Міністерство освіти і науки України
Національний університет «Львівська політехніка»
Інститут комп’ютерних наук та інформаційних технологій
Кафедра автоматизованих систем управління

Звіт
до лабораторної роботи № 2
з дисципліни
Моделювання процесів і смарт-систем
на тему:

«Моделювання динамічних систем.»

Виконала: студентка ОІ-32
Горяча І. В.
Прийняв: асистент каф. АСУ
Мельник Р. В.

Львів – 2025

Мета: Оволодіння методами комп’ютерного моделювання динамічних систем, що описуються системами звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР). Набути навички застосування чисельних методів Рунге-Кутта для розв’язування систем ЗДР.

Завдання 1. Моделювання екологічної системи.

a) змоделювати екосистему в якій територіальні ресурси розподілені між жертвами та хижаками за наступних вихідних даних

- коефіцієнти взаємодії між видами: a11 = 0.01·N, a12 = 0.0001·N, a21 = 0.0001·N, a22 = 0.04·N (де N – номер варіанту, який є порядковим номером студента у списку його групи);
- вектор початкових умов з початковими значеннями кількості жертв x = 1000 – 10·N та хижаків y = 700 – 10·N;
- час початку спостереження за системою – t0 = 0, крок інтегрування h = 0.1 дня, тривалість спостереження в днях – T = 150;

b) методом чисельного інтегрування Рунге-Кутта четвертого порядку розв’язати, отриману у попередньому пункті (а) систему рівнянь Лотки- Вольтери із вказаними початковими умовами та побудувати графіки залежностей x(t), y(t) і y(x). Для цього написати код відповідної комп’ютерної програми на мові програмування Python.

Згідно з умовою:

- N = 4
- $a_{11} = 0.01 \cdot 4 = 0.04$
- $a_{12} = 0.0001 \cdot 4 = 0.0004$
- $a_{21} = 0.0001 \cdot 4 = 0.0004$
- $a_{22} = 0.04 \cdot 4 = 0.16$

Початкові значення:

- $x_0 = 1000 - 10 \cdot 4 = 960$
- $y_0 = 700 - 10 \cdot 4 = 660$

Крок інтегрування: $h = 0.1$

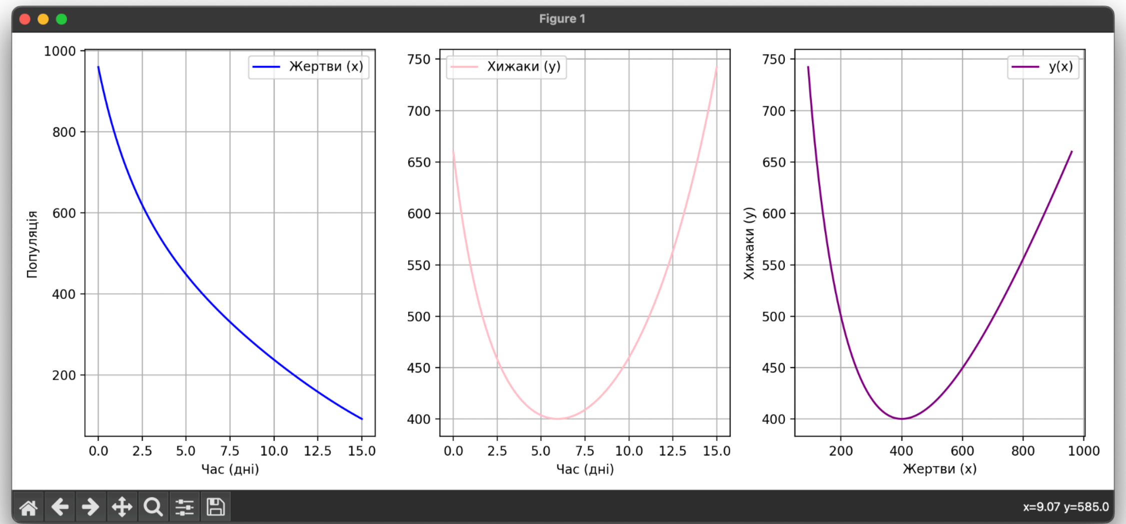
$$\begin{cases} x' = a_{11}x - a_{12}xy, \\ y' = a_{22}y - a_{21}xy. \end{cases}$$

Система рівнянь:

$x' = 0.04x - 0.0004xy$

$y' = 0.16y - 0.0004xy$

Результати:



t	x	y
0.00	960.00	660.00
0.10	939.01	645.65
0.20	918.99	632.14
0.30	899.86	619.39
0.40	881.57	607.35
0.50	864.06	595.97
0.60	847.27	585.21
0.70	831.16	575.02
0.80	815.67	565.36
0.90	800.78	556.21
1.00	786.44	547.52
1.10	772.61	539.27
1.20	759.28	531.44
1.30	746.40	523.99
1.40	733.95	516.91
1.50	721.91	510.17
1.60	710.25	503.77
1.70	698.96	497.66
1.80	688.01	491.86
1.90	677.39	486.33
2.00	667.07	481.06
2.10	657.05	476.04
2.20	647.30	471.27
2.30	637.82	466.72
2.40	628.58	462.38
2.50	619.59	458.26
2.60	610.82	454.33
2.70	602.27	450.59
2.80	593.93	447.04
2.90	585.78	443.66
3.00	577.82	440.44
3.00	577.82	440.44
3.10	570.04	437.39
3.20	562.43	434.49
3.30	554.99	431.74
3.40	547.70	429.14
3.50	540.56	426.67
3.60	533.57	424.34
3.70	526.72	422.13
3.80	519.99	420.06
3.90	513.40	418.10
4.00	506.93	416.26
4.10	500.57	414.54
4.20	494.33	412.92
4.30	488.20	411.42
4.40	482.17	410.02
4.50	476.24	408.72
4.60	470.40	407.53
4.70	464.66	406.43
4.80	459.01	405.42
4.90	453.45	404.51
5.00	447.96	403.69
5.10	442.56	402.96
5.20	437.24	402.32
5.30	431.99	401.76
5.40	426.81	401.29
5.50	421.70	400.90
5.60	416.65	400.60
5.70	411.68	400.37
5.80	406.76	400.22
5.90	401.91	400.15
6.00	397.11	400.16
6.10	392.37	400.24
6.20	387.69	400.40
6.30	383.05	400.64
6.40	378.47	400.95
6.50	373.94	401.33
6.60	369.46	401.78
6.70	365.02	402.31
6.80	360.63	402.91
6.90	356.28	403.58
7.00	351.98	404.32
7.10	347.71	405.13
7.20	343.49	406.02
7.30	339.30	406.97
7.40	335.15	407.99
7.50	331.04	409.09
7.60	326.97	410.25
7.70	322.93	411.48
7.80	318.92	412.79
7.90	314.95	414.16
8.00	311.01	415.60
8.10	307.09	417.12
8.20	303.21	418.70
8.30	299.36	420.36
8.40	295.54	422.09
8.50	291.75	423.89
8.60	287.98	425.76
8.70	284.24	427.70
8.80	280.53	429.72
8.90	276.84	431.81
9.00	273.18	433.98
9.10	269.54	436.21
9.20	265.93	438.53
9.30	262.34	440.92
9.40	258.78	443.38
9.50	255.23	445.93
9.60	251.71	448.55
11.80	179.44	527.96
11.90	176.38	532.67
12.00	173.33	537.48
12.10	170.31	542.41
12.20	167.31	547.45
12.30	164.32	552.60
12.40	161.36	557.87
12.50	158.41	563.26
12.60	155.49	568.76
12.70	152.58	574.38
12.80	149.70	580.13
12.90	146.83	586.00
13.00	143.99	592.00
13.10	141.16	598.13
13.20	138.36	604.38
13.30	135.58	610.78
13.40	132.82	617.30
13.50	130.08	623.97
13.60	127.37	630.78
13.70	124.68	637.73
13.80	122.01	644.83
13.90	119.36	652.07
14.00	116.73	659.47
14.10	114.13	667.02
14.20	111.56	674.72
14.30	109.00	682.59
14.40	106.48	690.61
14.50	103.97	698.81
14.60	101.50	707.16
14.70	99.04	715.69
14.80	96.62	724.40
14.90	94.22	733.28
15.00	91.84	742.34

Завдання 2. Моделювання процесу розповсюдження епідемії.

а) змоделювати процес розповсюдження епідемії за наступних вихідних даних

- кількість людей в населеному пункті H = 1000 – N, інтенсивність розповсюдження епідемії 1-а людина за день передає інфекцію N здоровим людям $\beta = 25 - N$, кількість днів, необхідних на одужання $\gamma = N$ (де N – номер варіанту, який є порядковим номером студента у списку його групи);

- вектор початкових умов, елементи якого: x = 900 – N – кількість здорових людей, y=90–N – кількість хворих, z=H–x–y – кількість людей, які одужали;
- час початку спостереження за системою – t0 = 0, крок інтегрування h = 0.1 дня, тривалість спостереження в днях – T = 40;

b) методом чисельного інтегрування Рунге-Кутта четвертого порядку розв'язати, отриману у попередньому пункті (a) систему рівнянь типу (7) із вказаними початковими умовами та побудувати графіки залежностей x(t), y(t) і z(t). Для цього написати код відповідної комп'ютерної програми на мові програмування Python.

