Derivación, Demostración, y Diferenciabilidad

Velázquez Ramírez Carlos Raúl

12-11-2025

Derivación de funciones trigonométricas

Tenemos que

1) $\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\beta)\cos(\alpha)$.
2) $\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\beta)\cos(\alpha)$.

De $1+2$ obtenemos que $\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin(\alpha)\cos(\beta)$.

Sean $A = \alpha+\beta$ y $B = \alpha-\beta$,

$$\sin(A) + \sin(B) = 2\sin(\frac{A+B}{2})\cos(\frac{A-B}{2})$$

De $1-2$ obtenemos que $\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2\sin(\alpha)\cos(\beta)$.

$$\sin(A) - \sin(B) = 2\sin(\frac{A-B}{2})\cos(\frac{A+B}{2})$$

Demuestre que $f(x) = \sin(x)$ es diferenciable en $\mathbb{R}$ y calcule su derivada.

Demostración: Sean $x \neq x_0$ y $x, x_0 \in \mathbb{R}$,

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{\sin(x)-\sin(x_0)}{x-x_0} = \frac{2\sin(\frac{x-x_0}{2})\cos(\frac{x+x_0}{2})}{x-x_0} = \frac{\sin(\frac{x-x_0}{2})}{\frac{x-x_0}{2}} \cdot \cos(\frac{x+x_0}{2})$$

Así,

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\sin(\frac{x-x_0}{2})}{\frac{x-x_0}{2}} \cdot \cos(\frac{x+x_0}{2}) = (1)\cdot\cos(\frac{x+x_0}{2}) = \cos(x_0) \Rightarrow f'(x) = \cos(x_0)$$

Así, f es diferenciable en $\mathbb{R}$ y $f'(x) = \cos(x)$.

Derivación de n funciones

Proposición: Sean $f, g :]\alpha,\beta[\to \mathbb{R}$ diferenciable en $x_0 \in]\alpha,\beta[$. Entonces,

1) $f+g$ es diferenciable en x_0 y $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.
2) $(fg)'$ es diferenciable y $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.
3) Si $g(x_0) \neq 0$, entonces $\exists]\alpha,\beta[\subset]\alpha,\beta[$ con $x_0 \in]\alpha,\beta[$.

La función $\frac{1}{g}$, definida, al menos en $]\alpha,\beta[$, es diferenciable en x_0 y, además,

$$(\frac{1}{g}')(x_0) = \frac{-g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

4) Si $g(x_0) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ es diferenciable en x_0 y además,

$$(\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{g(x_0)f'(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Demostración:

1) Tenemos que para $x \neq x_0$,

$$\frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0} = \frac{(f(x) - g(x)) + (f(x_0) - g(x_0))}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

Entonces,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + g'(x_0)$$

2) Sea $x \neq x_0$,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{(fg)(x) - (fg)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} g(x) \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \to x_0} f(x_0) \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

$$= g(x_0) \cdot f'(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

Diferenciabilidad

Teorema: La continuidad es una condición necesaria para la diferenciabilidad.

$$p \to q$$

p es condición suficiente para q

q es condición necesaria para p

p: f es diferenciable.

q: f es continua.

Que f sea continua es condición necesaria más no suficiente para ser diferenciable.

Exampli gratia: En el caso $f(x) = |x|$, $f'(0)$ no existe.

$$\text{lím})x \to 0 \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

Con límites laterales:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) \neq \lim_{x \to 0^-} f(x)$$

f es continua en $\mathbb{R}$ pero no es derivable en $x = 0$.

Sea $f :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}$ diferenciable en $x_0 \in]\alpha, \beta[$, entonces f es continua en x_0.

Demostración:

Suponemos que $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe.

Debemos mostrar qie $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Para $x \neq x_0$,

$$f(x) - f(x_0) = (f(x) - f(x_0))\frac{x - x_0}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0)$$

Entonces

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \to x_0} f(x) - \lim_{x \to x_0} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0), \ \textit{Q.E.D}$$

Obs.:

$$(f_1 f_2)' = f_1 f_2' + f_1' f_2$$

$$(f_1 f_2 f_3)' = (f_1(f_2 f_3))' = f_1(f_2 f_3)' + f_1' f_2 f_3 = f_1(f_2 f_3' + f_2' f_3) + f_1' f_2 f_3 = f_1 f_2 f_3' + f_1 f_2' f_3 + f_1' f_2 f_3$$

En general:

$$(f_1 f_2 \ldots f_n)' = \sum_{i=1}^{n} f_1 f_2 \ldots f_{i-1} f_i' f_{i+1} \ldots f_n$$

Demostrar por inducción sobre $n \in \mathbb{N}$ y después programarla.