

• Ước số:

◦ Tính chất nhân tính:

$$\square f(m * n) = f(m) * f(n)$$

$$\square n = p_1^{a_1} + p_2^{a_2} + \dots + p_k^{a_k}$$

$$\square f(n) = f(p_1^{a_1}) + f(p_2^{a_2}) + \dots + f(p_n^{a_n})$$

◦ → để tìm công thức tổng quát, ta cần tìm cho lũy thừa SNT

◦ Tổng ước

$$\square TongUoc(p^k) = p^0 + p^1 + \dots + p^k = (1 - p)^{k+1} / (1 - p)$$

$$\square TongUoc(n) = TongUoc(p_1^{a_1}) * TongUoc(p_2^{a_2}) * \dots * TongUoc(p_n^{a_n})$$

$$\square TongUoc(n) = Tich\left(\frac{(1-p_i)^{k+1}}{1-p_i}\right) \text{ (CSN)}$$

◦ Tích các ước

$$\square TichUoc(n) = n^{\frac{SoUoc(n)}{2}}$$

◦ Số ước

$$\square SoUoc(p^k) = k + 1 \text{ (p là SNT)}$$

$$\square SoUoc(n) = SoUoc(p_1^{a_1}) * SoUoc(p_2^{a_2}) * \dots * SoUoc(p_n^{a_n})$$

$$\square SoUoc(n) = Tich((a_1 + 1)(a_2 + 1) * \dots * (a_k + 1))$$

$$\square SoUoc(1 \rightarrow n) = SoUoc(1) + SoUoc(2) + \dots + SoUoc(n)$$

$$\square SoUoc(1 \rightarrow n) = SoBoi(1 \rightarrow n)$$

◦ Bội

$$\square SoBoi(x) = n/x \text{ (số lượng bội của x nhỏ hơn n)}$$

$$\square SoBoi(1 \rightarrow n) = \left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{n}{n} \right\rfloor$$

• Phi hàm Euler:

◦ phi(N) là số lượng số nguyên tố cùng nhau với N trong đoạn từ 1 đến N

◦ Cách tính phi của n theo cách phân tích thừa số nguyên tố:

$$\square res = n$$

▪ Tìm ra các thừa số nguyên tố của n

▪ với mỗi thừa số nguyên tố trừ res đi số lượng bội của số đó trong khoảng [1, res]

▪ phi(n) là res

$$\square phi(p^k) = p^k - \frac{p^k}{p} = p^k - p^{k-1} \text{ (với p là SNT)}$$

$$\square phi(n) = Tich(p_i^{a_i} - p_i^{a_i-1})$$

$$\square TongCacSNTCungNha(n) = \frac{n * phi(n)}{2}$$

$$\square gcd(a, m) = 1 \Rightarrow a^{phi(m)} = 1 \pmod{m}$$

$$\square phi(n^k) = (p_1^k - p_1^{k-1}) * (p_1^k - p_1^{k-1}) * \dots * (p_n^k - p_n^{k-1})$$

• Hình học

◦ Diện tích đa giác:

$$\square S = \frac{1}{2} |Tong(x_i y_{i+1} - x_{i+1} * y_i)| \text{ (diện tích đa giác bất kì)}$$

◦ Tính k/c từ A đến BC:

$$\square S = \frac{1}{2} B C A I \text{ (với I là hình chiếu của A lên BC)}$$

◦ Diện tích tam giác khi có 3 độ dài 3 đường a, b, c:

$$\square S = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)s}, s = (a + b + c)/2$$

◦ Đếm số điểm nguyên trong đa giác

$$\square S_h = a + \frac{b}{2} - 1$$

▪ a là số điểm nguyên nằm trong

▪ b là số điểm nguyên trên biên

◦ Đếm số điểm nguyên thuộc đoạn thẳng

$$\square SoDiem = gcd([a_x - b_x], [a_y - b_y])$$

◦ Cho 2 đường thẳng

$$\square a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$$

$$\square a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$$

$$\square \text{Song song khi: } \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

$$\square \text{Vuông góc khi: } a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$$

$$\square \cos(\alpha) = \frac{[a_1 a_2 + b_1 b_2]}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} * \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

▪ Khi thay 1 điểm D vào đường thẳng

▪ nếu > 0 thì nằm bên trái đường thẳng

▪ nếu < 0 thì nằm bên phải đường thẳng

▪ nếu = 0 thì nằm trên đường thẳng

◦ Tìm giao điểm → giải hệ

$$\square D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 * b_2 - b_1 * a_2$$

$$\square D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1 * b_2 - b_1 * c_2$$

$$\bullet D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1 * c_2 - c_1 * a_2$$

$$\bullet x = \frac{D_x}{D}, y = \frac{D_y}{D}$$

○ PT đường tròn

$$\bullet (x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

• **Phép biến đổi Affine:**

○ 2D:

▪ Phép tịnh tiến (Dịch chuyển x tới t_x và y lên t_y):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ t_x & t_y & 1 \end{bmatrix}$$

▪ Phép vị tự (Phóng to x lên t_x và y lên t_y):

$$\begin{bmatrix} t_x & 0 & 0 \\ 0 & t_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

▪ Phép xoay (1 góc θ ngược chiều kim đồng hồ):

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

○ 3D:

▪ Phép tịnh tiến (Dịch chuyển x tới t_x và y lên t_y):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ t_x & t_y & t_z & 1 \end{bmatrix}$$

▪ Phép vị tự (Phóng to x lên t_x và y lên t_y):

$$\begin{bmatrix} t_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

▪ Phép xoay (1 góc θ ngược chiều kim đồng hồ theo trục Ox):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bảng đạo hàm		Bảng nguyên hàm	
$x^{\alpha-1} = \alpha x^{\alpha-1}$	$(u^{\alpha})' = \alpha u^{\alpha-1} u'$	$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, (\alpha \neq -1)$	$\int (ax+b)^{\alpha} dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = u' \cdot \cos u$	$\int \sin x dx = -\cos x + c$	$\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + c$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$	$\int \cos x dx = \sin x + c$	$\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + c$
$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u} = u' \cdot (1 + \tan^2 u)$	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$	$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + c$
$(\cot x)' = \frac{-1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$	$(\cot u)' = \frac{-u'}{\sin^2 u} = -u' \cdot (1 + \cot^2 u)$	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$	$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + c$
$\log_a x' = \frac{1}{x \ln a}$	$\log_a u' = \frac{u'}{u \ln a}$	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$	$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln ax+b + c$
$\ln x' = \frac{1}{x}$	$\ln u' = \frac{u'}{u}$		
$a^x' = a^x \cdot \ln a$	$a^u' = a^u \cdot u' \cdot \ln a$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$	$\int a^{ax+\beta} dx = \frac{a^{ax+\beta}}{\alpha \cdot \ln a} + c$
$e^x' = e^x$	$(e^u)' = u' \cdot e^u$	$\int e^x dx = e^x + c$	$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + c$

