Задача 8.

Вычислить $\int\limits_{C_{1,2}} \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2+y^2}$ по единич. окр.

(1) круг с центром $x=0$, $y=0$: C_1

Рассм. такой объект:

$$\frac{dz}{z} = \frac{(dx+i\,dy)(x-iy)}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{x\,dx - iy\,dx + ix\,dy + y\,dy}{x^2+y^2} =$$

$$= \frac{x\,dx + y\,dy - i(y\,dx - x\,dy)}{x^2+y^2}$$

Получаем:

$$\frac{y\,dx - x\,dy}{x^2+y^2} = -\operatorname{Im}\frac{dz}{z}$$

$$\Rightarrow \int\limits_{C_1} \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2+y^2} = -\operatorname{Im}\int\limits_{C_1}\frac{dz}{z} = \left\{\begin{matrix} z = re^{i\varphi} \\ dz = ie^{i\varphi}d\varphi \end{matrix}\right\} =$$

$$= -\operatorname{Im}\int\limits_0^{2\pi} ie^{2i\varphi}\,d\varphi = -\operatorname{Im}(2\pi i) = -2\pi$$

(2) C_2: круг с центром $x=2$, $y=0$

$$\boxed{-\operatorname{Im}\int_{C_2}\frac{dz}{z}=0}$$

Ответ.

, т.к. $f(z)$ - аналитична в C_2 и не имеет особ., тогда по Th. Коши $\int_{C_2} f(z)\,dz=0$