Funciones a trozos, función parte entera e introdcción intuitiva a la derivada

Velázquez Ramírez Carlos Raúl

31-10-2025

Función a trozos

Exampli gratia:

1)

$$\text{Sea: } f(x) \begin{cases} x & \text{, si } 0 \leq x < 1 \\ 3x-2 & \text{, si } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Purebe que $\lim_{x \to 1} f(x)$ existe mediante la defnción $\epsilon - \delta$.

Proponemos $\lim_{x \to 1} f(x) = 1$

Caso 1: Sea $0 <= x < 1$ y sea $\epsilon > 0$.

Si elegimos $\delta_1 = \epsilon$

Suponemos que $0 < |x-1| < \delta$.

Verificamos que $|f(x) - L| = |x-1| < \delta_1 = \epsilon$.

Caso 2: Sea $1 <= x <= 2$ y $\epsilon > 0$.

Si elegimos $\delta_2 = \frac{\epsilon}{3}$.

Suponemos $0 < |x-1| < \delta_2$.

Verificamos que $|f(x) - L| = |3x-2-1| = |3x-3| = 3|x-1| < 3\delta_2 = 3(\frac{\epsilon}{3}) = \epsilon$.

Por tanto,

$$\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$$

$$= min\{\epsilon, \frac{\epsilon}{3}\} = \frac{\epsilon}{3}$$

Siempre se ha de tomar la ϵ más pequeña. Solo puede existir una, por defnción.

2)

$$\text{Sea: } f(x) \begin{cases} 2x+A & \text{, si } x < 1 \\ x & \text{, si } 1 \leq x \leq 5 \\ x^2+B & \text{, si } 5 < x \end{cases}$$

Veamos la continuidad en $x = 1$.

Por un lado, $f(1) = 1$ y $\lim_{x \to 1} f(x)$.

Se calcula con límites laterakes:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1}(2x + A) = 2 + A, \text{ donde } x < 1$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1} x = 1, \text{ donde } x > 1$$

Entonces, para que $\lim_{x\to 1} f(x)$ existe, debe suceder:

$$2 + A = 1 \Rightarrow A = -1$$

Así, $f(1) = \lim_{x\to 1} f(x) = 1$, por tanto f es continua en $x = 1$.

Veamos la continuidad de f en $x = 5$.

Notemos que $f(5) = 5$.

Para hallar $\lim_{x\to 5} f(x)$, debemos estudiar límites laterales:

$$\lim_{x\to 5^-} f(x) = \lim_{x\to 5^-} x = 5, \text{ donde } x < 5$$

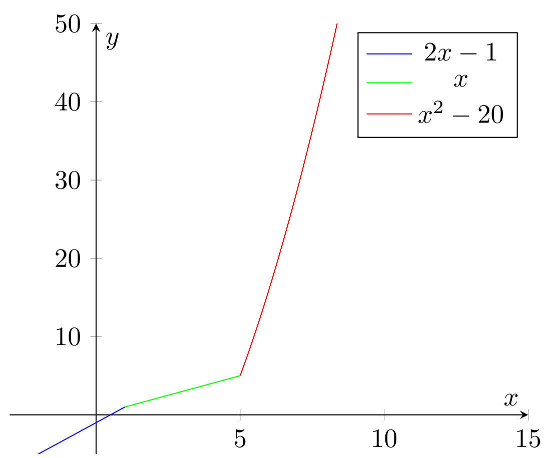
$$\lim_{x\to 5^+} f(x) = \lim_{x\to 5^+}(x^2 + B) = 25 + B, \text{ donde } x > 5$$

Para que exista $\lim_{x\to 5} f(x)$, los laterales deben coincidir.

$$25 + B = 5 \Rightarrow B = -20$$

Así $f(5) = \lim_{x\to 5} f(x) = 5$ y, por tanto, f es continua en $x = 5$.

