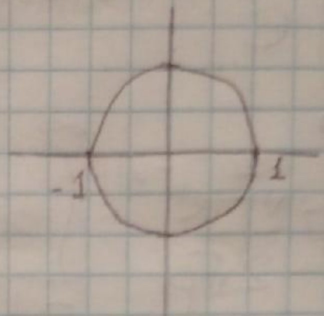
Задача 4.

(1) $\int\limits_C \underbrace{\frac{ze^z}{tg(z^2)}}_{f(z)} dz$, C:



Решение:

1) Особая точка: $z=0$

2) Разложим подынтегр. ф-цию в ряд Лорана, чтобы понять вид особой точки и найти вычет:

$$f(z) = \frac{ze^z}{tg(z^2)} = \frac{1}{z} + 1 + \frac{z}{2} - \dots$$

$z=0$ – полюс 1 порядка

$\underset{z=0}{\text{res}}\, f(z) = 1$ (коэф при $\frac{1}{z}$)

Т.к у нас замкн. контур и в него попала одна особая точка => можем воспользоваться теоремой о вычетах:

$$\int\limits_C \frac{ze^z}{tg(z^2)} dz = 2\pi i \underset{z=0}{\text{res}}\, f(z) = 2\pi i$$

Ответ

(2) $\underbrace{\int\limits_C e^{-1/z} \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz}_{f(z)}$, C то же, что и (1)

Решение:

1) Особая точка: $z = 0$

2) Разложим подынт. ф-ию в ряд Лорана вблизи 0:

$$f(z) = \left(1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2 \cdot 2} - \frac{1}{6z^3} + \ldots\right)\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{6z^3} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} + \ldots \Rightarrow \operatorname*{res}_{z=0} f(z) = 1$$

$$\int\limits_C e^{-1/z} \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz = 2\pi i$$ Ответ

(3) $\int\limits_C \underbrace{\frac{e^z}{z^n}}_{f(z)} dz$; $n \in \mathbb{N}$; C тот же

Решение.

1) Разложим подынт. ф-ию в ряд Лорана около $z=0$ - особ. точка.

$$f(z) = \frac{e^z}{z^n} = \frac{1}{z^n}\left(1 + z + \frac{z^2}{2} + \dots\right) =$$

разложили exp, в силу малости z, в ряд Тейлора

$$= \frac{1}{z^n} + \frac{1}{z^{n-1}} + \frac{1}{2}\frac{1}{z^{n-2}} + \dots$$

2) $z=0$ попала в наш замкн. контур, поэтому можем воспользов. теоремой о вычетах. Посмотрим какими будут вычеты для разн n (вычет - коэф при z^{-1}).

$n=1$: $\operatorname{res}\limits_{z=0} f(z) = 1$

$n=2$: $\operatorname{res}\limits_{z=0} f(z) = 1$

$n=3$: $\operatorname{res}\limits_{z=0} f(z) = \frac{1}{2}$

$\vdots$

$n=k$: $\operatorname{res}\limits_{z=0} f(z) = \frac{1}{(k-1)!}$

Тогда можем посчитать инт. в общ. виде:

$$\int_C \frac{e^z}{z^n}\,dz = 2\pi i \cdot \operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \boxed{2\pi i \frac{1}{(n-1)!}}$$ Ответ.