Лабораторная работа № 5

Модель эпидемии (SIR)

Мугари Абдеррахим

01 марта 2025

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

Информация

Преподаватель

- Анна Владиславовна Королькова
- доцент кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН;
- заведующий лабораторией кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (по совместительству);
- программист I кат.
- Российский университет дружбы народов
- korolkova-av@rudn.ru

Докладчик

- Мугари Абдеррахим
- Студент третьего курса
- фундаментальная информатика и информационные технологии
- Российский университет дружбы народов
- 1032215692@rudn.ru
- https://iragoum.github.io/

Цель работы

Цель работы

Целью данной лабораторной работы является изучение и моделирование распространения инфекционных заболеваний с использованием математической модели **SIR**. В рамках работы необходимо:

- Построить базовую модель SIR в программных средах **Xcos** и **OpenModelica**.
- Исследовать динамику эпидемии при заданных параметрах.
- Модифицировать модель, добавив процессы рождаемости и смертности.
- Провести анализ влияния параметров на поведение модели.

Теоретическая часть

Модель SIR была предложена в 1927 году учёными W. O. Kermack и **A. G. McKendrick**. Она описывает динамику численности населения в условиях распространения инфекционного заболевания.

В данной модели рассматриваются три группы населения:

- **S (susceptible, восприимчивые)** — здоровые, но уязвимые особи, которые могут заразиться.
- **I (infected, инфицированные)** — заражённые и распространяющие заболевание.
- **R (recovered, выздоровевшие)** — особи, переставшие быть источником инфекции (выздоровевшие или умершие).

Общее число особей остаётся постоянным:

$$N = S + I + R.$$

Система дифференциальных уравнений модели SIR:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta S I, \\ \frac{dI}{dt} = \beta S I - \nu I, \\ \frac{dR}{dt} = \nu I. \end{cases}$$

где:

- коэффициент заражения,
- коэффициент выздоровления.

Данная система описывает динамику заражения и выздоровления в популяции

Практическая часть

Открытие Scilab и Xcos

Была запущена среда Scilab, затем открыт Xcos для создания модели.

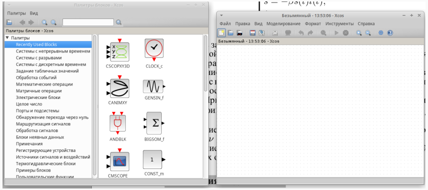

Рис. 1: Открытие Scilab и Xcos

Задание параметров модели

Заданы значения:

? = 1, ? = 0.3.

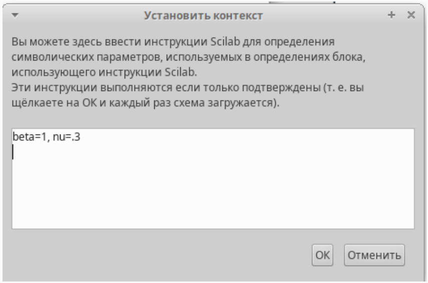

Рис. 2: Задание параметров модели

Модель была собрана с использованием следующих блоков:

- **CLOCK_c** — для управления временем моделирования.
- **INTEGRAL_m** — для интегрирования уравнений.
- **GAINBLK_f** — для задания коэффициентов и .
- **SUMMATION** — для суммирования потоков.
- **PROD_f** — для вычисления произведений.]

- MUX — для объединения данных на один график.
- CSCOPE — для визуализации графиков.

