Límites laterales

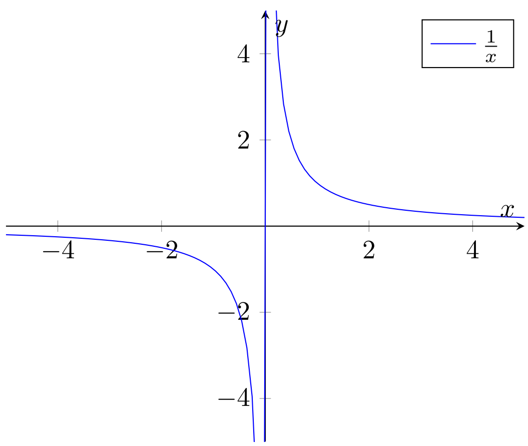
Velázquez Ramírez Carlos Raúl

17-10-2025

Exampli gratia:

1) $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \frac{1}{0} = \infty$$



Limite por izq:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = -\infty, x < 0$$

Limite por la derecha:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \lim_{x \to o} \frac{1}{x} = +\infty, x > 0$$

Menos infinito:

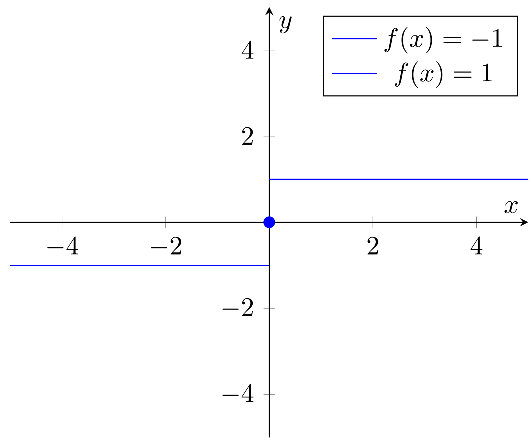
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

Más infinito:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

2) Estudiar $\lim_{x \to 0} sngx$.

$$sgn(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$



Limite por izq:

$$\lim_{x \to 0^-} sngx = \lim_{x \to 0} (-1) = -1$$

Limite por der:

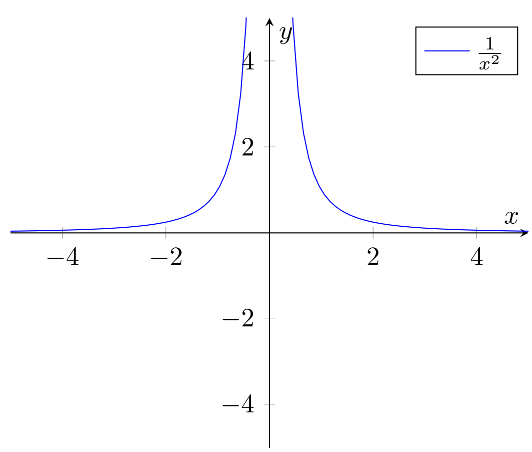
$$\lim_{x \to 0^+} sngx = \lim_{x \to 0} (1) = 1$$

Como ambos, el límite por izq. y por der. no coinciden, concluimos que el limite no existe.

3) Calcule $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$.

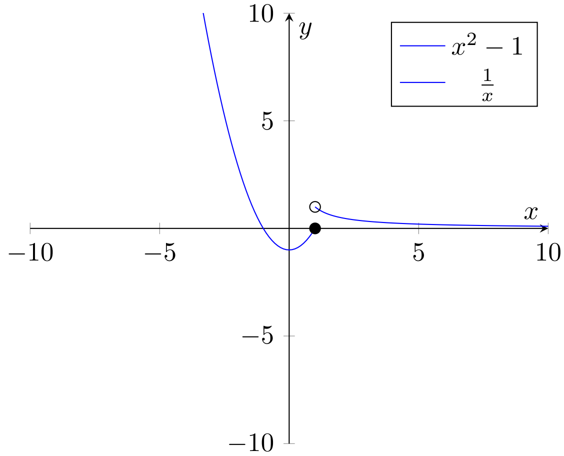
$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{0} = \infty$$

Como el denominador es x^2, este ∞ es «forzado»a ser positivo, aunque es válido percibirlo por casos.



4) Estudie la continuidad de f en los puntos de ruptura.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & , \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{x} & , \text{si } x > 0 \end{cases}$$



¿f es continua en $x = 1$?

Por un lado,

$$f(1) = 1^2 - 1 = 0$$

Por otro lado, calculemos $\lim_{x \to 1} f(x)$. Para esto calculamos limites laterales,

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{1}{x} = 1, \; x > 1$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1} (x^2 - 1) = 0, \; x < 1$$

Como los limites laterales son distintos, el limite no existe y, por lo tanto, f es discontinua en $x = 1$.

5) Estudie la continuidad de $f(x) = mx + b$, $m, b \in \mathbb{R}$.

$$Dom_f = \mathbb{R}$$

Sea $a \in \mathbb{R}$. Veamos si f es continua en $x = a$,

Por un lado,

$$f(x) = ma + b$$

Por otro lado,

$$\lim_{x \to a} f(x) = ma + b$$

Como $f(x) = \lim_{x \to a}$, y $a \in \mathbb{R}$ es arbitrario, concluimos que $f(x) = mx + b$ es continua en $\mathbb{R}$.

