

Funciones y límites

Velázquez Ramírez Carlos Raúl

13-10-2025

Composición de funciones

Sean $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$ y sea $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$ funciones. Se define la función compuesta f con g , denotada por $f \circ g : A \rightarrow C$ como $(f \circ g)(x) = f(g(x)) \forall x \in A$.

Exempli gratia: Sean $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2$,

« g compuesta con f » $(f \circ g)(x)$

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(x^2) \\ &= \sqrt{x^2} \\ &= |x|, \text{Dom}_{f \circ g} = \mathbb{R}\end{aligned}$$

« f compuesta con g » $(g \circ f)(x)$

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(\sqrt{x}) \\ &= (\sqrt{x})^2 \\ &= x, \text{Dom}_{g \circ f} = \mathbb{R}\end{aligned}$$

Observaciones:

I. $(g \circ f)(x) \neq (f \circ g)(x)$

II. $\text{Dom}_{g \circ f}$ está formado por todos los $x \in \text{Dom}_f$ tal que $f(x) \in \text{Dom}_g$, es decir

$$\text{Dom}_{g \circ f} = \{x \in \text{Dom}_f \mid f(x) \in \text{Dom}_g\}$$

Exempli gratia: Sean $f(x) = \sqrt{x}$, $\text{Dom}_f = [0, \infty[$ y $g(x) = x^2$ $\text{Dom}_g = \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\text{Dom}_{f \circ g} &= \{x \in \text{Dom}_g \mid g(x) \in \text{Dom}_f\} \\ \text{Dom}_{f \circ g} &= \mathbb{R} && \text{extendido} \\ \text{Dom}_{g \circ f} &= \mathbb{R} && \text{restringido}\end{aligned}$$

Función inversa

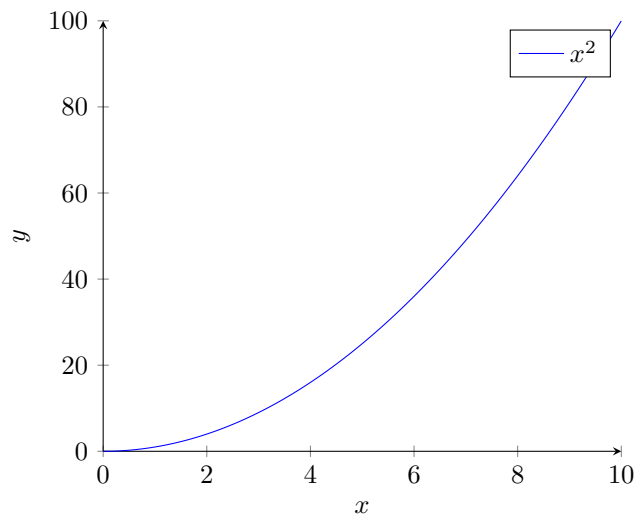
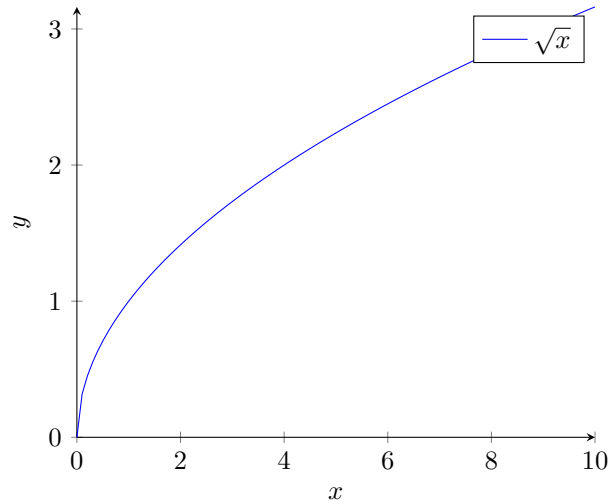
Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow B \subseteq \mathbb{R}$ y $g : B \subseteq \mathbb{R} \rightarrow A \subseteq \mathbb{R}$ tal que $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) \forall x \in A \cap B$, entonces $f \times g$ son funciones inversas una de la otra.

Consecuentemente, f y g son biyectivas y representamos a g como f^{-1} . Además

$$(f \circ f^{-1})(x) = x$$

Exempli gratia: Muestre que $y = x^2$ y $y = \sqrt{x}$ son inversas una de la otra. Indique dominios, contradominios e imágenes correspondientes.

Solución: Sean $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^2$. Por un lado, $(f \circ g)(x) = |x|$, por otro, $(g \circ f)(x) = x$.



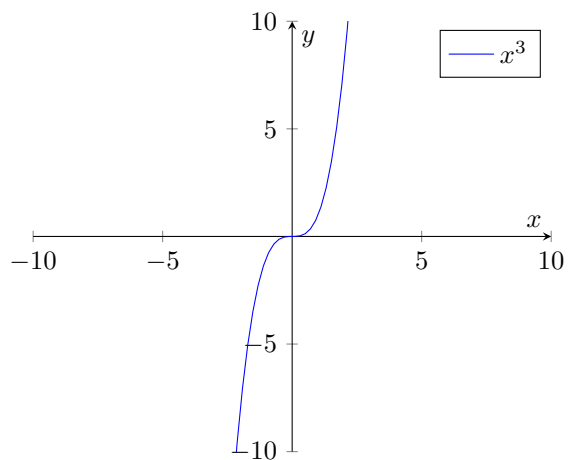
Entonces, $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = \sqrt{x^2} = x$ (se puede cancelar la raíz y el cuadrado, pues estamos trabajando únicamente en \mathbb{R}^+).

Como f y g son biyectivas de $[0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ y $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$, por lo tanto f y g son inversas una de la otra.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x}, \\ g(x) &= x^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{-1}(x) &= x^2 \\ g^{-1} &= \sqrt{x} \end{aligned}$$

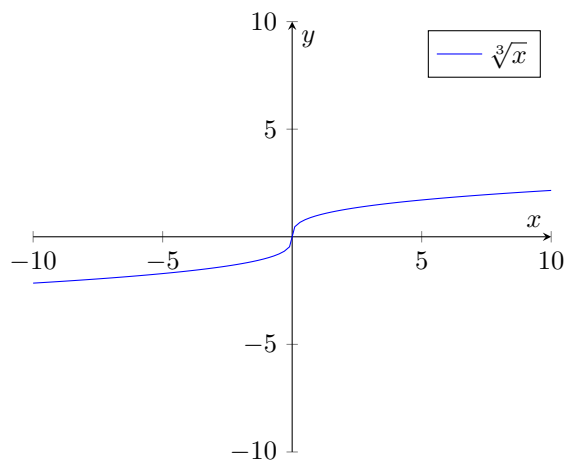
Exempli gratia: Calcule la inversa (de existir) de $f(x) = x^3$



$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{Im}g_f = \mathbb{R}, f$ es biyectiva.

$$\begin{aligned} y &= x^3 \\ x^3 &= y \\ x &= y^{1/3} \\ x &= \sqrt[3]{y} \rightarrow y = \sqrt[3]{x} \end{aligned}$$

Sea $g(x) = \sqrt[3]{x}$, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{Im}g_g = \mathbb{R}, g$ es una biyección.



$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(\sqrt[3]{x}) = (\sqrt[3]{x})^3 = x \\ (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(x^3) = \sqrt[3]{x^3} = x \end{aligned}$$

Como f y g son biyectivas de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x \Rightarrow f$ y g son inversas.

Comprobación: Trazar en un plano $f(x)$, $f^{-1}(x)$ y $y = x$. Un lado de la recta se refleja en la otra.

