

改良式 GM(1,1)灰預測模型於台電電量需求預測之研究

洪國禎、吳國榮

國防大學 運籌管理學系

E-mail: kuochen.hung@msa.hinet.net

摘 要

灰色系統理論中的 GM(1,1)預測模型，藉由少數數據資料即可進行預測的特性，已成功被廣泛應用於各研究領域中。然而，從 GM(1,1)預測模型中，仍有多處疑問可探討：(1)GM(1,1)適合於那些特定的資料型態？(2)GM(1,1)中的一階線性微分方程式屬於收斂型式，有異於累加生成（AGO）空間遞增數據之假設。(3)在 GM(1,1)預測模型運算中，多次逆累加生成（IAGO）不恰當之運算將造成誤差增加。本研究為改善上述問題，嘗試提供一修正模型，並結合指數平滑法，以台電 1997 年至 2003 年電量需求預測為例進行驗證，再與原灰預測 GM(1,1)模型進行比較。結果顯示，本研究所提的改良式預測模型確實能大幅降低絕對誤差，大幅增加預測精準度。

關鍵詞：灰色理論、GM(1,1)、灰預測模式、電力需求

1. 前 言

自古至今，許多科學家們思考研發的預測模型種類雖然繁多，方法各異，也各有殊勝之處，不過在經過整理之後可以發現，這些預測模型大約有時間序列分析、迴歸分析、類神經網路、灰色理論等，其優缺點彙整如表 1。在眾多的預測模型中，雖然各有優劣，但對於科學家們來說，只有不斷提升模型預測精確度，並跟實務結合以掌握更精確的未來資訊，才是唯一目標。

Deng 0所發展的灰預測GM(1,1)模型，是一種非統計理論以較少資料作預測的模型，目前已應用在各個不同的領域，如社會科學、醫療科學、管理科學與工程學等。在社會科學領域的應用方面，如Lin and Chen 0運用灰關連進行銀行服務率下降分析，Chang et al. 0預測反覆無常的NASDAQ 指數，Chen et al. 0以股票市場中應用GM(1,1)模型作為市場行為的分析工具，預測台灣股票指數價格；醫療科學領域應用方面，如Zhang et al. 0應用灰色理論於醫院傳染病預測，Kung et al. 0以台灣地區 2002 至 2005 年全民健康保險費用應用GM(1,1)模型預測 2006 年全民健康保險費用，也發現影響醫療費用的重要因素；工程領域應用方面，如Cheng and Chang 0以灰預測對於地震進行分析，Fu et al. 0植基於灰色理論模式於資料地圖最佳化考量，Huang and Wen 0以GM(1,1)進行通訊網路安全建構，Lu et al. 0應用GM(1,1)模型預測交通意外事故來改善交通公共設施以維交通安全；農業領域應用方面，如Zhang and Luo 0兩位學者應用GM(1,1)模型進行種植穀類方面的預測，Long et al. 0進行水果與森林產量預測；另在其他領域應用方面，如Lin and Hsu 0兩位學者應用GM(1,1)模型以台灣五個最大的媒體網路業者預測其廣告收入，並與日本相比較，且更應用其預測台灣非酒精飲料的銷售額Lin and Hsu 0；另Kung et al. 0應用GM(1,1)模型預測電腦遊戲在台灣市場行為，Kung and Chang 0應用GM(1,1)模型預測中國汽車工業。

綜上所述，GM(1,1)模型的應用可分為預測與回歸兩個研究領域，而不管是應用其進行預測或回歸來處理問題，都是以Deng 0所提出的GM(1,1)模型為主。但鄧教授所提出的GM(1,1)模型中的一階線性微分方程式屬於收斂型式，有異於AGO空間遞增數據之假設，且在GM(1,1)預測模型運算中，多次IAGO不恰當之運算造成誤差增加，故本研究即針對上述問題加以改善。

有關本研究內容組織如后，第二節灰預測 GM(1,1) 模型簡介；第三節為針對原灰預測 GM(1,1) 模型所建議的改善方法提出說明；第四節以台電公司 1997~2003 年台灣地區需電量作實例驗證並分析討論實例驗證結果；最後作一結論及建議。

表 1 各預測方法優缺點比較

| 預測方法 | 內涵 | 優點 | 缺點 |
|--------|--|---|---|
| 時間序列分析 | 基本上並不採用其他的變數，而只採用過去的資料來構建預測模式，時間數列分析對中長期預測仍有很大的效果。 | 1. 對於週期性、季節及循環性之趨勢易於掌握。 2. 純粹以變數歷史數據做為預測基礎，資料收集容易，成本花費低。 | 1. 模式選擇需高度技巧與經驗。 2. 缺乏經濟理論基礎，造成模式解釋不易。 |
| 迴歸分析 | 以有關數據來表示事實，以及以所謂計量經濟技術的統計理論及方法來測量與檢定某些經濟變數間的關係，從而提供經濟分析的實證背景。 | 在滿足變數間為獨立等假設，樣本的分布。 有同趨勢之規律性時，根據大量樣本個數。 即可計算出迴歸線性方程式，其準確率頗高。 | 1. 係數固定，故對外在因素的改變，缺乏反應之彈性。 2. 需具有使用及解說預測結果的經驗。 3. 計算頗繁雜，且不適用於少量樣本之場合。 |
| 類神經網路 | 一種計算系統，使用大量簡單相連的人工神經元來模仿生物神經網路的能力。從外界環境或者其他人工神經元取得資訊，加以非常簡單的運算，並輸出其結果到外界環境或者其他人工神經元。 | 1. 輸入與輸出變數之間的關係，事前無需任何假設。 2. 可以合成多維函數。 3. 以簡單的網路權數描述複雜的數據集合。 4. 可適用於任意型態的輸出輸入對映關係。 | 1. 無法保證可找到全面誤差的最小點。 2. 最佳隱藏層數目與神經元數目無規則可循。 3. 網路結構大時學習速率緩慢。 4. 很難對權數產生的結果提出解釋。 |
| 灰色預測 | 能充分運用有限的數據訊息與不完全訊息預測未來數值。 | 1. 模式操作簡單。 2. 所需原始數列元素數目要求少（超過四筆即可）。 3. 不需事前假設數列分布情形。 4. 精準度高。 | 模型參數採最小平方方法推估，在系統受干擾時會產生偏誤估計。 |