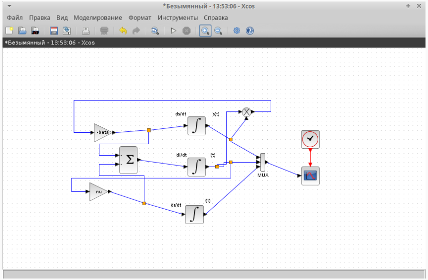

Рис. 3: Построение модели в Xcos

Построение модели в Xcos

Начальные условия были установлены:

$$S(0) = 0.999 I(0) = 0.001 R(0) = 0$$

Запуск графика модели SIR

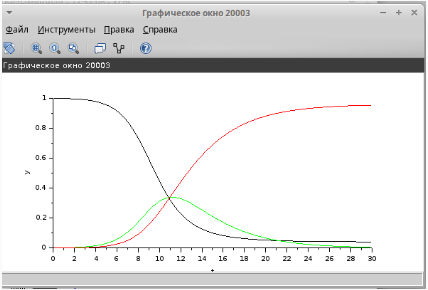

Рис. 4: Запуск графика модели SIR

Пик числа заражённых i(t) показывает максимальное количество больных в популяции одновременно. Это важный показатель, который может быть использован для оценки нагрузки на систему здравоохранения во время эпидемии.

- Далее я использовал блок “Modelica generic” в Xcos для реализации модели SIR. Это оказалось проще, так как код на языке Modelica более компактный и читаемый

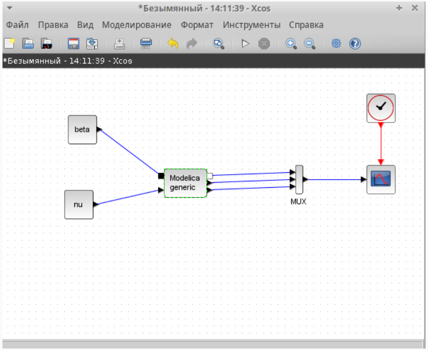

Рис. 5: Реализация модели в Modelica

Реализация модели в Modelica

- здесь я ввел значения констант и выходных переменных, которые мы имеем в модели

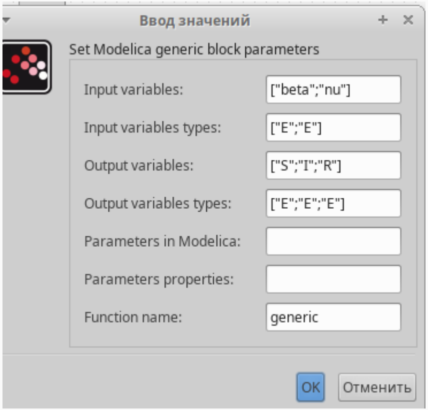

Рис. 6: Реализация модели в Modelica

Реализация модели в Modelica

- Для реализации модели использовался Modelica Generic Block. Код:.

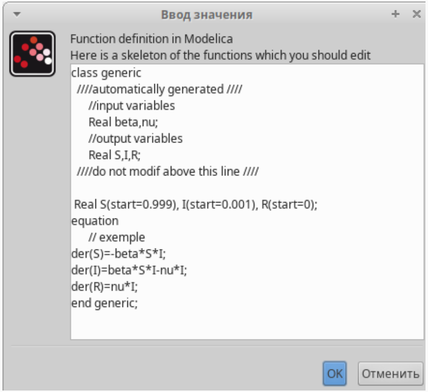

Рис. 7: Реализация модели в Modelica

Я запустил симуляцию с использованием блока Modelica и получил те же графики, что и в шаге 4. Это ожидаемо, так как параметры и уравнения остались неизменными, что подтверждает корректность реализации модели.

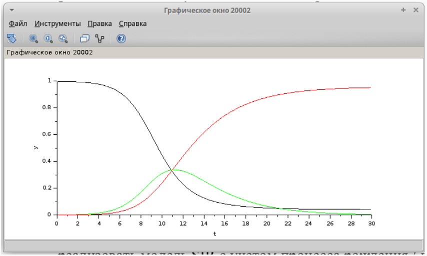

Рис. 8: Сравнение графиков

Для модификации модели было необходимо добавить процессы рождаемости и смертности. Новая система дифференциальных уравнений выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta SI + \mu(N - S), \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI - \nu I - \mu I, \\ \frac{dR}{dt} = \nu I - \mu R. \end{cases}$$

μ — коэффициент рождаемости и смертности, который учитывает приток новых уязвимых и естественную убыль населения во всех группах. N — общая популяция, принятая равной 1 (нормированная).

