

Límites

Velázquez Ramírez Carlos Raúl

15-10-2025

Límites y casos

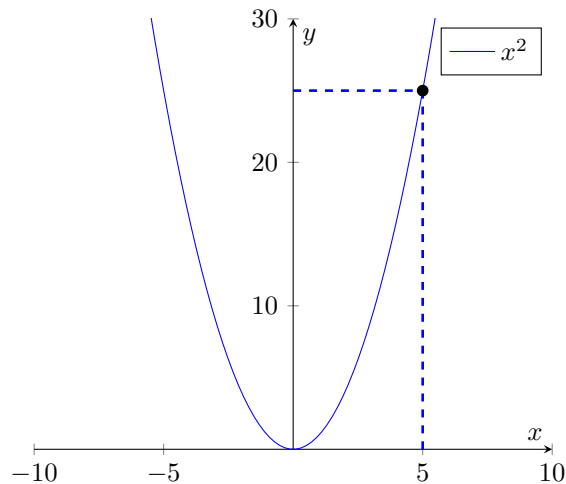
- 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ si los límites existen.
- 2) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$ $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ si los límites existen.
- 3) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$ si los límites existen y $g(x) \neq 0$.
- 4) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = [\lim_{x \rightarrow a} f(x)]^n$ si los límites existen, con $n \in \mathbb{R}$ y $f(x) \neq 0$ y $n \neq 0$.

Exempli gratia: Calcula los siguientes límites.

1) $\lim_{x \rightarrow 5} x^2$

Tendríamos que $\lim_{x \rightarrow 5} x^2 = 5^2 = 25$.

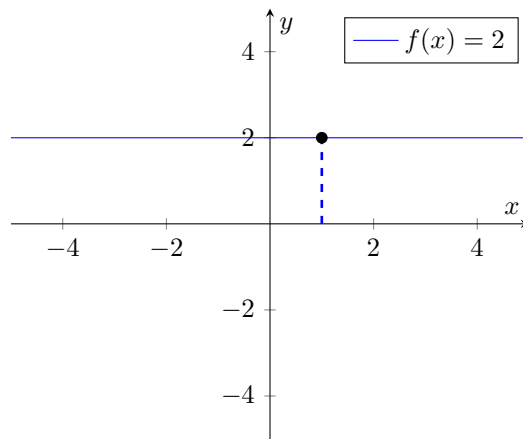
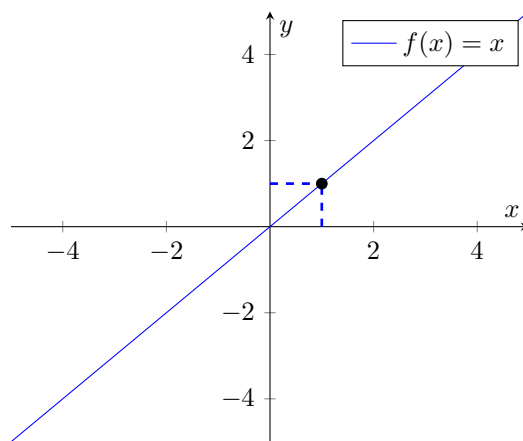
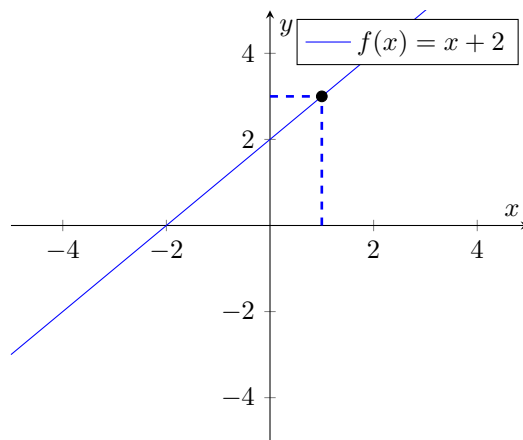
Gráficamente:



2) $\lim_{x \rightarrow 1} (x + 2)$

Tendríamos que $\lim_{x \rightarrow 1} (x + 2) = \lim_{x \rightarrow 1} x + \lim_{x \rightarrow 1} 2 = 1 + 2 = 3$.

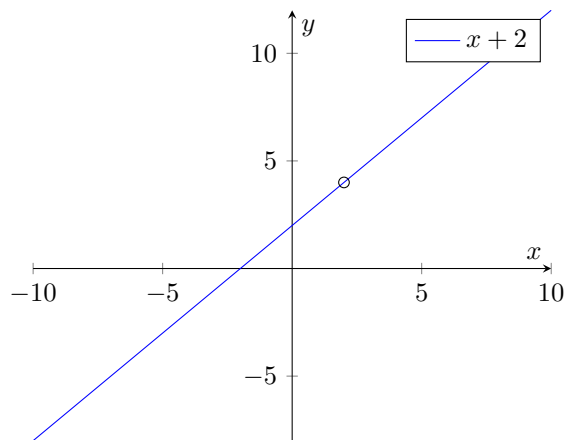
Gráficamente:



Básicamente, la suma de los valores de las ordenadas en las funciones $f(x) = x$ y $f(x) = 2$ cuando $x \rightarrow 1$ es igual a una nueva coordenada que corresponde a la función $f(x) = x + 2$, cuya ordenada es la solución al límite.

$$3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{2^2 - 4}{2 - 2} = \frac{0}{0}, \text{ indeterminación.}$$

$$\text{Quitamos la indeterminación: } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 4$$



$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = x + 2, \text{ donde } x \neq 2 \text{ y } Dom_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

Para calcular la ordenada del "hoyo" (discontinuidad removible) en $x = 2$, calculamos $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$.

¿Cómo podemos redefinir la función para que sea continua en $x = 2$?

Def. Continuidad en un punto: f es continua en un punto $a \in Dom_f$ si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(x)$.

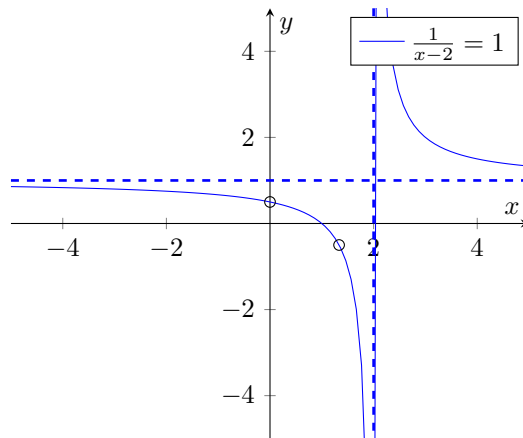
Volviendo a nuestro caso anterior:

$$\text{Sea } g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ 4 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

Esta es una nueva función que remueve la discontinuidad en $x = 2$ para $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$, tratándose de una función por partes.

Exempli gratia: Sea $f(x) = \frac{3x^3 - 7x^2 + 4x}{3x^3 - 10x^2 + 8x}$, estudie su continuidad.

$$f(x) = \frac{x(3x^2 - 7x + 4)}{x(3x^2 - 10x + 8)} = \frac{x(3x - 4)(x - 1)}{x(3x - 4)(x - 2)}, Dom_f = \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{4}{3}, 2\}$$



Evaluable en $x = 0$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(3x - 4)(x - 1)}{x(3x - 4)(x - 2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 1}{x - 2} = \frac{1}{2}, \text{ discontinuidad evitable en } (0, \frac{1}{2})$$

Evaluable en $x = \frac{4}{3}$,

$$\lim_{x \rightarrow \frac{4}{3}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{4}{3}} \frac{x(3x - 4)(x - 1)}{x(3x - 4)(x - 2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{4}{3}} \frac{x - 1}{x - 2} = -\frac{1}{2}, \text{ discontinuidad evitable en } (\frac{4}{3}, -\frac{1}{2})$$

Evaluable en $x = 2$,

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 1}{x - 2} = \frac{1}{0} = \infty, \text{ est\u00e1 indefinido.}$$

$\frac{1}{0} = \infty$ cuando se habla de l\u00edmites, no en todos los contextos es verdad.

$\frac{1}{0} = \infty \rightarrow$ as\u00edntota o discontinuidad infinita

Las discontinuidades infinitas no son evitables.

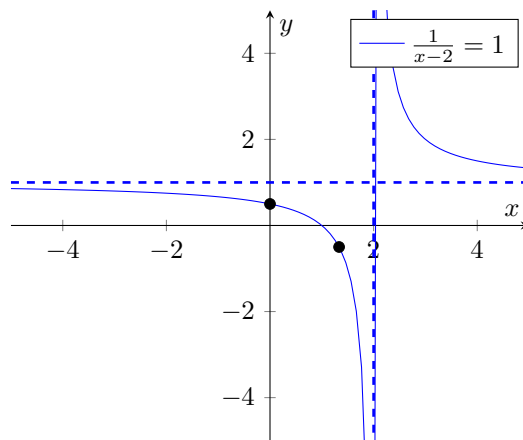
$$f(x) = \frac{x - 1}{x - 2}, \text{ donde } x \neq 0, x \neq \frac{4}{3};$$

$$\frac{x - 1}{x - 2} = \frac{1}{x - 2} + 1$$

Redefinamos la funci\u00f3n para que sea continua en $x = 0$ y $x = \frac{4}{3}$,

$$\text{Sea } g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0, x \neq \frac{4}{3} \\ \frac{x-1}{x-2} & \text{si } x = 0 \vee x = 4/3 \end{cases}$$

$$\text{Dom}_g = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$



Nota: Se refiere explícitamente a la continuidad en su propio dominio en una función, y la discontinuidad general considera a aquellos valores fuera del dominio. En este caso, la función *es continua en su dominio*, mientras que *es discontinua en $x = 2$* .