

Д/З №1 ТФКП.

Задача 1.

$$(1) 2 \leq |z-i| \leq 4$$

- 1) Дать геом. описание опис. мн-ва в комплекс. пл-ти, вывести геометрич. и алгеб. рац.
- 2) Показать, что (1) опис. кольца. Найти центр кольца и площадь.

Решение:

1) Алгеб. рац. вывод:

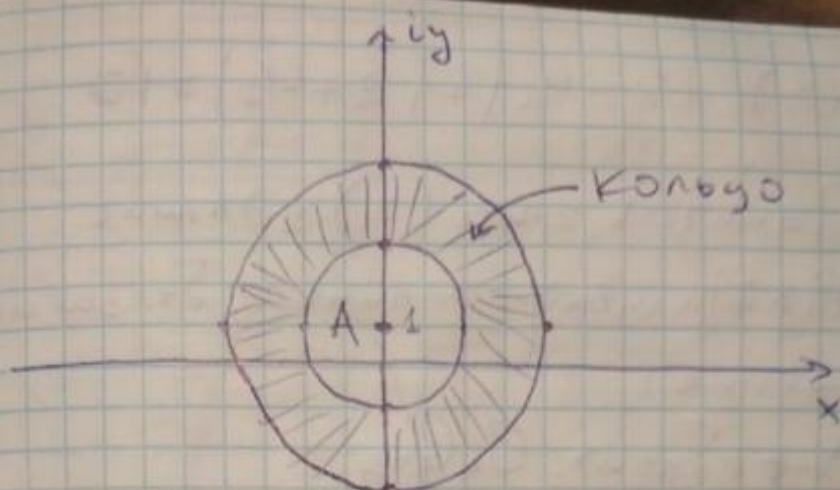
$$2 \leq |x+iy-i| \leq 4$$

$$2 \leq |x+i(y-1)| \leq 4$$

$$2 \leq \sqrt{x^2 + (y-1)^2} \leq 4$$

$$\begin{cases} x^2 + (y-1)^2 \leq 16 \\ x^2 + (y-1)^2 \geq 4 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 + (y-1)^2 \leq 16 \\ x^2 + (y-1)^2 \geq 4 \end{array} \right. \leftarrow \text{Кольцо}$$



Узел кольца: $A(0, i) \Rightarrow \boxed{z = i}$ Dnb

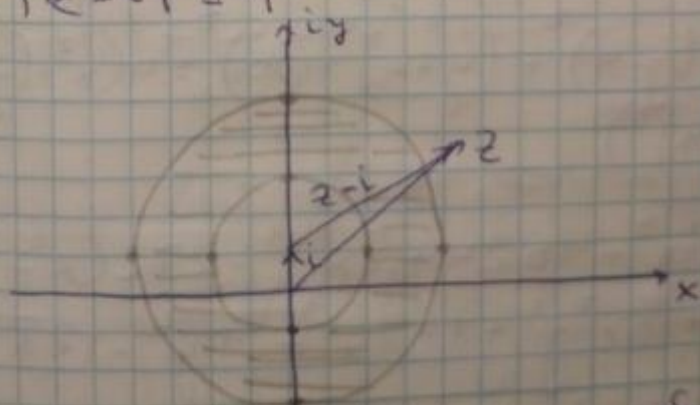
Площадь кольца:

$$S = S_2 - S_1 = \pi (r_2^2 - r_1^2) = \pi (4 - 1) = 3\pi \text{ Dnb}$$

$r_2 = 2; r_1 = 1$

2) Радиусы. Векторы:

$$2 \leq |z - i| \leq 4$$



Можно считать $z - i$ вектор Dnb $2 \leq 4$
 \Rightarrow кольцо

$$(2) |z - 4i| + |z + 4i| = 10$$

1) Показать, что (2) - эллипс

2) Найти центр эллипса, большую полуось.

Решение:

1) Аналитический вывод:

$$|x + iy - 4i| + |x + iy + 4i| = 10$$

$$|x + i(y - 4)| + |x + i(y + 4)| = 10$$

$$\sqrt{x^2 + (y - 4)^2} + \sqrt{x^2 + (y + 4)^2} = 10 \quad \uparrow^2$$

$$x^2 + (y - 4)^2 + x^2 + (y + 4)^2 - 100 = 2\sqrt{x^2 + (y - 4)^2} \cdot \sqrt{x^2 + (y + 4)^2}$$

