

**НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ**  
**“КІЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”**  
**ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ**

**Криптографія**

**КОМП'ЮТЕРНИЙ ПРАКТИКУМ З**  
**«Криптоаналіз афінної біграмної підстановки»**

**ФБ-32 Дорошенко Ілля**  
**Варіант 6**

**Мета:** Набуття навичок частотного аналізу на прикладі розкриття моноалфавітної підстановки; опанування прийомами роботи в модулярній арифметиці.

### **Порядок виконання роботи**

0. Уважно прочитати методичні вказівки до виконання комп’ютерного практикуму.
1. Реалізувати підпрограми із необхідними математичними операціями: обчисленням оберненого елементу за модулем із використанням розширеного алгоритму Евкліда, розв’язуванням лінійних порівнянь. При розв’язуванні порівнянь потрібно коректно обробляти випадок із декількома розв’язками, повертаючи їх усі.
2. За допомогою програми обчислення частот біграм, яка написана в ході виконання комп’ютерного практикуму №1, знайти 5 найчастіших біграм запропонованого шифртексту (за варіантом).
3. Перебрати можливі варіанти співставлення частих біграм мови та частих біграм шифртексту (розглядаючи пари біграм із п’яти найчастіших). Для кожного співставлення знайти можливі кандидати на ключ  $(a,b)$  шляхом розв’язання системи (1).

$$\begin{cases} Y^* \equiv aX^* + b \pmod{m^2} \\ Y^{**} \equiv aX^{**} + b \pmod{m^2} \end{cases}$$

4. Для кожного кандидата на ключ дешифрувати шифртекст. Якщо шифртекст не є змістовним текстом російською мовою, відкинути цього кандидата.

5. Повторювати дії 3-4 доти, доки дешифрований текст не буде змістовним.

### **Хід роботи:**

#### **Завдання 1:**

**Розширений алгоритм Евкліда:** Реалізовано для знаходження найбільшого спільного дільника (НСД) двох чисел та коефіцієнтів Безу. Це необхідно для перевірки існування оберненого елемента та його обчислення.

```

def extended_gcd(a, b):
    if a == 0:
        return b, 0, 1
    else:
        g, y, x = extended_gcd(b % a, a)
        return g, x - (b // a) * y, y

```

**Обернений елемент за модулем:** Функція обчислює  $a^{-1} \pmod{m}$ , що є необхідним для операції дешифрування. Перевіряється умова  $\gcd(a, m) = 1$ .

```

def mod_inverse(a, m):
    g, x, y = extended_gcd(a, m)
    if g != 1:
        return None
    else:
        return x % m

```

**Розв'язання лінійних порівнянь:** Розроблено функцію для знаходження невідомого  $x$  у рівнянні  $ax \equiv b \pmod{n}$ . Враховано випадок, коли  $\gcd(a, n) = d > 1$ : у такому разі рівняння має  $d$  розв'язків.

```

def solve_linear_congruence(a, b, n):
    g, x, y = extended_gcd(a, n)

    if b % g != 0:
        return []

    x0 = (x * (b // g)) % n

    solutions = []
    step = n // g
    for k in range(g):
        solutions.append((x0 + k * step) % n)

    return solutions

```

Результат виконання коду:

Тест 1:

Обернений до 3 по модулю 11 має бути 4 ( $3 \cdot 4 = 12 = 1 \pmod{11}$ )

Тест 2:

$2x \equiv 4 \pmod{6}$ . НСД(2,6)=2, тому має бути 2 розв'язки.

$2 \cdot 2 = 4$  (ok),  $2 \cdot 5 = 10 = 4 \pmod{6}$  (ok). Розв'язки: [2, 5]

```

PS D:\KPI\crypto25-26> python -u "d:\KPI\cry
--- Перевірка 1 завдання ---
Обернений елемент до 3 по модулю 11 = 4
Розв'язки порівняння 2x ≡ 4 (mod 6): [2, 5]
PS D:\KPI\crypto25-26> []

```

## Завдання 2:

**Попередня обробка:** З файлу було зчитано весь текст. Виконано фільтрацію: видалено всі символи (включно з символами переносу рядка), що не входять до визначеного 31-символьного алфавіту.

```
ALPHABET = "абвгдежзийклмнопрстуфхцчшшъэюя"  
M = len(ALPHABET)
```

**Формування біграм:** Очищений текст розбито на біграми ( $x_{2i-1}, x_{2i}$ ), що не перетинаються.

```
for i in range(0, len(clean_text), 2):  
    x1 = CHAR_TO_INDEX[clean_text[i]]  
    x2 = CHAR_TO_INDEX[clean_text[i+1]]  
    indices.append(x1 * M + x2)
```

**Числове подання:** Кожна біграма була переведена у числове значення X за формулою:

$$X = x_1 * m + x_2 = x_1 * 31 + x_2$$

де  $x_1$  та  $x_2$  — порядкові номери першої та другої літери біграми відповідно.

**Статистичний аналіз:** Підраховано кількість входжень кожного числа X у шифртексті та відсортовано їх за спаданням частоти.

