Persamaan Differensial Biasa (*Ordinary Differential Equations*)

Andri Hendriyana

Teknik Geofisika

KK Seismologi Eksplorasi dan Rekayasa, FTTM, ITB

hendriyana@gf.itb.ac.id

1 PENDAHULUAN

Ordinary Differential Equations merupakan salah satu topik dari studi matematika. Oleh karena itu, Anda akan dengan mudah menemukan judul yang sama (*Ordinary Differential Equations*) pada berbagai buku referensi yang berkaitan dengan matematika atau matematika-fisika. Untuk kepraktisan, dalam diktat ini *Ordinary Differential Equations* akan disingkat menjadi ODE. Kalau diterjemahkan *differential* artinya sesuatu yang berkaitan dengan perbedaan (*difference*) atau perubahan. Jika kita menganalisis berapa perubahan temperatur suhu batuan sebagai fungsi dari kedalaman, maka secara matematis kita harus memodelkannya dalam bentuk *differential equations*. Perubahan suatu kuantitas (misalnya temperatur batuan) tidak harus fungsi spasial (misalnya kedalaman atau z), tapi juga bisa merupakan fungsi dari temporal atau waktu. Kenapa ada kata tambahan *ordinary*? Kata ini digunakan dalam konteks kuantitas tersebut hanya fungsi satu variabel saja. Dalam contoh tadi misalnya, temperatur batuan hanya signifikan perubahannya terhadap kedalaman saja. Pada kedalaman berbeda, maka temperatur batuan berubah, namun pada kedalaman yang sama, jika diukur pada waktu berbeda maka temperaturnya konstan, misalnya. Maka dalam kasus dinamika temperatur batuan ini cukup dimodelkan dalam bentuk ODE. Jadi kesimpulannya, pada kasus ODE, perubahan hanya dihitung terhadap satu variabel saja baik itu spasial maupun temporal. Pada pembahasan selanjutnya, Anda akan mempelajari perubahan kuantitas pada variabel lebih dari satu. Dalam konteks tsb, maka bukan lagi ODE namun PDE. P untuk

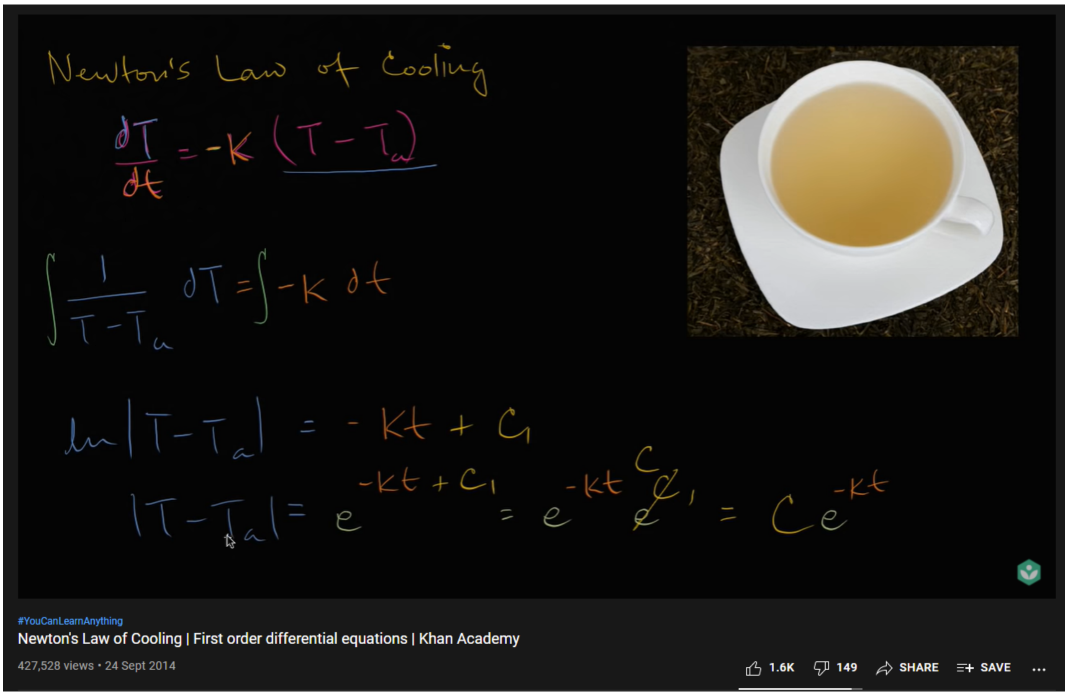


Figure 1. Salah satu contoh modeling untuk mencari perubahan temperatur sebagai fungsi waktu: proses pendinginan secangkir kopi `https://www.youtube.com/watch?v=IICR-w1jYcA`. T:temperatur, t:waktu, sehingga dT/dt adalah perubahan temperatur terhadap waktu.

partial. Perubahan dalam bahasa matematik diterjemahkan sebagai turunan atau **derivative**. Maka dalam pembahasan ODE ini, Anda akan banyak bertemu dengan notasi $\frac{d..}{dx}$ untuk perubahan terhadap spasial atau $\frac{d...}{dt}$ untuk turunan terhadap temporal.

Sebagai contoh sederhana untuk memahami aplikasi ODE adalah melakukan estimasi perubahan suhu dari kopi panas (berarti proses pendinginan kopi) Gambar 1. Semoga contohnya terlihat lebih *membumi* yaitu proses pendinginan secangkir kopi, namun semoga contoh sederhana ini dapat membantu untuk mengerti dengan mudah. Proses perubahan temperatur kopi terhadap waktu dinyatakan sebagai dT/dt. Ingat pembahasan sebelumnya ada dua komponen dalam ODE yaitu: (1) adanya perubahan Temperatur (dT/dt) dan (2) dalam contoh ini hanya perubahan terhadap waktu (satu variabel). Apakah ada contoh lainnya yang berkaitan dengan geofisika atau ilmu kebumian? Tentu saja jawabannya ada dan bisa jadi sangat banyak, diantaranya diperlihatkan pada sub-bab 2.