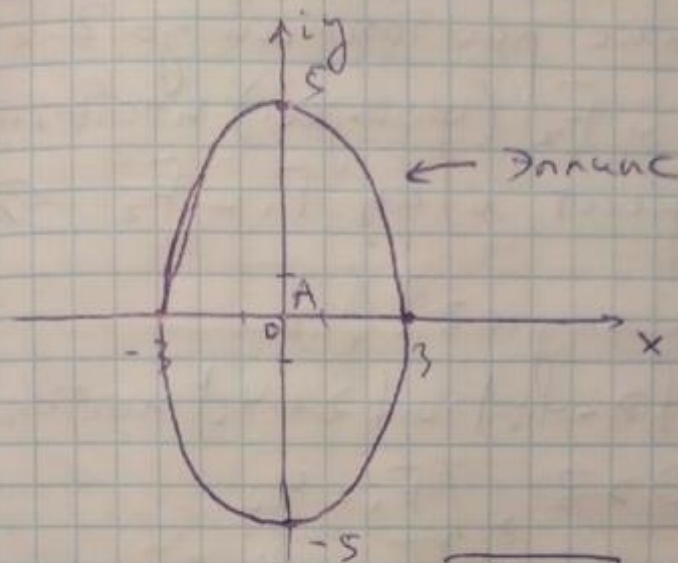
$$(2x^2 + (y - 4)^2 + (y + 4)^2 - 100)^2 = 4(x^2 + (y - 4)^2)(x^2 + (y + 4)^2)$$

$$4x^4 + 4y^4 + 4624 + 8x^2y^2 - 272(x^2 + y^2) =$$

$$= 4x^4 + 8x^2y^2 + 128x^2 + 4y^4 - 128y^2 + 1024$$

$$400x^2 + 144y^2 - 3600 = 0$$

$$\boxed{\frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{25}y^2 = 1} \quad \text{— эллипс}$$

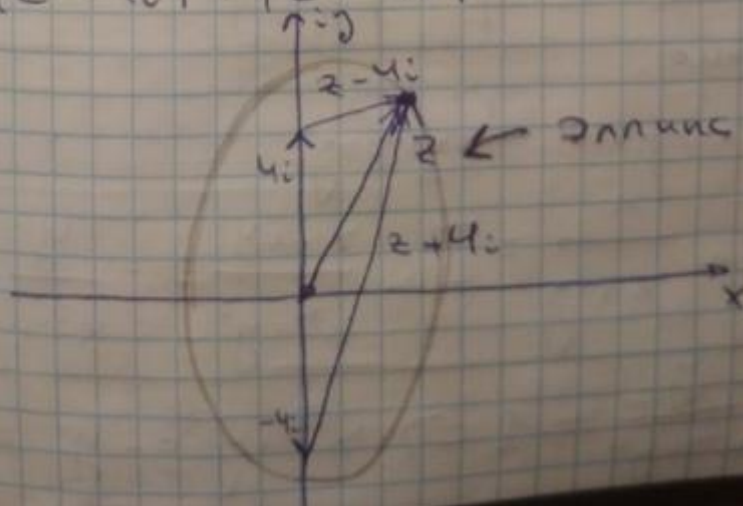


Большая полуось: $b = 5$

Центр эллипса: $A(0;0) \Rightarrow z = 0$

2) Геометрич. вывод:

$$|z - 4i| + |z + 4i| = 10$$



по опред эллипса:

Эллипс - геом. место точек, для
котор. сумма расстояний до 2-х дан.
точек F_1 и F_2 (фокусов) постоянна и
больше расст м/ду F_1 и $F_2 \Rightarrow$

\Rightarrow Наш случай! , т.к

Сумма $|2-4i|$ и $|2+4i|$ постоянна и
равна $10 > 8$, $\begin{cases} F_1 = 4i \\ F_2 = -4i \end{cases}$

$$(3) \operatorname{Im} \frac{1}{z} = 1$$

1) Показать, что (3) опис. круг

2) Найти центр и радиус

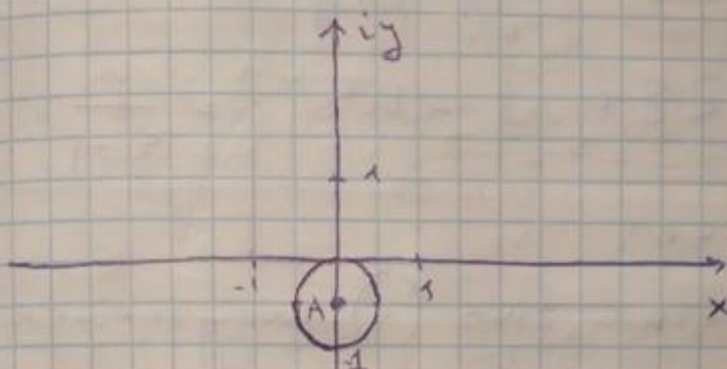
Решение!

1) Алгебраич. вывод:

$$\operatorname{Im} \frac{1}{x+iy} = \operatorname{Im} \frac{x-iy}{x^2+y^2} = -\frac{y}{x^2+y^2} = 1$$

$$-\frac{y}{x^2+y^2} = 1 \Rightarrow x^2+y^2 = -y \Rightarrow$$

$$27 \quad \boxed{x^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}} \text{ - окружность.}$$



$$R^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow |R| = \frac{1}{2} \text{ - радиус.}$$

$$\text{Центр окружности: } A(0, -\frac{1}{2}) \Rightarrow \boxed{z = -i/2} \text{ - центр}$$

2) Рассмотрим выходы:

$\operatorname{Im} \frac{1}{z} = 1$ - это инверсия относительно

$\operatorname{Im} z = 1$ и отражение попузи внейся
конец инверсии окружности относительно Ох.