Згідно з умовою:

- $H = 1000 - 4 = 996$
- $\beta = 21$
- $\gamma = 4$

Початкові значення:

- $x_0 = 900 - 4 = 896$
- $y_0 = 90 - 4 = 86$
- $z_0 = 996 - 896 - 86 = 14$

Крок інтегрування: $h = 0.1$

$$\begin{cases} x' = -\beta/H \cdot xy, \\ y' = \beta/H \cdot xy - 1/\gamma \cdot y, \\ z' = 1/\gamma \cdot y. \end{cases}$$

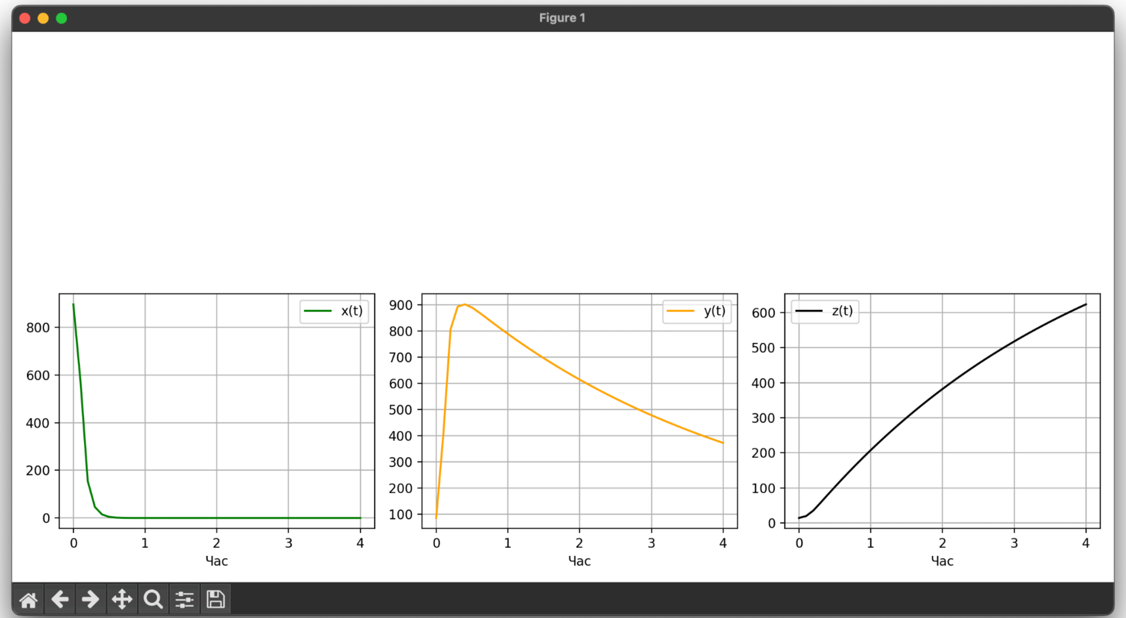
Система рівнянь:

$$x' = \ - 21/996 \cdot xy$$

$$y' = 21/996 \cdot xy - 1/4 \cdot y$$

$$z' = 1/4 \cdot y$$

Результати:



t	x	y	z
0.00	896.00	86.00	14.00
0.10	570.85	405.68	19.47
0.20	155.30	805.49	35.22
0.30	45.96	892.72	57.33
0.40	14.50	901.42	80.08
0.50	4.44	888.99	102.57
0.60	1.31	870.10	124.59
0.70	0.38	849.53	146.09
0.80	0.11	828.82	167.07
0.90	0.03	808.44	187.53
1.00	0.01	788.50	207.50
1.10	0.00	769.03	226.96
1.20	0.00	750.05	245.95
1.30	0.00	731.53	264.47
1.40	0.00	713.47	282.53
1.50	0.00	695.85	300.15
1.60	0.00	678.67	317.33
1.70	0.00	661.92	334.08
1.80	0.00	645.57	350.43
1.90	0.00	629.63	366.37
2.00	0.00	614.09	381.91
2.10	0.00	598.93	397.07
2.20	0.00	584.14	411.86
2.30	0.00	569.72	426.28
2.40	0.00	555.65	440.35
2.50	0.00	541.93	454.07
2.60	0.00	528.55	467.45
2.70	0.00	515.50	480.50
2.80	0.00	502.77	493.23
2.90	0.00	490.36	505.64
3.00	0.00	478.25	517.75
3.10	0.00	466.44	529.56
3.20	0.00	454.93	541.07
3.30	0.00	443.70	552.30
3.40	0.00	432.74	563.26
3.50	0.00	422.06	573.94
3.60	0.00	411.64	584.36
3.70	0.00	401.47	594.53
3.80	0.00	391.56	604.44
3.90	0.00	381.89	614.11
4.00	0.00	372.46	623.54

Код програми - репозиторій github: https://github.com/ira-horiacha/mpss

Висновок: Отже, в результаті виконання цієї лабораторної роботи, я закріпила на практиці метод Рунге-Кутта 4-порядку для розв’язання системи диференціальних рівнянь. Зокрема, в першому завданні для системи хижаків-жертв я отримала результати у вигляді графіків, які наглядно показують що при приблизно однаковій кількості жертв-хижаків, хижаки поїдають жертв і таким чином кількість жертв зменшується.

В другому завданні, де потрібно змоделювати процес розповсюдження епідемії з отриманих графіків видно, що спершу кількість здорових людей зменшується, таким чином збільшується кількість хворих, але з часом ті, що захворіли, одужують і таким чином збільшується z (кількість тих що перехворіли).