Matrixgruppen

Jan Hurt
Betreuer: Cap Andreas

Datum: 27.11.2015

Gruppen von Matrizen

Folgende Teilmengen der Matrizen $M_n(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K}$ ist $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) bilden mit der Operation $(A, B) \mapsto AB$ eine Gruppe.

Gruppen von Matrizen

Folgende Teilmengen der Matrizen $M_n(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K}$ ist $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) bilden mit der Operation $(A, B) \mapsto AB$ eine Gruppe.

(i) $GL_n(\mathbb{K}) := \{A \in M_n(\mathbb{K}) : \det(A) \neq 0\}$

Gruppen von Matrizen

Folgende Teilmengen der Matrizen $M_n(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K}$ ist $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) bilden mit der Operation $(A, B) \mapsto AB$ eine Gruppe.

(i) $GL_n(\mathbb{K}) := \{A \in M_n(\mathbb{K}) : \det(A) \neq 0\}$

(ii) $SL_n(\mathbb{K}) := \{A \in M_n(\mathbb{K}) : \det(A) = 1\}$

(iii) $O(n) := \{A \in M_n(\mathbb{R}) : AA^T = \mathbb{I}\}$

(iv) $U(n) := \{A \in M_n(\mathbb{C}) : AA^T = \mathbb{I}\}$

(v) $SO(n) := \{A \in M_n(\mathbb{R}) : AA^T = \mathbb{I} \wedge \det(A) = 1\}$

(vi) $SU(n) := \{A \in M_n(\mathbb{C}) : AA^* = \mathbb{I} \wedge \det(A) = 1\}$

Motivation:

Die $GL_n(\mathbb{K})$ sind offen in $M_n(\mathbb{K})$.

Motivation:

Die $GL_n(\mathbb{K})$ sind offen in $M_n(\mathbb{K})$.

Die folgenden Operationen:

(i) $GL_n(\mathbb{K}) \times GL_n(\mathbb{K}) \to GL(\mathbb{K})$ definiert durch $(A, B) \mapsto A \cdot B$

Motivation:

Die $GL_n(\mathbb{K})$ sind offen in $M_n(\mathbb{K})$.

Die folgenden Operationen:

(i) $GL_n(\mathbb{K}) \times GL_n(\mathbb{K}) \to GL(\mathbb{K})$ definiert durch $(A, B) \mapsto A \cdot B$

(ii) ${}^{-1} : GL_n(\mathbb{K}) \to GL_n(\mathbb{K})$ defniniert durch: $A \mapsto A^{-1}$

glatt.

Motivation:

Die $GL_n(\mathbb{K})$ sind offen in $M_n(\mathbb{K})$.

Die folgenden Operationen:

(i) $GL_n(\mathbb{K}) \times GL_n(\mathbb{K}) \to GL(\mathbb{K})$ definiert durch $(A, B) \mapsto A \cdot B$

(ii) $^{-1} : GL_n(\mathbb{K}) \to GL_n(\mathbb{K})$ defniniert durch: $A \mapsto A^{-1}$

glatt. Denn in den Einträgen der neuen Matrix stehen nur Polynome der ursprünglichen.

Motivation:

Die $GL_n(\mathbb{K})$ sind offen in $M_n(\mathbb{K})$.

Die folgenden Operationen:

(i) $GL_n(\mathbb{K}) \times GL_n(\mathbb{K}) \to GL(\mathbb{K})$ definiert durch $(A, B) \mapsto A \cdot B$

(ii) ${}^{-1} : GL_n(\mathbb{K}) \to GL_n(\mathbb{K})$ defniniert durch: $A \mapsto A^{-1}$

glatt. Denn in den Einträgen der neuen Matrix stehen nur Polynome der ursprünglichen.

Die $SU(2)$ ist isomorph zu $S^3 := \{x \in \mathbb{R}^4 : \|x\|_2 = 1\}$.

Motivation:

Die $GL_n(\mathbb{K})$ sind offen in $M_n(\mathbb{K})$.