2. 灰預測 GM(1,1) 模型

灰預測主要功能是應用於系統模型訊息不完全、影響變數紛雜、行為模式不確定、運作機制不清楚的狀況下，進行系統的關聯分析、模型建構、預測、決策與控制等工作。灰色模型 GM(n,h) 是一個動態行為，它包含一群微分方程式，其中“n”代表微分方程式的階數，“h”代表微分方程式的變數數目，故 GM(1,1) 即可定義為一階微分，輸入變數為一之基本模式。GM(1,1) 是一個對現有數據進行預測的預測方法，找出某一數列間未來動態之狀況 0。主要優點為所需的數據不用太多及數學基礎相當簡單，以原始序列 $X^{(0)}$ 的觀測值而言，建立預測模型的前題是其級比 $\sigma^{(0)}$ 應落於區間 (0.135, 7.389)，級比 $\sigma^{(0)}$ 過大而進入 (7.389, ∞)，或過小而進入 ($-\infty$, 0.135)，都不可能建立具有實用價值的預測模型，灰色預測模型說明如下：

利用系統歷史行為所建立的一種預測模型，經由對少量且不確定的資料進行灰生成來降低數據的隨機性，以尋找出內在規律性，並經由處理過後之數列轉化為微分方程建構一個灰色系統模型，來推知系統未來狀態以達近似預測的功能。原灰預測 GM(1,1) 模型的預測步驟如下：

步驟 1：首先列出歷史觀察非負數列，即原始數列

$$X^{(0)} = \{X^{(0)}(1), X^{(0)}(2), \dots, X^{(0)}(n)\}$$

步驟 2：進行 AGO 處理，定義為的一次 AGO 數列，即

$$\begin{aligned} X^{(1)} &= \{X^{(1)}(1), X^{(1)}(2), \dots, X^{(1)}(n)\} \\ &= \left\{ \sum_{k=1}^1 X^{(0)}(k), \sum_{k=1}^2 X^{(0)}(k), \dots, \sum_{k=1}^n X^{(0)}(k) \right\} \end{aligned}$$

GM(1,1)模型之一階微分方程為：

$$\frac{dX^{(1)}}{dt} + aX^{(1)} = b \quad (1)$$

其中 t 為系統之自變數， a 為發展係數， b 為灰色控制變數， a 與 b 為模式之待定參數。

步驟 3：進行離散化

$$\frac{dX^{(1)}}{dt} + aX^{(1)} = b \xrightarrow{\text{離散化}} X^{(0)}(k) + aZ^{(1)}(k) = b \quad (2)$$

步驟 4：求 $Z(1)$ 值，以 $\alpha = 0.5$

$$Z^{(1)}(k) = 0.5X^{(1)}(k) + 0.5X^{(1)}(k-1) \quad (3)$$

因系統輸出所得資料為離散數據，由(2)式得一聯立方程式，再由最小平方解聯立方程得 a, b 。

步驟 5：以最小平方方法求 a, b

$$p = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = (B^T B)^{-1} B^T y_n$$

其中累加矩陣 B 為

$$B = \begin{bmatrix} -Z^{(1)}(2) & 1 \\ -Z^{(1)}(3) & 1 \\ \vdots & 1 \\ -Z^{(1)}(n) & 1 \end{bmatrix}$$

常數項向量 y_n 為

$$y_n = \begin{bmatrix} X^{(0)}(2) \\ X^{(0)}(3) \\ \vdots \\ X^{(0)}(n) \end{bmatrix}$$

故 $y_n = Bp$

也就是 $X^{(0)}(k) + aZ^{(1)}(k) = b$

步驟 6：建立灰預測模型，從灰微分方程式

$$\frac{dX^{(1)}}{dt} + aX^{(1)} = b, \quad X^{(1)}(1) = X^{(0)}(1), \quad \text{且初始條件}$$

經積分因子法得

$$\hat{X}^{(1)}(k+1) = \left[X^{(0)}(1) - \frac{b}{a} \right] e^{-ak} + \frac{b}{a}, \quad k \geq 0 \quad (4)$$

