

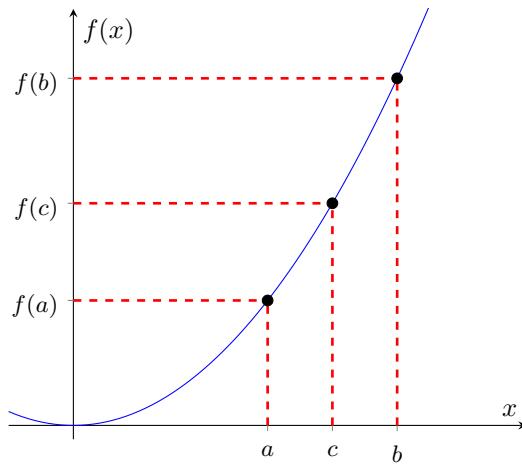
TVI, TVM y Teorema de Bolzano

Velázquez Ramírez Carlos Raúl

21-11-2025

Teorema del valor intermedio (TVI)

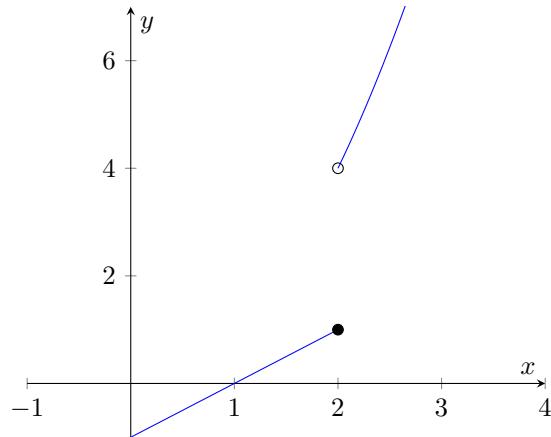
Sea f una función continua en $[a, b]$. Si $f(a) \neq f(b)$, entonces existe $c \in]a, b[$ tal que $f(c)$ está entre $f(a)$ y $f(b)$.



Exampli gratia:

1) Considere la función:

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 & \text{si } 2 < x \leq 3 \end{cases}$$



$$f : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(0) = -1$$

$$f(3) = 9$$

$f(2) = 1$, f no es continua en $x = 2$,

$$2 \in]0, 3[$$

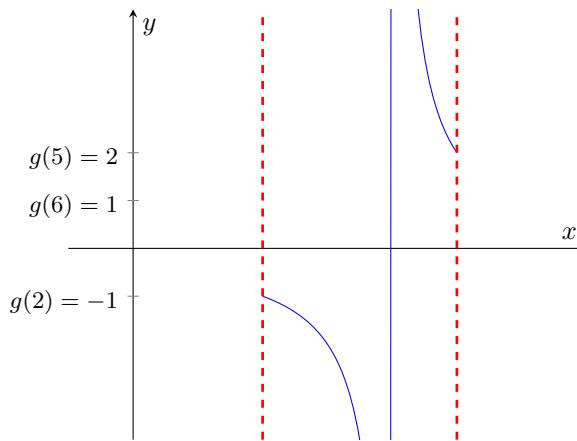
$$f(0) \leq f(2) \leq f(3) \Rightarrow -1 \leq 1 \leq 9$$

2) Sea $g(x) = \frac{2}{x-4}$,

Nótese que g es discontinua en $x = 4$, el cual pertenece al intervalo $[2, 5]$.

Además, $g(2) = -1$ y $g(5) = 2$.

Si $k \in]-1, 2[$, no hay valor alguno de c en $[2, 5]$, tal que $g(c) = k$.



En particular, si $k = 1$, entonces $g(6) = 1$, pero $6 \notin [2, 5]$.

Error: f es continua en $[2, 5]$ (falso) $\Rightarrow 6 \notin]2, 5[$

3) Sea $f(x) = 4 + 3x - x^2$, $f : [2, 5] \rightarrow \mathbb{R}$.

