Лабораторная работа № 5

Модель эпидемии (SIR)

Мугари Абдеррахим

Содержание

Список иллюстраций

Список таблиц

# 1 Цель работы

* Целью данной лабораторной работы является изучение и моделирование распространения инфекционных заболеваний с использованием математической модели **SIR**. В рамках работы необходимо:
  + Построить базовую модель SIR в программных средах **Xcos** и **OpenModelica**.
  + Исследовать динамику эпидемии при заданных параметрах.
  + Модифицировать модель, добавив процессы рождаемости и смертности.
  + Провести анализ влияния параметров на поведение модели.

# 2 Теоретическая часть

Модель SIR была предложена в 1927 году учёными W. O. Kermack и **A. G. McKendrick**. Она описывает динамику численности населения в условиях распространения инфекционного заболевания.

В данной модели рассматриваются три группы населения:

* **S (susceptible, восприимчивые)** — здоровые, но уязвимые особи, которые могут заразиться.
* **I (infected, инфицированные)** — заражённые и распространяющие заболевание.
* **R (recovered, выздоровевшие)** — особи, переставшие быть источником инфекции (выздоровевшие или умершие).

Общее число особей остаётся постоянным:

## 2.1 Система дифференциальных уравнений модели SIR:

где:

* коэффициент заражения,
* коэффициент выздоровления.

Данная система описывает динамику заражения и выздоровления в популяции

# 3 Практическая часть

## 3.1 Открытие Scilab и Xcos

Была запущена среда Scilab, затем открыт Xcos для создания модели.(рис. 1).

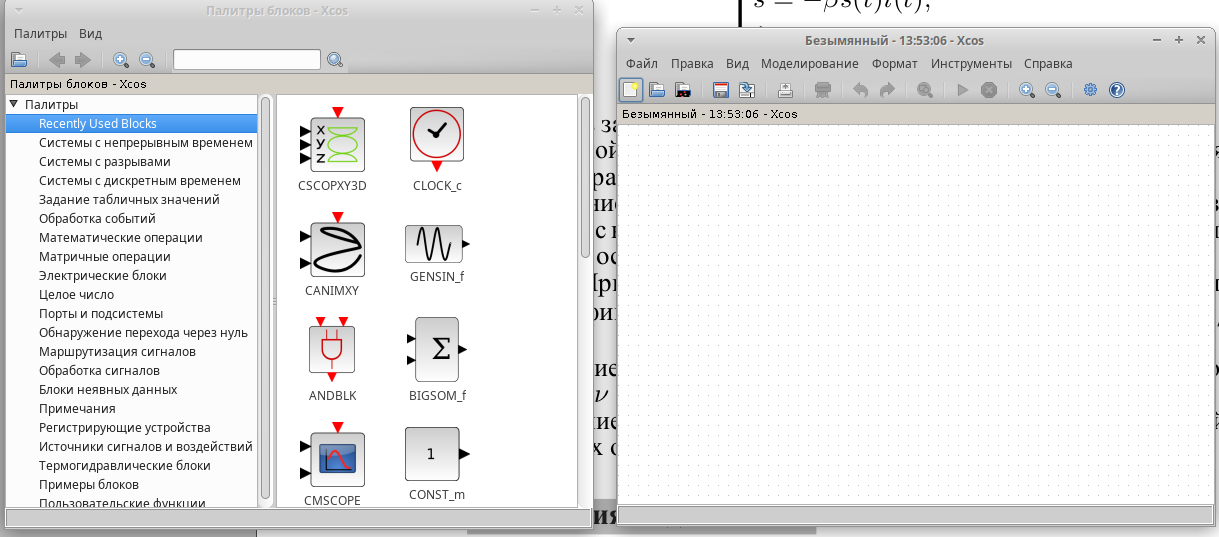


Рис. 1: Открытие Scilab и Xcos

## 3.2 Задание параметров модели

Заданы значения:

= 1, = 0.3. (рис. 2).