Результат виконання коду:

```
--- Перевірка 2 завдання ---  
Аналіз файлу: tasks/cp3/variants.utf8/06.txt  
Всього біграм: 3456  
Топ-5 найчастіших біграмм (числа): [780, 656, 715, 346, 684]  
Розшифровка:  
    780 -> 'щे'  
    656 -> 'хе'  
    715 -> 'чв'  
    346 -> 'ле'  
    684 -> 'цв'  
PS D:\KPI\crypto25-26> []
```

## Завдання 3:

**Формування пар:** Перебираються всі можливі пари біграм мови ( $X^*, X^{**}$ ) та всі можливі пари біграм шифртексту ( $Y^*, Y^{**}$ ). Загальна кількість комбінацій для перевірки становить  $(5 * 4) * (5 * 4) = 400$  варіантів систем рівнянь.

**Розв'язання системи порівнянь:** Для кожної комбінації складається система лінійних порівнянь:

$$\begin{cases} Y^* \equiv aX^* + b \pmod{m^2} \\ Y^{**} \equiv aX^{**} + b \pmod{m^2} \end{cases}$$

**Знаходження параметра a:** Шляхом віднімання другого рівняння від першого виключається невідоме b, і розв'язується лінійне порівняння відносно a:

$$(Y^* - Y^{**}) \equiv a(X^* - X^{**}) \pmod{m^2}$$

Для розв'язання використано реалізовану функцію `solve_linear_congruence`.

```
diff_X = (X1 - X2) % M2
diff_Y = (Y1 - Y2) % M2

candidates_a = solve_linear_congruence(diff_X, diff_Y, M2)
```

**Фільтрація:** З отриманих розв'язків відбираються лише ті значення a, які задовольняють умову існування оберненого елемента:  $\gcd(a, m) = 1$  (де  $m=31$ ).

**Знаходження параметра b:** Для кожного коректного a обчислюється другий елемент ключа:

$$b \equiv (Y^* - aX^*) \pmod{m^2}$$

```
b = (Y1 - a * X1) % M2
```

Результат виконання коду:

```
-- Перевірка з завдання ---
Починаємо перевірку варіантів...
Топ-5 біграм мови (X): [545, 417, 572, 403, 168]
Топ-5 біграмм шифтексту (Y): [780, 656, 715, 346, 684]

Згенеровано унікальних ключів: 348
Кандидати на ключ (a, b):
(146, 441)
(334, 906)
(549, 565)
(781, 817)
(622, 442)
(80, 360)
(119, 873)
(797, 937)
(839, 287)
(737, 10)
(397, 427)
(656, 687)
(439, 591)
(800, 551)
(115, 875)
(719, 724)
(757, 360)
(18, 515)
(646, 749)
(332, 720)
(374, 70)
(117, 41)
(68, 228)
(133, 623)
(67, 687)
(319, 902)
(892, 782)
(180, 582)
(536, 747)
```

#### Завдання 4:

**Алгоритм дешифрування:** Для кожного кандидата ( $a, b$ ) виконувалося пробне дешифрування фрагмента тексту (перші 300 біграм) за формулою оберненого афінного перетворення:

$$X = a^{-1}(Y - b) \pmod{m^2}$$

де  $a^{-1}$  — мультиплікативна інверсія числа  $a$  за модулем  $m^2$  (961).

```
X = (a_inv * (Y - b)) % M2
```

**Розробка критеріїв змістовності (Розпізнавач мови):** Відповідно до методичних вказівок, розпізнавач базувався на статистичних властивостях мови. У ході роботи було протестовано два підходи:

1. Перевірка частот біграм (відповідно до п. 3):

Спочатку перевірка здійснювалася шляхом пошуку "неможливих" поєднань літер (наприклад, «ъ», «ъ», «ъ», «щ»).

- *Результат:* Цей метод виявився недостатнім. Було отримано хибне спрацювання на ключі ( $a=146, b=441$ ), який давав текст без заборонених біграм, але семантично беззмістовний (набір випадкових складів).

```
Перевірка 348 кандидатів...
```

```
УСПІХ! Знайдено ймовірний ключ: a=146, b=441
```

```
Уривок: тдтонэпоюховыайпизштдибоэедруулдюжбяглбекъепшхционйпфповыхноципдзйнэмжпдсюедть...
```

```
Повний текст збережено у файл: decrypted_key_146_441.txt
```

2. Перевірка частот довільних 1-грам (відповідно до п. 4):

Для усунення хибних спрацювань алгоритм було вдосконалено. Було впроваджено перевірка частот довільних 1-грам оцінки тексту:

- Текст отримував штрафні бали за наявність заборонених біграм.
- Текст отримував бонусні бали за наявність найпоширеніших часток та прийменників російської мови («на», «то», «не», «ст», «по»), що фактично є перевіркою на наявність характерних 2-грам та 3-грам.

Результат виконання коду:

```
--- Перевірка 4 завдання: дешифрування ---
Кандидат #93
a = 441
b = 310
Оцінка = 42
Уривок: ктробълотихоегородоктанныйтымоймизножилсяавпїтєлипришолетоиветербъфлетнийтеп

НАЙКРАЩИЙ КЛЮЧ
a = 441, b = 310
Оцінка: 42
Дешифрований текст збережено у файл: lab3/Doroshenko_fb-32_cp3/decrypted_key_441_310.txt

Початок дешифрованого тексту:
ктробълотихоегородоктанныйтымоймизножилсяавпїтєлипришолетоиветербъфлетнийтеплоедъханиемиренспешноилененоаитлисътачсвийнучссяв
окошкоитотчыпотмешывотонанцчинаенянытоящасвободаижиринывотонопервоеутролетадугламыполдингдвенадцатилетотродуторскочтооткрълглазаикаквт
еплуоречкагрузилсявпредр
PS D:\KPI\crypto25-26> []
```