Die folgenden Operationen:

(i) $GL_n(\mathbb{K}) \times GL_n(\mathbb{K}) \to GL(\mathbb{K})$ definiert durch $(A, B) \mapsto A \cdot B$

(ii) $^{-1} : GL_n(\mathbb{K}) \to GL_n(\mathbb{K})$ defniniert durch: $A \mapsto A^{-1}$

glatt. Denn in den Einträgen der neuen Matrix stehen nur Polynome der ursprünglichen.

Die $SU(2)$ ist isomorph zu $S^3 := \{x \in \mathbb{R}^4 : \|x\|_2 = 1\}$. Denn, ist $A \in SU(2)$ so $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ sodass $A = \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$ mit der Bedingung $\det(A) = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = Re(\alpha)^2 + Im(\alpha)^2 + Re(\beta)^2 + Im(\beta)^2 = 1$.

Matrixgruppen

Definition: Eine Matrixgruppe ist eine abgeschlossene Untergruppe von $GL_n(\mathbb{K})$.

Matrixgruppen

Definition: Eine Matrixgruppe ist eine abgeschlossene Untergruppe von $GL_n(\mathbb{K})$.

Beispiele: Da $f : A \mapsto AA^*$ stetig ist, ist $O(n) = f^{-1}(\mathbb{I})$ abgeschlossen und daher eine Matrixgruppe. Genauso $SO(n), U(n), SU(n)$.

Tangentialräume

Definition: Ist G eine Matrixgruppe, so ist

$$\mathfrak{g} := \{\alpha'(0) : \ \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M_n(\mathbb{K}) \text{ glatt,} \\ \text{mit } \alpha(0) = \mathbb{I}, \text{ und } \alpha((-\varepsilon, \varepsilon)) \subseteq G\} (*)$$

der Tangentialraum von G bei $\mathbb{I}$.

Einparameteruntergruppen

Definition: Eine Einparmeterunteruppe ist ein einer Gruppe G ist eine Abbildung: $\alpha : \mathbb{K} \to G$, sodass $\forall s, t \in \mathbb{K}$ gilt $\alpha(s+t) = \alpha(s) \cdot \alpha(t)$.

Einparameteruntergruppen

Definition: Eine Einparmeterunteruppe ist ein einer Gruppe G ist eine Abbildung: $\alpha : \mathbb{K} \to G$, sodass $\forall s, t \in \mathbb{K}$ gilt $\alpha(s+t) = \alpha(s) \cdot \alpha(t)$.

Definition: Für $A \in M_n(\mathbb{K})$ ist $\exp : M_n(\mathbb{K}) \to GL_n(\mathbb{K})$:

$$\exp(A) = e^A := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A}{n!}.$$

Einparameteruntergruppen

Definition: Eine Einparmeterunteruppe ist ein einer Gruppe G ist eine Abbildung: $\alpha : \mathbb{K} \to G$, sodass $\forall s, t \in \mathbb{K}$ gilt $\alpha(s + t) = \alpha(s) \cdot \alpha(t)$.

Definition: Für $A \in M_n(\mathbb{K})$ ist $\exp : M_n(\mathbb{K}) \to GL_n(\mathbb{K})$:

$$\exp(A) = e^A := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A}{n!}.$$

Bemerkung: Es gilt $\forall s, t \in \mathbb{K} : \exp((s + t)A) = \exp(sA) \exp(tA)$, Beweis wie im reellen/komplexen Fall über Binomischen Lehrsatz $\big((s + t)A = (t + s)A\big) \Rightarrow t \mapsto e^{tA}$ ist eine Einparameteruntergruppe.

Lemma: Es gilt, dass die glatten Einparameterungergruppen in $GL_n(\mathbb{K})$ genau die Abbildungen $t \mapsto e^{tX}$ für $X \in M_n(\mathbb{K})$ sind.

Lemma: Es gilt, dass die glatten Einparameterungergruppen in $GL_n(\mathbb{K})$ genau die Abbildungen $t \mapsto e^{tX}$ für $X \in M_n(\mathbb{K})$ sind.

Beweis: Sei α eine Einparameteruntergruppe, so definiere $X := \alpha(0)'$,

Lemma: Es gilt, dass die glatten Einparameterungergruppen in $GL_n(\mathbb{K})$ genau die Abbildungen $t \mapsto e^{tX}$ für $X \in M_n(\mathbb{K})$ sind.