步驟 7：經 IAGO 後得

$$\hat{X}^{(0)}(k) = \hat{X}^{(1)}(k) - \hat{X}^{(1)}(k-1) = (1-e^a) \left[X^{(0)}(1) - \frac{b}{a} \right] e^{-a(k-1)} \quad (5)$$

$$\hat{X}^{(0)}(k+1) = (1-e^a) \left[X^{(0)}(1) - \frac{b}{a} \right] e^{-ak} \quad (6)$$

經上述(5)式逆累加生成後，所得數列需進一步進行殘差檢驗，以瞭解預測值和實際值間之殘差 $e(k)$ 。

步驟 8：使用殘差檢驗法，進行殘差檢驗

$$e(k) = \left| \frac{X^{(0)}(k) - \hat{X}^{(0)}(k)}{X^{(0)}(k)} \right| \times 100\% \quad (7)$$

若絕對平均百分比誤差小於 10%，則此模式之預測效能良好。

步驟 9：求算絕對平均百分比誤差(簡稱 MAPE)

$$\text{MAPE} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left[\frac{|\hat{X}^{(0)}(k) - X^{(0)}(k)|}{X^{(0)}(k)} \right]$$

步驟 10：進行實際預測

$$\hat{X}^{(0)}(k+1) = (1-e^a) \left[X^{(0)}(1) - \frac{b}{a} \right] e^{-ak}$$

原灰預測 GM(1,1) 模型的流程如圖 1。

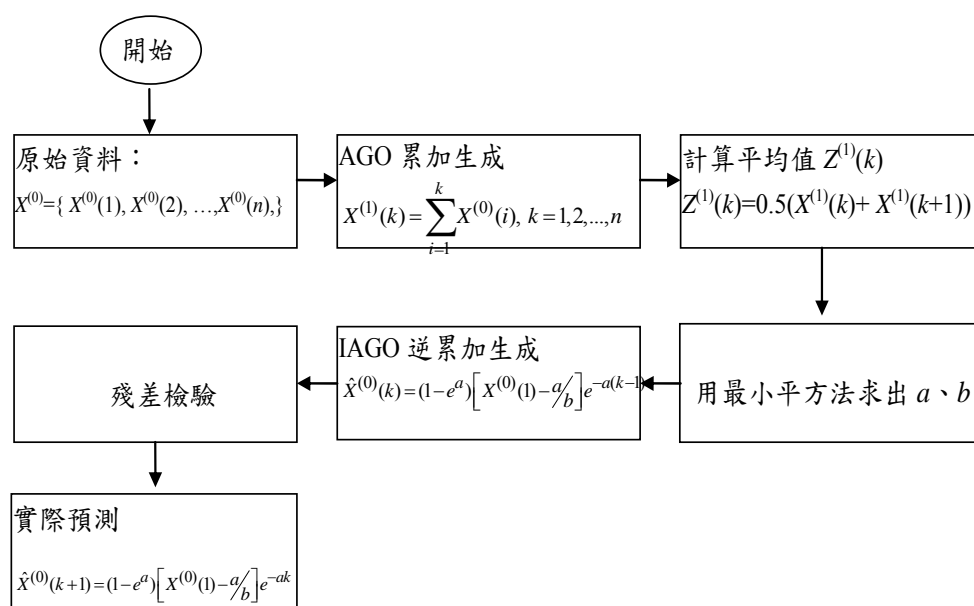


圖 1 原灰預測 GM(1,1)模型的流程圖

3. 改良 GM(1,1)模式

此節將針對從Deng 0所提出的GM(1,1)模型中所發現的問題，並建議一個修正後改良的GM(1,1)模型，故以下即為本研究所發現須改善的問題：

- (1) 由於 GM(1,1)模型中的一階線性微分方程式屬於收斂型式，有異於 AGO 空間遞增數據之假設，故應將一階線性微分方程式改為發散型式。
- (2) 在 GM(1,1)預測模型運算中，多次 IAGO 不恰當之運算造成誤差增加，應在運算過程中將誤差再以修正，使預測結果的誤差降低。

3.1 改善灰微分方程式

上述(4)式為鄧聚龍教授所提倡的想法，但 GM(1,1)中的一階線性微分方程式屬於收斂型式，有異於 AGO 空間遞增數據之假設，故修正使其為遞增現象如后：

定理 1：令原灰微分方程

$$\frac{dX^{(1)}}{dt} + aX^{(1)} = b \xrightarrow{\text{轉換成}} \frac{dX^{(1)}}{dt} - aX^{(1)} = b$$

且初始條件 $X^{(1)}(1) = X^{(0)}(1)$ ，故得預測方程式 $\hat{X}^{(1)}(k+1)$ 如下所示：

$$\hat{X}^{(1)}(k+1) = \left[X^{(0)}(1) + \frac{b}{a} \right] e^{ak} - \frac{b}{a}, \quad k \in N \quad (8)$$