Verifique que el TVI se cumple para $f(c) = 1$ trazando la gráfica de f y la recta de $y = 1$.

$$f(2) = 6$$

$$f(5) = -6$$

Como $f(5) \leq f(c) \leq f(2)$, por el TVI, $\exists c \in]2, 5[$ tal que $f(c) = 1$.

$$4 + 3x - x^2 = 1$$

$$x^2 - 3x - 4 = -1$$

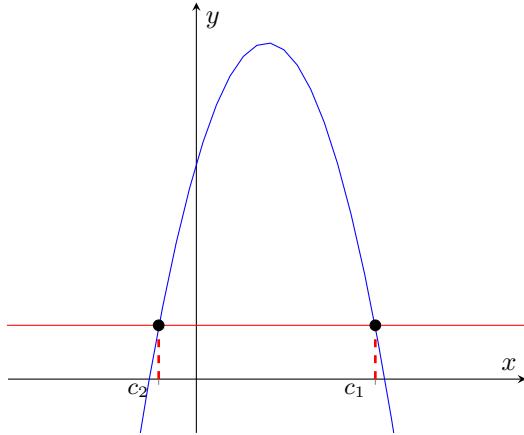
$$x^2 - 3x - 3 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{2}$$

$$c_1 = \frac{2 + \sqrt{21}}{2}, \quad c_2 = \frac{2 - \sqrt{21}}{2}$$

$$f(x) = -x^2 + 3x + 4 = -(x^2 - 3x - 4) = -[x^2 - 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} - 4] = -[(x - \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4} - \frac{16}{4}]$$

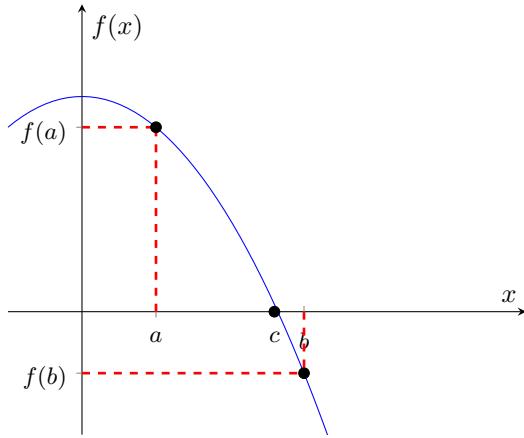
$$= -(x - \frac{3}{2})^2 + \frac{25}{4}$$



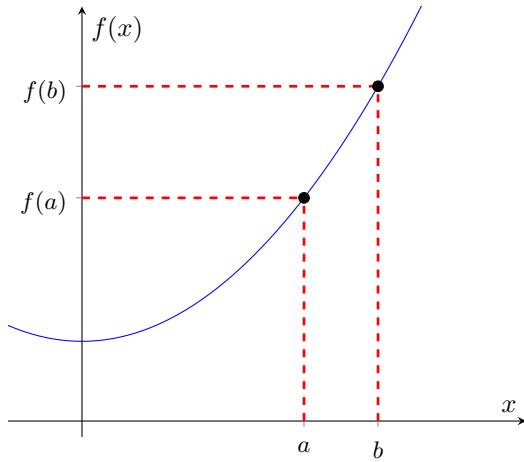
Pero como $f : [2, 5]$, se desecha c_2 pues no vive en el dominio, contrario a c_1 .

Corolario: Teorema de Bolzano

Sea f continua en $[a, b]$ y sean $f(a)$ y $f(b)$ de signos opuestos. Entonces existe $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = 0$.



Un ejemplo donde el Teorema de Bolzano no puede ser aplicado sería el siguiente:



Donde la gráfica no cruza el eje x .

Exempli gratia:

- 1) Estudie las raíces del polinomio $p(x) = x^3 - x^2 + 1$.