Beweis: Sei α eine Einparameteruntergruppe, so definiere $X := \alpha(0)'$, dann gilt $\alpha(t)' = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\alpha(t+s) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\alpha(t)\alpha(s) = \alpha(t)\alpha'(0) = \alpha(t)X$,

Lemma: Es gilt, dass die glatten Einparameterungergruppen in $GL_n(\mathbb{K})$ genau die Abbildungen $t \mapsto e^{tX}$ für $X \in M_n(\mathbb{K})$ sind.

Beweis: Sei α eine Einparameteruntergruppe, so definiere $X := \alpha(0)'$, dann gilt $\alpha(t)' = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\alpha(t+s) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\alpha(t)\alpha(s) = \alpha(t)\alpha'(0) = \alpha(t)X$,genauso $(e^{tX})' = e^{tX}X$

Lemma: Es gilt, dass die glatten Einparameterungergruppen in $GL_n(\mathbb{K})$ genau die Abbildungen $t \mapsto e^{tX}$ für $X \in M_n(\mathbb{K})$ sind.

Beweis: Sei α eine Einparameteruntergruppe, so definiere $X := \alpha(0)'$, dann gilt $\alpha(t)' = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\alpha(t+s) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\alpha(t)\alpha(s) = \alpha(t)\alpha'(0) = \alpha(t)X$,genauso $(e^{tX})' = e^{tX}X$ außerdem gilt $\alpha(0) = \mathbb{I} = e^0 \Rightarrow$ da die die Abbildungen die selbe Differentialgeichung erfüllen, sind sie ident: $e^{tX} = \alpha(t)$

Lemma: Es gilt, dass die glatten Einparameterungergruppen in $GL_n(\mathbb{K})$ genau die Abbildungen $t \mapsto e^{tX}$ für $X \in M_n(\mathbb{K})$ sind.

Beweis: Sei α eine Einparameteruntergruppe, so definiere $X := \alpha(0)'$, dann gilt $\alpha(t)' = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\alpha(t+s) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\alpha(t)\alpha(s) = \alpha(t)\alpha'(0) = \alpha(t)X$,genauso $(e^{tX})' = e^{tX}X$ außerdem gilt $\alpha(0) = \mathbb{I} = e^0 \Rightarrow$ da die die Abbildungen die selbe Differentialgeichung erfüllen, sind sie ident: $e^{tX} = \alpha(t)$

Satz: Es existieren offene Umgebungen von $0 \in V \subseteq M_n(\mathbb{K})$ und $\mathbb{I} \in U \subseteq M_n(\mathbb{K})$, sodass $X \mapsto e^X$ eine glatte Bijektion $V \to U$ ist und deren Inverse ebenfalls glatt ist.

Lemma: Es gilt, dass die glatten Einparameterungergruppen in $GL_n(\mathbb{K})$ genau die Abbildungen $t \mapsto e^{tX}$ für $X \in M_n(\mathbb{K})$ sind.

Beweis: Sei α eine Einparameteruntergruppe, so definiere $X := \alpha(0)'$, dann gilt $\alpha(t)' = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \alpha(t+s) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \alpha(t)\alpha(s) = \alpha(t)\alpha'(0) = \alpha(t)X$,genauso $(e^{tX})' = e^{tX}X$ außerdem gilt $\alpha(0) = \mathbb{I} = e^0 \Rightarrow$ da die die Abbildungen die selbe Differentialgeichung erfüllen, sind sie ident: $e^{tX} = \alpha(t)$

Satz: Es existieren offene Umgebungen von $0 \in V \subseteq M_n(\mathbb{K})$ und $\mathbb{I} \in U \subseteq M_n(\mathbb{K})$, sodass $X \mapsto e^X$ eine glatte Bijektion $V \to U$ ist und deren Inverse ebenfalls glatt ist.

Beweis: Folgt aus dem Inverse Funktionen Satz da $(e^X)'\big|_{X=0} = \mathbb{I}$.