證明：利用積分因子法得修正後的預測模型

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} [e^{-at} X^{(1)}(t)] &= e^{-at} \frac{d}{dt} X^{(1)}(t) - ae^{-at} X^{(1)}(t) \\
\frac{d}{dt} [e^{-at} X^{(1)}(t)] &= e^{-at} b \\
e^{-at} X^{(1)}(t) &= b \int e^{-at} dt = -\frac{b}{a} e^{-at} + C \\
X^{(1)}(t) &= -\frac{b}{a} + e^{at} C \quad \dots\dots(1) \\
C &= \left[X^{(1)}(t) + \frac{b}{a} \right] e^{-at} \quad \text{令 } t=1, X^{(1)}(1) = X^{(0)}(1) \\
C &= \left[X^{(0)}(1) + \frac{b}{a} \right] e^{-a} \quad \text{代回(1)式} \\
X^{(1)}(t) &= -\frac{b}{a} + e^{at} e^{-a} \left[X^{(0)}(1) + \frac{b}{a} \right] \\
X^{(1)}(t) &= \left[X^{(0)}(1) + \frac{b}{a} \right] e^{a(t-1)} - \frac{b}{a} \quad t=t+1 \text{ 代入} \\
X^{(1)}(t+1) &= \left[X^{(0)}(1) + \frac{b}{a} \right] e^{at} - \frac{b}{a} \\
\therefore X^{(1)}(t) &= X^{(1)}(k) \\
\therefore \hat{X}^{(1)}(k+1) &= \left[X^{(0)}(1) + \frac{b}{a} \right] e^{ak} - \frac{b}{a}, \quad k \in N
\end{aligned}$$

定理 2：上述(8)式經 IAGO 後得

$$\hat{X}^{(0)}(k+1) = (1 - e^{-a}) \left[X^{(0)}(1) + \frac{b}{a} \right] e^{ak} \quad (9)$$

3.2 灰預測修正值 μ 之推導

經由上一節所得修正後，發現在 GM(1,1) 預測模型的運算中，因多次 IAGO 不恰當之運算已造成的誤差存在，且在推導的過程中並不符合初始條件 $\hat{X}^{(0)}(1) = X^{(0)}(1)$ ，證明有誤差項存在，應排除其誤差值才能使預測更精準。其推導過程如下：

定理 3：已知定理 2，而回歸本體初始條件 $\hat{X}^{(0)}(1) = X^{(0)}(1)$ 應成立，但並未成立，發現 $\hat{X}^{(0)}(1) \neq X^{(0)}(1)$ ，故產生一誤差項 μ 。

$$\mu = \frac{b}{a} - \left[X^{(0)}(1) + \frac{b}{a} \right] e^{-a} \quad (10)$$

證明：

$$\begin{aligned}
\hat{X}^{(0)}(1) &= (1 - e^{-a}) \left[X^{(0)}(1) + \frac{b}{a} \right] \\
&= X^{(0)}(1) - X^{(0)}(1)e^{-a} + \frac{b}{a} - \frac{b}{a}e^{-a} \\
\hat{X}^{(0)}(1) - X^{(0)}(1) &= \frac{b}{a} - \left[X^{(0)}(1) + \frac{b}{a} \right] e^{-a} \\
\text{定義：修正值 } \mu &\equiv \frac{b}{a} - \left[X^{(0)}(1) + \frac{b}{a} \right] e^{-a}
\end{aligned}$$

3.3 灰預測修正值 $\mu(k)$ 之推導

上述(10)式所推導 μ 修正值僅為修訂原始資料第一點 $X^{(0)}(1)$ 與預測值第一點 $\hat{X}^{(0)}(1)$ 之誤差值，對於其他各點的誤差值推導如下：

定理 4：

$$\mu(k) = e^{a(k-1)} \left[X^{(0)}(1) + \mu \right] - X^{(0)}(k) \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
\text{證明：} \because \hat{X}^{(0)}(k) &= \left[X^{(0)}(1) + \frac{b}{a} \right] e^{a(k-1)} (1 - e^{-a}) \\
\therefore \hat{X}^{(0)}(k) - X^{(0)}(k) &= \left[X^{(0)}(1) + \frac{b}{a} \right] e^{a(k-1)} (1 - e^{-a}) - X^{(0)}(k) \\
&= e^{a(k-1)} \left\{ X^{(0)}(1) + \frac{b}{a} - \left[X^{(0)}(1) + \frac{b}{a} \right] e^{-a} \right\} - X^{(0)}(k) \\
&= e^{a(k-1)} \left\{ X^{(0)}(1) + \frac{b}{a} - \left[X^{(0)}(1) + \frac{b}{a} \right] e^{-a} + \frac{b}{a} - \frac{b}{a} \right\} - X^{(0)}(k) \\
&= e^{a(k-1)} \left[X^{(0)}(1) + \frac{b}{a} + \mu - \frac{b}{a} \right] - X^{(0)}(k) \\
&= e^{a(k-1)} \left[X^{(0)}(1) + \mu \right] - X^{(0)}(k)
\end{aligned}$$

定義 $\mu(k)$ 為一般項之修訂值，當 $k=1$ ， $\mu(k)|_{k=1} = \mu$

3.4 指數平滑法求 $\mu(k+1)$

由於公式(11)所推導出 $\hat{X}^{(0)}(k) - X^{(0)}(k) = \mu(k)$ ， $k \in \mathbb{N}$ 成立，故 $\hat{X}^{(0)}(k+1) - X^{(0)}(k+1) = \mu(k+1)$ 也應該成立，唯 $X^{(0)}(k+1)$ 不知而無法求得 $\mu(k+1)$ ，故本研究將針對 Hung et al. 0 所提出以原始數列 $X^{(0)}(k)$ 進行一次 GM(1,1) 模型預測，其所產生的 $\mu(k)$ 再當原始數列 $X^{(0)}(k)$ ，再進行一次 GM(1,1) 模型預測，但此時發現如將 $\mu(k)$ 再當原始數列 $X^{(0)}(k)$ 再進行第二次 GM(1,1) 模型預測，仍會產生新的誤差 $\mu'(k)$ ，為解決此問題本研究嘗試以指數平滑法代替第二次 GM(1,1) 模型預測，以求出 $\mu(k+1)$ 。

