МЕНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО”

ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ

КРИПТОГРАФІЯ

КОМП’ЮТЕРНИЙ ПРАКТИКУМ №4

Вивчення криптосистеми RSA та алгоритму електронного підпису; ознайомлення з методами генерації параметрів для асиметричних криптосистем

Виконали:
ФБ-33 Охріменко Анастасія

ФБ-33 Телегіна Софія

Перевірила:
Селюх Поліна Валентинівна

Мета роботи:

Ознайомлення з тестами перевірки чисел на простоту і методами генерації ключів для асиметричної криптосистеми типу RSA; практичне ознайомлення з системою захисту інформації на основі криптосхеми RSA, організація з використанням цієї системи засекреченого зв'язку й електронного підпису, вивчення протоколу розсилання ключів.

Порядок виконання роботи

1. **Написати функцію пошуку випадкового простого числа з заданого інтервалу або заданої довжини, використовуючи датчик випадкових чисел та тести перевірки на простоту. В якості датчика випадкових чисел використовуйте вбудований генератор псевдовипадкових чисел вашої мови програмування. В якості тесту перевірки на простоту рекомендовано використовувати тест Міллера-Рабіна із попередніми пробними діленнями. Тести необхідно реалізовувати власноруч, використання готових реалізацій тестів не дозволяється.**

```
def generate_prime(bits: int, k: int = 8, max_failed_store: int = 30) -> int:
    if bits < 2:
        raise ValueError("bits must be >= 2")
    lower = 1 << (bits - 1)
    upper = (1 << bits) - 1
    failed: List[int] = []

    while True:
        candidate = secrets.randbits(bits) | (1 << (bits - 1)) | 1
        if candidate > upper:
            candidate = candidate >> 1
        if is_probable_prime(candidate, k=k):
            if failed:
                print(f"Candidates that failed primality test (last
{len(failed[-max_failed_store:])}): {failed[-max_failed_store:]} (total
{len(failed)})")
            return candidate
        else:
            failed.append(candidate)
```

В функціїї generate_prime генерує випадкове число потрібної бітової довжини (використовується вбудований генератор secrets), робить його непарним, перевіряє на простоту через тест Міллера-Рабіна, повторює генерацію, поки не знайде просте число

```
def is_probable_prime(n: int, k: int = 8) -> bool:
    if n < 2:
        return False
```

```
    if n in (2, 3):
        return True
    if n % 2 == 0:
        return False

    d = n - 1
    r = 0
    while d % 2 == 0:
        d //= 2
        r += 1

    for _ in range(k):
        a = secrets.randbelow(n - 3) + 2
        x = pow(a, d, n)
        if x == 1 or x == n - 1:
            continue
        for _ in range(r - 1):
            x = pow(x, 2, n)
            if x == n - 1:
                break
            if x == 1:
                return False
        else:
            return False
    return True
```

Функція is_probable_prime попередньо спочатку відсіює елементарні випадки, предсатвляє числа у вигляді n - 1 = 2^r * d, далі виконується цикл: вибирається випадкове число (a ∈ [2, n - 2]), обчислюємо x=a^d modn та якщо x == 1 або x == n - 1 - число може бути простим. Наступний етап $a^{2^t d} mod n$: якщо в якийсь момент x == n - 1 число може бути простим; якщо x == 1 раніше ніж перше піднесення - це ознака складеного числа; якщо цикл завершився без n - 1 - число складене.

2. **За допомогою цієї функції згенерувати дві пари простих чисел p, q і p1 , q1 довжини щонайменше 256 біт. При цьому пари чисел беруться так, щоб pq <= p1q1 ; p і q – прості числа для побудови ключів абонента A, 1 p і q1 – абонента B.**

```
pub_A, sec_A = generate_keypair(bits=256)
pub_B, sec_B = generate_keypair(bits=256)
```

```
def generate_keypair(bits: int = 256) -> Tuple[Tuple[int,int],
Tuple[int,int,int]]:
    p = generate_prime(bits)
```

```
    q = generate_prime(bits)
    while q == p:
        q = generate_prime(bits)

    n = p * q
    phi = (p - 1) * (q - 1)
    e = 65537
    if math.gcd(e, phi) != 1:
        while True:
            e = secrets.randbelow(phi - 2) + 2
            if math.gcd(e, phi) == 1:
                break

    d = modinv(e, phi)
    if d is None:
        raise RuntimeError("Failed to find modular inverse for phi")

    return (n, e), (d, p, q)
```

Генерація двох пар простих чисел p, q та p_1, q_1 за допомогою тесту Міллера–Рабіна

```
n_A = sec_A[1] * sec_A[2]
    n_B = sec_B[1] * sec_B[2]

    if n_A >= n_B:
        pub_A, pub_B = pub_B, pub_A
        sec_A, sec_B = sec_B, sec_A
        n_A, n_B = n_B, n_A
```

Перевірка й перестановка пар так, щоб $p \cdot q \leq p_1 \cdot q_1$. Обчислюється n_A = $p \cdot q$ і n_B = $p_1 \cdot q_1$ Якщо випадково вийшло n_A > n_B (тобто $p \cdot q > p_1 \cdot q_1$), то міняються місцями ключі абонентів A та B.