Satz: Sei $G \subseteq GL_n(\mathbb{K})$ eine Matrixgruppe, $\mathfrak{g} \subseteq M_n(\mathbb{K})$ wie oben, dann gilt

Satz: Sei $G \subseteq GL_n(\mathbb{K})$ eine Matrixgruppe, $\mathfrak{g} \subseteq M_n(\mathbb{K})$ wie oben, dann gilt

(i) $\mathfrak{g}$ ist ein Teilraum und $\mathfrak{g} = \{X \in M_n(\mathbb{K}) : \ \forall t : e^{tX} \in G\}$

Satz: Sei $G \subseteq GL_n(\mathbb{K})$ eine Matrixgruppe, $\mathfrak{g} \subseteq M_n(\mathbb{K})$ wie oben, dann gilt

(i) $\mathfrak{g}$ ist ein Teilraum und $\mathfrak{g} = \{X \in M_n(\mathbb{K}) : \ \forall t : e^{tX} \in G\}$

(ii) $\exists$ offene Umgebungen V von 0 in $M_n(\mathbb{K})$, U von $\mathbb{I}$ in $GL_n(\mathbb{K})$, sodass $\exp$ zusätzlich $V \cap \mathfrak{g}$ bijektiv auf $U \cap G$ abbildet.

Satz: Sei $G \subseteq GL_n(\mathbb{K})$ eine Matrixgruppe, $\mathfrak{g} \subseteq M_n(\mathbb{K})$ wie oben, dann gilt

(i) $\mathfrak{g}$ ist ein Teilraum und $\mathfrak{g} = \{X \in M_n(\mathbb{K}) : \ \forall t : e^{tX} \in G\}$

(ii) $\exists$ offene Umgebungen V von 0 in $M_n(\mathbb{K})$, U von $\mathbb{I}$ in $GL_n(\mathbb{K})$, sodass $\exp$ zusätzlich $V \cap \mathfrak{g}$ bijektiv auf $U \cap G$ abbildet.

Beweis: (i) Sind α, β Kurven die $(*)$ erfüllen und $\gamma(t) := \alpha(t)\beta(t)$. Dann gilt:

Satz: Sei $G \subseteq GL_n(\mathbb{K})$ eine Matrixgruppe, $\mathfrak{g} \subseteq M_n(\mathbb{K})$ wie oben, dann gilt

(i) $\mathfrak{g}$ ist ein Teilraum und $\mathfrak{g} = \{X \in M_n(\mathbb{K}) : \forall t : e^{tX} \in G\}$

(ii) $\exists$ offene Umgebungen V von 0 in $M_n(\mathbb{K})$, U von $\mathbb{I}$ in $GL_n(\mathbb{K})$, sodass $\exp$ zusätzlich $V \cap \mathfrak{g}$ bijektiv auf $U \cap G$ abbildet.

Beweis: (i) Sind α, β Kurven die $(*)$ erfüllen und $\gamma(t) := \alpha(t)\beta(t)$. Dann gilt:

$$\gamma'(0) = \alpha'(0)\beta(0) + \alpha(0)\beta'(0) = \alpha'(0) + \beta'(0).$$

Satz: Sei $G \subseteq GL_n(\mathbb{K})$ eine Matrixgruppe, $\mathfrak{g} \subseteq M_n(\mathbb{K})$ wie oben, dann gilt

(i) $\mathfrak{g}$ ist ein Teilraum und $\mathfrak{g} = \{X \in M_n(\mathbb{K}) : \forall t : e^{tX} \in G\}$

(ii) $\exists$ offene Umgebungen V von 0 in $M_n(\mathbb{K})$, U von $\mathbb{I}$ in $GL_n(\mathbb{K})$, sodass $\exp$ zusätzlich $V \cap \mathfrak{g}$ bijektiv auf $U \cap G$ abbildet.

Beweis: (i) Sind α, β Kurven die $(*)$ erfüllen und $\gamma(t) := \alpha(t)\beta(t)$. Dann gilt:

$$\gamma'(0) = \alpha'(0)\beta(0) + \alpha(0)\beta'(0) = \alpha'(0) + \beta'(0).$$

Ist $r \in \mathbb{K}$ und $\gamma(t) := \alpha(rt)$ dann ist $\gamma'(t) = r\alpha'(rt)$, also $\gamma'(0) = r\alpha'(0) \in \mathfrak{g}$.

