Solusi Numerik Ordinary Differential Equation (ODE)

Andri Hendriyana
hendriyana@gf.itb.ac.id

Teknik Geofisika, ITB

2021

Outline

Pendahuluan

- Defini *Ordinary Differential Equation* (ODE)
- Berbagai contoh ODE dalam geofisika:seismometer,ray tracing
- Solusi analitik ODE
- Ekspansi Taylor

Solusi Numerik ODE

- Metode Euler
- Metode Heun
- Metode Modified Euler
- Metode Finite Difference
- Metode Runge-Kutta orde 2 (RK2)
- Metode RK4

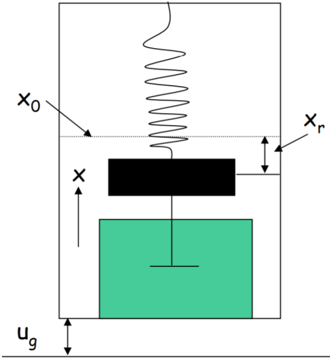
Bentuk umum ODE

$$a_0(x,y)\frac{d^n y(x)}{dx^n} + a_1(x,y)\frac{d^{n-1} y(x)}{dx^{n-1}} + \ldots$$
$$+ a_{n-1}(x,y)\frac{d^{n-1} y(x)}{dx^{n-1}} + a_n(x,y)y(x) = f(x,y)$$

Contoh:

- Heat transfer:
$$\frac{dT}{dt} = -K(T_a - T)$$
- (hanya contoh saja)
$$\frac{dT}{dt} = tT$$
- (hanya contoh saja)
$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 0$$

Electromagnetic seismometer



Gambar: Model seismometer https://www.geophysik.uni-muenchen.de/~igel/Lectures/Sedi/sedi_seismometry.pdf.

$$\frac{d^2 x_r(t)}{dt^2} + 2\epsilon \frac{dx_r(x)}{dt} + \omega_0^2 x_r(t) = -\frac{d^2 u_g(t)}{dt^2}$$

Ray tracing

Trajektori dari lintasan ray gelombang pada model 2D mengikuti model matematis berikut (`https://academic.oup.com/gji/article/101/1/157/737106`),

$$\frac{dx}{dt} = v \sin\theta$$
$$\frac{dz}{dt} = v \cos\theta$$
$$\frac{d\theta}{dt} = -\cos\theta \frac{dv}{dx} + \sin\theta \frac{dv}{dz}$$

Solusi analitik

Salah satu strategi mencari solusi analitik adalah pemisahan variabel. Sebagai contoh:

$$\frac{dT}{T} = tdt$$

Berikut solusi analitik:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dT}{T} &= \int tdt \\
\ln |T| + c_1 &= \frac{1}{2}t^2 + c_2 \\
T &= C \exp 0.5t^2
\end{aligned}$$

Ekspansi Taylor

$$T(t_i + \Delta t) = T(t_i) + \left.\frac{dT}{dt}\right|_{t_i} \Delta t + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2T}{dt^2}\right|_{t_i} \Delta t^2 + \ldots$$

Jika Δt-nya sangat kecil, maka cukup sampai orde-1 saja (linier/garis lurus):

$$T(t_i + \Delta t) = T(t_i) + \left.\frac{dT}{dt}\right|_{t_i} \Delta t$$

Metode Euler

Menggunakan ekspansi Taylor sampai orde-1 saja. Misalnya untuk menghitung nilai T pada t yang beragam:

$$\frac{dT}{T} = tdt$$

maka dihitung secara bertahap (berevolusi) dari bawah misalnya t_1, t_2, dst.

$$\begin{aligned} T(t_2) &= T(t_1 + \Delta t) = T(t_1) + \left.\frac{dT}{dt}\right|_{t_1} \Delta t \\ T(t_1) &= T(t_0 + \Delta t) = T(t_0) + \left.\frac{dT}{dt}\right|_{t_0} \Delta t \end{aligned}$$

Tentunya akan memerlukan $T(t_0)$ (Initial Value Problem).