Por medio del Teorema de Descartes:

$$p(x) \Rightarrow 2 \text{ o } 0 \text{ raíces positivas} \Rightarrow 0 \text{ raíces complejas.}$$

$$p(-x) \Rightarrow 1 \text{ raíz negativa} \Rightarrow 2 \text{ raíces complejas.}$$

$$p(-1) = -1$$

$$p(1) = 1$$

$$p(0) = 1$$

La raíz negativa, por el teorema de Bolzano, está en $] -1, 0[$.

Por medio del método de bisección:

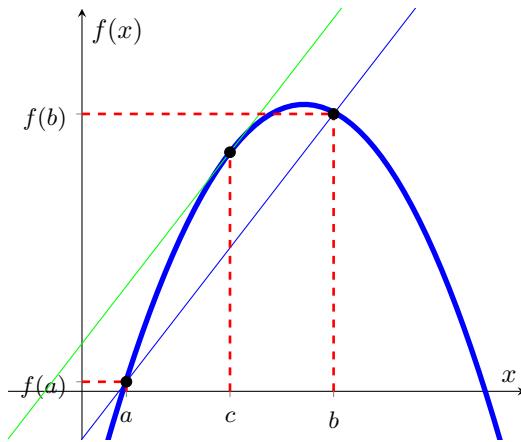
$$p\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = -\frac{1}{8} - \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{8} > 0$$

Teorema del valor medio (TVM)

Sea f continua en $[a, b]$ y derivable en $]a, b[$. Entonces, existe un punto $c \in]a, b[$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Donde $f'(c)$ es la pendiente de la recta tangente, y $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ es la pendiente del segmento de recta que une $(a, f(a))$ con $(b, f(b))$.



Exempli gratia: Determine los valores $a, b, c \in \mathbb{R}$ tal que f satisfaga la hipótesis del TVM en $[0, 3]$.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ si } x = 0 \\ ax + b & , \text{ si } 0 < x \leq 1 \\ x^2 + 4x + c & , \text{ si } 1 < x \leq 3 \end{cases}$$

Primero, estudiemos la continuidad de f en $[0, 3]$. Como $f(x) = ax + b$ en $]0, 1[$, f es continua por ser un polinomio.

Como $f(x) = x^2 + 4x + c$ en $]1, 3[$, f es continua por ser un polinomio.

Notemos que f es continua por izq. en $x = 3$.

Vemos las condiciones para que f sea continua en $x = 0$ y continua en $x = 1$.

$$f(0) = 1, f(1) = a + b$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} (ax + b) = b; f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \Leftrightarrow b = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1, x < 1} (ax + b) = a + b$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1, x > 1} (x^2 + 4x + c) = 5 + c$$

De $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, se tiene que $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$.

$$a + b = a + b = 5 + c \Leftrightarrow a + b = 5 + c$$

Pero $b = 1 \Rightarrow a + 1 = 5 + c \Rightarrow a = c + 4$.

Ahora, estudiemos la derivabilidad de f en $]0, 5[$, ¿qué pasa en $x = 1$?

Calculemos $f'(1)$ por medio de sus derivadas laterales:

$$f'(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1, x < 1} \frac{(ax + b) - (a + b)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1, x < 1} \frac{a(x - 1)}{x - 1} = a$$

$$f'(1^+) \underset{x \rightarrow 1^+}{\lim} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1, x > 1} \frac{(x^2 + 4x + c) - (a + b)}{x - 1}$$

$$\text{Considerando } b = 1 \Rightarrow \underset{x \rightarrow 1, x > 1}{\lim} \frac{x^2 + 4x + c - a - 1}{x - 1}$$

$$\text{Considerando } c - a = -4 \Rightarrow \underset{x \rightarrow 1, x > 1}{\lim} \frac{x^2 + 4x + (-4) - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1, x > 1} \frac{x^2 + 4x - 5}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1, x > 1} \frac{(x + 5)(x - 1)}{x - 1} = 6$$