Definition: Eine Funktion $f : G \to M_n(\mathbb{K})$ ist lokal um einen Punkt $g \in G$ glatt $:\Leftrightarrow$ die Abbildung $X \mapsto f(ge^X)$ ist glatt auf der offenen Teilmenge $V \cap \mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{g} = M_n(\mathbb{K})$.

Definition: Eine Funktion $f : G \to M_n(\mathbb{K})$ ist lokal um einen Punkt $g \in G$ glatt :$\Leftrightarrow$ die Abbildung $X \mapsto f(ge^X)$ ist glatt auf der offenen Teilmenge $V \cap \mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{g} = M_n(\mathbb{K})$.

Sind G, H Matrixgruppen, $G, H \subseteq M_n(\mathbb{K})$ so ist der Homomorphismus $\Phi : G \to H$ glatt :$\Leftrightarrow$ die Funktion $\Phi : G \to M_n(\mathbb{K})$ ist glatt.

Ist α eine Kurve die $(*)$ erfüllt, und ist $\Phi : G \to H$ ein glatter Homomorphismus so ist die Kurve $\Phi \circ \alpha$ glatt in H und φ definiert über: $\varphi(\alpha'(0)) = (\Phi \circ \alpha)'(0)$ ist wohldefiniert.

Ist α eine Kurve die $(*)$ erfüllt, und ist $\Phi : G \to H$ ein glatter Homomorphismus so ist die Kurve $\Phi \circ \alpha$ glatt in H und φ definiert über: $\varphi(\alpha'(0)) = (\Phi \circ \alpha)'(0)$ ist wohldefiniert.

Proposition: Ist Φ, φ wie oben definiert, so gilt $\Phi(e^X) = e^{\varphi(X)}$. Daraus folgt, dass Φ lokal um $\mathbb{I}$ eindeutig durch φ bestimmt.

Ist α eine Kurve die $(*)$ erfüllt, und ist $\Phi : G \to H$ ein glatter Homomorphismus so ist die Kurve $\Phi \circ \alpha$ glatt in H und φ definiert über: $\varphi(\alpha'(0)) = (\Phi \circ \alpha)'(0)$ ist wohldefiniert.

Proposition: Ist Φ, φ wie oben definiert, so gilt $\Phi(e^X) = e^{\varphi(X)}$. Daraus folgt, dass Φ lokal um $\mathbb{I}$ eindeutig durch φ bestimmt.

Beweis: $\Phi(e^{tX})$ ist eine Einparameteruntergruppe mit $(\Phi(e^{tX}))'\big|_{t=0} = \varphi((e^{tX})'\big|_{t=0}) = \varphi(X(e^{tX})\big|_{t=0}) = \varphi(X)$.

Propostion: Ist H zusammenängend so ist die von $exp(\mathfrak{h})$ erzeugte Untergruppe isomorph zu H.

Propostion: Ist H zusammenängend so ist die von $exp(\mathfrak{h})$ erzeugte Untergruppe isomorph zu H.

Beweis: Die Teilmenge $U \cap H$ vom obigen Satz liegt in $\exp(\mathfrak{h})$ und damit in der davon erzeugte Untergruppe $\tilde{H} \subset H$.

Propostion: Ist H zusammenängend so ist die von $exp(\mathfrak{h})$ erzeugte Untergruppe isomorph zu H.

Beweis: Die Teilmenge $U \cap H$ vom obigen Satz liegt in $\exp(\mathfrak{h})$ und damit in der davon erzeugte Untergruppe $\tilde{H} \subset H$.
Analog liegt für $h \in \tilde{H}$ die Menge $hU \cap H$ in $\tilde{H}$ (wobei $hU = \{hg : g \in U\}$). Nun ist aber nach Definition jede dieser Teilmengen offen in H,

Propostion: Ist H zusammenängend so ist die von $exp(\mathfrak{h})$ erzeugte Untergruppe isomorph zu H.

Beweis: Die Teilmenge $U \cap H$ vom obigen Satz liegt in $\exp(\mathfrak{h})$ und damit in der davon erzeugte Untergruppe $\tilde{H} \subset H$.
Analog liegt für $h \in \tilde{H}$ die Menge $hU \cap H$ in $\tilde{H}$ (wobei $hU = \{hg : g \in U\}$). Nun ist aber nach Definition jede dieser Teilmengen offen in H,also ist $\tilde{H}$ eine offene Teilmenge von H.
Das Komplement von $\tilde{H}$ in H ist aber eine Vereinigung von Nebenklassen, die jeweils isomorph zu $\tilde{H}$, also ebenfalls offen.

