Задача 7.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(x)\,dx}{x^2(x^2+1)} - ?$$

Решение:

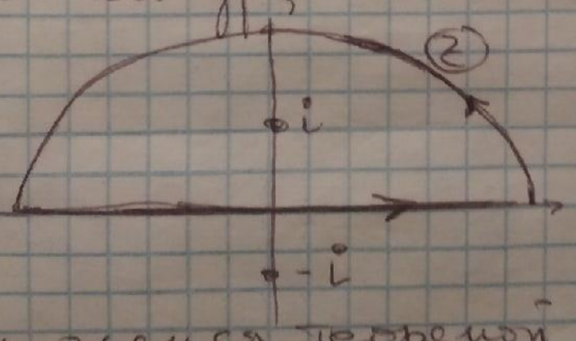
1) $$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 x\,dx}{x^2(x^2+1)} = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx}_{\text{интег по частям}} - \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 x}{1+x^2}\,dx =$$

$$= \pi - \underbrace{\int_{\mathbb{R}}\frac{dx}{1+x^2}}_{\operatorname{arctg} x} + \int_{\mathbb{R}}\frac{\cos^2 x}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{Re}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i2x}}{1+x^2}\,dx}_{(1)}$$

Посчитаем (1):

Замкнем контур, особ точки $x = \pm i$

$x \to z$




Воспользуемся теоремой о вычетах:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i2x}}{1+x^2}\,dx = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=i} f(z) = 2\pi i\,\frac{e^{-2}}{2i} = \pi e^{-2}$$

В итоге получаем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2(x^2+1)}\,dx = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{Re}(\pi e^{-2}) = \boxed{\frac{\pi}{2}(e^{-2}+1)}$$

Ответ