3. **Написати функцію генерації ключових пар для RSA. Після генерування функція повинна повертати та/або зберігати секретний ключ (d, p,q) та відкритий ключ (n,e) . За допомогою цієї функції побудувати схеми RSA для абонентів A і B – тобто, створити та зберегти для подальшого використання відкриті ключі (e,n) , (e1 ,n1) та секретні d і d1 .**

```
def generate_keypair(bits: int = 256) -> Tuple[Tuple[int,int],
Tuple[int,int,int]]:
    p = generate_prime(bits)
    q = generate_prime(bits)
    while q == p:
        q = generate_prime(bits)
```

```
    n = p * q
    phi = (p - 1) * (q - 1)
    e = 65537
    if math.gcd(e, phi) != 1:
        while True:
            e = secrets.randbelow(phi - 2) + 2
            if math.gcd(e, phi) == 1:
                break

    d = modinv(e, phi)
    if d is None:
        raise RuntimeError("Failed to find modular inverse for phi")

    return (n, e), (d, p, q)
```

У функції generate_keypair виконується генерація простих чисел p і q, далі відбувається обчислення модуля n, обчислення значення φ(n). Тепер береться стандартне значення e = 65537, якщо раптом gcd(e, φ) != 1, тобто e не є взаємно простим з φ(n), тоді програма: випадково підбирає інше число e, поки не знайде таке, що gcd(e, φ) = 1. Далі знаходження $d = e^{-1} mod \varphi(n)$

4. **Написати програму шифрування, розшифрування і створення повідомлення з цифровим підписом для абонентів А і В. Кожна з операцій (шифрування, розшифрування, створення цифрового підпису, перевірка цифрового підпису) повинна бути реалізована окремою процедурою, на вхід до якої повинні подаватись лише ті ключові дані, які необхідні для її виконання. За допомогою датчика випадкових чисел вибрати відкрите повідомлення М і знайти криптограму для абонентів А и В, перевірити правильність розшифрування. Скласти для А і В повідомлення з цифровим підписом і перевірити його.**

```
def encrypt(m: int, e: int, n: int) -> int:
    return pow(m, e, n)
```

На вхід подається лише відкритий ключ (e, n) і саме повідомлення M. Повертається криптограма C = M^e mod n.

```
def decrypt(c: int, d: int, n: int) -> int:
    return pow(c, d, n)
```

На вхід подається лише секретний ключ (d) та n. Повертає M = C^d mod n

```
def sign(m: int, d: int, n: int) -> int:
```

```
    return pow(m, d, n)
```
Створюємо підпис S = M^d mod n

```
def verify_signature(m: int, s: int, e: int, n: int) -> bool:
    return m == pow(s, e, n)
```
Декриптує підпис: S^e mod n

```
message = secrets.randbelow(min(n_A, n_B) - 1) + 1
```
Вибераємо випадкове повідомлення M датчиком випадкових чисел

```
encrypted_message = encrypt(message, pub_B[1], pub_B[0])
encrypted_message = encrypt(message, e_receiver, n_receiver)
```
Шифрування повідомлення для A та B

```
decrypted_message = decrypt(encrypted_message, sec_B[0], pub_B[0])
```
Перевірка правильності розшифрування

```
signature = sign(message, sec_A[0], pub_A[0])

signature = sign(message, d_sender, n_sender)
encrypted_signature = encrypt(signature, e_receiver, n_receiver)
```
Створення повідомлення з цифровим підписом

```
signature_valid = verify_signature(decrypted_message, decrypted_signature,
pub_A[1], pub_A[0])
```
Перевірка цифрового підпису

5. **За допомогою раніше написаних на попередніх етапах програм організувати роботу протоколу конфіденційного розсилання ключів з підтвердженням справжності по відкритому каналу за допомогою алгоритму RSA. Протоколи роботи кожного учасника (відправника та приймаючого) повинні бути реалізовані у вигляді окремих процедур, на вхід до яких повинні подаватись лише ті ключові дані, які необхідні для виконання. Перевірити роботу програм для випадково обраного ключа 0 < k < n.**

```
def sender_protocol(k: int, sender_public: Tuple[int,int], sender_secret:
Tuple[int,int,int],
                    receiver_public: Tuple[int,int]) -> Tuple[int,int]:
    encrypted_message, encrypted_signature = send_key(k, sender_public,
sender_secret, receiver_public)
    return encrypted_message, encrypted_signature
```

