Задача 6.

Найти все гармонич. ф-ии $f = u + iv$, с 2-мя произвол. пост. $a$ и $b$; $f(a=b=0)=0$

(a) $u = \varphi(x^2-y^2)$

Для гармонич. ф-ий выполн. равен-во

$$(\star)\ \boxed{(\partial_x^2 + \partial_y^2)u = 0}$$

1) $\partial_x^2 u = \partial_x^2(\varphi(x^2-y^2)) = 2\varphi'(x^2-y^2) + 4x^2\varphi''(x^2-y^2)$

2) $\partial_y^2 u = \partial_y^2(\varphi(x^2-y^2)) = -2\varphi'(x^2-y^2) + 4y^2\varphi''(x^2-y^2)$

Перепишем $(\star)$:

$$(x^2-y^2)\varphi''(x^2-y^2) = 0 \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$$

$\forall t = x^2-y^2: \ t\varphi''(t) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\varphi(t) = c_0 + c_1 t} = u(x,y)$

3) Найдем $v(x,y)$ через усл. Коши-Римана:

Решая диф. ур-я, получаем:

$v(x,y) = 2C_1 xy$

Получаем:

$f = C_0 + C_1(x^2 - y^2) + i2xyC_1 = C_0 + C_1 z^2$

$\boxed{f(z) = C_0 + C_1 z^2}$ Ответ.

(б) $u = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$

1) $\partial_x^2 u = 2\frac{y}{x^3}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y^2}{x^4}\varphi''\left(\frac{y}{x}\right)$

2) $\partial_y^2 u = \frac{1}{x^2}\varphi''\left(\frac{y}{x}\right)$

Получаем:

$\frac{1}{x^2}\left(2\frac{y}{x}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right) + \varphi''\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y^2}{x^2}\varphi''\left(\frac{y}{x}\right)\right) = 0$

Замена $t = y/x$, $x \neq 0$

$2t\varphi'(t) + \varphi''(t)[t^2 + 1] = 0$

Решается заменой $v = \dot{\varphi}(t)$

$\Rightarrow \varphi(t) = C_1 \operatorname{arctg}(t) + C_2$

$$u(x,y) = C_1 \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + C_2$$

2) Найдем $v(x,y)$ из усл. Коши-Рим.:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (1) \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (2) \end{cases}$$

(1) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(C_1 \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + C_2\right) = -\frac{y C_1}{x^2+y^2} =$

$= \frac{\partial v}{\partial y}$, получаем:

$$\int \partial v = \int \partial y \left(-\frac{y C_1}{x^2+y^2}\right)$$

$$v = -C_1 \frac{1}{2} \ln(x^2+y^2) + \varphi(x)$$

(2) $\frac{\partial u}{\partial y} = C_1 \frac{x}{x^2+y^2} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi(x) -\right.$

$\left. - \frac{C_1}{2} \ln(x^2+y^2)\right)$

$$C_1 \frac{x}{x^2+y^2} = -\varphi'(x) + \frac{C_1}{2} \frac{2x}{x^2+y^2}$$

$\Rightarrow \psi'(x) = 0 \Rightarrow \psi(x) = const = C_3$

Получаем:

$$v(x,y) = -\frac{C_1}{2}\ln(x^2+y^2) + C_3$$

4) $f = u(x,y) + iv(x,y) = C_1 \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + C_2 + i\left(C_3 - \frac{C_1}{2}\ln(x^2+y^2)\right) =$ } выбрас. константы из отдельности

Примен. формулу:

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{i}{2}\left(\ln\left(1 - i\frac{y}{x}\right) - \ln\left(1 + i\frac{y}{x}\right)\right)$$

Получаем:

$$\boxed{f(z) = a + ib\ln(z)}$$ Ответ.