Secara umum, persamaan ODE dapat dinyatakan secara lengkap sebagai berikut,

$$a_0(x,y)\frac{d^n y(x)}{dx^n} + a_1(x,y)\frac{d^{n-1}y(x)}{dx^{n-1}} + ... + a_{n-1}(x,y)\frac{d^{n-1}y(x)}{dx^{n-1}} + a_n(x,y)y(x) = f(x,y) \quad (1)$$

ODE disebut linear jika fungsi yang tak diketahui ($y(x)$) tampil secara linier. Persamaan 2a dan 2b merupakan contoh ODE linear, sedangkan persamaan 2c merupakan non-linear ODE,

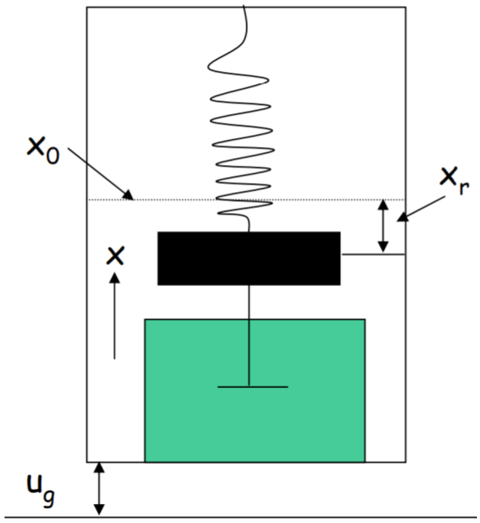


Figure 2. Model seismometer `https://www.geophysik.uni-muenchen.de/~igel/Lectures/Sedi/sedi_seismometry.pdf`.

karena dalam satu suku terdapat perkalian antara y dengan turunannya terhadap x.

$$\frac{dT}{dt} = -K(T_a - T) \tag{2a}$$

$$\frac{dT}{dt} = tT \tag{2b}$$

$$y(x)\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 0 \tag{2c}$$

Pangkat n (persamaan 1) menunjukkan orde dari turunan. Orde dari suatu persamaan ODE diambil dari orde (n) tertinggi. Maka, persamaan 2a dan 2b merupakan first-order ODE dan 2c merupakan *second order* ODE.

2 CONTOH KASUS ODE DALAM GEOFISIKA DAN ILMU KEBUMIAN

2.1 *Second order ODE*: Model seismometer

Model matematis yang merepresentasikan hubungan antara getaran fluktuasi partikel batuan akibat propagasi gelombang (*ground motion*, $u_g(t)$) dengan sinyal yang diberikan instrumen seismometer ($x_r(t)$) dinyatakan,

$$\frac{d^2x_r(t)}{dt^2} + 2\epsilon\frac{dx_r(x)}{dt} + \omega_0^2 x_r(t) = -\frac{d^2u_g(t)}{dt^2} \tag{3}$$

Sistem seismometer diilustrasikan pada Gambar 2.

2.2 *Ray Tracing*

Ray tracing adalah proses untuk menapaki atau menelusuri jalur yang dipilih gelombang dari suatu titik sumber (*source*, dimana gelombang dibangkitkan) ke titik posisi penerima (*receiver*). Jadi *ray tracing* adalah proses untuk melakukan simulasi kemana gelombang akan menjalar pada media bawah permukaan yang kita berikan. Bawah permukaan dinyatakan dalam medan atau distribusi kecepatan (v). Hasil dari modeling *ray tracing* ini sangat diperlukan untuk *imaging* atau pencitraan struktur bawah permukaan. Kenapa kita harus mencitrakan struktur bawah permukaan? Karena itulah tugas seorang *geophysicist*.

Trajektori dari lintasan ray gelombang pada model 2D mengikuti model matematis berikut (`https://academic.oup.com/gji/article/101/1/157/737106`),

$$\frac{dx}{dt} = v \sin\theta \tag{4a}$$

$$\frac{dz}{dt} = v \cos\theta \tag{4b}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\cos\theta \frac{dv}{dx} + \sin\theta \frac{dv}{dz} \tag{4c}$$

3 TINJAUAN ANALITIK

Secara analitik solusi dari turunan atau derivative tentunya adalah integral. Mari kita cari solusi analitik dari persaam ODE 2a. Mudah, tinggal apply integral saja. Namun tentu ada seninya yaitu kita kumpulkan suku yang mengandung jenis variabel yang sama, misalnya persamaan 2a kita ubah ke dalam bentuk berikut ini,

$$\frac{dT}{T} = tdt \tag{5}$$

OK, sekarang mari kita hitung integralnya,

$$\int \frac{dT}{T} = \int tdt \tag{6}$$

$$\ln|T| + c_1 = \frac{1}{2}t^2 + c_2 \tag{7}$$

$$T = C \exp 0.5t^2 \tag{8}$$

4 SOLUSI NUMERIK

4.1 Metode Euler

Metode ini merupakan metode yang paling sederhana. Idenya adalah nilai gradient (misalnya $\frac{dT}{dt}$) pada suatu *discretized* waktu (t_i) akan digunakan untuk estimasi nilai T pada titik berikutnya (t_{i+1}). Bagaimana cara melakukannya? Caranya adalah dengan memanfaatkan ekspansi Taylor,sbb:

$$T(t_i + \Delta t) = T(t_i) + \left.\frac{dT}{dt}\right|_{t_i} \Delta t + \frac{1}{2} \left.\frac{d^2T}{dt^2}\right|_{t_i} \Delta t^2 + ... \tag{9}$$

Jika nilai Δt sangat kecil, maka nilai $(\Delta x)^2$ akan semakin kecil. Sehingga dengan menggunakan asumsi Δt kecil ini, suku turunan dengan orde lebih dari satu dapat diabaikan. Dengan hanya memperhitungkan dua suku pertama (sampai dengan turunan pertama), maka bentuk ekspansi Taylor menjadi,

$$T(t_i + \Delta t) = T(t_i) + \left.\frac{dT}{dt}\right|_{t_i} \Delta t \tag{10}$$

Keputusan untuk memotong suku deret Taylor ini akan meringankan kita karena tidak perlu menghitung turunan kedua (*curvature*) dari fungsi T. Hal ini tentunya keuntungan bagi kita. Namun, di balik penyederhaan ini tentu ada biaya yang harus dibayar, yaitu keakuratan hasilnya yang berkurang, karena mengabaikan informasi dari *curvature* fungsi T ini.