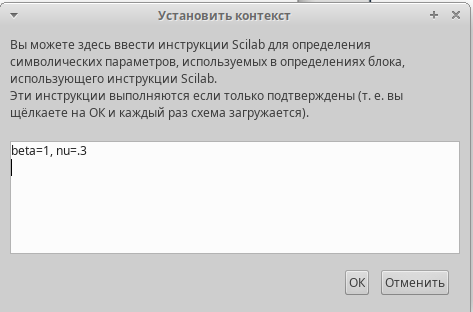


Рис. 2: Задание параметров модели

## 3.3 Построение модели в Xcos

Модель была собрана с использованием следующих блоков: (рис. 3).

* **CLOCK\_c** — для управления временем моделирования.
* **INTEGRAL\_m** — для интегрирования уравнений.
* **GAINBLK\_f** — для задания коэффициентов и .
* **SUMMATION** — для суммирования потоков.
* **PROD\_f** — для вычисления произведений.
* **MUX** — для объединения данных на один график.
* **CSCOPE** — для визуализации графиков.

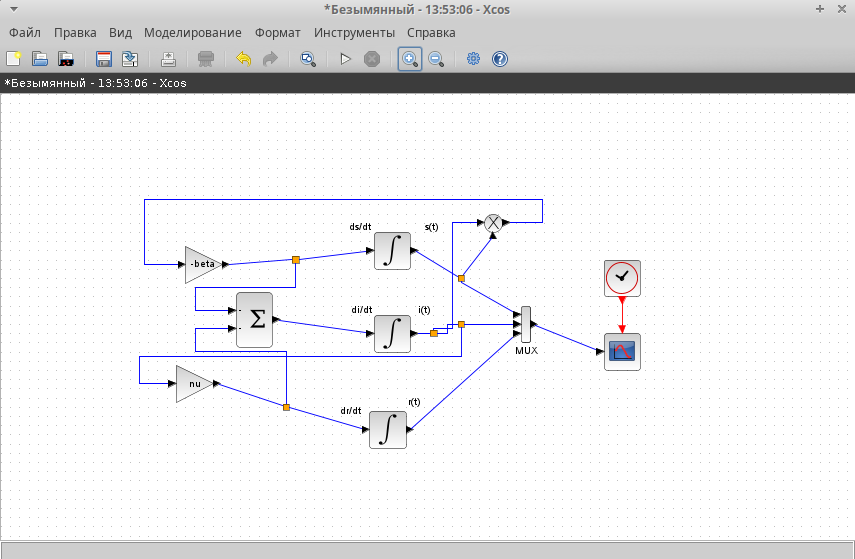


Рис. 3: Построение модели в Xcos

Начальные условия были установлены:

## Запуск графика модели SIR

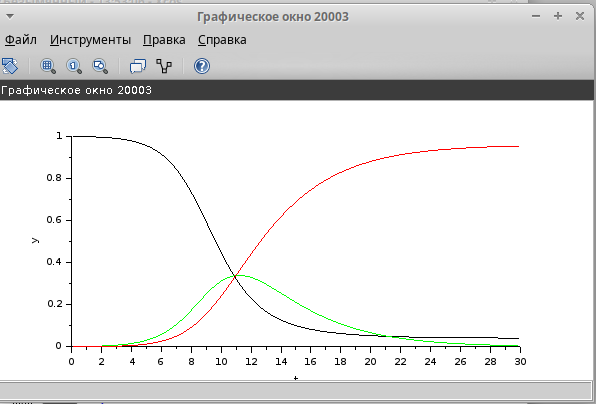


Рис. 4: Запуск графика модели SIR

При запуске модели были получены три графика: (рис. 4).

* График S(t) (синим) показывает уменьшение восприимчивых особей.
* График I(t) (зелёным) показывает рост заражённых, достигая максимума.
* График R(t) (красным) показывает увеличение выздоровевших.

