bob's RSA Public Key:", bob_public_key)
print("Bob's RSA Private Key:", bob_private_key)
```

3 цим кодом мали проблемку

```
Traceback (most recent call last):
File "c:\Users\Polya\Desktop\KPI\crypto\crypto-23-24\cp4\gogoleva_fb-12_cp4\lab4.py", line 107, in <module>
    alice_public_key, alice_private_key, bob_public_key, bob_private_key = generate_rsa_keys(p, q, p1, q1)
                                                                           ~~~~~^~~~~~
File "c:\Users\Polya\Desktop\KPI\crypto\crypto-23-24\cp4\gogoleva_fb-12_cp4\lab4.py", line 84, in generate_rsa_keys
    gcd_result, private_exponent = gcd(phi_n, public_exponent)
                                   ~~~~^~~~~~
TypeError: cannot unpack non-iterable int object
PS C:\Users\Polya\Desktop\KPI\crypto\crypto-23-24\cp4\gogoleva_fb-12_cp4> cd ..
```

Довелось пофіксити gcd, замінила його на extended версію, бо функція НСД мала повертати три числа для правильного генерування RSA ключів.

Новий код виглядає так

```
import random

def gcd(a, b):
    while b:
        a, b = b, a % b
    return a

def extended_gcd(a, b):
    if a == 0:
        return b, 0, 1
    else:
        g, x, y = extended_gcd(b % a, a)
        return g, y - (b // a) * x, x

def trial_division(n):
    if n < 2:
        return False
    for i in range(2, 100):
        if n % i == 0:
            return False
    return True

def miller_rabin_test(p, k=10):
    if p < 2:
        return False
    if p != 2 and p % 2 == 0:
        return False
```

```

factorization_base = p - 1
while factorization_base % 2 == 0:
    factorization_base //= 2

for _ in range(k):
    witness = random.randint(1, p - 1)
    if gcd(witness, p) > 1:
        continue

    exponent = factorization_base
    residue = pow(witness, exponent, p)

    while exponent != p - 1 and residue != 1 and residue != p - 1:
        residue = (residue * residue) % p
        exponent *= 2

    if residue != p - 1 and exponent % 2 == 0:
        return False

return True

def generate_random_prime(start, end, k=10):
    while True:
        p = random.randint(start, end)
        if trial_division(p) and miller_rabin_test(p, k):
            return p

def generate_key_pairs():
    bit_length = 256

    primes = [generate_random_prime(2**(bit_length-1), 2**bit_length - 1) for
_ in range(4)]

    primes.sort()

    p, q = primes[:2]
    p1, q1 = primes[2:]

    return p, q, p1, q1

def generate_rsa_keys(p, q, p1, q1):
    n = p * q
    phi_n = (p - 1) * (q - 1)

    while True:
        public_exponent = random.randint(2, phi_n - 1)
        gcd_result, _, private_exponent = extended_gcd(phi_n,
public_exponent)
        if gcd_result == 1:
            break

```



```

n1 = p1 * q1
phi_n1 = (p1 - 1) * (q1 - 1)

while True:
    public_exponent_1 = random.randint(2, phi_n1 - 1)
    gcd_result_1, _, private_exponent_1 = extended_gcd(phi_n1,
public_exponent_1)
    if gcd_result_1 == 1:
        break

public_key = (n, public_exponent)
private_key = (private_exponent, p, q)

public_key_1 = (n1, public_exponent_1)
private_key_1 = (private_exponent_1, p1, q1)

return public_key, private_key, public_key_1, private_key_1

# Generate RSA key pairs for Alice and Bob
p, q, p1, q1 = generate_key_pairs()
alice_public_key, alice_private_key, bob_public_key, bob_private_key =
generate_rsa_keys(p, q, p1, q1)

# Output the results
print("Alice's RSA Public Key:", alice_public_key)
print("Alice's RSA Private Key:", alice_private_key)
print("Bob's RSA Public Key:", bob_public_key)
print("Bob's RSA Private Key:", bob_private_key)

```

І виводить нам

