Segundo Parcial

Velázquez Ramírez Carlos Raúl

10-11-2025

1. Calcule:

a) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^2-4}{1-\sqrt{x+3}} = \frac{0}{0}$, indeterminación.

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^2-4}{1-\sqrt{x+3}} \cdot \frac{1+\sqrt{x+3}}{1+\sqrt{x+3}} = \lim_{x\to -2} \frac{(x-2)(x+2)(1+\sqrt{x+3})}{-(x+2)}$$

$$= \lim_{x\to -2} (2-x)(1+\sqrt{x+3}) = 4(2) = 8$$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\sin(3x)}{x+\sin(5x)} = \frac{0}{0}$, indeterminación.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin(3x)}{x+\sin(5x)} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\frac{3\sin(3x)}{3x}}{1+\frac{5\sin(5x)}{5x}} = \frac{\lim\limits_{x\to 0} 1 - 3\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{3x}}{\lim\limits_{x\to 0} 1 + 5\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(5x)}{5x}} = \frac{1-3\cdot 1}{1+5\cdot 1} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan(x)-\sin(x)}{x^3} = \frac{0}{0}$, indeterminación.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin(x)}{\cos(x)} - \frac{\sin(x)}{1}}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin(x)-\sin(x)\cos(x)}{\cos(x)}}{\frac{x^3}{1}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)(1-\cos(x))}{x^3\cos(x)} \cdot \frac{1+\cos(x)}{1+\cos(x)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)(1-\cos^2(x))}{x^3\cos(x)(1+\cos(x))} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^3(x)}{x^3} \cdot \frac{1}{\cos(x)+\cos^2(x)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos(x)+\cos^2(x)}$$

$$= \lim_{x\to 0} 1\cdot 1\cdot 1\cdot \frac{1}{1+1^2} = \frac{1}{2}$$

d) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{\sqrt{2x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+2}} = \frac{\infty-\infty}{\infty}$, indeterminación.

$$\lim_{x\to \infty} \frac{\sqrt{2x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+2}} \cdot \frac{\sqrt{2x^2+1}+x}{\sqrt{2x^2+1}+x} = \lim_{x\to \infty} \frac{x^2+1}{(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+2})(\sqrt{2x^2+4}+x)} = \frac{\infty}{\infty}$$

, indeterminación

$$\lim_{x\to \infty} \frac{1+\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+2})\frac{1}{x}(\sqrt{2x^2+1}+x)} = \lim_{x\to \infty} \frac{1+\frac{1}{x^2}}{(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{2}{x^2}})(\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}+1)}$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{1}+\sqrt{1})(\sqrt{2}+1)} = \frac{1}{2(\sqrt{2}+1)} \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$$

Un método más simple sería:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{2x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+2}} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}-1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}} = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$$

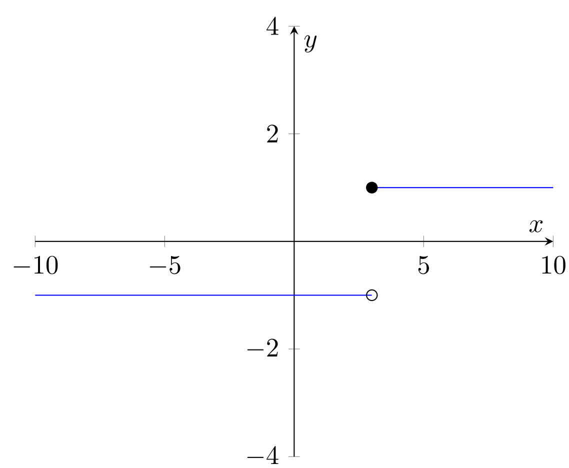
2. Grafique y estudie la continuidad de la función en $\mathbb{R}$:

$$f(x) \begin{cases} \frac{|x-3|}{x-3} & \text{, si } x \neq 3 \\ 1 & \text{, si } x = 3 \end{cases}$$

$$|x-3| \begin{cases} x-3 & \text{, si } x \geq 3 \\ -(x-3) & \text{, si } x < 3 \end{cases}$$

$$f(x) \begin{cases} \frac{-(x-3)}{x-3} & \text{, si } x < 3 \\ 1 & \text{, si } x = 3 \\ \frac{x-3}{x-3} & \text{, si } x > 3 \end{cases}$$

$$f(x) \begin{cases} -1 & \text{, si } x < 3 \\ 1 & \text{, si } x \geq 3 \end{cases}$$



f es continua en $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ por ser polinomio.

Para $x = 3$, estudiamos límites laterales.

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3}(-1) = -1,\, x < 3$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3}(1) = 1,\, x > 3$$

Como $\lim_{x\to 3^-} f(x) \neq \lim_{x\to 3^+} f(x)$, $\lim_{x\to 3} f(x)$ no existe y, por lo tanto, f no es continua en $x = 3$.

3. Sea $f(x) = x^3 + 1$. Pruebe o refute:

a) la función f es biyectiva.

b) la función f es impar.

a)

Definimos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Como $Im_f = \mathbb{R}$, f es suprayectiva.

Para la inyectividad, sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_1) = f(x_2)$.

$$\Leftrightarrow x_1^3 + 1 = x_2^3 + 1 \Leftrightarrow x_1^3 = x_2^3 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x_1^3} = \sqrt[3]{x_2^3} \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Así, f es inyectiva.

$\therefore f$ es biyectiva.

b)

f no es impar.

Supóngase lo contrario, entonces $f(-x) = -f(x)$.

Calculamos:

$$f(-x) = (-x^3) + 1 = -x^3 + 1$$

$$-f(x) = -(x^3 + 1) = -x^3 - 1$$

$$f(-x) \neq f(x)$$

4. Sea $f(x) = x^3 + 1$:

a) Calcule su inversa $f^{-1}(x)$.

b) Compruebe aritméticamente y gráficamente $f(x)$ y $f^{-1}(x)$.

a) Sea $y = x^3 + 1$.

$$x^3 + 1 = y$$

$$x^3 = y - 1$$

$$x = \sqrt[3]{y-1}$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1}$$

b)

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f(\sqrt[3]{x-1}) = (\sqrt[3]{x-1}) + 1 = x - 1 + 1 = x$$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(x^3 + 1) = \sqrt[3]{x^3 + 1 - 1} = \sqrt[3]{x^3} = x$$

$$(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x$$