Contoh implementasi metode Euler

Metode Euler, berdasarkan ekspansi Taylor:

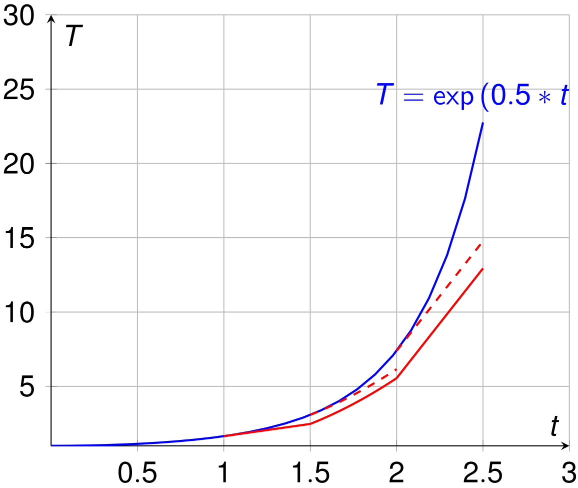
$$T(t_i + \Delta t) = T(t_i) + \left.\frac{dT}{dt}\right|_{t_{i+1}} \Delta t$$

$$\frac{dT}{dt} = Tt$$

t_i	T_{i-1}	$\left.\frac{dT}{dt}\right\|_{t_{i-1}} \Delta t = t_{i-1} T_{i-1} \Delta t$	T_i
t_1	$T_0 =$......	....	$T_1 =$......
t_2	$T_1 =$......	....	$T_2 =$......
t_3	$T_2 =$......	....	$T_3 =$......
t_4	$T_3 =$......	....	$T_4 =$......

Hasil perhitungan numerik

$$\frac{dT}{dt} = Tt$$



Metode Heun atau improved Euler method

Metode Heun merupakan bagian dari metode *predictor-corrector*. Menggunakan gradien hasil rata2:

$$T(t_{i+1}) = T(t_i + \Delta t) = T(t_i) + \frac{1}{2}\left(\left.\frac{dT}{dt}\right|_{t_i} + \left.\frac{dT}{dt}\right|_{t_{i+1}} \right)\Delta t$$

Nilai T_{i+1} diprediksi dari T_i dengan menggunakan gradien yang dihitung pada t_i dinyatakan sebagai $f(t_i, T_i)$ dan gradien pada t_{i+1} atau $f(t_{i+1}, T_{i+1})$, sbb:

$$T_{i+1} = T_i + \frac{1}{2}\left[f(t_i, T_i) + f(t_{i+1}, T_{i+1})\right]\Delta t$$

Metode Heun

Nilai $f(t_{i+1}, T_{i+1})$ dihitung dengan menggunakan nilai T_{i+1} pendekatan,sehingga

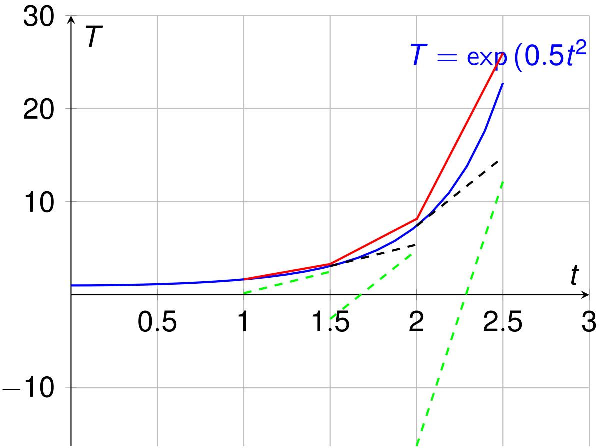
$$\begin{aligned} T_{i+1} &= T_i + \tfrac{1}{2}\left[f(t_i, T_i) + f(t_{i+1}, T_i + f(t_i, T_i)\Delta t)\right]\Delta t \\ &= T_i + \tfrac{1}{2}f(t_i, T_i)\Delta t + \tfrac{1}{2}f(t_{i+1}, T_i + f(t_i, T_i)\Delta t)\Delta t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(t_i, T_i) \\ k_2 &= hf(t_i + h, T_i + k_1) \end{aligned}$$

$h = \Delta t$. Maka:

$$T_{i+1} = T_i + \frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2$$

Ilustrasi metode Heun



Metode Heun

Lngkah pengerjaan metode Heun adalah sebagai berikut,

1. Prediksi nilai T_{i+1}, dengan cara biasa yg digunakan di *forward* yaitu $T_{i+1} = T_i + f(t_i, T_i)\Delta t = T_i + k_1$. Nilai ini disebut *predictor*.
2. Nilai *predictor* digunakan untuk menghitung $k_2 = f(t_i + h, T_i + k_1)\Delta t$
3. Hitung $T_{i+1} = T_i + \frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2$

Metode Modified Euler

Nilai *predictor*-nya dihitung pada $T_{i+0.5}$:

$$T_{i+1} = T_i + \left.\frac{dT}{dt}\right|_{t_{i+0.5}} \Delta t$$

dengan,

$$k_1 = \left.\frac{dT}{dt}\right|_{t_i} \Delta t = f(t_i, T_i)\Delta t$$

$$k_2 = \left.\frac{dT}{dt}\right|_{t_{i+0.5}} \Delta t = f(t_i + 0.5h, T_i + 0.5k_1)$$

Perhatikan nilai k_2 pada slide ini berbeda dengan slide sebelumnya.