Пик числа заражённых i(t) показывает максимальное количество больных в популяции одновременно. Это важный показатель, который может быть использован для оценки нагрузки на систему здравоохранения во время эпидемии.

## 3.4 Реализация модели в Modelica

* Далее я использовал блок “Modelica generic” в Xcos для реализации модели SIR. Это оказалось проще, так как код на языке Modelica более компактный и читаемый (рис. 5).

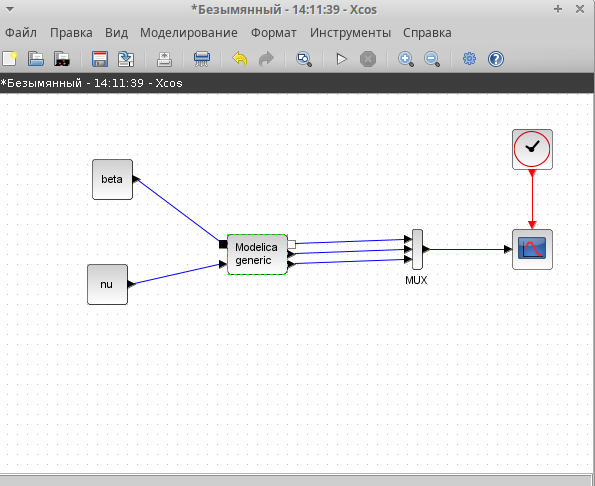


Рис. 5: Реализация модели в Modelica

* здесь я ввел значения констант и выходных переменных, которые мы имеем в модели (рис. 6).

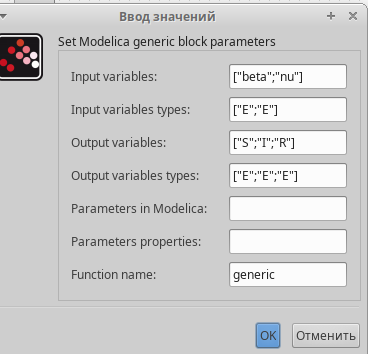


Рис. 6: Реализация модели в Modelica

* Для реализации модели использовался Modelica Generic Block. Код:(рис. 7).

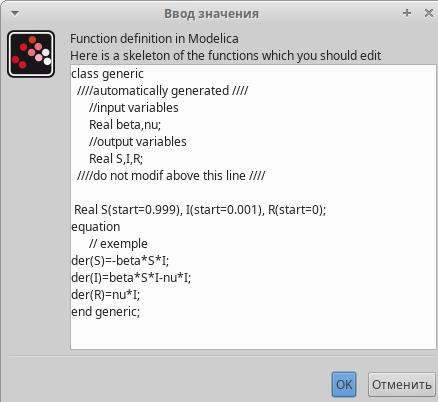


Рис. 7: Реализация модели в Modelica

Я запустил симуляцию с использованием блока Modelica и получил те же графики, что и в шаге 4. Это ожидаемо, так как параметры и уравнения остались неизменными, что подтверждает корректность реализации модели. (рис. 8).

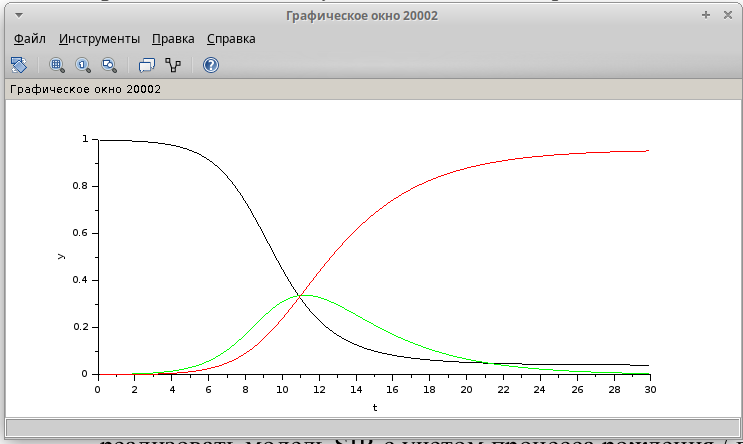


Рис. 8: Сравнение графиков

## 3.5 Решение упражнения с добавлением рождаемости

Для модификации модели было необходимо добавить процессы рождаемости и смертности. Новая система дифференциальных уравнений выглядит следующим образом:

μ — коэффициент рождаемости и смертности, который учитывает приток новых уязвимых и естественную убыль населения во всех группах. N — общая популяция, принятая равной 1 (нормированная).