Propostion: Ist H zusammenängend so ist die von $exp(\mathfrak{h})$ erzeugte Untergruppe isomorph zu H.

Beweis: Die Teilmenge $U \cap H$ vom obigen Satz liegt in $\exp(\mathfrak{h})$ und damit in der davon erzeugte Untergruppe $\tilde{H} \subset H$.
Analog liegt für $h \in \tilde{H}$ die Menge $hU \cap H$ in $\tilde{H}$ (wobei $hU = \{hg : g \in U\}$). Nun ist aber nach Definition jede dieser Teilmengen offen in H,also ist $\tilde{H}$ eine offene Teilmenge von H.
Das Komplement von $\tilde{H}$ in H ist aber eine Vereinigung von Nebenklassen, die jeweils isomorph zu $\tilde{H}$, also ebenfalls offen.
Somit ist $\tilde{H}$ auch abgeschlossen, und weil H zusammenhängend ist, folgt $\tilde{H} = H$.

Propostion: Ist H zusammenängend so ist die von $exp(\mathfrak{h})$ erzeugte Untergruppe isomorph zu H.

Beweis: Die Teilmenge $U \cap H$ vom obigen Satz liegt in $\exp(\mathfrak{h})$ und damit in der davon erzeugte Untergruppe $\tilde{H} \subset H$.
Analog liegt für $h \in \tilde{H}$ die Menge $hU \cap H$ in $\tilde{H}$ (wobei $hU = \{hg : g \in U\}$). Nun ist aber nach Definition jede dieser Teilmengen offen in H,also ist $\tilde{H}$ eine offene Teilmenge von H.
Das Komplement von $\tilde{H}$ in H ist aber eine Vereinigung von Nebenklassen, die jeweils isomorph zu $\tilde{H}$, also ebenfalls offen.
Somit ist $\tilde{H}$ auch abgeschlossen, und weil H zusammenhängend ist, folgt $\tilde{H} = H$.

Korrolar: Ist $\Phi : G \to H$ ein glatter Homomorphismus, φ surjektiv und H zusammenängend dann ist Φ surjektiv.

Anwendung: Man beobachtet, dass

$$\mathfrak{su}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b+ic \\ b+ic & -ia \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \cong \mathbb{R}^3$$ ist

Anwendung: Man beobachtet, dass
$\mathfrak{su}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b+ic \\ b+ic & -ia \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \cong \mathbb{R}^3$ ist und
$\langle X, Y\rangle := -spur(XY)$ ein positiv definites Skalarprodukt auf
$\mathfrak{su}(2)$

Anwendung: Man beobachtet, dass
$\mathfrak{su}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b+ic \\ b+ic & -ia \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \cong \mathbb{R}^3$ ist und
$\langle X, Y \rangle := -spur(XY)$ ein positiv definites Skalarprodukt auf $\mathfrak{su}(2)$definiert. Weiters gilt für $A \in SU(2)$, $X \in \mathfrak{su}(2)$, dass $AXA^{-1} \in \mathfrak{su}(2)$,

Anwendung: Man beobachtet, dass $\mathfrak{su}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b+ic \\ b+ic & -ia \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \cong \mathbb{R}^3$ ist und $\langle X, Y \rangle := -spur(XY)$ ein positiv definites Skalarprodukt auf $\mathfrak{su}(2)$definiert. Weiters gilt für $A \in SU(2)$, $X \in \mathfrak{su}(2)$, dass $AXA^{-1} \in \mathfrak{su}(2)$,und $Ad_A : \mathfrak{su}(2) \to \mathfrak{su}(2)$ definiert durch $Ad_A(X) := AXA^{-1}$ erhält das Skalarprodukt und ist deshalb orthogonal bzgl. $\langle \, , \, \rangle \Rightarrow Ad_A \in SO(3)$ ist.