Metode Finite Difference

Berdasarkan Taylor, differensial dapat diapproksimasi oleh:

$$\left.\frac{dT}{dt}\right|_{t=t_i} = \frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta t}$$

Sehingga, dari contoh sebelumnya, kita akan mendapatkan:

$$\frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta t} = t_i T_i.$$

Ruas kiri dapat kita ubah menggunakan orde yang lebih tinggi sbb:

$$\frac{T_{i+1} - T_{i-1}}{2\Delta t} = t_i T_i.$$

Maka nilai T_{i+1} dapat juga dihitung sebagai berikut,

$$T_{i+1} = T_{i-1} + 2 t_i T_i \Delta t.$$

Runge-Kutta orde 2 (RK2)

Bentuk umum dari RK orde-2 adalah,

$$T_{i+1} = T_i + \alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2 \tag{2}$$

dengan:

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(t_i, T_i) \\ k_2 &= hf(t_i + \beta_1 h, T_i + \beta_1 k_1) \end{aligned}$$

dengan:

$$\beta_1 = 1$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$$

RK orde-4 (RK4)

RK4 memiliki formula sebagai berikut,

$$T_{i+1} = T_i + \frac{1}{6}(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) \tag{3a}$$

$$k_1 = hf(t_i, T_i) \tag{3b}$$

$$k_2 = hf(t_i + 0.5h, T_i + 0.5k_1) \tag{3c}$$

$$k_3 = hf(t_i + 0.5h, T_i + 0.5k_2) \tag{3d}$$

$$k_4 = hf(t_{i+1}, T_i + k_3) \tag{3e}$$

Contoh penyelesaian dengan RK4

$$\frac{dT}{dt} = tT$$

dengan nilai inisial $T(0) = 1$. Hitung nilai $T(1), T(2), T(3), \ldots$!
Misalkan interval $\Delta t = 1$.

1. $k_1 = hf(t_0, T_0) = ht_0 T_0 = 0$
2. $k_2 = hf(t_0 + 0.5h, T_0 + 0.5k_1) = 1(0 + 0.5)(1 + 0.5 \cdot 0) = 0.5$
3. $k_3 = hf(t_0 + 0.5h, T_0 + 0.5k_2) = 1(0 + 0.5)(1 + 0.5 \cdot 0.5) = 0.625$
4. $k_4 = hf(t_0 + h, T_0 + k_3) = 1(0 + 1)(1 + 0.625) = 1.625$
5. Nilai $T_1 = T(1) = 1 + (0 + 0.5 + 0.625 + 1.625)/6 = 1.4583$

Contoh penyelesaian dengan RK4: T_2

T_2 diestimasi menggunakan langkah yang sama untuk menghitung T_1,sbb:

1. $k_1 = hf(t_1, T_1) = 1(1)(1.4583) = 1.4583$. Perhatikan nilai T_1 yang sudah diperoleh pada langkah sebelumnya, skr digunakan untuk estimasi k_1 dan untuk nilai lainnya juga. Artinya *error* yang dikandung T_1 akan berpropagasi ke k_1.
2. $k_2 = hf(t_1 + 0.5h, T_1 + 0.5k_1) = 1(1 + 0.5)(1.4583 + 0.5 \cdot 1.4583) = 3.2812$
3. $k_3 = hf(t_1 + 0.5h, T_1 + 0.5k_2) = 1(1 + 0.5)(1.4583 + 0.5 \cdot 3.2812) = 4.6483$
4. $k_4 = hf(t_1 + h, T_1 + k_3) = 1(1 + 1)(1.4583 + 4.6483) = 12.2132$
5. $T_2 = 1.4583 + (1.4583 + 3.2812 + 4.6483 + 12.2132)/6 = 5.0585$

Ilustrasi Euler, Heun/RK2 dan RK4