* Эта модификация делает модель более реалистичной, так как в реальной жизни популяция не остаётся полностью замкнутой, а обновляется за счёт рождений и смертей.

## 3.6 Построение модифицированной модели в Xcos

Я построил новую модель в Xcos, добавив блоки для учёта . Уравнения теперь включают дополнительные члены:

* Для ( s(t) ):
* Для ( i(t) ):
* Для ( r(t) ):

как показано в (рис. 9).

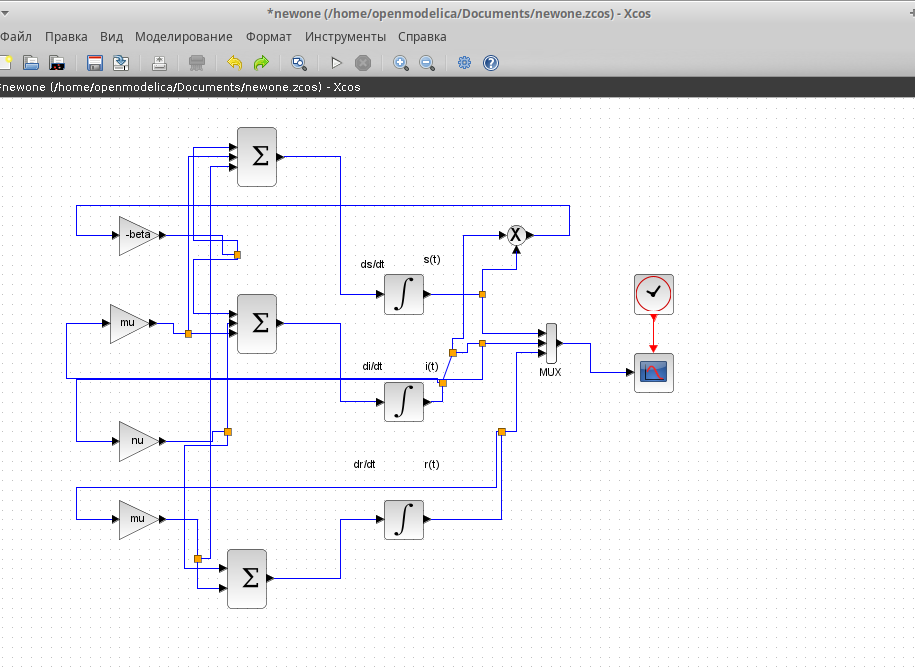


Рис. 9: Построение модифицированной модели в Xcos

## 3.7 Анализ графиков для модифицированной модели

* Сначала я установил μ=0, чтобы проверить, совпадает ли модифицированная модель с базовой SIR. Графики были идентичны тем, что получены в шагах 4 и 6, что подтвердило правильность построения модели, так как при μ=0 рождаемость и смертность отсутствуют (рис. 10).