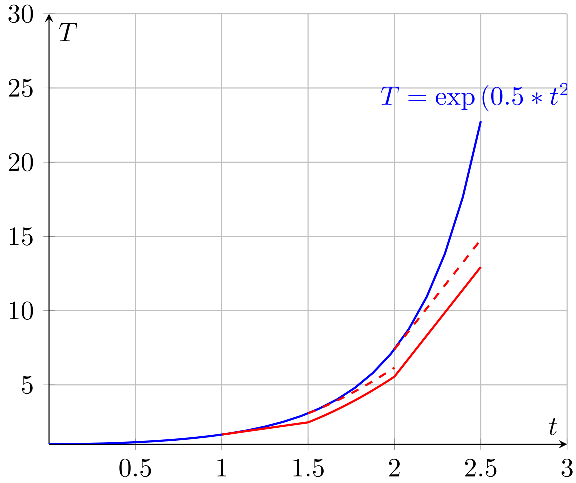
Dengan menggunakan persamaan 10 kita dapat menyelesaikan model matematis proses pendinginan secangkir kopi atau kita akan mampu memprediksi proses evolusi temperatur kopi sebagai fungsi waktu ($T(t)$). Temperatur pada waktu t_2 dan t_1 atau $T(t_2)$ dan $T(t_1)$ dapat kita hitung menggunakan,

$$T(t_2) = T(t_1 + \Delta t) = T(t_1) + \left.\frac{dT}{dt}\right|_{t_1} \Delta t \tag{11a}$$

$$T(t_1) = T(t_0 + \Delta t) = T(t_0) + \left.\frac{dT}{dt}\right|_{t_0} \Delta t \tag{11b}$$

Pola serupa dapat kita gunakan untuk membuat persamaan estimasi T pada berbagai nilai t. Dari persamaan 11a kita dapat menghitung $T(t_2)$ dengan syarat kita memiliki nilai $T(t_1)$ dan $\frac{dT}{dt}$ pada posisi $t = t_1$. Dan tentunya nilai $T(t_1)$ diperoleh dari persamaan 11a. Mudah kan? Jadi list atau series temperatur sebagai fungsi waktu dihitung dengan pola semacam rekursif. Namun nanti kita akan menemui kendala ketika menghitung nilai $T(t_1)$, karena kita harus memiliki nilai $T(t_0)$. Dari mana nilai ini kita dapatkan? Biasanya nilai ini diberikan saja. Sehingga kita dapat menghitung evolusi temperatur secara bertahap dari posisi waktu terkecil t_1 sampai terbesar t_N (N adalah jumlah diskrit waktu), dengan menggunakan nilai inisial $T(t_0)$ yang sudah diberikan. Tipe ODE dengan nilai inisial yang diberikan ini disebut *Initial Value Problem.*

Untuk semakin membuat mengerti tentang ide metode Euler ini, perhatikan Gambar 3. Anda harus memiliki kemampuan melakukan analisis terhadap hasil yang diperoleh. Untuk melakukan analisis, gunakan misalnya parameter keakuratan hasil numerik. Semakin mirip



[!ht]

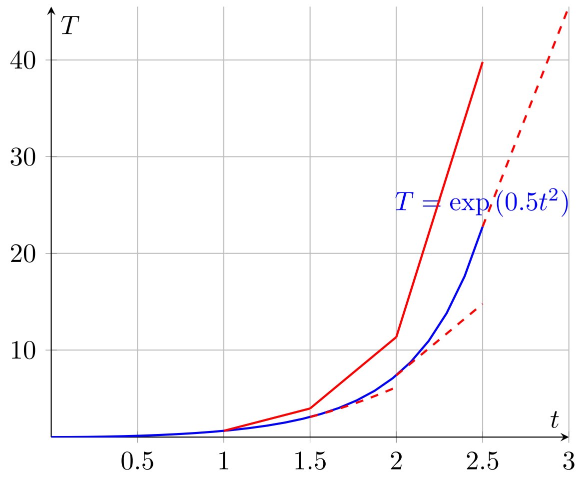
Figure 3. Contoh *forward Euler method*. Garis biru merupakan solusi analitik dari persamaan 2b (dengan kata adalah plot garis dari persamaan 6). Sedangkan warna merah tebal adalah fungsi yang diperoleh dari hasil numerik dengan interval $dt = 1$. Merah putus-putus merupakan gradient yang menggunakan skema forward. Perhatikan bahwa garis merah tebal dan putus-putus saling sejajar untuk setiap segmen sumbu t.

antara nilai analitik dengan numerik, maka semakin akurat hasil komputasinya. Keakuratan dapat dengan mudah dilihat pada Gambar 3, yaitu ketika garis merah (tebal) dan biru saling menjauh, maka hasil numeriknya semakin tidak akurat. Dapatkah Anda menjelaskan kenapa semakin ke kanan, selisih atau gap antara hasil analitik dan numerik semakin besar?

Perhatikan kembali persamaan 10. Nilai $T(t_{i+1})$ diestimasi dengan menggunakan gradien ($\frac{dT}{dt}$) yang dihitung pada posisi t_i. Metode ini disebut *forward Euler method* (Gambar 3) dan bahkan disebut juga *explicit Euler method*. Estimasi nilai $T(t_{i+1})$ dapat diestimasi juga menggunakan gradien ($\frac{dT}{dt}$) namun dihitung pada posisi t_{i+1}. Metode ini disebut *backward Euler method* atau *implicit Euler method*. Pada metode backward atau implisit, persamaan 1 akan berganti menjadi,

$$T(t_i + \Delta t) = T(t_i) + \left.\frac{dT}{dt}\right|_{t_{i+1}} \Delta t \tag{12}$$

Perhatikan bahwa gradien dihitung pada t_{t+1}. Untuk kasus ODE seperti persamaan 2a, tidak akan masalah menghitung gradien di posisi waktu manapun karena $f(t,T) = -K(T_a - T)$ atau gradien hanya merupakan fungsi variabel independen t saja. Padahal bentuk umum dari gradien adalah $f(x,y)$ (persamaan 1) atau nilai gradien dihitung dengan menggunakan variabel independen x dan sekaligus variabel dependen y. Sehingga ketika kita akan menghitung nilai gradien pada posisi t_{i+1} akan menjadi masalah, karena kita belum menghitung nilai



[!ht]

Figure 4. Contoh *backward Euler method*. Garis biru merupakan solusi analitik dari persamaan 2b (dengan kata adalah plot garis dari persamaan 6). Sedangkan warna merah tebal adalah fungsi yang diperoleh dari hasil numerik dengan interval $dt = 1$. Merah putus-putus merupakan gradient yang menggunakan skema backward. Perhatikan kesejajaran anatar garis merah tebal dan putus-putus dan coba bandingkan dengan Gambar 3 untuk melihat kontrasnya.

