

Задача 8.

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin ax}{x^2 + k^2} dx, \text{ при } a, k \in \mathbb{R}$$

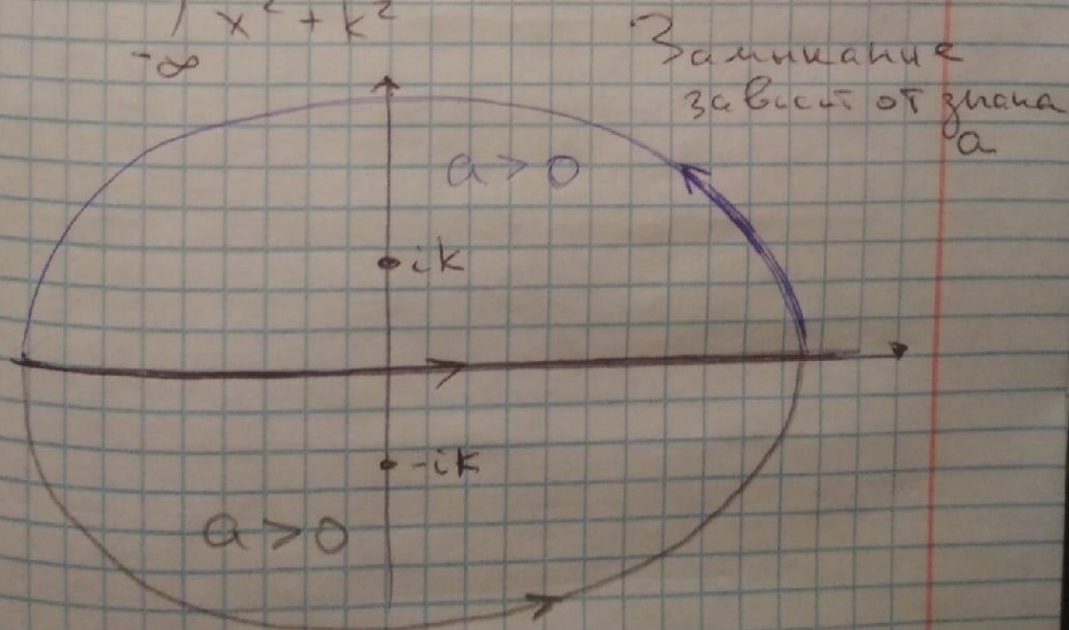
Решение:

1) Особые точки: $x = \pm ik$

2) Преобразуем интеграл:

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin ax}{x^2 + k^2} dx \stackrel{(\text{симметрия})}{=} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin ax}{x^2 + k^2} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{iax}}{x^2 + k^2} dx$$



(1) $a > 0$:

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{iax}}{x^2 + k^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{-ak}}{x^2 + k^2} dx$$

$$= \frac{\pi e^{-ak}}{2} \quad \text{Imb.}$$

(2) $a < 0$:

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{iax}}{x^2 + k^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-ike^{ak}}{x^2 + k^2} dx = \frac{\pi e^{ak}}{2} \quad \text{Imben}$$