Задача 13

Построить ряд Лорана в центре $z=0$

(1) $|z| \in (0;1)$

(2) $|z| \in (1;\infty)$

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$$

Решение:

(1) $|z| \in (0;1)$

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)} = -\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} = -\frac{1}{z} - \frac{1}{1-z} =$$

$=$ $\left\{ \frac{1}{1-z} \text{ можем разложить как геом. прогр.} ; |z|<1 \text{ - подходит} \right\}$

$$= \boxed{-\frac{1}{z} - \sum_{n=0}^{\infty} z^n} \text{ Ответ.}$$

Почему оставляем $\frac{1}{z}$?

$$f(z \to 0) = \frac{1}{\cancel{z^2}^{\to 0} - z} = -\frac{1}{z} \Rightarrow \text{вблизи } z=0$$

$f(z)$ будет вести себя $\sim -\frac{1}{z}$ и z^{-1}.

наибольшая отрицат степень в разложении.

(2) $|z| \in (1, \infty)$

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)} = -\frac{1}{z} - \frac{1}{z\left(\frac{1}{z}-1\right)} = -\frac{1}{z} + \underbrace{\frac{1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)}}_{\text{можем разл. в ряд, } \left|\frac{1}{z}\right|<1 \Rightarrow} =$$

$$= -\frac{1}{z} + \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n =$$

$$= -\frac{1}{z} + \frac{1}{z}\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots\right) =$$

$\Rightarrow |z| > 1$ - подход

$$= \cancel{-\frac{1}{z}} + \cancel{\frac{1}{z}} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \dots = \boxed{\sum_{n=2}^{\infty} z^{-n}}$$ Ответ