```

Alice's RSA Public Key: (9137325532009220433113295285777707710039256233126367673698147954631540434260732778952009154971313329756454897166476494843616139484270153804653443961782663, 86622026827230368839
10465995882594100194422712818651002532910618077442515914810992721698394094791110513877246592141958531598624119877368624724011277783)
Alice's RSA Private Key: (4522771570866662413536607665873493041238717574285659488213087784888528210618209521456675340897966478155276708724732649908765588491689287367911653810203087, 9456687291707162489
760922561817301274170300004520629083821943240689199599341, 9662290028317751260764865721583312448107870166240652372989946707945133871043)
Bob's RSA Public Key: (1150841248310435771802674997752361134913991440764208224218311005770004636990362518440599434484603930981241356383140192044494100843979923484799491955568377, 8699108880107415929237
9831106136263837614669466273953359592561459946258860274091708479215027370556380325268386046516317813200552138000094046424679771559627)
Bob's RSA Private Key: (5607351703381761280678496414310603456756613938627767504751706206952214749672574498180205839927571523369663186014345002576233357065797797348474062119029603, 1036496692720364528265
75791522088953302437831207831369552969366760685104935217, 111031830289584933022851324682671906838597569099701136001439425838262421137481)

```

Детальніше про те, що відбувається:

У функції створення ключів ми для кожної знайденої пари (p, q) та $(p1, q1)$, обчислюємо $n = p * q$ та $\phi_n = (p - 1) * (q - 1)$. Аналогічно для $(p1, q1)$, це частина алгоритму Ейлера.

n представляє собою модуль, який використовується у всіх операціях шифрування та розшифрування. Він обчислюється як добуток двох простих чисел, p та q , для кожної пари (p, q) та $(p1, q1)$. Модуль n є великим непарним числом.

$\phi(n)$ (функція Ейлера для n) представляє собою кількість натуральних чисел, менших за n , які взаємно прості з n . Для простого числа p , $\phi(p) = p - 1$. Таким чином, $\phi(n)$ обчислюється як $(p - 1) * (q - 1)$ для кожної пари (p, q) та (p_1, q_1) .

Генеруємо випадкові числа e та e_1 так, щоб вони були взаємно простими з $\phi(n)$ та $\phi(n_1)$ відповідно. Це гарантує, що їхній GCD (найбільший спільний дільник) дорівнює 1.

Для кожної пари $(e, \phi(n))$ та $(e_1, \phi(n_1))$, використовуючи розширений алгоритм Евкліда, знаходимо d та d_1 , такі що $(e * d) \% \phi(n) = 1$ та $(e_1 * d_1) \% \phi(n_1) = 1$.

Публічний ключ представляється парою (n, e) для кожного абонента.

Приватний ключ представляється трійкою (d, p, q) для відповідного абонента.

4. Написати програму шифрування, розшифрування і створення повідомлення з цифровим підписом для абонентів A і B . Кожна з операцій (шифрування, розшифрування, створення цифрового підпису, перевірка цифрового підпису) повинна бути реалізована окремою процедурою, на вхід до якої повинні подаватись лише ті ключові дані, які необхідні для її виконання.

Зашифрування відкритого повідомлення M , $0 \leq M \leq n-1$, здійснюється за формулою

$$C = M^e \bmod n ,$$

шифроване повідомлення

Розшифрування криптограми $0 \leq C \leq n-1$ здійснюється за допомогою особистого ключа d за формулою:

$$M = C^d \bmod n .$$

Цифровий підпис у системі RSA. Щоб підписати відкрите повідомлення M , абонент A зашифровує його на своєму секретному ключі $S = M^d \bmod n$ і додає S до повідомлення M . Підписане повідомлення (M, S) може передаватися як у відкритому, так і в зашифрованому виді. Перевіряється підпис за допомогою відкритого ключа: якщо виконується рівність $M = S^e \bmod n$, то повідомлення M не спотворене і підпис вірний. На практиці повідомлення M , що може бути набагато довше за n , попередньо піддається стисненню за допомогою геш-функції $H(M) = t$, і до повідомлення M додається підпис $S = t^d \bmod n$. Функція H повинна мати властивості *протидії колізіям*: t повинне істотно залежати від кожного біта M і за значенням t практично неможливо підібрати відповідне йому значення M .

Шифрування:

```
def encrypt(message, public_key):  
    n, e = public_key  
    cipher_text = pow(message, e, n)  
    return cipher_text
```

Для шифрування використовується операція залишку від ділення ($\text{pow}(\text{message}, e, n)$), де e - публічний експонент, n – модуль.

Дешифрування:

```
def decrypt(cipher_text, private_key):  
    d, p, q = private_key  
    n = p * q  
    plain_text = pow(cipher_text, d, n)  
    return plain_text
```

Для розшифрування використовується операція залишку від ділення ($\text{pow}(\text{cipher_text}, d, n)$), де d - приватний експонент, n - модуль. Результат - відкрите повідомлення.

Створення та перевірка цифрового підпису:

```
def create_digital_signature(message, private_key):  
    d, p, q = private_key  
    n = p * q  
    hashed_message = int.from_bytes(hashlib.sha256(message.encode()).digest(),  
    byteorder='big')  
    signature = pow(hashed_message, d, n)  
    return (message, signature)  
  
def verify_digital_signature(signed_message, public_key):  
    n, e = public_key  
    message, signature = signed_message  
    hashed_message = int.from_bytes(hashlib.sha256(message.encode()).digest(),  
    byteorder='big')  
    decrypted_signature = pow(signature, e, n)  
    return decrypted_signature == hashed_message
```

`message`: Повідомлення, для якого ми хочемо створити підпис.

`private_key`: Секретний ключ, який складається з d , p та q .

Спершу генерується хеш (`hashed_message`) від відкритого повідомлення.

Далі генерується підпис за допомогою операції залишку від ділення ($\text{pow}(\text{hashed_message}, d, n)$), де d - приватний експонент, n - модуль.

signed_message: Підписане повідомлення у форматі (message, signature).

public_key: Відкритий ключ, який складається з n та e .

Знову генерується хеш (hashed_message) від відкритого повідомлення.

Перевірка підпису виконується порівнянням з допомогою операції залишку від ділення ($\text{pow}(\text{signature}, e, n)$) та порівнянням результату з гешем повідомлення. Якщо вони співпадають, це свідчить про вірність підпису.

Приклад використання:

```
p, q, p1, q1 = generate_key_pairs()
alice_public_key, alice_private_key, bob_public_key, bob_private_key =
generate_rsa_keys(p, q, p1, q1)

message_to_alice = 42
cipher_text_for_alice = encrypt(message_to_alice, alice_public_key)
decrypted_message_for_alice = decrypt(cipher_text_for_alice, alice_private_key)

message_to_bob = "Hello, Bob!"
signed_message_for_bob = create_digital_signature(message_to_bob,
bob_private_key)
signature_verified = verify_digital_signature(signed_message_for_bob,
bob_public_key)

print("Message to Alice:", message_to_alice)
print("Encrypted Cipher Text for Alice:", cipher_text_for_alice)
print("Decrypted Message for Alice:", decrypted_message_for_alice)

print("Message to Bob:", message_to_bob)
print("Signed Message for Bob:", signed_message_for_bob)
print("Signature Verification Result for Bob:", signature_verified)
```

Вивід:

```
Message to Alice: 42
Encrypted Cipher Text for Alice: 121769802466802101369499159618380677315623584640923854369919586486
Decrypted Message for Alice: 42
Message to Bob: Hello, Bob!
Signed Message for Bob: ('Hello, Bob!', 561411495379713963181839787685213154172303039587009319250120905476056158314353223654883062817808504548457049128686047780977081963519437133272825060706060)
Signature Verification Result for Bob: True
```

Message to Alice: 42

Encrypted Cipher Text for Alice:

121769802466802101369499159618380677315623584640923854369919586486
772463529349634569963901909930093882499572987141627695520874057437
6213047149147964915714

Decrypted Message for Alice: 42

Message to Bob: Hello, Bob!

Signed Message for Bob: ('Hello, Bob!',
561411495379713963181839787685213154172303039587009319250120905476
056158314353223654883062817808504548457049128686047780977081963519
4371332728250607060660)

Signature Verification Result for Bob: True

Підсумовуючи, давайте глянемо на основні етапи коду:

Функція `generate_key_pairs` генерує дві пари ключів для Alice і Bob, використовуючи алгоритм RSA. Публічні ключі (`public_key`) використовуються для шифрування, приватні (`private_key`) - для розшифрування та цифрового підпису.

Alice вибирає повідомлення (`message_to_alice`), шифрує його використовуючи свій публічний ключ (`alice_public_key`), отримуючи `cipher_text_for_alice`. Потім розшифровує його, використовуючи свій приватний ключ (`alice_private_key`), отримуючи `decrypted_message_for_alice`.

Аналогічно, Bob вибирає повідомлення (`message_to_bob`), створює цифровий підпис з використанням свого приватного ключа (`bob_private_key`), отримуючи `signed_message_for_bob`. Потім він перевіряє цифровий підпис, використовуючи публічний ключ Alice (`bob_public_key`), отримуючи результат `signature_verified`.

5. За допомогою раніше написаних на попередніх етапах програм організувати роботу протоколу конфіденційного розсилання ключів з підтвердженням справжності по відкритому каналу за допомогою алгоритму RSA. Протоколи роботи кожного учасника (відправника та приймаючого) повинні бути реалізовані у вигляді окремих процедур, на вхід до яких повинні подаватись лише ті ключові дані, які необхідні для виконання. Перевірити роботу програм для випадково обраного ключа $0 < k < n$.

Аліса передає свій відкритий ключ (`e_A`, `n_A`) Бобу, і на навпаки.

Аліса обирає випадкове секретне значення k ($0 < k < n$), яке буде використано для створення спільного ключа.

Аліса зашифровує секретне значення k за допомогою відкритого ключа Боба (`e_B`, `n_B`), отримуючи `k_1`.

Аліса обчислює `S_1`, яке є підписом секретного значення k за допомогою свого секретного ключа (`d_A`, `n_A`).

Аліса відправляє Бобу пару значень (`k_1`, `S_1`).

Боб отримує (`k_1`, `S_1`) від Аліси.

Боб розшифрує k_1 за допомогою свого секретного ключа (d_B, n_B) , отримуючи секретне значення k .

Боб перевіряє підпис S_1 , використовуючи відкритий ключ Аліси (e_A, n_A) , для перевірки автентичності.

```
def send_key(public_key_B, private_key_A, public_key_A):
    k = random.randint(0, public_key_A[0] - 1)
    print("k value:", k)
    s = pow(k, private_key_A[0], public_key_A[0])
    k_1 = pow(k, public_key_B[1], public_key_B[0])
    S_1 = pow(s, public_key_B[1], public_key_B[0])
    return k_1, S_1

def recv_key(k_1, S_1, public_key_B, private_key_B, public_key_A):
    k = pow(k_1, private_key_B[0], public_key_B[0])
    S = pow(S_1, private_key_B[0], public_key_B[0])
    return k == pow(S, public_key_A[1], public_key_A[0])
```

```
k_1, S_1 = send_key(bob_public_key, alice_private_key, alice_public_key)
key_received = recv_key(k_1, S_1, bob_public_key, bob_private_key,
alice_public_key)
```

```
if key_received:
    print("Key exchange successful!")
else:
    print("Key exchange failed!")
```

k value:

206676004617717102138659510415740635300291262768313998448491281901
630099226646504287642179586949578086451357280205489731856628689093
567176096582659895014

Message to Alice: 42

Encrypted Cipher Text for Alice:

206559137185643405719164045921353202760913637181983239370944248950
496499537255136040667700189949720831007662181426905862085973336379
9756503469395319150791

Decrypted Message for Alice: 42

Message to Bob: Hello, Bob!

Signed Message for Bob: ('Hello, Bob!'

538823122383164090555194325522023119489100655039009065066837582863

289746554742982577220067022768113013355974230069492554058578229316
2397987005149274561001)

Signature Verification Result for Bob: True

Key exchange successful!

Висновки

Через два з половиною роки навчання я нарешті зрозуміла як працює RSA і тепер маю власний код, що допоможе мені розв'язувати схожі задачі на CTF, котрі раніше здавались мені складними. Все ще відчуваю себе трохи заплутано у цій кількості ключів, але до мене дійшло навіщо ми всі ці роки вчили виш мат і де він знадобиться у нашій сфері, я у це не вірила, чесне слово.