Задача 14.

Построить ряд Лорана вокруг $z=i$ и найти радиус сходимости ряда.

$$f(z) = \frac{z}{z^2+1}$$

Решение:

1) Замена. $z = \varepsilon + i$

$$f(z) = \frac{\varepsilon + i}{(\varepsilon+i)^2+1} = \frac{\varepsilon+i}{(\varepsilon+i+i)(\varepsilon+i-i)} =$$

$$= \frac{1}{2(\varepsilon+i+i)} + \frac{1}{2(\varepsilon+i-i)} = \frac{1}{2(\varepsilon+2i)} + \frac{1}{2\varepsilon} =$$

$$= \frac{1}{2\varepsilon} + \frac{1}{2\cdot 2i\underbrace{\left(\frac{\varepsilon}{2i}+1\right)}_{\text{разложим в ряд}}} = \left\{ \left|\frac{\varepsilon}{2i}\right| < 1 \Rightarrow \Rightarrow |\varepsilon| > 2 \right\}$$

$$= \frac{1}{2\varepsilon} + \frac{1}{4i}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\varepsilon}{2i}\right)^n =$$

$$= \frac{1}{2\varepsilon} - \frac{i}{4}\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^n \varepsilon^n \underbrace{(-1)^n\cdot(-1)^n}_{1} =$$

$$= \frac{1}{2\varepsilon} - \frac{i}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{i}{2}\right)^n \varepsilon^n = \left\{ \begin{matrix} \text{обрат.} \\ \text{замена} \end{matrix} \right\} =$$

$$= \boxed{\frac{1}{2(z-i)} - \frac{i}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{i}{2}\right)^n (z-i)^n \;;\; |z-i|<2}$$

Ответ.