Спочатку виконується підпис k, далі шифрування k, шифрування підпису та повернення encrypted_message, encrypted_signature

```
def receiver_protocol(encrypted_message: int, encrypted_signature: int,
                      sender_public: Tuple[int,int],
                      receiver_secret: Tuple[int,int,int],
                      receiver_public: Tuple[int,int]) -> Tuple[int,bool]:
    k, is_valid = receive_key(encrypted_message, encrypted_signature,
sender_public, receiver_secret, receiver_public)
    return k, is_valid
```

Відбувається розшифрування k, розшифрування підпису, перевірка підпису та повернення значень (k, is_valid)

6. **Кожну операцію рекомендується перевіряти шляхом взаємодії із тестовим середовищем, розташованим за адресою http://asymcryptwebservice.appspot.com/?section=rsa**

Результат:

Перевірки:

Encryption

Clear

Modulus EA1F76FA74C44C9D8CA0E7CF937569250A8831F992D713F955836B708AD6E0663DD9D0BE61D45D9A0459C

Public exponent 10001

Message 90E9FDFDAE0987337972A23EFA4CA6DF23B85C5A310ADBA55A8098F8C45C9 Bytes

Encrypt

Ciphertext 0BBCBB2A81583C76F3DE9CD072C04366DAE1C584AA7AC6E6823DB598D725427CC469E4D4869F8F436450

Decimal to Hexadecimal converter

From Decimal To Hexadecimal

Enter decimal number

614728663669812133713509707450884899 10

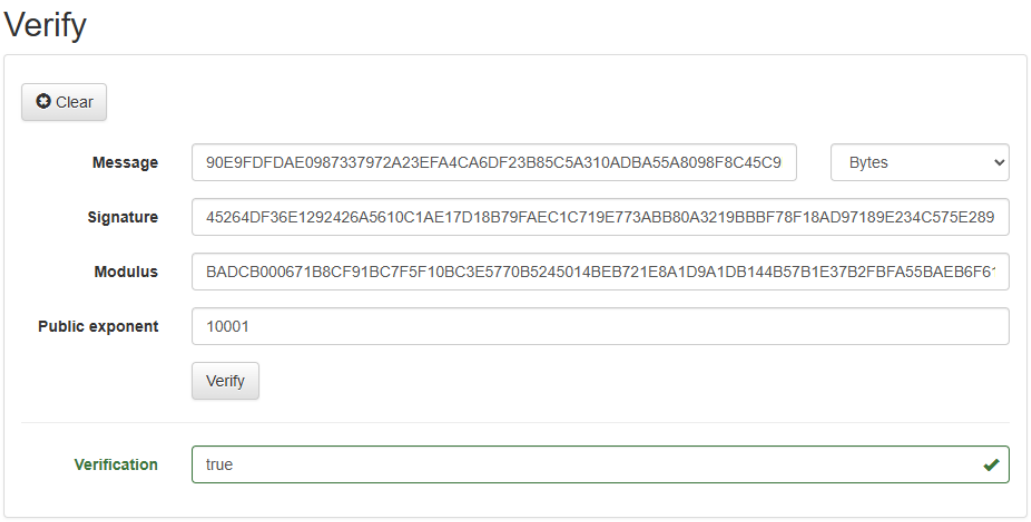
= Convert × Reset ⇅ Swap

Hex result

(614728663669812133713509707450884899452783388695482501556972579225921914039190199729695578712175975474604584389360388433759124166225061423568093470172387)$_{10}$ = (BBCBB2A81583C76F3DE9CD072C04366

Hex number (127 digits)

BBCBB2A81583C76F3DE9CD072C04366DAE1C584AA7AC6E6823DB598D725427CC469E4D4869F8F436450BEB78010D2D2E4A25964128EDF581A5C9DEBE8EEA4E3 16



Висновки:

У ході роботи було реалізовано алгоритм RSA з генерацією простих чисел, обчисленням модуля n, публічного (e) та приватного (d) ключів, а також операцій шифрування, дешифрування, підпису та перевірки підпису. Було реалізовано роботу протоколу у вигляді окремих процедур для відправника (sender_protocol) та отримувача (receiver_protocol). Ща допомогою сайту було перевірено шифрування та перевірка підпису.