本研究採用為三次平滑的指數平滑法，因指數平滑法純粹以歷史數據做為預測基礎，且所須資料少，計算簡便，是經濟預測中常用的一種預測方法，與灰預測法所需的條件較為相似，因此本研究嘗試以指數平滑法代替第二次 GM(1,1) 模型預測。而指數平滑法的理論步驟說明如下：

步驟 1：將原始數列代入下列公式，且 $\alpha=0.5$ 原始數列

原始數列 $Y_t = \{y(1), y(2), \dots, y(n)\}$

$$S_t^{(1)} = \alpha Y_t + (1-\alpha)S_{t-1}^{(1)} \quad (\text{一次指數平滑})$$

$$S_t^{(2)} = \alpha S_t^{(1)} + (1-\alpha)S_{t-1}^{(2)} \quad (\text{二次指數平滑})$$

$$S_t^{(3)} = \alpha S_t^{(2)} + (1-\alpha)S_{t-1}^{(3)} \quad (\text{三次指數平滑})$$

步驟 2：再將步驟 1 所得的值代入下列公式

$$a_t = 3S_t^{(1)} - 3S_t^{(2)} + S_t^{(3)}$$

$$b_t = \frac{\alpha}{2(1-\alpha)^2} \left[(6-5\alpha)S_t^{(1)} - 2(5-4\alpha)S_t^{(2)} + (4-3\alpha)S_t^{(3)} \right]$$

$$c_t = \frac{\alpha^2}{(1-\alpha)^2} \left[S_t^{(1)} - 2S_t^{(2)} + S_t^{(3)} \right]$$

步驟 3：最後將步驟 2 所得的值代入下列預測公式

$$\hat{Y}_{t+m} = a_t + b_t m + \frac{1}{2} c_t m^2$$

3.5 改善後 GM(1,1) 執行步驟

改善後 GM(1,1) 預測模型的流程如圖 2 所述，詳細預測步驟說明如下：

步驟 1~步驟 5 如原灰預測 GM(1,1) 模型的步驟 1~步驟 5

步驟 6：代入修正後預測公式

$$\hat{X}^{(0)}(k) = (1 - e^{-a}) \left[X^{(0)}(1) + \frac{b}{a} \right] e^{a(k-1)}$$

