

Задача 12.

1) Построить ветви для $f(z)$ в разл. z

$$f(z) = \frac{1}{z^3 - z^5}$$

$$2) \sum_{|z|=1} \operatorname{res} f(z) = ?$$

Решение:

$$1) \operatorname{res}_{z=-1} \frac{1}{z^3 - z^5} = \frac{1}{3(-1)^2 - 5(-1)^4} = \left(-\frac{1}{2}\right) \quad \text{Дуб}$$

$$2) \operatorname{res}_{z=0} \frac{1}{z^3 - z^5} = ?$$

Разложим $f(z)$ в ряд Лорана

$$f(z) = \frac{1}{z^3(1-z^2)} = \frac{1}{z^3} (1 + z^2 + z^4 + \dots) =$$

$$= \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z} + z + \dots \Rightarrow \operatorname{res}_{z=0} f(z) = 1 \quad \text{Дуб}$$

$$3) \operatorname{res}_{z=1} \frac{1}{z^3 - z^5} = \frac{1}{3(1)^2 - 5(1)^4} = \left(-\frac{1}{2}\right) \quad \text{Дуб}$$

$$4) \operatorname{res} f(z) - ? \\ z \rightarrow \infty$$

Разложим $f(z)$ в ряд Лорана:

$$f(z) = \frac{1}{z^3} \cdot \frac{1}{(1-z^2)} = \frac{1}{z^3} \cdot \frac{1}{z^5 \left(\frac{1}{z^2} - 1 \right)} = \frac{1}{z^8 \left(1 - \frac{1}{z^2} \right)}$$

$$= \frac{1}{z^8} \left(1 + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^4} + \dots \right)$$

$$= \frac{1}{z^8} + \frac{1}{z^{10}} + \frac{1}{z^{12}} + \dots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{res} f(z) = \underset{z \rightarrow \infty}{\textcircled{0}} \text{ ImB.}$$

$$5) \sum_{i=1}^4 \operatorname{res} f(z) = -\frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} + 0 = 0$$