Задача 1.

$$f(z) = \frac{1}{\sin z} + \frac{2z}{z^2 - \pi^2}$$

Определить вид особой точки в $z = \pm\pi$

Решение:

1) Разложим по отдельности слагаемые $f(z)$ в ряд Лорана: $(z = \pi)$

$$\frac{2z}{z^2-\pi^2} = \left\{ \begin{array}{l} z = \varepsilon + \pi \\ \text{аналогично} \\ \text{как на неделе 1} \end{array} \right\} = \frac{1}{z-\pi} + \frac{1}{2\pi} - \frac{z-\pi}{4\pi^2} + \ldots$$

$$\frac{1}{\sin z} = -\frac{1}{z-\pi} - \frac{z-\pi}{6} - \ldots$$

В итоге ряд Лорана $f(z)$ будет выгл.:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} - (z-\pi)\left(6 + \frac{1}{4\pi^2}\right) + O\left((z-\pi)^2\right)$$

$\Rightarrow$ По опред. у нас получился обычн. ряд Тейлора $\Rightarrow$ $z = \pi$ – removable singularity.

Задача 2.

(1) $f(z) = \dfrac{\sin z}{1 - \operatorname{tg} z}$.

Найти особую точку и её вид:

Решение:

1) Особая точка:

$$1 - \operatorname{tg} z = 0$$

$$\boxed{z = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}}$$ простой полюс

т.к $f(z \to \pi/4) \propto 1/(z - \pi/4)$

(2) $f(z) = \dfrac{\exp(c/(z-a))}{\exp(z/a) - 1}$

Особые точки:

$$\exp(z/a) - 1 = 0$$

$z = a$ – существ. особ. точка

z имеет аргумент периодичности 2π =>

=> $z = 2\pi i n a$ – простой полюс

Задача 3.

$$f(z) = z e^{1/z} e^{-1/z^2}$$

Определить вид особ. точки $z=0$

Решение:

1) При разлож. в ряд Лорана при $z=0$:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \Rightarrow z=0 \text{ - изолир. существ. особ. точка}$$