步驟 7：求修正值

$$\mu(k) = e^{a(k-1)} \left[X^{(0)}(1) + \mu \right] - X^{(0)}(k)$$

步驟 8：將已知 $\mu(k)$ 當作原始資料，利用指數平滑法求 $\mu(k+1)$

步驟 9：求修正後訓練值 $\bar{X}^{(0)}(k) = \hat{X}^{(0)}(k) - \mu(k)$

步驟 10：使用殘差檢驗法進行殘差檢驗

步驟 11：求修正後預測值

$$\bar{X}^{(0)}(k+1) = \hat{X}^{(0)}(k+1) - \mu(k+1)$$

步驟 12：使用殘差檢驗法檢驗

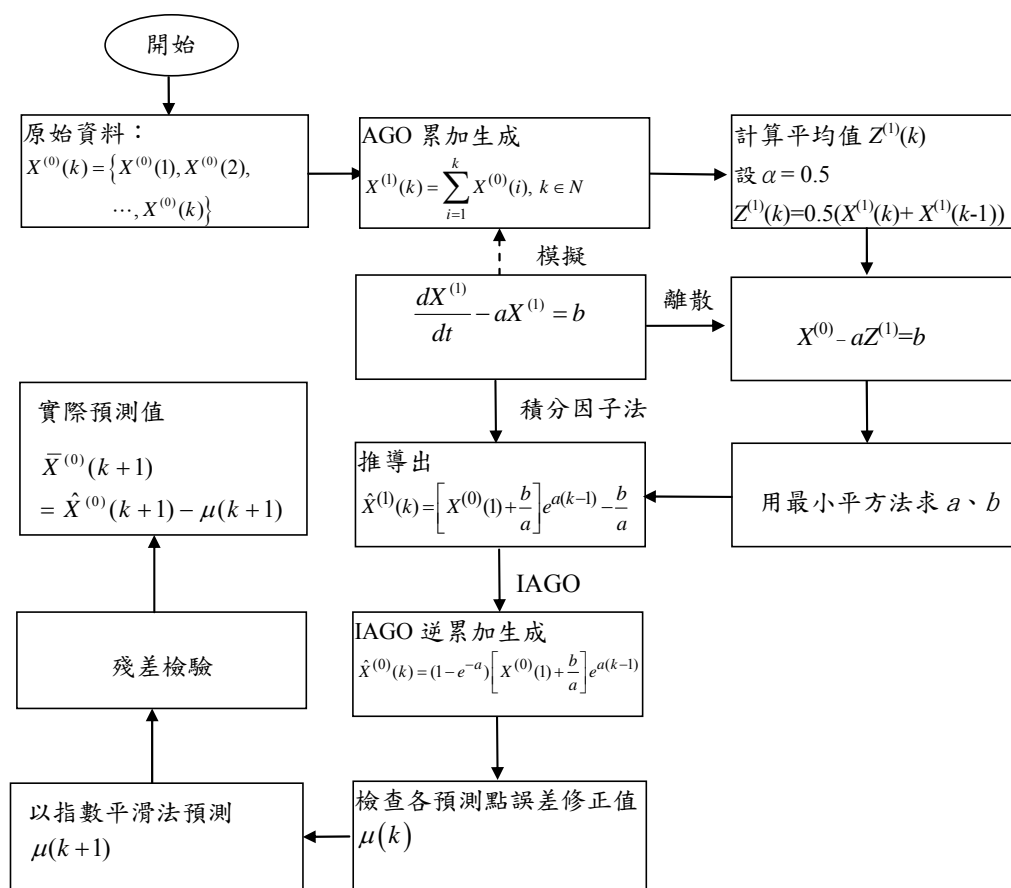


圖 2 改善後 GM(1,1)預測模型步驟

4. 實例驗證與結果分析

由於Yokum and Armstrong 0兩位學者爲了預測技術的選擇評估標準，實施專家意見的調查，結果準確度是最重要的標準，故本研究即以改善後預測模型比較原灰預測GM(1,1)模型與誤差修正第二次以GM(1,1)預測 $\mu(k+1)$ 的模型之間確準度，所採用兩種評估標準去測定預測模型的準確度如下：

(1) 平均絕對百分比誤差(Mean Absolute Percentage Error；MAPE)

$$E_{MAPE} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e_k \quad (12)$$

(2) 均方根百分比誤差(Root Mean Square Percentage Error；RMSE)

$$E_{RMSP} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_k^2} \quad (13)$$

本研究以台電公司台灣地區需電量爲例進行實例驗證，取 1997 年至 2000 年需電量共四筆資料預測 2001 至 2003 年需電量，台電公司 1997~2003 年台灣地區需電量統計如表 2：

表 2 台電公司 1997~2003 年台灣地區需電量統計表

| 年份 | 1997 | 1998 | 1999 | 2000 | 2001 | 2002 | 2003 |
|-----|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 需求量 | 118299046 | 128129801 | 131725892 | 142412887 | 143623580 | 151192690 | 159379855 |

單位：仟度

資料來源：台電公司企劃處編製「統計年報」0

4.1 改善後 GM(1,1) 預測模型

改善後 GM(1,1) 預測模型(誤差修正第二次以指數平滑法預測 $\mu(k+1)$) 步驟如下：

步驟 1：原始數列 $X^{(0)}$

$$X^{(0)} = \{118299046, 128129801, 131725892, 142412887\}$$

步驟 2：進行 AGO 後為 $X^{(1)}$

$$X^{(1)} = \{118299046, 246428847, 378154739, 520567626\}$$

步驟 3：求平均值 $Z(k)$

$$Z(k) = \{182363946.5, 312291793, 449361182.5\}$$

步驟 4：經灰微分方程所列出聯立方程式，再經由最小平方方法得解 a 和 b

$$a=0.0537, b=117185571.1741$$

步驟 5：代入預測公式 $\hat{X}^{(0)}(k) = (1 - e^{-a}) \left[X^{(0)}(1) + \frac{b}{a} \right] e^{a(k-1)}$

$$\hat{X}^{(0)}(k) = \{120280883.1701, 126918980.6555, 133923423.4574, 141314429.5512\}$$

步驟 6：先求修正值 $\mu = \frac{b}{a} - \left[X^{(0)}(1) + \frac{b}{a} \right] e^{-a}$

$$\mu = 1981837.1701$$

步驟 7：求修正值 $\mu(k) = e^{a(k-1)} \left[X^{(0)}(1) + \mu \right] - X^{(0)}(k)$

$$\mu(k) = \{1981837.1701, -1210820.3445, 2197531.4574, -1098457.4488\}$$

步驟 8：將已知 $\mu(k)$ 當作原始資料，利用指數平滑法求 $\mu(k+1)$ 、 $\mu(k+2)$ 及 $\mu(k+3)$

$$\mu(k+1) = \mu(5) = 2305378.601$$

$$\mu(k+2) = \mu(6) = 3265313.6951$$

$$\mu(k+3) = \mu(7) = 4451751.6698$$

步驟 9：求修正後預測值 $\bar{X}^{(0)}(k) = \hat{X}^{(0)}(k) - \mu(k)$

$$\bar{X}^{(0)}(k) = \{118299046, 128129801, 131725892, 142412887\}$$

步驟 10：使用殘差檢驗法進行殘差檢驗

$$e(k) = \{2.5192 \times 10^{-14}\%, 2.3259 \times 10^{-14}\%, 2.2624 \times 10^{-14}\%, 2.0927 \times 10^{-14}\%\}$$

步驟 11：求修正後預測值 $\bar{X}^{(0)}(k+3) = \hat{X}^{(0)}(k+3) - \mu(k+3)$

$$\bar{X}^{(0)}(k+3) = \{118299046, 128129801, 131725892, 142412887, 146807954.1, 154077330.4, 161574365.5\}$$

