Задача 3.

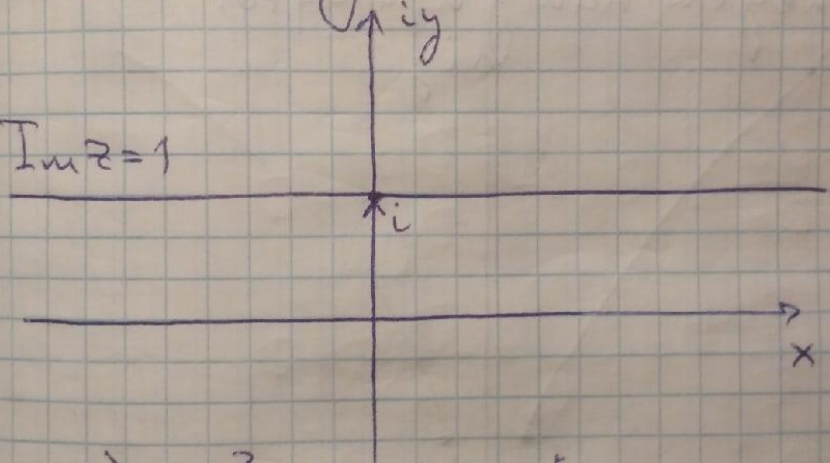
(1) Опред. изображ. $\operatorname{Im} z = 1$ под картой

$z \to \omega(z) = z^3 + 3z - i$

Охаракт. изображ. ф-ией

Решение:

1) $\operatorname{Im} z = 1 \Rightarrow y = 1$ $(z = x + i)$



$\omega(z=i) = i^3 + 3i - i = i$

$\omega(z=1+i) = 1 + 4i$

$\omega(2+i) = 8 + 13i$

при $x < 0$ изображ. будет симметричным.

Найдем общ. вид. уравн. кривой:

$\operatorname{Im} z = 1 \Rightarrow y = 1$, т.е $z = x + i$ подставим в $\omega(z)$:

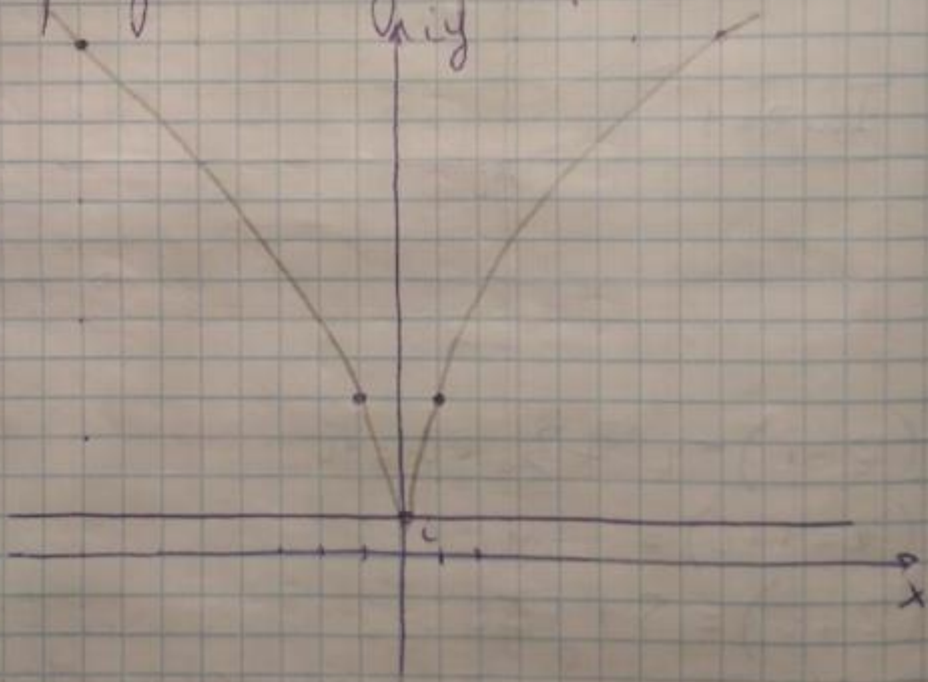
$$\omega(x+i) = (x+i)^3 + 3(x+i) - i =$$

$$= \underbrace{x^3}_{\mathrm{Re}\,\omega} + \underbrace{(3x^2+1)}_{\mathrm{Im}\,\omega}\, i$$

$$\begin{cases} \mathrm{Re}\,\omega = x^3 \Rightarrow x = |\mathrm{Re}\,\omega|^{1/3} \\ \boxed{\mathrm{Im}\,\omega = 3x^2 + 1 = 1 + 3|\mathrm{Re}\,\omega|^{2/3}} \end{cases}$$

Ответ

Нарисуем нашу кривую:

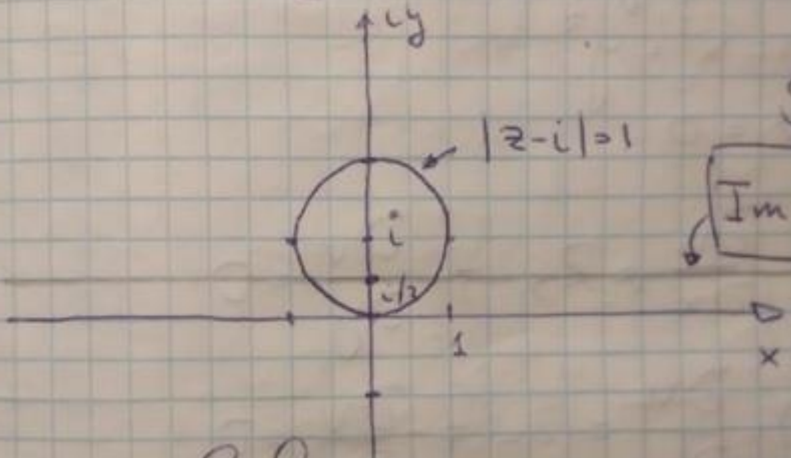


(2) $|z-i| = 1$ под картой $z \to w(z) = \dfrac{1}{z-2i}$

$w(0) = \dfrac{1}{-2i} = \dfrac{i}{2}$ Окружность $|z-i|=1$

$w(1+i) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{i}{2}$ перейдет в прямую

$w(i-1) = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{i}{2}$ (далее вывод формул)



Ответ

$\boxed{\operatorname{Im} w = \frac{1}{2}}$

Формально выведем ур-е:

$$w(z) = \frac{1}{x+iy-2i} = \frac{x-i(y-2)}{x^2+(y-2)^2} = \frac{x-i(y-2)}{x^2+y^2+4-4y} \circledcirc$$

$$|z-i|=1 \Rightarrow x^2+(y-1)^2 = 1 \Rightarrow \underbrace{x^2+y^2=2y}_{\text{подставим}}$$

$$\circledcirc \; \frac{x-i(y-2)}{4-2y} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{Re} w = x/(4-2y) & \forall \operatorname{Re} w \\ \boxed{\operatorname{Im} w = \dfrac{2-y}{2(2-y)} = \dfrac{1}{2} + 0\cdot \operatorname{Re} w} \end{cases}$$