Задача 1

Указать все точки ветвления (включ. беск. удал.)

$f(z) = \ln(\sqrt{z^4+1})$

Решение:

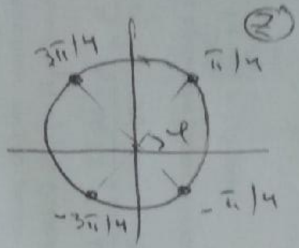
1) $f(z) = \ln\sqrt{z^4+1}$

Точки ветвления:

$z^4 + 1 = 0 \Rightarrow$

$$\boxed{\begin{array}{l} z_1 = e^{i\pi/4};\ z_2 = -e^{i\pi/4} \\ z_3 = e^{i3\pi/4};\ z_4 = -e^{i3\pi/4} \end{array}}$$

Ответ



2) Рассм. поведение на беск:

$f(z) = \ln\sqrt{z^4+1} \approx \ln z^2$

претендент. на т. ветв: $z = 0$

$\Delta \arg f = \ln(e^{4\pi i}) = 4\pi i \Rightarrow$ нет т. ветвл на ∞!

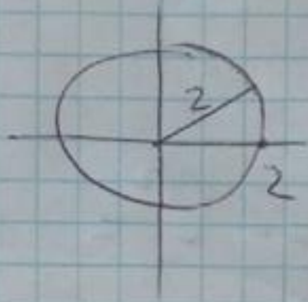
$(z = e^{2\pi i})$

фаза изменилась на чет. число π

Задача 5

$$\int\limits_C \frac{z^*}{(|z|+1)^2}\, dz = \, ?$$

C:



Решение:

$$\int\limits_C \frac{z^*}{(|z|+1)^2}\, dz = \left\{ \begin{aligned} & z = 2e^{i\varphi} \\ & |z| = 2 \\ & z^* = 2e^{-i\varphi} \\ & dz = 2ie^{i\varphi}\, d\varphi \end{aligned} \right\} \circleddash$$

$$\circleddash \int\limits_0^{2\pi} \frac{2e^{-i\varphi}}{9}\, 2ie^{i\varphi}\, d\varphi = \frac{4i}{9} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \frac{8i\pi}{9}$$

Ответ.

Задача 4.

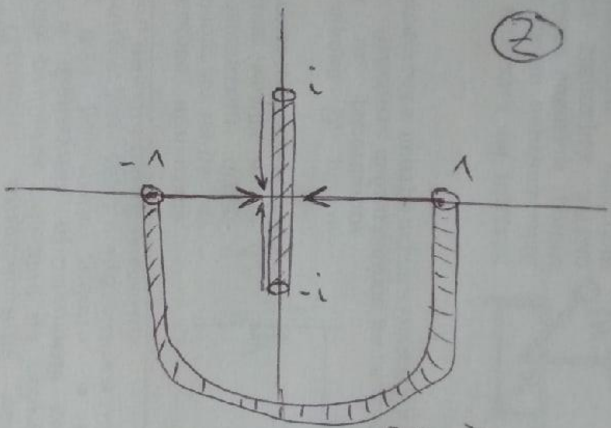
Дано: $f(z) = \sqrt[4]{(z^2+1)(z^2-1)}$, рис. 1

Регуляр. ветвь зафикс. с условием $f(-0) = 1$

Найти: $f(2i)$ и $f(-2i-i0)$

Решение:

1) Рис. 1:



$\arg f = -\frac{\pi}{4}$; $f(2i) = 1 \cdot \left| \frac{f(2i)}{f(-0)} \right| e^{-i\pi/4} =$

$= \left| \frac{\sqrt[4]{3i \cdot i(2i-1)(2i+1)}}{1} \right| e^{-i\pi/4} = \sqrt[4]{15}\, e^{-i\pi/4}$ Ответ.

Задача 3.

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{z}\,(z+1)^2}$$

Точки ветвления:

1) $z = 0$ – т. ветвл.

2) посмотрим асим. на бесконеч:

$$f(z\to\infty) \approx \frac{1}{\sqrt{z}\cdot z^2} = \left| z = e^{-2\pi i} \right| = \left(e^{-2\pi i}\right)^{(-5/2)} = \underbrace{e^{5\pi i}}_{\text{фаза измен. на нецел. число } \pi} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $z = \infty$ – точка ветвления

3) $\Delta \arg f = e^{5\pi i}\cdot \underbrace{e^{-2\pi i}}_{\text{обход } 0} = e^{3\pi i}$ ← измен. арг. $f(z)$ при обходе z кажд. точки ветвл. на окруж.