步驟 12：使用殘差檢驗法進行殘差檢驗

$$e(k+1) = 2.2172\%$$

$$e(k+2) = 1.9079\%$$

$$e(k+3) = 1.3769\%$$

4.2 分析與討論

比較原灰預測 GM(1, 1)模型、誤差修正第二次以 GM(1, 1)預測 $\mu(k+1)$ 模型與本研究改善後誤差修正第二次以指數平滑法預測 $\mu(k+1)$ 模型，計算結果如表 3 及圖 3 所示，並且我們可以得到以下驗證分析結果：

- (1) 由圖 3 可以清楚看出，我們所建議的指數平滑法進行誤差預測，所得結果的趨勢圖，是比其他兩種方法更接近實際數據值。
- (2) 另表 3 可以得知，在MAPE方面，我們所建議的方法是 0.917，小於Deng 0與Hung et al. 0的 2.6425 及 1.996；而在RSMPE 方面，我們所建議的方法是 0.9333，也是小於Deng 0與Hung et al. 0的 2.6764 及 1.9971；因此，我們所建議的方法確實降低整體的誤差達 54%左右。
- (3) 以遞增型態之原始資料為例，我們所建議的 GM(1,1)預測模型確實能降低原灰預測 GM(1,1)模型之預測誤差，提高預測準確度，而其他型態之原始資料，則不見得有好的改善。

表 3 原灰預測 GM(1,1)模型與改善後預測模型預測值之比較

| 項目 | 年度 | 實際值 | 原灰預測 GM(1, 1)模型 | | 誤差修正第二次以 GM(1, 1)預測 $\mu(k+1)$ | | 誤差修正第二次以指數平滑法預測 $\mu(k+1)$ | |
|-------|----------|-----------|-----------------|--------|--------------------------------|--------------|----------------------------|--------------|
| | | | 預測值 | 誤差 (%) | 預測值 | 誤差 (%) | 預測值 | 誤差 (%) |
| 訓練 | 1997 | 118299046 | 120280883.1701 | 1.6753 | 118299046 | 2.5192×10-14 | 118299046 | 2.5192×10-14 |
| | 1998 | 128129801 | 126918980.6555 | 0.945 | 128129801 | 2.3259×10-14 | 128129801 | 2.3259×10-14 |
| | 1999 | 131725892 | 133923423.4574 | 1.6683 | 131725892 | 2.2624×10-14 | 131725892 | 2.2624×10-14 |
| | 2000 | 142412887 | 141314429.5512 | 0.7713 | 142412887 | 2.0927×10-14 | 142412887 | 2.0926×10-14 |
| | MAPE(%) | | | 1.265 | | 3.0668×10-14 | | 3.0668×10-14 |
| | RMSPE(%) | | | 1.3302 | | 2.6617×10-14 | | 2.6617×10-14 |
| 預測 | 2001 | 143623580 | 149113332.708 | 3.8223 | 149097631.818 | 3.8114 | 146807954.1 | 2.2172 |
| | 2002 | 151192690 | 157342644.073 | 4.0676 | 157299697.9976 | 4.0392 | 154077330.4 | 1.9079 |
| | 2003 | 159379855 | 166026117.144 | 4.1701 | 165955320.6758 | 4.1257 | 161574365.5 | 1.3769 |
| | MAPE(%) | | | 4.02 | | 3.9921 | | 1.834 |
| | RMSPE(%) | | | 4.0226 | | 3.9943 | | 1.8665 |
| Total | MAPE(%) | | | 2.6425 | | 1.996 | | 0.917 |
| | RMSPE(%) | | | 2.6764 | | 1.9971 | | 0.9333 |

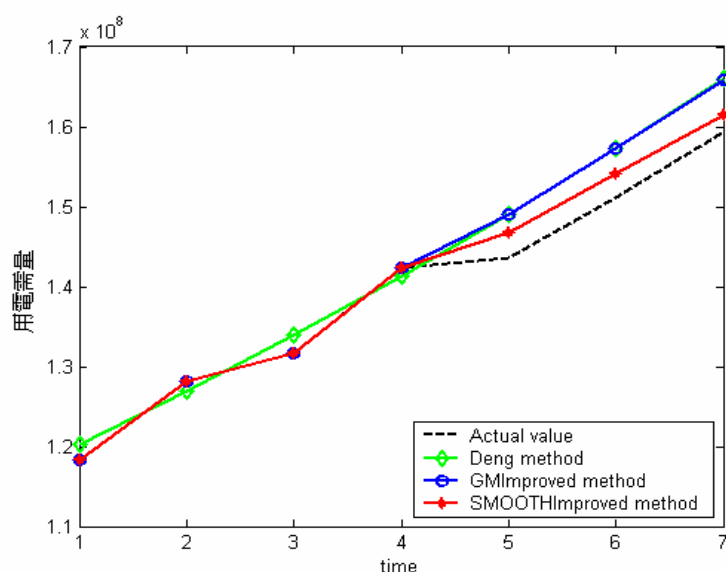


圖 3 一般 GM(1,1) 預測模型與改善後預測模型預測值之比較圖

5. 結 論

本研究主要以改善原灰預測 GM(1,1) 模型為目的，而經整個研究過程與結果分析改善重點如后：

- (1) 由於鄧聚龍教授所提倡的 GM(1,1) 預測模型中的一階線性微分方程式屬於收斂型式，有異於 AGO 空間遞增數據之假設，我們給予適時的修訂成為合理的遞增型態。
- (2) 研究發現在 GM(1,1) 預測模型的運算中，因多次 IAGO 不恰當之運算已造成的誤差存在，且在推導的過程中並不符合初始條件 $\hat{X}^{(0)}(1) = X^{(0)}(1)$ ，我們提出相關證明及誤差公式推導。並結合指數平滑技術進行誤差修訂，確實降低整體誤差，提高預測精準度。
- (3) 本研究提出以指數平滑技術取代第二次 GM(1,1) 模型預測，以求出預測 $\mu(k+1)$ 之誤差項，結果發現確實確實降低整體誤差，提高預測精準度。
- (4) 經以不同型態原始數據資料型態進行驗證發現，對於遞增型態的資料而言，經使用本研究所提出的預測模型方法，確實會有不錯的效果，而其他資料型態之數據則可能無顯著改善。