Anwendung: Man beobachtet, dass
$\mathfrak{su}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b+ic \\ b+ic & -ia \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \cong \mathbb{R}^3$ ist und
$\langle X, Y \rangle := -spur(XY)$ ein positiv definites Skalarprodukt auf $\mathfrak{su}(2)$definiert. Weiters gilt für $A \in SU(2)$, $X \in \mathfrak{su}(2)$, dass $AXA^{-1} \in \mathfrak{su}(2)$,und $Ad_A : \mathfrak{su}(2) \to \mathfrak{su}(2)$ definiert durch $Ad_A(X) := AXA^{-1}$ erhält das Skalarprodukt und ist deshalb orthogonal bzgl. $\langle\ ,\ \rangle \Rightarrow Ad_A \in SO(3)$ ist.
$\Phi : SU(2) \to SO(3)$, $\Phi(A) := Ad_A$ ist glatt und surjektiv, da die zugehörige Abbildung φ bijektiv ist.

Anwendung: Man beobachtet, dass

$$\mathfrak{su}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b+ic \\ b+ic & -ia \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \cong \mathbb{R}^3$$ ist und

$\langle X, Y \rangle := -spur(XY)$ ein positiv definites Skalarprodukt auf $\mathfrak{su}(2)$definiert. Weiters gilt für $A \in SU(2)$, $X \in \mathfrak{su}(2)$, dass $AXA^{-1} \in \mathfrak{su}(2)$,und $Ad_A : \mathfrak{su}(2) \to \mathfrak{su}(2)$ definiert durch $Ad_A(X) := AXA^{-1}$ erhält das Skalarprodukt und ist deshalb orthogonal bzgl. $\langle\ ,\ \rangle \Rightarrow Ad_A \in SO(3)$ ist.

$\Phi : SU(2) \to SO(3)$, $\Phi(A) := Ad_A$ ist glatt und surjektiv, da die zugehörige Abbildung φ bijektiv ist. Da $Ker(\Phi) = \pm\mathbb{I}$ ist, folgt dass $SO(3)$ isomorph zu $SU(2)/\{\pm\mathbb{I}\}$ ist.

Lie-Homomorphismen

Definition: Die bilineare Abbildung $[X, Y] := XY - YX$ wird Kommutator oder Lie-Klammer bezeichnet.

Lie-Homomorphismen

Definition: Die bilineare Abbildung $[X, Y] := XY - YX$ wird Kommutator oder Lie-Klammer bezeichnet.

Proposition: Ist φ wie in der obigen Propositon, und sind $X, Y \in \mathfrak{g}$ so gilt:

Lie-Homomorphismen

Definition: Die bilineare Abbildung $[X, Y] := XY - YX$ wird Kommutator oder Lie-Klammer bezeichnet.

Proposition: Ist φ wie in der obigen Propositon, und sind $X, Y \in \mathfrak{g}$ so gilt:

(i) $A \in G, X \in \mathfrak{g} \Rightarrow AXA^{-1} \in \mathfrak{g}$

Lie-Homomorphismen

Definition: Die bilineare Abbildung $[X, Y] := XY - YX$ wird Kommutator oder Lie-Klammer bezeichnet.

Proposition: Ist φ wie in der obigen Propositon, und sind $X, Y \in \mathfrak{g}$ so gilt:

(i) $A \in G, X \in \mathfrak{g} \Rightarrow AXA^{-1} \in \mathfrak{g}$

(ii) $X, Y \in \mathfrak{g} \Rightarrow [X, Y] \in \mathfrak{g}$

Lie-Homomorphismen

Definition: Die bilineare Abbildung $[X, Y] := XY - YX$ wird Kommutator oder Lie-Klammer bezeichnet.

Proposition: Ist φ wie in der obigen Propositon, und sind $X, Y \in \mathfrak{g}$ so gilt:

(i) $A \in G, X \in \mathfrak{g} \Rightarrow AXA^{-1} \in \mathfrak{g}$

(ii) $X, Y \in \mathfrak{g} \Rightarrow [X, Y] \in \mathfrak{g}$

(iii) $\forall X \in \mathfrak{g}, g \in G$ gilt $\varphi(gXg^{-1}) = \Phi(g)\varphi(X)\Phi(g)^{-1}$

Lie-Homomorphismen

Definition: Die bilineare Abbildung $[X, Y] := XY - YX$ wird Kommutator oder Lie-Klammer bezeichnet.