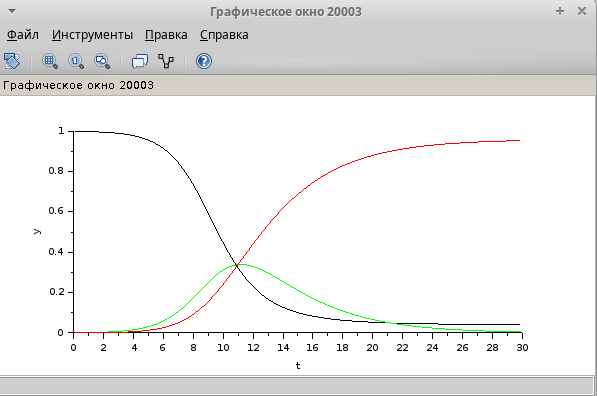


Рис. 10: Анализ графиков для модифицированной модели

затем я изменил μ=0.2 и запустил симуляцию. На графиках видно (рис. 11)

* Число уязвимых s(t) стабилизируется на определённом уровне, а не падает до нуля, из-за притока новых уязвимых за счёт рождаемости.
* Число заражённых i(t) также не исчезает, а остаётся на постоянном уровне, что указывает на эндемическое состояние.

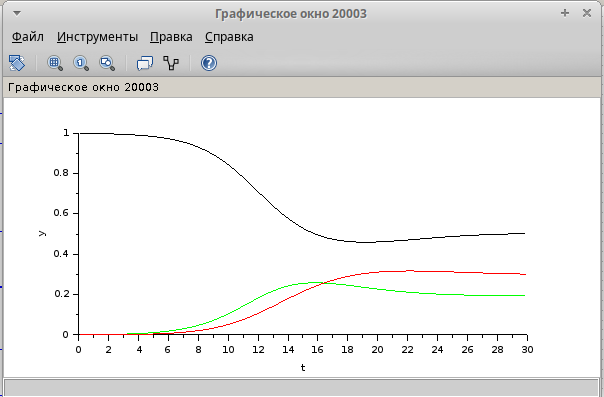


Рис. 11: Анализ графиков для модифицированной модели

## 3.8 Построение модифицированной модели с помощью Modelica

* использовали блок “Modelica generic” для реализации модифицированной модели. Код был обновлён следующим образом (рис. 12)

![Рис. 12: Построение модифицированной модели с помощью Modelica](data:application/octet-stream;base64,)

Рис. 12: Построение модифицированной модели с помощью Modelica

* здесь я ввел значения констант и выходных переменных, которые мы имеем в модели (рис. 13).

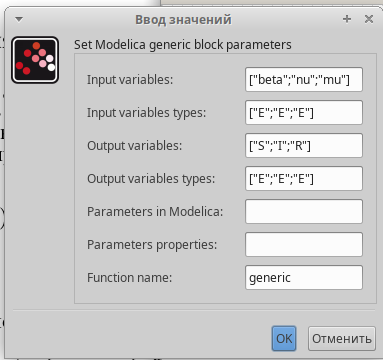


Рис. 13: Построение модифицированной модели с помощью Modelica

### 3.8.1 Код: (рис. 14).

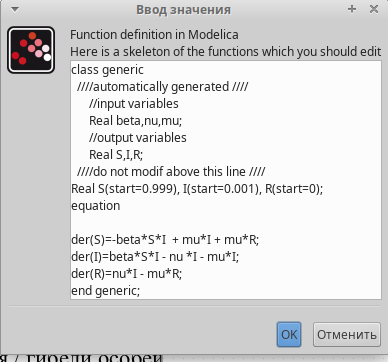


Рис. 14: Код модифицированной модели

## 3.9 Визуализация графиков для модифицированной модели

* Я запустил симуляцию и получил графики, аналогичные тем, что были ранее. Это подтвердило, что модель работает корректно в обоих подходах (блоки и Modelica) (рис. 15).

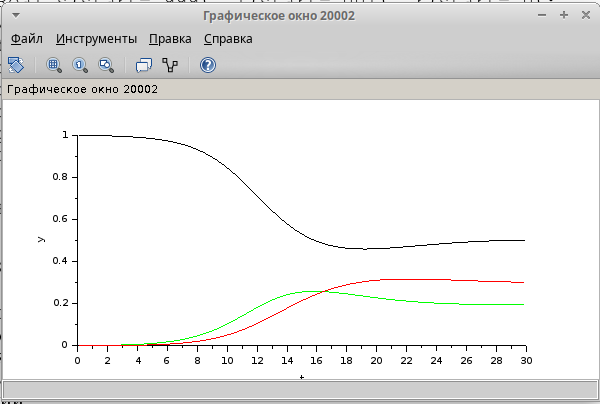


Рис. 15: Визуализация графиков для модифицированной модели

## 3.10 Моделирование в OpenModelica (OMEdit)

* Я перенёс модифицированную модель в среду OpenModelica (OMEdit) (рис. 16).