參考文獻

- [1] Deng, J. L., "Introduction of Grey System Theory," Journal of Grey System, Vol. 1, No. 1, pp. 1-24, 1989.
- [2] Lin, C. T. and Chen, L. H., "Grey Analysis of Bank Re-decreasing the Required Reserve Ratio," Journal of Grey System, Vol. 4, No. 2, pp. 119-132, 1999.
- [3] Chang, T. C., Wen, K. L. and Hsu, F. Y., "An Artificial Grey-garch Model for Transmission of Return Volatility in NASDAQ Index," Journal Grey System, Vol. 7, No. 1, pp. 28-37, 2004.
- [4] Chen, H. C., Hu, Y. C., Shyu, J. Z. and Tzeng, G. H., "Comparing Possibility Grey Forecasting with Neural Network-based Fuzzy Regression by an Empirical Study," Journal of Grey System, Vol. 8, No. 2, pp. 93-106, 2005.
- [5] Zhang, S., Wang, J. and Wu, J., "Grey Modeling Hospital Infection," Journal of Grey System, Vol. 11, No. 2, pp. 153-158, 1999.
- [6] Kung, C. Y., Hsu, K. T., Yan, T. M. and Liu, P. W., "An Application of the Grey Prediction Theory to the Annual Medical Expense of Taiwan's National Health Insurance," Journal of Grey System, Vol. 9, No. 2, pp. 75-86, 2006.
- [7] Cheng, K. H. and Chang, W. C., "A Grey Mathematical Model for Earthquake Forecasting," Journal of Grey System, Vol. 4, No. 2, pp. 131-142, 2001.
- [8] Fu, Y., Zhang, G. R., and Yang, R. G., "Data Mapping Optimization Based Grey Model," Systems Engineering and Electronics, Vol. 26, No. 4, pp. 430-436, 2004.
- [9] Huang, Y. F. and Wen, K. L., "Using GM(1,1) Mesh Smooth Model to Construct Secure Network Communication System," Journal of Grey System, Vol. 7, No. 2, pp. 75-81, 2004.
- [10] Lu, M., Wevers, K., Heijden, R. V. D. and Marchau, V., "Modeling and Forecasting Traffic Safety Improvement: Infrastructure Redesign vs Driving Assistance Systems," Journal of Grey System, Vol. 8, No. 2, pp. 157-166, 2005.
- [11] Zhang, B. X. and Luo, J. J., "A Study of Grey Forecasting and Its Control Analysis of Grain Yield," The Journal of Grey

- System, Vol. 1, No. 1, pp. 91-98, 1989.
- [12] Long, X. G., Li, H. Y. and Jia, F. G., "Analysis and Envelope Grey Prediction in Fruits & Forest Yields," Journal of Grey System, Vol. 5, No. 2, pp. 163-170, 1993.
- [13] Lin, C. T. and Hsu, P. F., "Forecast Advertising Revenue for Five Largest Media Internet in Taiwan Using Grey Theory, and a Comparison Trends Between Taiwan and Japan," Journal of International Marketing & Marketing Research, Vol. 14, No. 2, pp. 2-12, (2002a).
- [14] Lin, C. T. and Hsu, P. F., "Forecast of Non-alcoholic Beverage Sales in Taiwan Using the Grey Theory," Asia Pacific Journal of Marketing and Logistics, Vol. 14, No. 4, pp. 3-12, (2002b).
- [15] Kung, C. Y., Kung C. J. and Tsai, S. Y., "Study of Computer Game Forecasting in Taiwan Market Application of Grey Prediction Model," International Journal of Business and Strategy, Vol. 3, No. 2, pp. 1-19, 2003.
- [16] Kung, C. Y. and Chang, C. P., "Application of Grey Prediction Model on China Automobile Industry," Journal of Grey System, Vol. 16, No. 2, pp. 147-154, 2004.
- [17] Hung, K. C., Hsu, F. Y., Wu, K. J., Wen, K. L. and John H. Wu, "An Enhanced GM(1, 1) Grey Prediction Approach with Error Term $\mu(k)$," Journal of Grey System, Vol. 10, No. 2, pp. 59-68, 2007.
- [18] Yokum, J. T. and Armstrong, J. S., "Beyond Accuracy: Comparison of Criteria Used to Select Forecasting Methods," International Journal of Forecasting, Vol. 11, No. 4, pp. 591-597, 1995.
- [19] 台電公司企劃處編製，「統計年報」，2003。
- [20] 鄧聚龍，「灰預測模型方法與應用」，高立圖書有限公司，2000。