$y(t_{i+1})$. Dari uraian tersebut, maka kenapa disebut eksplisit dan implisit harusnya menjadi jelas. Atau kalau diulang adalah sebagai berikut penjelasannya:

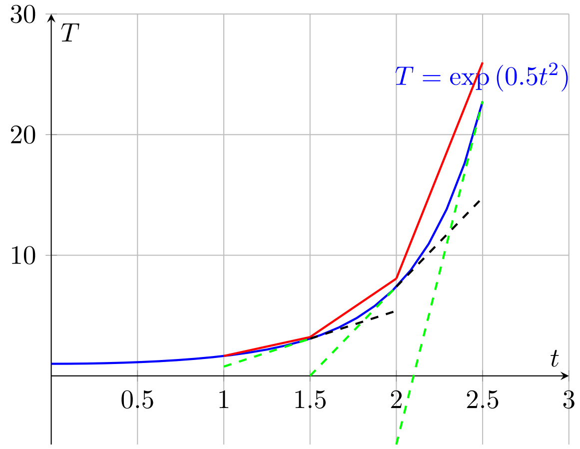
- pada metode forward (lihat persamaan 10), jika kita tahu nilai $T(t_i)$, maka secara eksplisit nilai pada posisi t berikutnya $T(t_{i+1})$ dapat **langsung** dihitung,
- sedangkan metode backward (persamaan 12) hal tersebut tidak dapat dilakukan. Penyelesaiannya akan melibatkan sistem persamaan linier.

Semoga Gambar 4 membantu Anda untuk memahami perbedaan antara *forward* dan *backward Euler method*.

4.2 Metode Heun dan *predictor-corrector*

Dari pembahasan sebelumnya kita telah melihat dua cara berbeda untuk estimasi nilai bergantung nilai gradien mana yang digunakan, apakah di titik yg sedang ditinjau (*forward*) atau gradien di depannya (*backward*). Dari Gambar 3 dan 4 bisa kita lihat performance dari kedua pendekatan ini. Kita harus agak kreatif, misalnya bagaimana kalau kita rata-ratakan kedua nilai gradien ini dan kita gunakan dalam proses estimasi, sehingga,

$$T(t_i + 1) = T(t_i + \Delta t) = T(t_i) + \frac{1}{2}\left(\left.\frac{dT}{dt}\right|_{t_i} + \left.\frac{dT}{dt}\right|_{t_{i+1}} \right) \Delta t \tag{13}$$



[!ht]

Figure 5. Metode Heun. Gradien yang digunakan adalah perata-rataan antara gradien berwarna hitam dan hijau. Namun, pada prakteknya gradien atau garis berwarna hijau tidak akan kita peroleh sebelum kita hitung dulu. Oleh karena itu gradien garis hijau harus kita prediksi dulu (baca penjelasannya dalam teks).

Mulai saat ini, kita akan gunakan notasi matematik sebagai berikut untuk menyatakan persamaan 13 (gradien dinyatakan secara umum dengan $f(x, y)$),

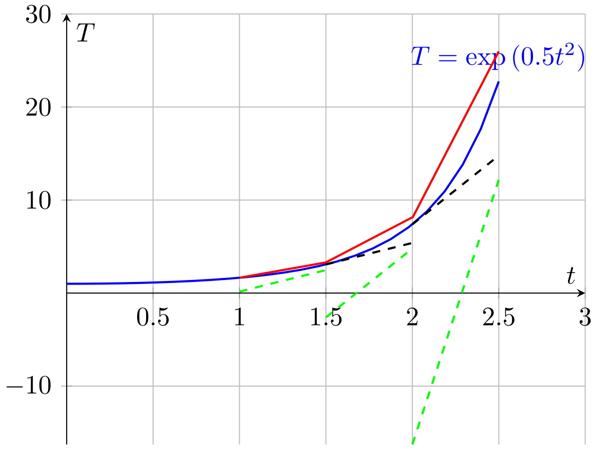
$$T_{i+1} = T_i + \frac{1}{2}\left[f(t_i, T_i) + f(t_{i+1}, T_{i+1})\right]\Delta t \tag{14}$$

Metode dengan perata-rataan gradien ini disebut metode Heun, disebut juga *improved Euler method* dan merupakan anggota dari kelompok metode *predictor-corrector*. Sebagai contoh metode Heun, perhatikan pada Gambar 5. Bandingkan gambar tersebut dengan Gambar 4 dan 3. Terlihat sekarang dengan menggunakan metode Heun hasilnya lebih akurat atau garis merah dan biru semakin mendekat (gap-nya semakin mengecil atau *error*-nya semakin berkurang). Gradien pada metode Heun merupakan perata-rataan antara gradien *forward* dan *backward*. Namun gradien *backward* sebenarnya tidak tepat kalau digambarkan seperti pada Gambar 5, karena tentunya informasi tersebut tidak akan pernah kita dapatkan. Kenapa? karena solusi eksaknya nilai T di depan kita tidak tahu kan.