Proposition: Ist φ wie in der obigen Propositon, und sind $X, Y \in \mathfrak{g}$ so gilt:

(i) $A \in G, X \in \mathfrak{g} \Rightarrow AXA^{-1} \in \mathfrak{g}$

(ii) $X, Y \in \mathfrak{g} \Rightarrow [X, Y] \in \mathfrak{g}$

(iii) $\forall X \in \mathfrak{g}, g \in G$ gilt $\varphi(gXg^{-1}) = \Phi(g)\varphi(X)\Phi(g)^{-1}$

(iv) $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$ gilt $\varphi([X, Y]) = [\varphi(X), \varphi(Y)]$

Lie-Homomorphismen

Definition: Die bilineare Abbildung $[X, Y] := XY - YX$ wird Kommutator oder Lie-Klammer bezeichnet.

Proposition: Ist φ wie in der obigen Propositon, und sind $X, Y \in \mathfrak{g}$ so gilt:

(i) $A \in G, X \in \mathfrak{g} \Rightarrow AXA^{-1} \in \mathfrak{g}$

(ii) $X, Y \in \mathfrak{g} \Rightarrow [X, Y] \in \mathfrak{g}$

(iii) $\forall X \in \mathfrak{g}, g \in G$ gilt $\varphi(gXg^{-1}) = \Phi(g)\varphi(X)\Phi(g)^{-1}$

(iv) $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$ gilt $\varphi([X, Y]) = [\varphi(X), \varphi(Y)]$

Beweis: (i) $X \in \mathfrak{g} \Rightarrow e^{tX} \in G \; \forall t \Rightarrow Ae^{tX}A^{-1} \in G$ ist Einparameteruntergruppe, mit Ableitung $AXA^{-1} \Rightarrow AXA^{-1} \in \mathfrak{g}$

Lie-Homomorphismen

Definition: Die bilineare Abbildung $[X, Y] := XY - YX$ wird Kommutator oder Lie-Klammer bezeichnet.

Proposition: Ist φ wie in der obigen Propositon, und sind $X, Y \in \mathfrak{g}$ so gilt:

(i) $A \in G, X \in \mathfrak{g} \Rightarrow AXA^{-1} \in \mathfrak{g}$

(ii) $X, Y \in \mathfrak{g} \Rightarrow [X, Y] \in \mathfrak{g}$

(iii) $\forall X \in \mathfrak{g}, g \in G$ gilt $\varphi(gXg^{-1}) = \Phi(g)\varphi(X)\Phi(g)^{-1}$

(iv) $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$ gilt $\varphi([X, Y]) = [\varphi(X), \varphi(Y)]$

Beweis: (i) $X \in \mathfrak{g} \Rightarrow e^{tX} \in G\ \forall t \Rightarrow Ae^{tX}A^{-1} \in G$ ist Einparameteruntergruppe, mit Ableitung $AXA^{-1} \Rightarrow AXA^{-1} \in \mathfrak{g}$

(ii) Aus (i) folgt: $e^{tX}Ye^{-tX} \in \mathfrak{g}\ \forall t \Rightarrow [X, Y] \in \mathfrak{g}$

Beweis: (iii) Ist $g \in G$ und $X \in \mathfrak{g}$ so gilt $e^{t\varphi(gXg^{-1})} = e^{\varphi(tgXg^{-1})} = \Phi(g)\Phi(e^{tX})\Phi(g)^{-1} = \Phi(g)e^{t\varphi(X)}\Phi(g)^{-1}$. Die Aussage folgt aus Ableiten und Auswertung an $t = 0$.

(iv) $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$ gilt $[X, Y] = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} e^{tX} Y e^{-tX}$. Aus (i) folgt

$$\begin{aligned}\varphi([X, Y]) =& \varphi\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} e^{tX} Y e^{-tX}\right) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi(e^{tX} Y e^{-tX}) = \\ =& \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \Phi(e^{tX})\varphi(Y)\Phi(e^{-tX}) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} e^{t\varphi(X)}\varphi(Y)e^{-t\varphi(X)} = \\ =& [\varphi(X), \varphi(Y)]\end{aligned}$$