Конспект по теории категорий по книге Tom Leinster, ”Basic Category Theory”.

Тотьмянин Данил

08.07.25

Оглавление

Глава 1

Введение

Основным концептом в этом конспекте является понятие *универсального* свойства. Приведём несколько примеров.

Пример 1.1. Обозначим множество из одного (неважно какого) элемента за 1. Тогда 1 имеет следующее свойство:

$$\forall X \ \text{ существует единственное отображение из } X \text{ в } 1$$

Доказательство. Пусть X — множество. Тогда существует отображение $f : X \to 1$, т.к. его мы можем определить так:

$$\forall x : f(x) \text{ равно элементу множества } 1$$

Такое отображение единственно, т.к. любое отображение $f : X \to 1$ для каждого $x \in X$ ставит в соответствие единственный элемент из множества 1. □

В данном конспекте под словом *кольцо* будем подразумевать кольцо с нейтральным элементом по умножению. Так же все *гомоморфизмы* подразумевают не только сохранение операций сложения и умножения, но и сохранение нейтрального элемента (то есть если f — гомоморфизм, то для любых колец R, Q выполняется: $f(1_R) = 1_Q$)

Пример 1.2. Пусть R — кольцо. Тогда существует единственный гомоморфизм $f : \mathbb{Z} \to R$

Доказательство. <u>Существование</u> Положим функцию:

$$f(n) = \begin{cases} \underbrace{1 + \cdots + 1}_{n} & n > 0 \\ 0 & n = 0 \\ -f(-n) & n < 0 \end{cases}$$

Очевидно это является гомоморфизмом.

Единственность Пусть f, g — гомоморфизмы из $\mathbb{Z}$ в R. Тогда по свойству сохранения нейтрального элемента:

$$g(n) = g(\underbrace{1 + \cdots + 1}_{n}) = \underbrace{g(1) + \cdots + g(1)}_{n} = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{n} = f(n)$$

для всех $n > 0$

Так же гомоморфизм сохраняет нейтральный элемент по сложению: $g(0) = f(0)$

А так же имеем для $n < 0$:

$$g(n) = -g(-n) = -f(-n) - f(n)$$

□

По сути, может существовать только один объект удовлетворяющий универсальному свойству. Здесь "*по сути*" означает с точностью до изоморфизма. То есть если два объекта удовлетворяют одному универсальному свойству, то они обязательно изоморфны. Например:

Лемма 1.1. Пусть A — кольцо со свойством: для всех колец R существует единственный гомоморфизм $f : A \to R$. Тогда $A \cong \mathbb{Z}$

Доказательство. Кольцо A будем называть *начальным.* В прошлом примере мы доказали, что $\mathbb{Z}$ является начальным кольцом.

Из определения имеем, что существуют единственные гомоморфизмы $\varphi : A \to \mathbb{Z}$ и $\varphi' : \mathbb{Z} \to A$ Композиции из гомоморфизмов:

$$\varphi' \circ \varphi : A \to A, \qquad \varphi \circ \varphi' : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$

сами являются гомоморфизмами, и по прошлому утверждению получаем, что они единственны, а значит:

$$\varphi' \circ \varphi = \mathrm{id}_A \qquad \varphi \circ \varphi' = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$$

Поэтому гомоморфизмы φ, φ' являются взаимообратными, то есть изоморфизмами. □

Перейдём к векторным и топологическим пространствам.

Пример 1.3. Для любого множества S существуют векторное пространство V и функция (являющаяся индексацией базиса): $i : S \to V$ обладающие универсальным свойством:

Для любого векторного пространства W и для любой функции $f : S \to W$ существует единственная линейная функция $\bar{f} : V \to W$, такая что $f = \bar{f} \circ i$

Перепишем это в виде диаграммы:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "\forall\text{ функции } f"'] & V \arrow[d, dashed, "\exists\,!\text{ линейная } \bar{f}"] \\ & \forall\, W \end{tikzcd}$$

Доказательство. Это потому что любая функция определённая на базисных векторах однозначно расширяется до линейной функции. □

Пример 1.4. Пусть S множество. Положим функцию

$$i : S \to D(S) \quad (i(s) = s)$$

где $D(S)$ — топологическое пространство с дискретной топологией, построенное на S. Тогда функция i и пространство $D(S)$ имеют универсальное свойство:

Для любого топологического пространства X и для любой функции $f : S \to X$ существует единственная непрерывная функция $\bar{f} : D(S) \to X$, такая что $f = \bar{f} \circ i$

Доказательство. Перепишем утверждение в виде диаграммы:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "\forall\text{ функции } f"'] & D(S) \arrow[d, dashed, "\exists\,!\text{ непрерывная } \bar{f}"] \\ & \forall\, X \end{tikzcd}$$

Непрерывность любой функции $D(S) \to X$ является очевидной, в силу дискретной топологии.

Существование Положим $\bar{f}(s) = f(s)$, тогда необходимо проверить условие, что $\bar{f} \circ i = f$:

$$(\bar{f} \circ i)(s) = \bar{f}(i(s)) = \bar{f}(s) = f(s)$$

Единственность Из-за условия $\bar{f} \circ i = f$ имеем, что:

$$\forall\, s \in S : (\bar{f} \circ i)(s) = \bar{f}(s) = f(s)$$

Т.к. f зафиксировано, $\bar{f}$ обязан быть единственным □

Пример 1.5. Пусть U, V — любые векторные пространства. Тогда существуют такое векторное пространство T и соответствующее ему билинейное отображение $b : U \times V \to T$, обладающие универсальным свойством:

Для любого векторного пространства W и для любого билинейного отображения $f : U \times V \to W$ существует единственное линейное отображение $\bar{f} : T \to W$, такое что $f = \bar{f} \circ b$

Можно представить в виде диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
U \times V \arrow[r, "b"] \arrow[dr, "\forall \text{ функции } f"'] & T \arrow[d, dashed, "\exists ! \text{ непрерывная } \bar{f}"] \\
 & \forall W
\end{tikzcd}$$

> **Лемма 1.2.** Пусть U, V — векторные пространства. Положим $b : U \times V \to T$, $b' : U \times V \to T'$ — билинейные отображения с универсальным свойством. Тогда $T \cong T'$.

Доказательство. Покажем связи в виде диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
 & T \arrow[d, "j"] \\
U \times V \arrow[ur, "b"] \arrow[r, "b'"] \arrow[dr, "b"'] & T' \arrow[d, "j'"] \\
 & T
\end{tikzcd}$$

Тогда по универсальному свойству для b, T подставляя b', T' имеем единственное линейное отображение $j : T \to T'$

Аналогично по универсальному свойству для b', T' подставляя b, T имеем единственное линейное отображение $j' : T' \to T$

Тогда имеем $j' \circ j : T \to T$ линейное отображение, для которого выполнено: $(j' \circ j) \circ b = b$, тогда по универсальному свойству для b, T подставляя $j' \circ j, T$ имеем, что $j' \circ j = \mathrm{id}_T$. Аналогично $j \circ j' = \mathrm{id}_{T'}$. Получили что j — изоморфизм. $\square$

Это доказательство своего рода "шаблон", который применяется для доказательства изоморфности объектов, обладающих общим универсальным свойством.

Глава 2

Категории, функторы и естественные преобразования