Como f se define a trozos mediante polinomios, f es continua en el resto del dominio.



$$\text{Sea: } f(x) \begin{cases} 2x-1 & \text{, si } x<1 \\ x & \text{, si } 1 \le x \le 5 \\ x^2-20 & \text{, si } 5<x \end{cases}$$

Función parte entera

Función techo

$$E\,:\,\mathbb{R} \to \mathbb{Z}$$
$$x \mapsto y = E(x)$$

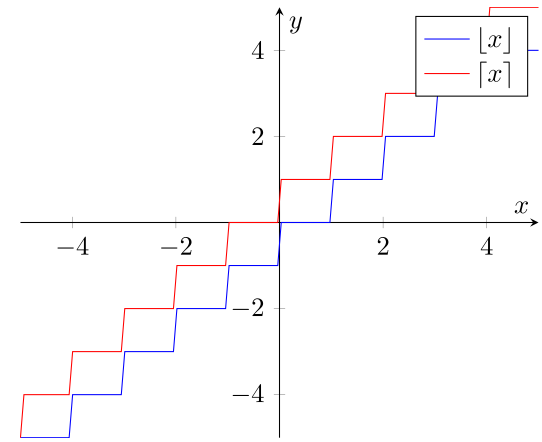
$$techo\,:\,\mathbb{R} \to \mathbb{Z}$$
$$techo(x) = \lceil x \rceil := min\{K \in \mathbb{Z} \,|\, x \le K\}$$

$$\textbf{E.g.} \begin{cases} \text{Si } x=0 & \lceil 0 \rceil = 0 \\ \text{Si } x=n,\, n\in\mathbb{Z} & \lceil n \rceil = n \\ \text{Si } x=0{,}9 & \lceil 0 \rceil = 1 \\ \text{Si } x=1{,}4 & \lceil 0 \rceil = 2 \\ \text{Si } x=2 & \lceil 0 \rceil = 2 \\ \text{Si } x=-3 & \lceil 0 \rceil = -3 \end{cases}$$

Función suelo

$$suelo\,:\,\mathbb{R} \to \mathbb{Z}$$
$$suelo(x) = \lfloor x \rfloor := max\{k \in \mathbb{Z} \,|\, k \le x\}$$

$$\textbf{E.g.} \begin{cases} \text{Si } x=0 & \lceil 0 \rceil = 0 \\ \text{Si } x=n,\, n\in\mathbb{Z} & \lceil n \rceil = n \\ \text{Si } x=0{,}9 & \lceil 0 \rceil = 0 \\ \text{Si } x=1{,}4 & \lceil 0 \rceil = 1 \\ \text{Si } x=2 & \lceil 0 \rceil = 2 \\ \text{Si } x=-3 & \lceil 0 \rceil = -3 \end{cases}$$



La derivada

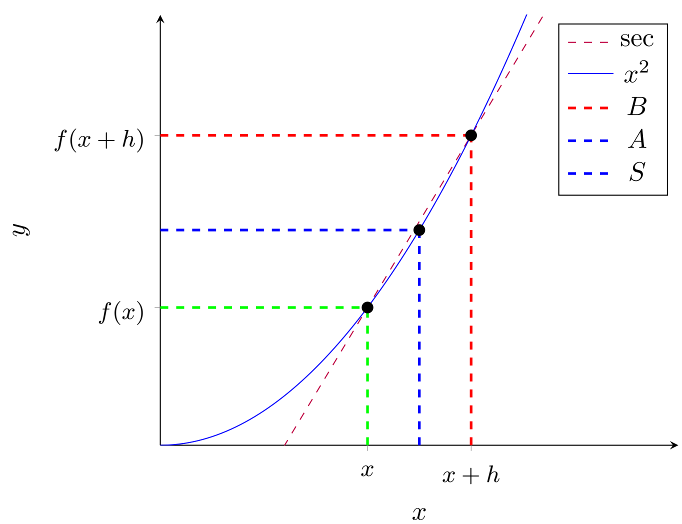
Def. Sean I un intervalo en $\mathbb{R}$ y $f : I \to \mathbb{R}$. Si $x_0 \in I$, definimos la derivadad de f en x_0 como

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

, siempre que el límite exista.

Si el límite existe, se dice que f es derivable o diferenciable en el punto $x = x_0$.

Motivación: Encontrar la pendiente de una recta tangente a la gráfica de una función en un punto.



$$A(x, f(x))$$
$$B(x + h, f(x + h))$$

$$m_{\text{sec}} = \frac{f(x+h) - f(x)}{x + h - x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Movemos el punto B sobre la curva para que se acerque al punto A.

$$B \to A \,:\, m_{\tan} = \lim_{h\to 0} m_{\text{sec}} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

Exampli gratia: Calcule la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = x^2$ en el punto de la abscisa $x = 5$.

Sea

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(2x+h)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}(2x + h) = 2x \Rightarrow f'(x) = 2x \, \forall x \in Dom_f$$

$$f'(5) = 10$$

Encontremos la ecuación de la recta tangente con $m = 10$ y $(5, 25)$.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 25 = 10(x - 5)$$
$$y = 10x - 25$$