Supaya lebih realistis, ilustrasi metode Heun diperbaharui oleh Gambar 6. Nilai gradien di depan ($f(t_{i+1}, T_{i+1})$) dihitung dengan menggunakan nilai T_{i+1} pendekatan, sehingga metode Heun sekarang dinyatakan sebagai berikut,

$$T_{i+1} = T_i + \frac{1}{2}\left[f(t_i, T_i) + f(t_{i+1}, (t_i + f(t_i, T_i)\Delta t))\right]\Delta t \tag{15}$$

Mulai saat ini kita akan menggunakan notasi gradien sebagai k. k diberi indeks yang berbeda jika gradien dihitung pada posisi yang berbeda. Pada persamaan 15 kita harus menghitung



[!ht]

Figure 6. Metode Heun yang lebih realistis (*predictor-corrector*). Garis hitam putus-putus merupakan gradien yang digunakan untuk estimasi *predictor* dan garis hijau putus-putus merupakan gradien yang berperan sebagai *corrector*.

gradien $f(t,T)$ pada posisi awal (k_1) dan ujung dari elemen diskrit (k_2),sbb:

$$k_1 = hf(t_i, T_i) \tag{16a}$$

$$k_2 = hf(t_i + h, T_i + k_1) \tag{16b}$$

h adalah Δt. Dengan menggunakan notasi yang baru diintroduksi ini, maka persamaan 15 menjadi:

$$T_{i+1} = T_i + \frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2 \tag{17}$$

Berdasarkan Gambar 6 dan persamaan 15 sekarang haruslah menjadi jelas bahwa langkah-langkah metode Heun terdiri atas,

(i) Prediksi nilai T_{i+1}, dengan cara biasa yg digunakan di *forward* yaitu $T_{i+1} = T_i + f(t_i, T_i)\Delta t$. Nilai ini disebut *predictor*.

(ii) Koreksi nilai *predictor* dengan menggunakan persamaan 15.

4.3 Metode modified Euler

Cobalah untuk kreatif dengan mencari cara lain untuk estimasi evolusi nilai T. Variabel yang dapat kita mainkan adalah gradien. Bisa saja kan gradiennya kita hitung di tengah-tengah seperti dinyatakan oleh persamaan berikut,

$$T_{i+1} = T_i + \left.\frac{dT}{dt}\right|_{t_{i+0.5}} \Delta t \tag{18}$$

Teknik ini disebut *modified Euler method*. Prinsipnya sama yaitu seperti *predictor-corrector*, namun tentunya *predictor*-nya dihitung pada $T_{i+0.5}$ begitu juga dengan gradien *corrector*-nya. Dalam bentuk lain, persamaan 18 dapat kita nyatakan,

$$T_{i+1} = T_i + k_2 \tag{19}$$

dengan,

$$h = \Delta t \tag{20a}$$

$$k_1 = \left.\frac{dT}{dt}\right|_{t_i} \Delta t = hf(t_i, T_i) \tag{20b}$$

$$k_2 = \left.\frac{dT}{dt}\right|_{t_{i+0.5}} \Delta t = f(t_i + 0.5h, T_i + 0.5k_1) \tag{20c}$$

4.4 Metode *finite difference*

Perhatikan kembali persamaan ekspansi Taylor (persamaan 10). Persamaan tersebut dapat kita susun ulang sebagai berikut,

$$\left.\frac{dT}{dt}\right|_{t=t_i} = \frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta t} \tag{21}$$

Artinya adalah bentuk fungsi kontinu turunan (ruas kiri) dapat kita ganti dengan persamaan beda hingga (ruas kanan). Oleh karena itu persamaan kontinu 2b dapat kita ubah menjadi,

$$\frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta t} = t_i T_i. \tag{22}$$

Perhatikan bahwa semua kuantitas dinyatakan secara diskrit (menggunakan indeks). Ruas kiri dapat kita ubah menggunakan orde yang lebih tinggi (akan dijelaskan kemudian), sbb:

$$\frac{T_{i+1} - T_{i-1}}{2\Delta t} = t_i T_i. \tag{23}$$

Maka nilai T_{i+1} dapat juga dihitung sebagai berikut,

$$T_{i+1} = T_{i-1} + 2t_i T_i \Delta t. \tag{24}$$

4.5 Metode Runge-Kutta

Metode Runge-Kutta (RK) yang akan dibahas pada diktat ini adalah untuk orde 2 dan 4. Nanti akan kita lihat bahwa RK orde-2 sebenarnya mirip dengan metode Heun (persamaan 17). Bentuk umum dari RK orde-2 adalah,

$$T_{i+1} = T_i + \alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2 \tag{25}$$

Orde-2, suku k distop sampai 2, tentunya orde-4 nanti akan melibatkan k_3 dan k_4. k_1 dan k_2 masih sama seperti sebelumnya namun dibuat general sebagai berikut,

$$\begin{aligned} k_1 = & \quad hf(t_i, T_i) \\ k_2 = & \quad hf(t_i + \beta_1 h, T_i + \beta_1 k_1) \end{aligned}$$

Pada metode Heun sebelumnya nilai β_1 dan β_2 adalah sama yaitu 1. Ide dari metode RK adalah sama seperti Heun yaitu untuk memperbaiki nilai gradien, nilai gradien yang digunakan diperoleh dari perata-rataan (penjumlahan dengan bobot) dari gradien di awal, ujung dan tengah. Pada metode Heun bobotnya sama antara gradien di awal dan di akhir. Pada metode RK pembobotan dibuat general dan dinyatakan oleh koefisien α_1, α_2 dan juga β_1. Oleh karena itu, skr kita akan belajar bagaimana menghitung koefisien ini. Pembahasan ini sebenarnya cukup detil, bagi yang tertarik silahka untuk mempelajari bagaimana koefisien ini ditentukan. Jika tidak tertarik juga tidak masalah, silahkan saja langsung dipakai persamaan 25.

