Límites

Velázquez Ramírez Carlos Raúl

15-10-2025

Límites y casos

1) $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$ si los limites existen.

2) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c \lim\limits_{x\to a} f(x)$ si los limites existen.

3) $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ si los limites existen y $g(x) \neq 0$.

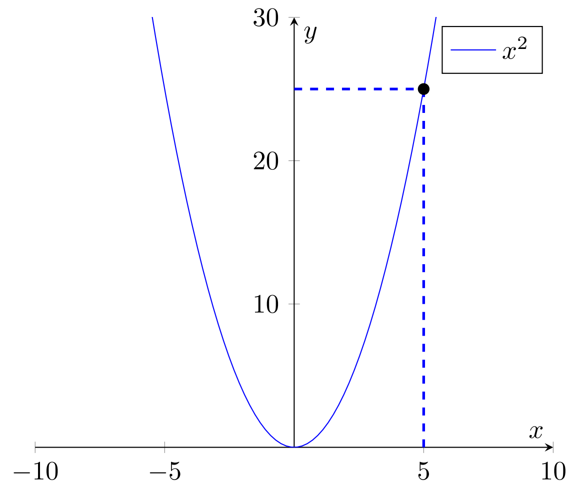
4) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^n = [\lim\limits_{x\to a} f(x)]^n$ si los limites existen, con $n \in \mathbb{R}$ y $f(x) \neq 0$ y $n \neq 0$.

Exampli gratia: Calcula los siguientes límites.

1) $\lim\limits_{x\to 5} x^2$

Tendríamos que $\lim\limits_{x\to 5} x^2 = 5^2 = 25$.

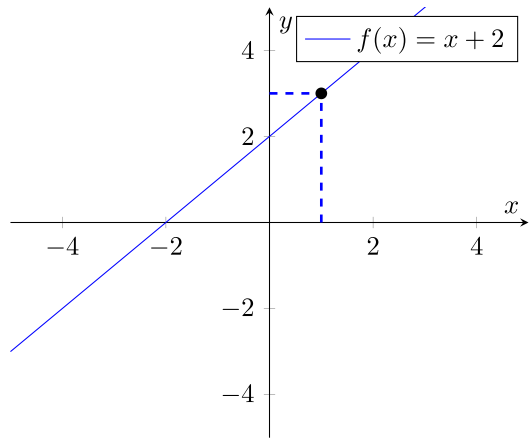
Gráficamente:

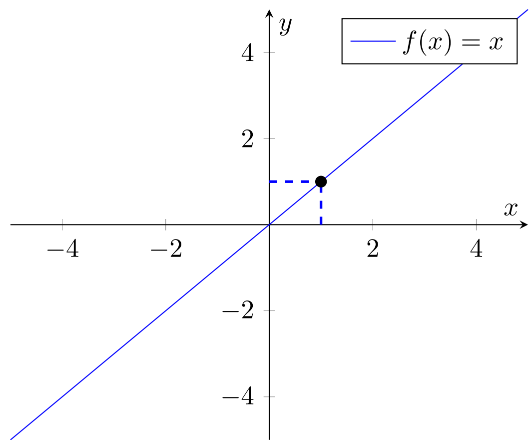


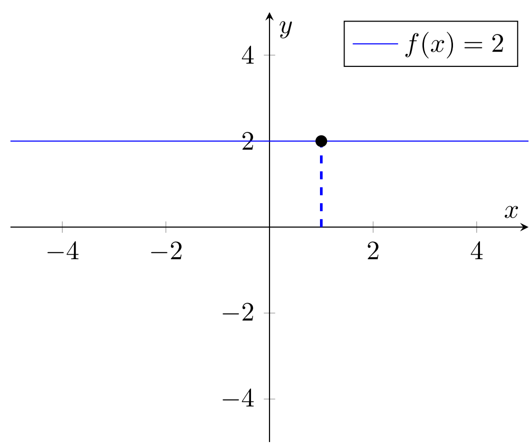
2) $\lim\limits_{x\to 1}(x+2)$

Tendríamos que $\lim\limits_{x\to 1}(x+2) = \lim\limits_{x\to 1} x + \lim\limits_{x\to 1} 2 = 1 + 2 = 3$.

Gráficamente:



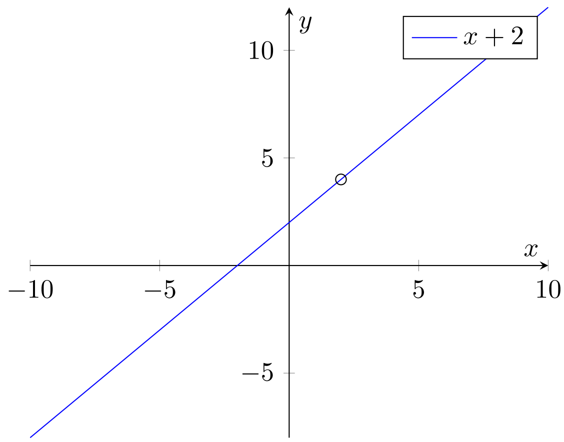




Básicamente, la suma de los valores de las ordenadas en las funciones $f(x) = x$ y $f(x) = 2$ cuando $x \to 1$ es igual a una nueva coordenada que corresponde a la función $f(x) = x + 2$, cuya ordenada es la solución al límite.

3) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{2^2-4}{2-2} = \frac{0}{0}$, indeterminación.

Quitemos la indeterminación: $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}(x+2) = 4$



$\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = x + 2$, donde $x \neq 2$ y $Dom_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

Para calcular la ordenada del "hoyo"(discontinuidad removible) en $x = 2$, calculamos $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4$.

¿Cómo podemos redefinir la función para que sea continua en $x = 2$?

Def. Continuidad en un punto: f es continua en un punto $a \in Dom_f$ si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(x)$.

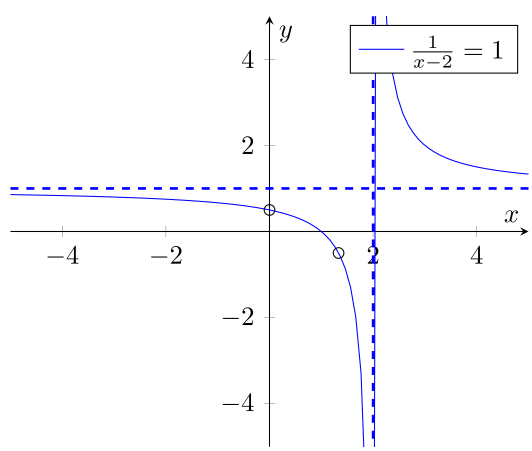
Volviendo a nuestro caso anterior:

$$\text{Sea } g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ 4 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

Esta es una nueva función que remueve la discontinuidad en $x = 2$ para $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$, tratandose de una función por partes.

Exampli gratia: Sea $f(x) = \frac{3x^3-7x^2+4x}{3x^3-10x^2+8x}$, estudie su continuidad.

$$f(x) = \frac{x(3x^2 - 7x + 4)}{[x(3x^2 - 10x + 8)} = \frac{x(3x-4)(x-1)}{x(3x-4)(x-2)}, Dom_f = \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{4}{3}, 2\}$$



Evaluado en $x = 0$,

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x(3x - 40(x - 1)}{x(3x - 4)(x - 2)}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - 1}{x - 2} = \frac{1}{2}, \text{ discontinuidad evitable en } (0, \frac{1}{2})$$

Evaluado en $x = \frac{4}{3}$,

$$\lim_{x \to \frac{4}{3}} f(x) = \lim_{x \to \frac{4}{3}} \frac{x(3x - 4)(x - 1)}{x(3x - 4)(x - 2)}$$

$$\lim_{x \to \frac{4}{3}} \frac{x - 1}{x - 2} = -\frac{1}{2}, \text{ discontinuidad evitable en } (\frac{4}{3}, -\frac{1}{2})$$

Evaluado en $x = 2$,

$$\lim_{x \to 2} \frac{x - 1}{x - 2} = \frac{1}{0} = \infty, \text{ está indefinido.}$$

$\frac{1}{0} = \infty$ cuando se habla de limites, no en todos los contextos es verdad.

$\frac{1}{0} = \infty \to$ asíntota o discontinuidad infinita

Las discontinuidades infinitas no son evitables.

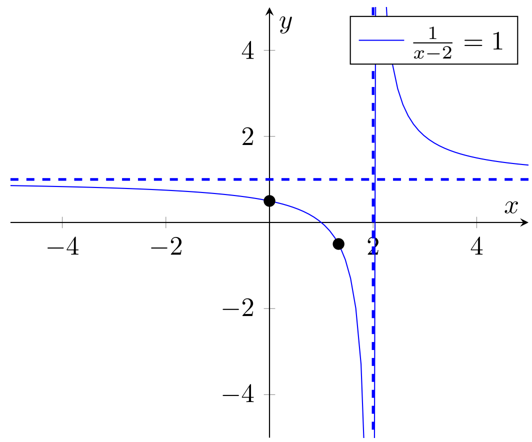
$$f(x) = \frac{x - 1}{x - 2}, \text{ donde } x \neq 0, x \neq \frac{4}{3};$$

$$\frac{x - 1}{x - 2} = \frac{1}{x - 2} + 1$$

Redefinamos la función para que sea continua en $x = 0$ y $x = \frac{4}{3}$,

$$\text{Sea } g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0, x \neq \frac{4}{3} \\ \frac{x-1}{x-2} & \text{si } x = 0 \vee x = 4/3 \end{cases}$$

$$Dom_g = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$



Nota: Se refiere explícitamente a la continuidad en su propio dominio en una función, y la discontinuidad general considera a aquellos valores fuera del dominio. En este caso, la función *es continua en su dominio*, mientras que *es discontinua en* $x = 2$.