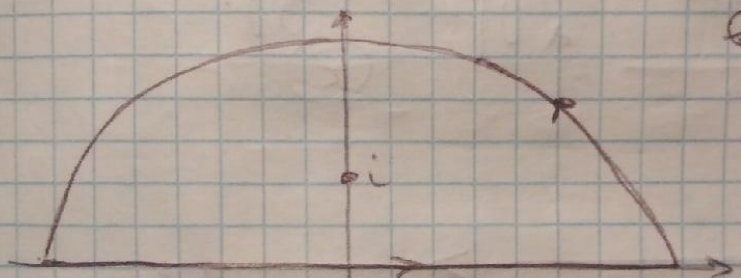
Задача 9.

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos\left(x - \frac{1}{x}\right)}{1+x^2}\, dx = ?$$

Решение:

1) Замкнем контур; $z = i$ - полюс попавший в контур.



$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos\left(x - \frac{1}{x}\right)}{1+x^2}\, dx = \frac{1}{2}\left(\underbrace{\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\left(x-\frac{1}{x}\right)}}{1+x^2}}_{f(z)} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\left(\frac{1}{x}-x\right)}}{1+x^2}}_{g(z)} \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(2\pi i \operatorname*{res}_{z=i} f(z) + 2\pi i \operatorname*{res}_{z=i} g(z) \right) = \pi e^{-2}$$

Ответ.