Otras funciones que son continuas en su dominio:

i) Funciones polinómicas.

ii) Funciones racionales.

6) Determine si $f(x) = |2x - 1|$ es continua en $\mathbb{R}$.

Solución:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & , \text{si } x \geq \frac{1}{2} \\ -(2x - 1) & , \text{si } x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Como las rectas son funciones polinómicas, $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$.

Ahora, estudiemos la continuidad en $x = \frac{1}{2}$.

Por un lado,

$$f(\frac{1}{2}) = 2(\frac{1}{2}) - 1 = 0$$

Por otro lado, calculemos $\lim_{x \to \frac{1}{2}} f(x)$,

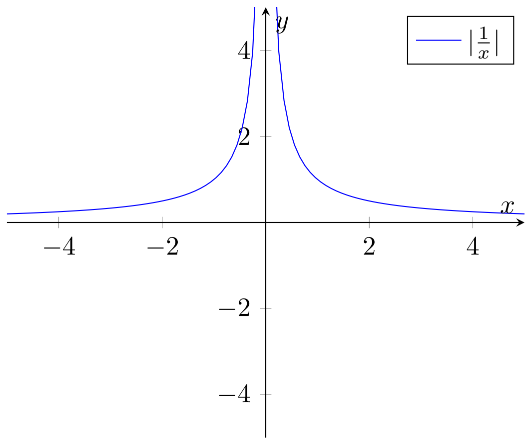
$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} f(x) = \lim_{x \to \frac{1}{2}} -(2x - 1) = -(2 \cdot \frac{1}{2} - 1) = 0, x < \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^+} f(x) = \lim_{x \to \frac{1}{2}} (2x - 1) = 2 \cdot \frac{1}{2} - 1 = 0, x > \frac{1}{2}$$

Como los límites laterales coinciden, el límite existe. Además, como $\lim_{x \to \frac{1}{2}} f(x) = f(\frac{1}{2})$, f es continua en $x = \frac{1}{2}$. Por lo tanto, f es continua en $\mathbb{R}$.

7) $y = |\frac{1}{x}|$.

$$|\frac{1}{x}| = \begin{cases} \frac{1}{x} & , \text{si } x > 0 \\ -\frac{1}{x} & , \text{si } x < 0 \end{cases}$$



8) $\lim\limits_{x\to 6} \frac{\sqrt{6}-\sqrt{x}}{36-x^2}$.

$$\lim_{x\to 6} \frac{\sqrt{6}-\sqrt{x}}{36-x^2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{6}}{36-36} = \frac{0}{0} \text{ , indeterminación}$$

$$\lim_{x\to 6} \frac{\sqrt{6}-\sqrt{x}}{(6-x)(6+x)} = \lim_{x\to 6} \frac{\sqrt{6}-\sqrt{x}}{(\sqrt{6}-\sqrt{x})(\sqrt{6}+\sqrt{x})(6+x)} = \lim_{x\to 6} \frac{1}{(\sqrt{6}+\sqrt{x})(6+x)}$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{6}+\sqrt{6})(6+6)} = \frac{1}{(2\sqrt{6})12} = \frac{1}{24\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{6}{144}$$

$$x \neq 6, \text{ por } \sqrt{6}-\sqrt{x}$$

9) $\lim\limits_{x\to 5} = \frac{\sqrt{x+4}-3}{x-5}$.

$$\lim_{x\to 5} = \frac{\sqrt{x+4}-3}{x-5} = \frac{3-3}{5-5} = \frac{0}{0}, \text{ indeterminación}$$

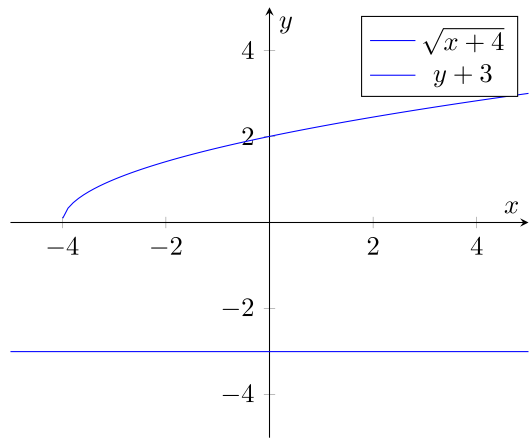
$$\lim_{x\to 5} = \frac{\sqrt{x+4}-3}{x-5} \cdot \frac{\sqrt{x+4}+3}{\sqrt{x+4}+3} = \lim_{x\to 5} \frac{(\sqrt{x+4})^2-3^2}{(x-5)(\sqrt{x+4}+3)}$$

$$\text{, recordemos que } (\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b}) = a^2-b^2$$

$$= \lim_{x\to 5} \frac{x+4-9}{(x-5)(\sqrt{x+4}+3)} = \lim_{x\to 5} \frac{x-5}{(x-5)(\sqrt{x+4}+3)} = \lim_{x\to 5} \frac{1}{\sqrt{x+4}+3} = \frac{1}{6}$$

$$x \neq 5, \text{ por } x-5$$

Pero gráficamente,



, no existe intersección. Por lo tanto, solo hay solución en $\mathbb{C}$.