- Эта модификация делает модель более реалистичной, так как в реальной жизни популяция не остаётся полностью замкнутой, а обновляется за счёт рождений и смертей.

Построение модифицированной модели в Xcos

Я построил новую модель в Xcos, добавив блоки для учёта μ. Уравнения теперь включают дополнительные члены:

- Для (s(t)):

$$\frac{ds}{dt} = \cdots + \mu(N - s(t))$$

- Для (i(t)):

$$\frac{di}{dt} = \cdots - \mu i(t)$$

- Для (r(t)):

$$\frac{dr}{dt} = \cdots - \mu r(t)$$

как показано в

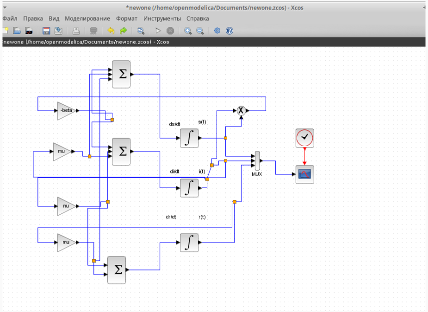

Рис. 9: Построение модифицированной модели в Xcos

Анализ графиков для модифицированной модели

- Сначала я установил μ=0, чтобы проверить, совпадает ли модифицированная модель с базовой SIR. Графики были идентичны тем, что получены в шагах 4 и 6, что подтвердило правильность построения модели, так как при μ=0 рождаемость и смертность отсутствуют

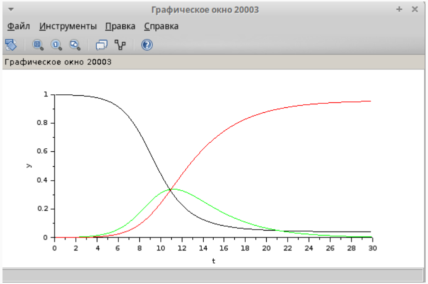

Рис. 10: Анализ графиков для модифицированной модели

Анализ графиков для модифицированной модели

затем я изменил μ=0.2 и запустил симуляцию. На графиках видно

- Число уязвимых s(t) стабилизируется на определённом уровне, а не падает до нуля, из-за притока новых уязвимых за счёт рождаемости.
- Число заражённых i(t) также не исчезает, а остаётся на постоянном уровне, что указывает на эндемическое состояние.

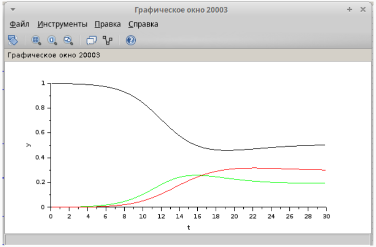

Рис. 11: Анализ графиков для модифицированной модели

- использовали блок “Modelica generic” для реализации модифицированной модели. Код был обновлён следующим образом

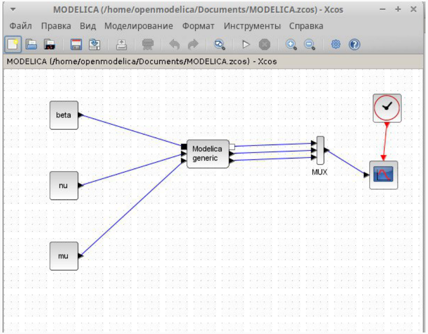

Рис. 12: Построение модифицированной модели с помощью Modelica

- здесь я ввел значения констант и выходных переменных, которые мы имеем в модели

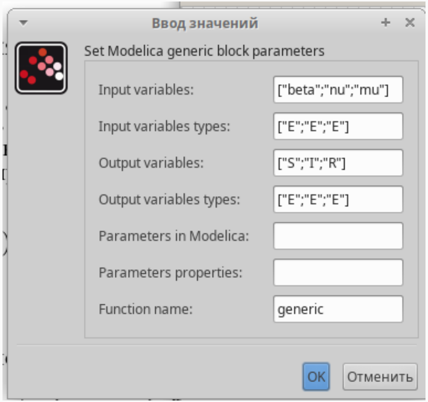

Рис. 13: Построение модифицированной модели с помощью Modelica

Код:

