Inducción

Velázquez Ramírez Carlos Raúl

04-11-2025

Exampli gratia:

1) Pruebe para todo número $n \in \mathbb{N}$:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Paso 1: $n = 1$.

$$1 = \frac{1(1+1)(2(1)+1)}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

Paso 2 (*inductivo*): Suponemos válido para $n = k$.

$$1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

Y a partir de esto establecemos la validez de la formula para $n = k + 1$.

$$1^2 + 2^2 + \cdots + (k+1)^2 = [1^2 + 2^2 + \cdots + k^2] + (k+1)^2$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$

$$= \frac{[k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2]}{6} = \frac{(k+1)[k(2k+1) + (k+1)]}{6} = \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} = \frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6}$$

2) Pruebe que para todo número impar n, el número $n^2 - 1$ es divisible entre 8.

Paso 1 (*de inducción*): $n = 1$.

$$1^2 - 1 = 1 - 1 = 0 = 0\,(mod 8)$$

Paso 2 (*inductivo*): Suponemos que la propiedad es válida para un número impar positivo cualquiera con $n = 2k + 1$, donde $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Hipótesis de inducción: $(2k+1)^2 - 1 = 0\, mod 8$.

$$+\, mod\, 8$$

+	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	0
2	2	3	4	5	6	7	0	1
3	3	4	5	6	7	0	1	2
4	4	5	6	7	0	1	2	3
5	5	6	7	0	1	2	3	4
6	6	7	0	1	2	3	4	5
7	7	0	1	2	3	4	5	6

$$* \, mod \, 8$$

*	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	0	2	4	6
3	0	3	6	1	4	7	2	5
4	0	4	0	4	0	4	0	4
5	0	5	2	7	4	1	6	3
6	0	6	4	2	0	6	4	2
7	0	7	6	5	4	3	2	1

Ahora con base en esto, probamos la validez de la propiedad para el siguiente impar.

$$n = 2k + 3$$

$$(2k+3) - 1 = [(2k+1)^2 - 1] + 2]^2 - 1$$

$$(2k+1)^2 + 2(2)(2k+1) + 4 - 1 = (2k+1)^2 - 1 + 4(2k+1) + 4 = [(2k+1)^2 - 1] + 8k + 8$$

Se aplica la hipótesis de inducción:

$$(2k+3)^2 - 1 = [(2k+1)^2 - 1] + 8k + 8 = 0 + 0 + 0 \, mod \, 8$$

Por lo que se concluye que $n^2 - 1 = 0 \, (mod \, 8)$ para todo número impar.

3) Pruebe que $n! > 3^{n-2}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq b$.

Paso 1 (*base de inducción*): Procedemos a mostrar la validez de la desigualdad para el primer caso $n = 3$.

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6 > 3^1 = 3^{3-2}$$

Paso 2: Suponemos que la desigualdad es válida para $n = k$ donde $k \in \mathbb{N}$ arbitrario, tal que $k \geq 3$.

Hipótesis de inducción: $k! > 3^{k-2}$.

Ahora probemos la validez de la desigualdad para $n = k + 1$, donde $k > 3$.

$$(k+1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot K \cdot (k+1) = 3^{k-2}(k+1) > 3^{k-2} - 3 = 3^{k-1} = 3(k+1) - 2$$

$n! > 3^{n-2}$ para todo natural $n > 3$.