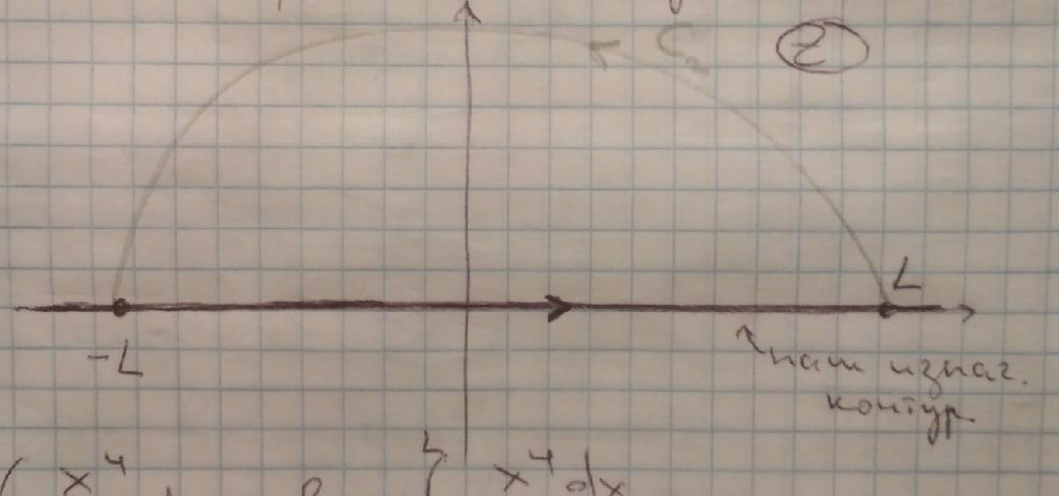
Задача 5

Посчитать интегралы

(1) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4}{1+x^6} dx$

Решение:

1) Повысим x до z $(x \to z)$, тогда можем нарисовать контур. интег.



$$\int \frac{x^4}{1+x^6} dx = \lim_{L\to\infty} \int_{-L}^{L} \frac{x^4 dx}{1+x^6} =$$

$$= \lim_{L\to\infty} \left[\int_{-L}^{L} f(x) dx + \int_{C_2} f(z) dz \right]$$

дуга

Дополн. наш изнач. контур дугой C_2

Интеграл по C_2 занулоется, т.к

$$f(z) = \frac{z^4}{1+z^6} \underset{z\to\infty}{\sim} \frac{1}{z^2}, \text{ а } \int_{C_2} \frac{1}{z^2} dz \to 0, \text{ т.к}$$

$$\left|\frac{1}{z^2}\right| < \frac{1}{|z|^2} \sim \underset{\uparrow}{|z|}, \text{ получаем}$$

длина полуокр пропорц z

$$\int_{C_2} \frac{1}{z^2} dz \sim \int |z| dz \sim \frac{1}{L} \to 0$$

Таким образом изнач. инт. по $\mathbb{R}$ равен инт. по замкн контуру

2) Найдем особ. точки:

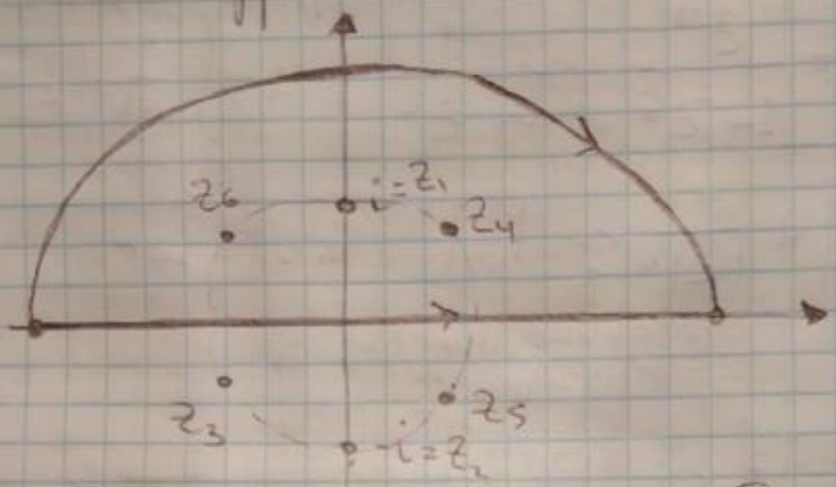
$$1 + z^6 = 0$$

$z_1 = i$, $z_2 = -i$, $z_3 = -\sqrt[6]{-1}$; $z_4 = \sqrt[6]{-1}$

$z_5 = -(-1)^{5/6}$

$$\boxed{\begin{aligned} z_1 &= i & z_5 &= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \\ z_2 &= -i \\ z_3 &= -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \\ z_4 &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \end{aligned}}$$

Нарисуем какие особ. точки попадают в наш контур. (схематично)



Только 3 полюса попадают в наш контур. Воспользуемся теоремой вычетов:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4}{1+x^6}\,dx = 2\pi i \sum_{i=1}^{3} \operatorname*{res}_{z=z_i} f(z) = 2\pi i \Big(\operatorname*{res}_{z=z_1} f(z) + \operatorname*{res}_{z=z_4} f(z) + \operatorname*{res}_{z=z_6} f(z)\Big)$$

3) Найдем вычеты:

Каждая из особ. точек, попавших в контур будет полюсом 1 порядка, т.к

$$\frac{f(z)}{g(z)} \underset{\uparrow}{\simeq} \frac{f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)+\ldots}{\cancel{g(z_0)}+g'(z)(z-z_0)+\ldots} = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)(z-z_0)}$$

расклад. вблизи знаменат.