- Я запустил симуляцию и получил графики, аналогичные тем, что были ранее. Это подтвердило, что модель работает корректно в обоих подходах (блоки и Modelica)

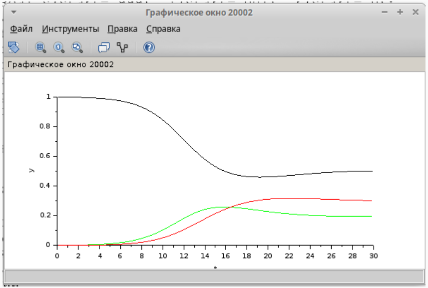

Рис. 15: Визуализация графиков для модифицированной модели

- Я перенёс модифицированную модель в среду OpenModelica (OMEdit)

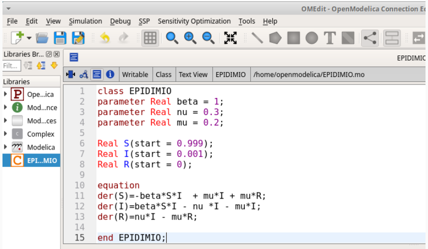

Рис. 16: Моделирование в OpenModelica (OMEdit)

- провёл симуляцию с μ=0.2. Графики были визуализированы и показали ту же динамику, что и в Xcos, что подтверждает согласованность результатов

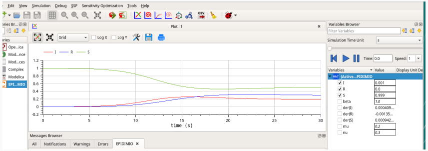

Рис. 17: Визуализация графиков для модифицированной модели

Исследование различных случаев (β=10,μ=0.7)

- Я провёл эксперимент, установив β=10 и μ=0.7. На графиках видно:
- Число уязвимых s(t) падает практически мгновенно из-за высокого коэффициента заражения.
- Число заражённых i(t) резко возрастает, но благодаря высокому μ=0.7 (быстрая убыль населения) и выздоровлению эпидемия затухает примерно через 5 дней

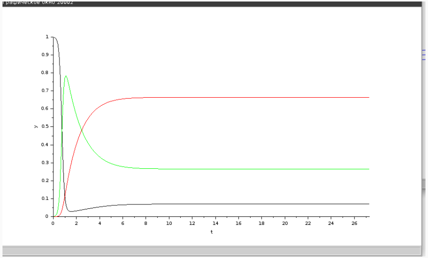

Рис. 18: Исследование различных случаев (β=10,μ=0.7)

Исследование случая с v=0.9

- Я установил nu=0.9, что соответствует очень быстрому выздоровлению. В этом случае эпидемия не развивается:
- Число уязвимых s(t) остаётся близким к начальному значению (0.999) и постепенно приближается к 1.

- Число заражённых i(t)i(t) быстро падает до нуля, так как люди моментально выздоравливают.

Рис. 19: Исследование случая с v=0.9

Выводы

Выводы

В ходе лабораторной работы была успешно реализована и исследована модель SIR для описания динамики распространения эпидемии. Были выполнены следующие задачи:

- Построена базовая модель SIR в Xcos с использованием блоков и через язык Modelica, а также проведена её симуляция.
- Модифицирована модель с учётом рождаемости и смертности, что позволило наблюдать переход к эндемическому состоянию.
- Исследованы различные случаи с изменением параметров ββ, νν и μμ, что продемонстрировало их влияние на динамику эпидемии.

Полученные результаты показывают, как математические модели могут быть применены для анализа эпидемиологических процессов и подчёркивают важность учёта демографических факторов для долгосрочных прогнозов.