Задача 2.

а) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ Построить SVD разлож.

$A = U \Sigma V^T$

$\dim A = \dim U = \dim \Sigma = \dim V^T = 2 \times 2$

1. $\Sigma = \left(\begin{array}{c|c} 3 & 0 \\ \hline 0 & 2 \end{array}\right)$

2. Подберем знак U и V^T, так что $UV^T = 1$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)}_{\text{лев с.в.}} \left(\begin{array}{c|c} 3 & 0 \\ \hline 0 & 2 \end{array}\right) \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & -1 \end{array}\right)}_{\text{прав с.в.}}$$

$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $A \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

б) $A=\begin{pmatrix}0&2\\0&0\\0&0\end{pmatrix}$ Построить SVD

1. $\Sigma=\begin{pmatrix}2&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix}$ такого же размер. как и A (2×5)

Подбором U и V^T, так что $UV^T=1$:

$$U\Sigma V^T=\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}_{=U}\underbrace{\begin{pmatrix}2&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix}}_{=\Sigma}\underbrace{\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}}_{=V^T}=$$

$$=\begin{pmatrix}2&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2\\0&0\\0&0\end{pmatrix}=A$$

в) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ Построить SVD разлож

1. Найдем собств. знач A:

$(1-\lambda)^2 - 1 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 2 \end{array} \right.$

2. Найдем собств знач A^T:

$A^T = A \Rightarrow$ одинак собств. знач.

3. $AA^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2A$

Собств. знач AA^T:

$(2-\lambda)^2 - 4 = 0$

$4 - 4\lambda + \lambda^2 - 4 = 0$

$\lambda(\lambda - 4) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda_2^2 = 0 \\ \lambda_1^2 = 4 \end{array} \right.$

Однако мы знаем, что собств знач AA

соответ. собств. знач $\Sigma\Sigma^T$, т.е соотв. $\sigma_1^2 > \sigma_2^2 > \ldots > \sigma_n^2$

Значит:

$$\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1^2} = 2$$

$$\sigma_2 = \sqrt{\lambda_2^2} = 0$$

Получаем матрицу: $\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Найдем собств. вектора $AA^T - 0 \cdot E$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$x_1 = -x_2 \Rightarrow \bar{x}^1 = \gamma \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Отнормируем x^1 и найдем γ: $(\gamma > 0)$

$$|\bar{x}^1|^2 = \sum_i |x_i|^2 = 1$$

$$\gamma^2 + \gamma^2 = 1 \Rightarrow \gamma^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\bar{x}^1 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Теперь можем подобрать U и V^T так

$UV^T = 1$:

$$U\Sigma V^T = \underset{U}{\begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{V^T}{\begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}} =$$

$$= A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ значит}$$

$$U = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = V^T$$