Sistematika langkah-langkah penentuan koefisen RK-2 adalah sebagai berikut,

(i) Ekspansi Taylor untuk persamaan k_2,

$$k_2 = hf(t_i + \beta_1 h, T_i + \beta_1 k_1) = h\left[f(t_i, T_i) + \beta_1 h \frac{\partial f}{\partial t} + \beta_1 k_1 \frac{\partial f}{\partial T}\right] \tag{26a}$$

$$= hf + \beta_1 h^2 \frac{\partial f}{\partial t} + h\beta_1 k_1 \frac{\partial f}{\partial T} \tag{26b}$$

$$= hf + \beta_1 h^2 \frac{\partial f}{\partial t} + h^2 \beta_1 f \frac{\partial f}{\partial T} \tag{26c}$$

(ii) Masukkan persamaan terakhir ini ke persamaan 25:

$$T_{i+1} = T_i + \alpha_1 k_1 + \alpha_2 \left[k_1 + \beta_1 h^2 \frac{\partial f}{\partial t} + h^2 \beta_1 f \frac{\partial f}{\partial T}\right] \tag{27a}$$

$$= T_i + (\alpha_1 + \alpha_2) k_1 + \alpha_2 \beta_1 h^2 \left(\frac{\partial f}{\partial t} + f \frac{\partial f}{\partial T}\right) \tag{27b}$$

(iii) Ekspansi Taylor-kan T pada posisi waktu selisih satu kali sampling $T(t+h)$ (notasi h digunakan alih-alih Δt) sampai orde-2 saja,

$$T(t+h) = T(t) + \frac{dT}{dt} h + \frac{1}{2} \frac{d^2 T}{dt^2} h^2 \tag{28a}$$

Gradien $\frac{dT}{dt} = f(t, T) = f(t, T(t))$. Gradien f merupakan fungsi t dan T. Sedangkan T sendiri tentunya merupakan fungsi dari t.

$$T(t+h) = T(t) + \frac{dT}{dt}h + \frac{1}{2}\frac{d^2T}{dt^2}h^2 \tag{29a}$$

$$= T(t) + f(t,T(t))h + \frac{1}{2}\frac{df(t,T(t))}{dt}h^2 \tag{29b}$$

$$= T(t) + hf(t,T(t)) + \frac{1}{2}h^2\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial T}\frac{dT}{dt}\right) \tag{29c}$$

$$T_{i+1} = T_i + hf + \frac{1}{2}h^2\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial T}\frac{dT}{dt}\right) \tag{29d}$$

$$T_{i+1} = T_i + hf + \frac{1}{2}h^2\left(\frac{\partial f}{\partial t} + f\frac{\partial f}{\partial T}\right) \tag{29e}$$

(iv) Dengan membandingkan antara persamaan 29e dan 27b, maka akan diperoleh kesimpulan,

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1 \tag{30a}$$

$$\alpha_2\beta_1 = 0.5 \tag{30b}$$

(v) Persamaan 30 memberikan dua informasi (dua persamaan), padahal koefisien yang tidak diketahui ada tiga. Dalam kasus *underdetermined* seperti ini tidak ada solusi unik. Oleh karena itu, kita memiliki kebebasan untuk memilih nilai tertentu untuk salah satu koefisien. Misalnya, jika kita memilih $\beta_1 = 1$, maka kita akan memperoleh $\alpha_2 = 0.5$ (dari persamaan 30b) dan $\alpha_1 = 0.5$ (30b). Jika nilai ini dipakai pada persamaan RK2 (persamaan 25), maka RK2 memiliki formula yang sama dengan Heun (persamaan 17).

Apakah metode Heun sudah merupakan metode yang paling canggih (akurat) yang tersedia dalam litelatur? Ternyata tidak, masih ada peluang untuk meningkatkan keakuratan metode ODE dengan menambah orde pada metode RK, misalnya orde 4 seperti yang akan dibahas pada bagian selanjutnya.

4.6 Metode RK4 (detil penentuan koefisen)

Pada bagian ini akan dibahas cara menentukan koefisien RK4. Tidak perlu semua mahasiswa mengerti bagian ini. Namun bagi yang tertarik tentu boleh untuk mempelajarinya. Bagian ini dapat diloncati jika tidak tertarik untuk membacanya dan Anda dapat langsung ke bagian 4.7. Langkah sistematis penentuan koefisien sama seperti pada RK2. RK4 tentunya akan memiliki empat koefisien k $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ selain koefisien β,

$$T_{i+1} = T_i + \alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2 + \alpha_3 k_3 + \alpha_4 k_4 \tag{31}$$

Nilai untuk masing-masing k:

$$k_1 = hf(t_i, T_i) \tag{32a}$$

$$k_2 = hf(t_i + \beta_1 h, T_i + \beta_1 k_1) \tag{32b}$$

$$k_3 = hf(t_i + \beta_1 h + \beta_2 h, T_i + \beta_1 k_1 + \beta_2 k_2) \tag{32c}$$

$$k_4 = hf(t_i + \beta_1 h + \beta_2 h + \beta_3 h, T_i + \beta_1 k_1 + \beta_2 k_2 + \beta_3 k_3) \tag{32d}$$

Sistematika langkahnya adalah sebagai berikut,

(i) Ekspansi Taylor untuk $T(t+h)$ sampai orde-3. RK2 hanya sampai orde-2 (persamaan 29e).

$$T_{i+1} = T_i + hf + \frac{1}{2}h^2\left(\frac{\partial f}{\partial t} + f\frac{\partial f}{\partial T}\right) + \frac{h^3}{3!}\frac{d^3T}{dt^3} \tag{33}$$

Ekspansi sd orde 2 sudah pernah dijelaskan, oleh karena itu maka skr akan fokus dengan suku terakhir saja.

$$\frac{d^3T}{dt^3} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}f(t, T(t))\right) \tag{34a}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{df}{dt} + \frac{df}{dT}f\right) \tag{34b}$$

Turunan lebih detil untuk masing-masing suku di sebelah kanan dari persamaan 34b, (jangan lupa setiap kali melakukan operasi terhadap f, untuk melakukan turunan berantai)

$$\frac{d}{dt}\frac{df}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{df}{dt} + \frac{df}{dT}f\right) = \frac{d^2f}{dt^2} + f\frac{d^2f}{dtdT} \tag{35a}$$

$$\frac{d}{dt}\left(f\frac{df}{dT}\right) = \frac{df}{dt}\frac{df}{dT} + f\frac{d}{dT}\frac{df}{dt} \tag{35b}$$

$$= \frac{df}{dt}\frac{df}{dT} + f\frac{d}{dT}\left(\frac{df}{dt} + f\frac{df}{dT}\right) \tag{35c}$$

$$= \left(\frac{df}{dt} + \frac{df}{dT}f\right)\frac{df}{dT} + f\frac{d^2f}{dtdT} + f^2\frac{d^2f}{dT^2} \tag{35d}$$

$$= \frac{df}{dt}\frac{df}{dT} + f\left(\frac{df}{dT}\right)^2 + f\frac{d^2f}{dtdT} + f^2\frac{d^2f}{dT^2} \tag{35e}$$