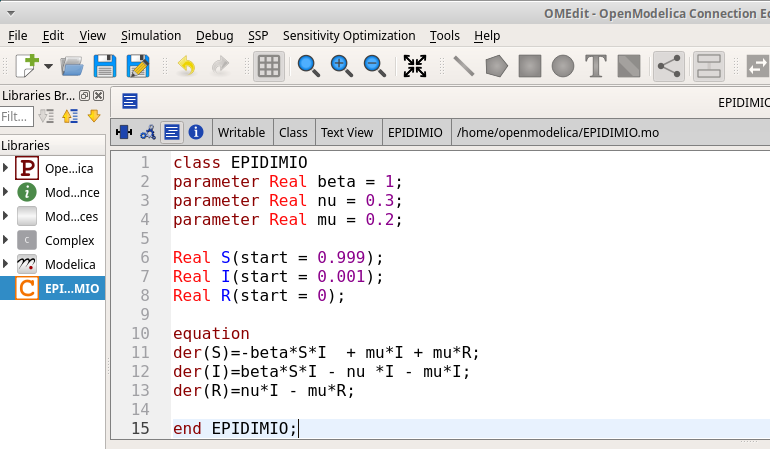


Рис. 16: Моделирование в OpenModelica (OMEdit)

* провёл симуляцию с μ=0.2. Графики были визуализированы и показали ту же динамику, что и в Xcos, что подтверждает согласованность результатов (рис. 17).

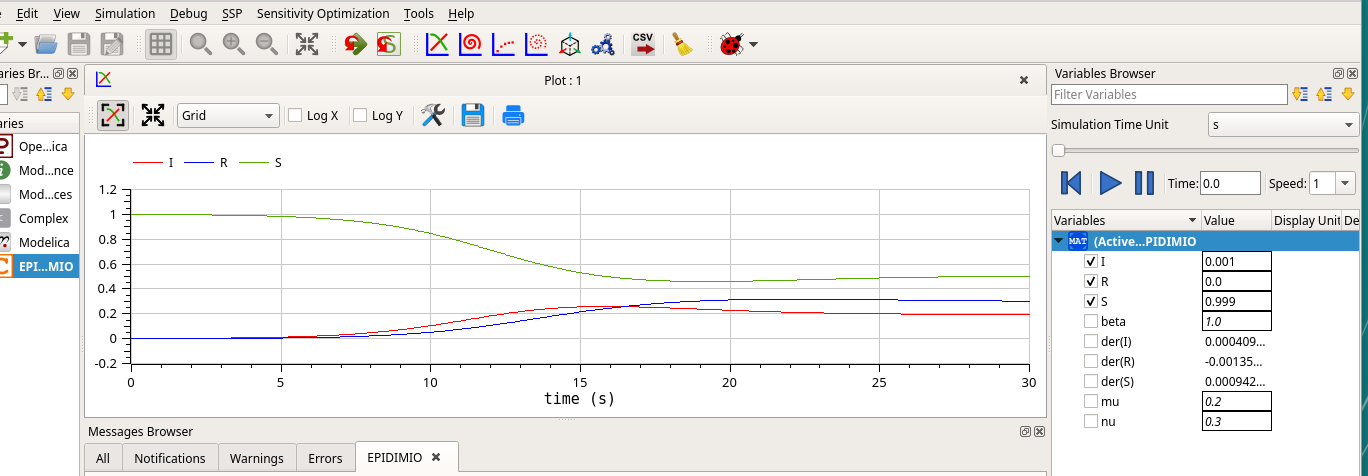


Рис. 17: Визуализация графиков для модифицированной модели

## 3.11 Исследование различных случаев (β=10,μ=0.7)

* Я провёл эксперимент, установив β=10 и μ=0.7. На графиках видно:
* Число уязвимых s(t) падает практически мгновенно из-за высокого коэффициента заражения.
* Число заражённых i(t) резко возрастает, но благодаря высокому μ=0.7 (быстрая убыль населения) и выздоровлению эпидемия затухает примерно через 5 дней (рис. 18).

