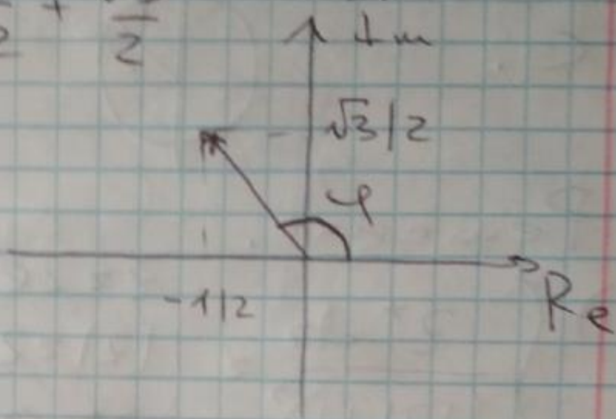
Задача 1

$$z = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{1789} - ?$$

Решение:

1) рассм. $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$



$|z| = 1$

$tg(\pi - \varphi) = -\sqrt{3}$

$\varphi = \frac{2\pi}{3}$

Получаем:

$$z = \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)^{1789} =$$

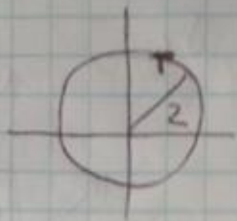
$$= \left(\cos\left(1789\,\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(1789\,\frac{2\pi}{3}\right)\right) =$$

$$= \boxed{-\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}}$$ Ответ

Задача 5

$$\int_C \frac{z^*}{(|z|+1)^3}\, dz$$

C:



Решение.

1) $$\int_C \frac{z^*\, dz}{(|z|+1)^3} = \left\{\begin{aligned} & z = 2e^{i\varphi} \\ & |z| = 2 \\ & z^* = 2e^{-i\varphi} \\ & dz = ie^{i\varphi}\, d\varphi \end{aligned}\right\} \textcircled{=}$$

$$\textcircled{=} \int_0^{2\pi} \frac{2e^{-i\varphi}}{27}\, ie^{i\varphi}\, d\varphi = \frac{2i}{27}\cdot 2\pi = \frac{4\pi i}{27}$$

Отв

Задача 6

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(3x)}{(x^2+6x+10)^2}\,dx =$$

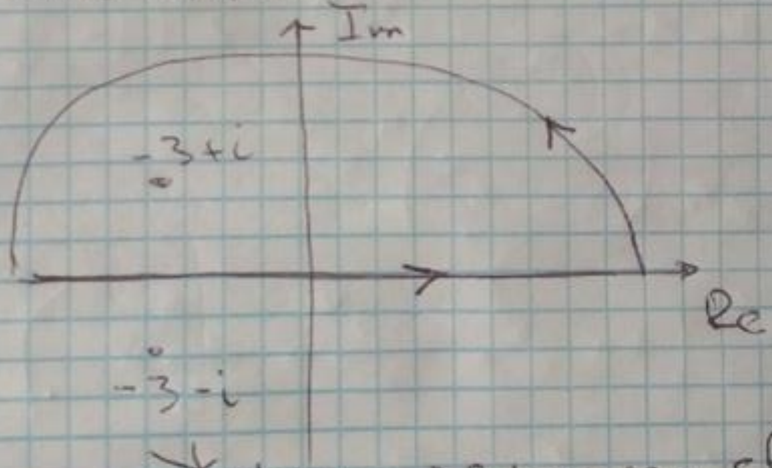
Мысленно

$$= \mathrm{Im}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i(3x)}}{(x+3)^2+1}\,dx = x \to z$$

Особые точки: $(x+3)^2+1=0$

$x_{1,2} = -3 \pm i$

Область интегр.



По лемме Жордана замкнем сверху.

Воспользуемся теоремой о вычетах

$$= \mathrm{Im}\left(2\pi i \operatorname*{res}_{z=-3+i} f(z)\right)$$

Считаем $\operatorname{res} f(z)$ по формуле:

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[f(z)(z-z_0)^n \right]$$

Получаем:

$$\operatorname{Im}\left(2\pi i \operatorname*{res}_{z=-3+i} f(z)\right) = \operatorname{Im}\left(2\pi i \left(-\frac{1}{2} e^{-3-9i}\right)\right) =$$

$$= \boxed{\pi \frac{\cos 9}{e^3}}$$ Ответ.

Задача 2.

