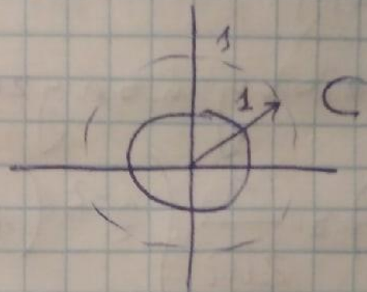
Задача 9.

$$p(n) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C dz\, z^{-1-n}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-z^k} = ?$$

C: окружн. $R < 1$



(1) $p(1)$ − ?

Решение:

1) $$\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-z^k} = \frac{1}{1-z}\cdot\frac{1}{1-z^2}\cdot\frac{1}{1-z^3}\cdots =$$

$$p(1) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C z^{-2}dz\left[\underbrace{\frac{1}{(1-z)(1-z^2)(1-z^3)\cdots}}_{f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n}\right]$$

Можем расклад в суммы геом. прогр. т.к $R < 1$:

$$\frac{1}{1-z}\cdot\frac{1}{1-z^2}\cdot\frac{1}{1-z^3}\cdots = (1+z+z^2+\dots)\cdot$$

$$\cdot(1+z^2+z^4+\dots)\cdot\dots = \left\{\begin{matrix}\text{раскроем}\\ \text{скобки}\end{matrix}\right\} =$$

$$= 1 + 1z + 2z^2 + \dots$$ 2 способа получить z^2

Знаем формулу:

$$\int\limits_{|z|=1} z^n dz = 0 \; ; \; n \in \mathbb{Z}/\{-1\}$$

Поэтому получаем простой инт:

$$p(1) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C z^{-2}\left(1 + z + 2\cdot z^2 + \ldots\right) dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C z^{-1} dz = 1 \text{ (уже считали)}$$

(2) $p(4) - ?$

Точно также делаем, только надо дальше посчитать сумму до 4 степени:

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-z^k} = 1 + z + 2z^2 + 3z^3 + 5z^4 + \ldots$$

$$p(4) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C z^{-5}\left(1 + z + 2z^2 + 3z^3 + 5z^4 + \ldots\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \cdot 5 \int\limits_C \frac{dz}{z} = 5 \text{ Отв.}$$