Sehingga persamaan 34b menjadi,

$$\frac{d^3T}{dt^3} = \frac{d^2f}{dt^2} + 2f\frac{d^2f}{dtdT} + \frac{df}{dt}\frac{df}{dT} + f\left(\frac{df}{dT}\right)^2 + f^2\frac{d^2f}{dT^2} \tag{36}$$

Sehingga persamaan 33 menjadi,

$$T_{i+1} = T_i + hf + \frac{1}{2}h^2\left(\frac{\partial f}{\partial t} + f\frac{\partial f}{\partial T}\right) + \frac{h^3}{3!}\left(\frac{d^2f}{dt^2} + 2f\frac{d^2f}{dtdT} + \frac{df}{dt}\frac{df}{dT} + f\left(\frac{df}{dT}\right)^2 + f^2\frac{d^2f}{dT^2}\right) \tag{37}$$

(ii) Ekspansi Taylor k_2 masih menggunakan persamaan sebelumnya (persamaan 26c). Sedangkan ekspansi untuk k_3 (persamaan 32c) adalah sbb (gunakan ekspansi k_2 juga dari persamaan 26c),

$$
\begin{aligned}
k_3 &= h\left[f + \frac{df}{dt}(\beta_1+\beta_2)h + \frac{df}{dT}(\beta_1 k_1 + \beta_2 k_2)\right] \qquad (38a)\\
&= h\left[f + \frac{df}{dt}(\beta_1+\beta_2)h + \frac{df}{dT}\left\{\beta_1 hf + \beta_2\left(hf + \beta_1 h^2\frac{\partial f}{\partial t} + h^2\beta_1 f\frac{\partial f}{\partial T}\right)\right\}\right] \qquad (38b)\\
&= h\left[f + \frac{df}{dt}(\beta_1+\beta_2)h + \frac{df}{dT}(\beta_1+\beta_2)hf + h^2\beta_1\beta_2\frac{df}{dt}\frac{df}{dT} + h^2\beta_1\beta_2 f\left(\frac{df}{dT}\right)^2\right] \qquad (38c)\\
&= hf + h^2(\beta_1+\beta_2)\frac{df}{dt} + h^2(\beta_1+\beta_2)f\frac{df}{dT} + h^3\beta_1\beta_2\frac{df}{dt}\frac{df}{dT} + h^3\beta_1\beta_2 f\left(\frac{df}{dT}\right)^2 \qquad (38d)
\end{aligned}
$$

Ekspansi untuk k_4 adalah sebagai berikut,

$$
\begin{aligned}
k_4 &= hf(t_i + \beta_1 h + \beta_2 h + \beta_3 h, T_i + \beta_1 k_1 + \beta_2 k_2 + \beta_3 k_3) \qquad (39a)\\
&= h\left[f + h(\beta_1+\beta_2+\beta_3)\frac{df}{dt} + (\beta_1 k_1 + \beta_2 k_2)\frac{df}{dT}\right] + h\beta_3 k_3\frac{df}{dT} \qquad (39b)\\
&= h\left[f + h(\beta_1+\beta_2+\beta_3)\frac{df}{dt} + h(\beta_1+\beta_2)f\frac{df}{dT} + h^2\beta_1\beta_2\frac{df}{dt}\frac{df}{dT} + h^2\beta_1\beta_2 f\left(\frac{df}{dT}\right)^2\right] + h\left[\beta_3 k_3\frac{df}{dT}\right] \qquad (39c)\\
&= hf + h^2(\beta_1+\beta_2+\beta_3)\frac{df}{dt} + h^2(\beta_1+\beta_2)f\frac{df}{dT} + h^3\beta_1\beta_2\frac{df}{dt}\frac{df}{dT} + h^3\beta_1\beta_2 f\left(\frac{df}{dT}\right)^2 + h\left[\beta_3 k_3\frac{df}{dT}\right] \qquad \mathit{program}
\end{aligned}
$$

(39

Skr fokus ke suku terakhir ($h\beta_3 k_3\frac{df}{dT}$),

$$
= h\beta_3\frac{df}{dT}\left[hf + h^2(\beta_1+\beta_2)\frac{df}{dt} + h^2(\beta_1+\beta_2)f\frac{df}{dT} + h^3\beta_1\beta_2\frac{df}{dt}\frac{df}{dT} + h^3\beta_1\beta_2 f\left(\frac{df}{dT}\right)^2\right] \qquad (40a)
$$

$$
= h^2\beta_3 f\frac{df}{dT} + h^3\beta_3(\beta_1+\beta_2)\frac{df}{dt}\frac{df}{dT} + h^3\beta_3(\beta_1+\beta_2)f\left(\frac{df}{dT}\right)^2 + h^4\beta_1\beta_2\beta_3\frac{df}{dt}\left(\frac{df}{dT}\right)^2 + h^4\beta_1\beta_2\beta_3 f\left(\frac{df}{dT}\right)^3 \qquad (40b)
$$

4.7 Metode RK4

RK4 memiliki formula sebagai berikut,

$$T_{i+1} = T_i + \frac{1}{6}(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) \tag{41a}$$

$$k_1 = hf(t_i, T_i) \tag{41b}$$

$$k_2 = hf(t_i + 0.5h, T_i + 0.5k_1) \tag{41c}$$

$$k_3 = hf(t_i + 0.5h, T_i + 0.5k_2) \tag{41d}$$

$$k_4 = hf(t_{i+1}, T_i + k_3) \tag{41e}$$

Berikut diberikan contoh penggunaan formula RK4 di atas untuk mencari solusi kasus ODE sederhana (sama dengan persamaan 2b):

$$\frac{dT}{dt} = tT \tag{42a}$$

$$T(0) = 1 \tag{42b}$$

(i) Tentukan h, misalnya $h = 1$. Artinya kita akan menghitung nilai $T(1), T(2), T(3), ...$

(ii) Hitung k_1: $k_1 = hf(t_0, T_0) = ht_0T_0 = 0$. Nilai $k_1 = 0$ artinya gradien tangent thd fungsi T berupa garis mendatar (gradien bernilai 0).