Найти вычет ф-ии

$$f(z)=\frac{\sinh^2(\pi z)}{(z^2+1)^4} \text{ в } z=i$$

$$\underset{z=z_0}{\operatorname{res}} f(z)=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[f(z)(z-z_0)^n\right]$$

В нашем случае:

$$\underset{z=i}{\operatorname{res}} f(z)=\frac{1}{6}\lim_{z\to i}\frac{d^3}{dz^3}\left[sh^2(\pi z)/(z+i)^4\right]=$$

$$=\frac{1}{6}\lim_{z\to i}\left(\frac{120\,sh^2(\pi z)}{(z+i)^7}-\frac{12(2\pi^2 sh^2(\pi z)+2\pi^2 ch(\pi z)}{(z+i)^5}\right.$$

$$\left.+\frac{8\pi^3 sh(\pi z)ch(\pi z)}{(z+i)^4}+\frac{120\pi\, sh(\pi z)ch(\pi z)}{(z+i)^6}\right)$$

$$=\frac{9}{16}i(2\pi^2-5)$$

Задача 3.

Найти 2 лидер. члена в разлож. ряда Лорана

$$f(z) = \frac{z^3}{\sin^8(z)} \qquad z = 0$$

Решение:

$$f(z) = \frac{z^3}{(1-\cos^2(z))^4} = \frac{z^3}{\left(1-\left(1-\frac{z^2}{2}\right)^2\right)^4} =$$

$$= \frac{z^3}{\left(1-1-\frac{z^4}{4}+z^2\right)^4} = \frac{z^3}{z^8\left(1-\frac{z^2}{4}\right)^4} =$$

$$= \frac{1}{z^5}\left(\frac{1}{1-\frac{z^2}{4}}\right)^4 =$$

$$= \frac{1}{z^5}\left(1 + z^2 + \frac{5z^4}{8} + \frac{5}{16}z^6 + \ldots\right) =$$

$$= \frac{1}{z^5} + \frac{1}{z^3} + \frac{5}{8z} + \ldots$$

④ $f(z) = \dfrac{e^{2/z} \cdot e^{z}}{(z-1)^2}$

Особые точки:

$\begin{cases} z = 0 \\ z = 1 \text{ (полюс 2 порядка?)} \end{cases}$

Определим тип особых точек:

1) $f(z)$ в $z = 1$:

Разложим в ряд Лорана

$$f(z) = \underbrace{\frac{e}{(z-1)^2}}_{} - \frac{c_1}{z-1} + c_2 + O(z-1)$$

ряд продолж. до бесконеч.

2) $\underbrace{z = 1}_{}$ - полюс 2 порядка

изолир. особ. точка.

2) $f(z)$ при $z = 0$:

Разложим в ряд Лорана:

$$f(z) = \frac{\left(e^{1/z}\right)^2 e^z}{(1-z)^2} =$$

$$= \frac{\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2}\right)\left(1 + z + \frac{z^2}{2}\right)}{(1-z)^2} = \qquad |z|<1$$

$$= \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2}\right)\left(1 + z + \frac{z^2}{2}\right)\left(1 + z + z^2\right)^2 =$$

$$= \left(1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{1}{z} + 1 + \frac{z}{2} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{2z} + \frac{1}{4}\right)(\ldots)^2 =$$

$$= \left(2\tfrac{1}{4} + \frac{3}{2}z + \frac{z^2}{2} + \frac{1}{2z^2} + \frac{3}{2z}\right)\left(1 + z + z^2\right)^2$$

$$= (\ldots)\left(z^4 + 2z^3 + 3z^2 + 2z + 1\right) =$$

$$= C \cdot z^4 + C_1 z^5 + z^7 + z^2 + z^3 + z^3 + z^4 +$$

$$+ z^5 + z + z^2 + \ldots + C + \ldots + \frac{1}{2z} + \ldots + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{z}$$

$z = 0$ – полюс 2 порядка.

$$\frac{\left(1+\frac{1}{z}\right)(1+z)}{(1-z)^2} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{z}\right)(1+z)(1+z)^2 =$$

$$= \left(2+z+\frac{1}{z}\right)(1+z^2+2z) =$$

$$= 2 + 2z^2 + 4z + z + z^3 + 2z^2 + \frac{1}{z} + z + 2$$

Тут зависит до какого члена раскл. каждую скобку:

Если раскл. до 3 членов =>

$z=0$ - полюс 2 порядка

Если раскл. до 4 члена =>

=> $z=0$ - полюс 3 порядка

и т. д.

=> $z=0$ - полюс $(n-1)$ порядка