глав. осн. вблизи z_0 будет [illegible]

В нашем случае:

в точках z_i, $i=6,1,4$ имеем

$$\frac{z^4}{1+z^6} \simeq \frac{z_i^4}{6z_i^5} = \frac{1}{6}\frac{1}{z_i(z-z_i)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname*{res}_{z=z_i} f(z) = \frac{1}{6z_i}$$

Получаем:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^4}{1+x^6}\,dx = \frac{2\pi i}{6}\left[\frac{1}{i}+\frac{1}{-\frac{\sqrt3}{2}+\frac{i}{2}}+\frac{1}{\frac{\sqrt3}{2}+\frac{i}{2}}\right] = \frac{2\pi}{3}$$

Ответ

$$(2)\ \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{2+\cos\theta}\, d\theta = \left\{\begin{array}{l} z = 1\cdot e^{i\theta} \\ |z| = 1 \\ \theta \text{ интерпрет. как} \\ \text{полярн. угол } z \\ e^{i\theta} i\, d\theta = dz \end{array}\right\} =$$

$$= \quad \cos\theta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 2\,\frac{1}{4}\left(z+\frac{1}{z}\right)^2 - 1 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)^2 - 1$$

$$= \oint_{|z|=1} dz\, \frac{\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)^2 - 1}{2+\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)} = \oint_{|z|=1} \frac{z\left(z^2+\frac{1}{z}\right)}{4z+z^2+1}\, dz$$

Рассм. выраж.

$$\frac{z^2\, dz}{4z+z^2+1} = \frac{i\, e^{i2\theta}\, e^{i\theta}\, d\theta}{4e^{i\theta}+e^{i2\theta}+1} = \left\{\begin{array}{l} \text{пользуемся} \\ \text{правил. Эйлера} \end{array}\right\}$$

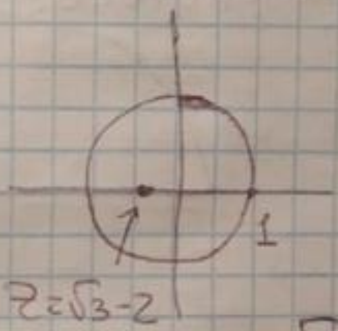
$$= \left[-\frac{\sin\theta\cos\theta}{\cos\theta+2} + i\underbrace{\frac{\cos 2\theta}{2(\cos\theta+2)}}_{\text{игнор. подынт. ф-ия.}}\right] d\theta$$

Получаем.

$$\underbrace{2\,\mathrm{Im}\oint\limits_{|z|=1}\frac{z^2\,dz}{4z+z^2+1}}_{(*)} = \int_0^{2\pi}\frac{\cos 2\theta}{2+\cos\theta}\,d\theta$$

Посчитаем $(*)$:

$$\oint\limits_{|z|=1}\frac{z^2\,dz}{4z+z^2+1} \qquad C:$$



Особ. точки, вошедш. в контур: $z=\sqrt{3}-2$

Воспользуемся теоремой о вычетах:

$$\oint\limits_{|z|=1}\frac{z^2\,dz}{4z+z^2+1} = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=\sqrt{3}-2} f(z) = \cancel{2\pi i\frac{(\sqrt{3}-2)^2}{4(\sqrt{3}-2)+(\sqrt{3}-2)^2+1}}$$

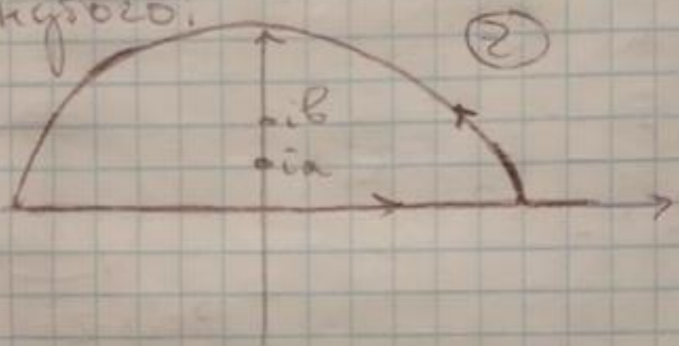
$$= 2\pi i\frac{(\sqrt{3}-2)^2}{4+2(\sqrt{3}-2)} = 2\pi i\left(\frac{7\sqrt{3}}{6}-2\right)$$

Получаем:

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos 2\theta}{2+\cos\theta}\,d\theta = \boxed{2\cdot 2\pi\left(\frac{7\sqrt{3}}{6}-2\right)}$$ Ответ.

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)^2}$, $a, b \in \mathbb{R}$

1) Также дополняем контур до замкнутого:



2) Воспользуемся теоремой о вычетах

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)^2} = 2\pi i \sum_{k=1}^{2} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z) -$$

В наш контур попали 2 особ. точки:

$z_1 = ib$ ← полюс 2 порядка

$z_2 = ia$ ← полюс 1 порядка

посчитаем вычеты в них по формуле:

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[f(z)(z-z_0)^n \right]$$

$$\operatorname*{res}_{z=ib} f(z) = \frac{i(-a^2+3b^2)}{4b^3(-a^2+b^2)^2}$$

$$\operatorname*{res}_{z=ia} f(z) = -\frac{i}{2a(a^2-b^2)^2}$$

Получаем:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)^2} = 2\pi i \cdot i\left(\frac{3b^2-a^2}{4b^3(b^2-a^2)^2} - \frac{1}{2a(a^2-b^2)^2}\right)$$

$$= -2\pi\,\frac{2a3b^2-2a^3-4b^3}{2(a^2-b^2)^2\,4b^3a} = \frac{4b^3+2a^3-6ab^2}{2ab^3(a^2-b^2)^2}\,\pi$$

$$= \frac{a+2b}{ab^3(a+b)^2}\cdot\pi$$