(iii) Hitung k_2: $k_2 = hf(t_0 + 0.5h, T_0 + 0.5k_1) = 1(0 + 0.5)(1 + 0.5 \cdot 0) = 0.5$, ingat bahwa $T(0) = 1$ (*initial value problem*)

(iv) Hitung k_3: $k_3 = hf(t_0 + 0.5h, T_0 + 0.5k_2) = 1(0 + 0.5)(1 + 0.5 \cdot 0.5) = 0.625$

(v) Hitung k_4: $k_4 = hf(t_0 + h, T_0 + k_3) = 1(0 + 1)(1 + 0.625) = 1.625$

(vi) Nilai $T_1 = T(1) = 1 + (0 + 0.5 + 0.625 + 1.625)/6 = 1.4583$

(vii) Perhitungan tentu tidak berhenti pada T_1. Solusi numerik dari ODE adalah fungsi juga, fungsi yang bernilai diskrit pada waktu dengan interval (h) tertentu. Untuk menghitung nilai T_2, prosedur yang sama sebelumnya harus diulang kembali. Di bawah ini adalah proses estimasi nilai T_2.

(viii) $k_1 = hf(t_1, T_1) = 1(1)(1.4583) = 1.4583$. Perhatikan nilai T_1 yang sudah diperoleh pada langkah sebelumnya, skr digunakan untuk estimasi k_1 dan untuk nilai lainnya juga. Artinya *error* yang dikandung T_1 akan berpropagasi ke k_1.

(ix) $k_2 = hf(t_1 + 0.5h, T_1 + 0.5k_1) = 1(1 + 0.5)(1.4583 + 0.5 \cdot 1.4583) = 3.2812$

(x) $k_3 = hf(t_1 + 0.5h, T_1 + 0.5k_2) = 1(1 + 0.5)(1.4583 + 0.5 \cdot 3.2812) = 4.6483$

(xi) $k_4 = hf(t_1 + h, T_1 + k_3) = 1(1 + 1)(1.4583 + 4.6483) = 12.2132$

(xii) $T_2 = 1.4583 + (1.4583 + 3.2812 + 4.6483 + 12.2132)/6 = 5.0585$

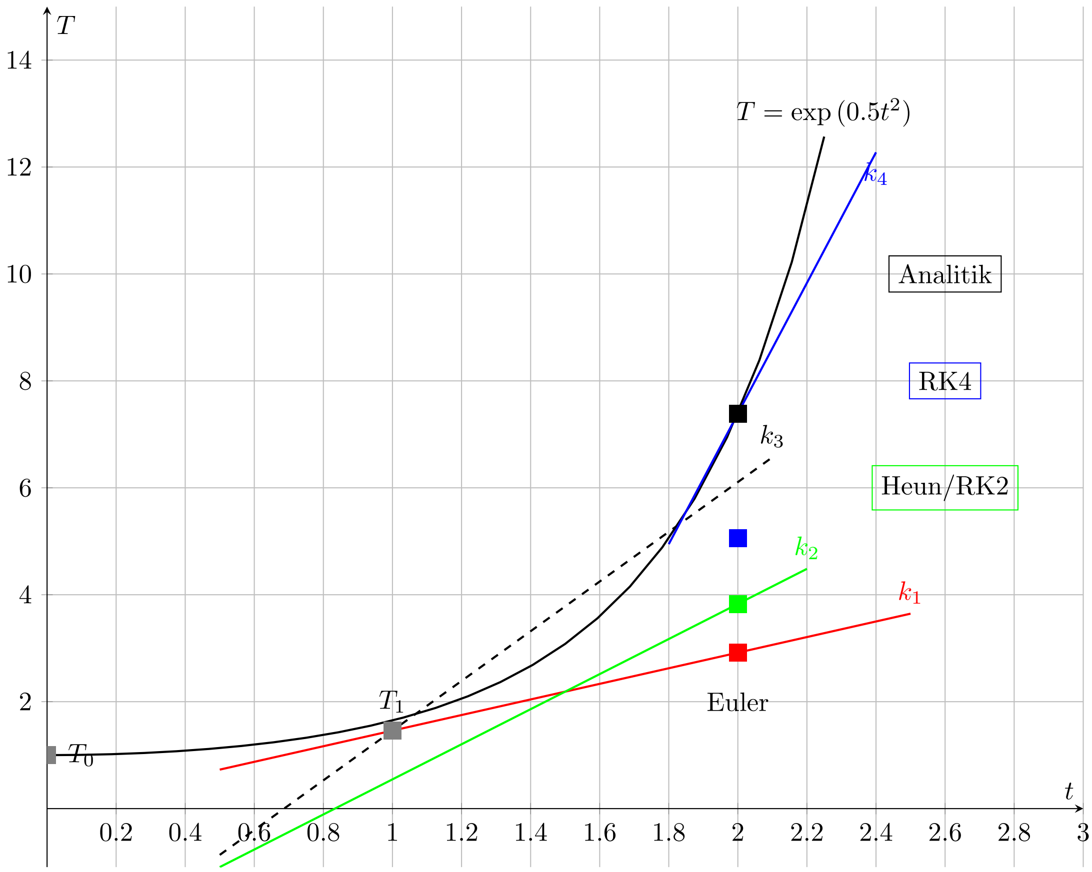


Figure 7. Ilustrasi estimasi nilai menggunakan Euler, Heun/RK2 dan RK4. Metode RK4 diperoleh dengan menggunakan gradien di awal (merah), dua gradien di tengah (biru dan hijau) dan gradien di ujung (hitam putus-putus). Nilai gradien diplot menggunakan angka yang diperoleh dari contoh perhitungan (lihat teks).

Untuk memahami makna fisis dari formula RK4 (persamaan 41) tersebut, perhatikan Gambar 7.

5 LATIHAN

(i)