Задача 4.

Удволетвор. ли след. ф-ции усл. Коши-Римана?

(a) $\omega(\underset{x+iy}{\underset{\uparrow}{z}}) = x^2 + y^2$,

$$\begin{cases} u = x^2 + y^2 \\ v = 0 \end{cases}$$

(1) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x \neq \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0$

(2) $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2y \neq -\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0$

$\omega(z)$ не удв усл. Коши-Рим!

Однако усл. Коши-Рим будут выпол. в точке $z = 0$ $(x = y = 0)$. Но это будет отдел. точка $\Rightarrow \omega(z)$ нельзя назвать аналитичной!

(б) $\omega(z) = x^2 - y^2 + 2ixy$

I способ:

$\omega(z) = x^2 - y^2 + 2ixy = (x+iy)^2 = z^2$

$\omega(z) = z^2$ – аналитич. ф-ия (т.к x^2 – диф. ф-ия в действит. анализе)

$\Rightarrow \omega(z)$ удв усл. Коши-Рим.

II способ:

(1) $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y} = 2x$; $\begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \end{cases}$

(2) $\frac{\partial u}{\partial y} = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x} = -2y$

$\Rightarrow \omega(z)$ удв. усл. Коши-Римана.

(в) $\omega(z) = \frac{1}{x+iy}$

I способ:

$\omega(z) = \frac{1}{x+iy} = \frac{1}{z}$ – аналитич. ф-ия, т.к $\frac{1}{x}$ – диф. в действит. анализ.

$\Rightarrow \omega(z)$ удв. усл. Коши-Рим.

II способ:

$$\omega(z) = \frac{1}{x+iy}\frac{(x-iy)}{(x-iy)} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} =$$

$$= \frac{x}{x^2+y^2} + i\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) = u + iv$$

Получаем: $\begin{cases} u(x,y) = x/(x^2+y^2) \\ v(x,y) = -y/(x^2+y^2) \end{cases}$

(1) $$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

(2) $$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$\Rightarrow \omega(z)$ удв. усл. Коши-Римана