Задача 5.

Восстановить аналитич. ф-ию $f(x+iy)$ удовлетвор. след. равен.:

(1.) $|f| = e^{r^2 \cos 2\varphi}$, $z = re^{i\varphi}$

Найдем $f(z)$:

1) Перепишем $|f|$ через z:

$|f| = e^{r^2 \cos 2\varphi} = \left| \begin{array}{l} r^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = \\ = x^2 - y^2; \begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \end{array} \right|$

$= e^{x^2 - y^2}$

2) $|f|^2 = \boxed{f \cdot f^* = e^{2(x^2-y^2)}}$

Перепишем через z и z^*

$z = x + iy$

$\begin{cases} z^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy \\ z^{*2} = (x^2 - y^2) - 2ixy \end{cases}$ $\oplus$

$2(x^2 - y^2) = z^2 + z^{*2}$

Получаем:

$$ff^* = e^{z^2 + z^{*2}} = e^{z^2} \cdot e^{z^{*2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{f = e^{z^2}} \text{ Ответ.}$$

(*) Если $f = e^{z^{*2}}$, то тогда она не явл. аналитич. $\Rightarrow$ не выполн. усл. аналитич. f!

(2) $\operatorname{Arg} f = xy$

Решение:

$f = u(x,y) + iv(x,y)$

$f = |f| e^{i \arg f}$

Рассм. ф-ию ω:

$$\omega = \ln f = \underbrace{\ln|f|}_{A = \ln|f|} + i \underbrace{\arg f}_{B = xy}$$

Ф-ию ω – тоже аналитична! $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Можем применить усл. Коши.

(1) $\frac{\partial A}{\partial x} = x \Rightarrow A = \frac{x^2}{2} + \varphi(y)$

$\quad\ \ {}^{\shortparallel}\frac{\partial B}{\partial y}$

(2) $\frac{\partial A}{\partial y} \overset{= -\frac{\partial B}{\partial x}}{=} -y \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2}{2} + \psi(y)\right) = -y$

$$\psi'(y) = -y \Rightarrow \psi(y) = -\frac{y^2}{2} + C$$

Получаем:

$$A = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + C = \ln|f|$$

$$e^{\ln|f|} = e^{\frac{1}{2}(x^2 - y^2) + C}$$

$$|f| = e^{\frac{1}{2}(x^2-y^2)} \cdot e^C$$

Получаем:

$$f = e^{\frac{1}{2}(x^2-y^2)} e^{ixy} \cdot e^C \Rightarrow$$

$\Rightarrow \boxed{f(z) = e^{\frac{1}{2}z^2} \cdot e^C}$ Ответ.