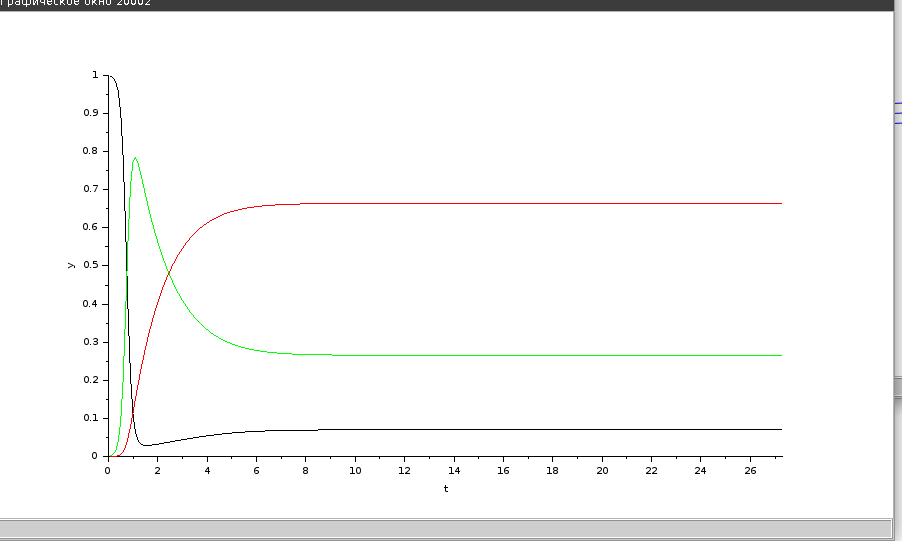


Рис. 18: Исследование различных случаев (β=10,μ=0.7)

## 3.12 Исследование случая с ν=0.9

* Я установил nu=0.9, что соответствует очень быстрому выздоровлению. В этом случае эпидемия не развивается:
* Число уязвимых s(t) остаётся близким к начальному значению (0.999) и постепенно приближается к 1.
* Число заражённых i(t)i(t) быстро падает до нуля, так как люди моментально выздоравливают.(рис. 19)



Рис. 19: Исследование случая с ν=0.9

# 4 Выводы

В ходе лабораторной работы была успешно реализована и исследована модель SIR для описания динамики распространения эпидемии. Были выполнены следующие задачи:

* Построена базовая модель SIR в Xcos с использованием блоков и через язык Modelica, а также проведена её симуляция.
* Модифицирована модель с учётом рождаемости и смертности, что позволило наблюдать переход к эндемическому состоянию.
* Исследованы различные случаи с изменением параметров ββ, νν и μμ, что продемонстрировало их влияние на динамику эпидемии.

Полученные результаты показывают, как математические модели могут быть применены для анализа эпидемиологических процессов и подчёркивают важность учёта демографических факторов для долгосрочных прогнозов.

Подробнее см. в [1–3].

# Список литературы

1. Steer S., Collette Y., Delebecque F. [Scilab/Xcos: A Practical Introduction](https://www.springer.com/gp/book/9783319904034). Springer, 2018.

2. Association M. [Modelica - A Unified Object-Oriented Language for Systems Modeling: Language Specification](https://specification.modelica.org/). 3.6 изд. 2022.

3. Consortium O.S.M. [OpenModelica User’s Guide](https://www.openmodelica.org/documentation). 2023.