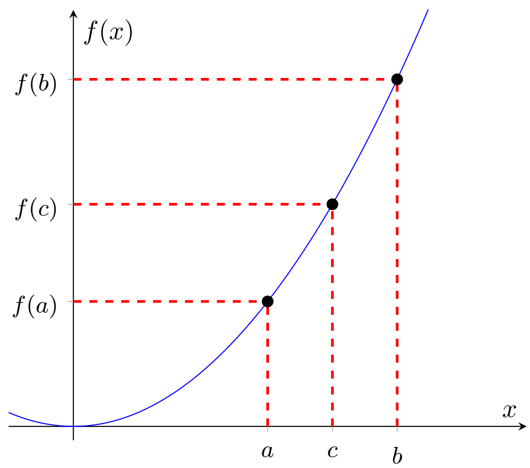
TVI, TVM y Teorema de Bolzano

Velázquez Ramírez Carlos Raúl

21-11-2025

Teorema del valor intermedio (TVI)

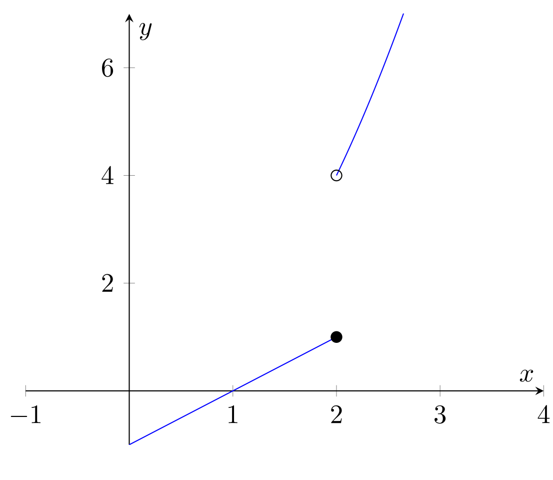
Sea f una función continua en $[a,b]$. Si $f(a) \neq f(b)$, entonces existe $c \in]a,b[$ tal que $f(c)$ está entre $f(a)$ y $f(b)$.



Exampli gratia:

1) Considere la función:

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 & \text{si } 2 < x \leq 3 \end{cases}$$



$$f : [0,3] \to \mathbb{R}$$

$$f(0) = -1$$

$$f(3) = 9$$

$$f(2) = 1, \; f \text{ no es continua en } x = 2,$$

$$2 \in]0, 3[$$

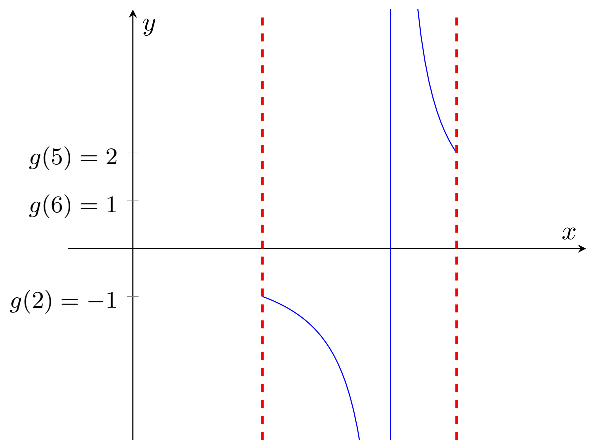
$$f(0) \le f(2) \le f(3) \Rightarrow -1 <= 1 <= 9$$

2) Sea $g(x) = \frac{2}{x-4}$,

Nótese que g es discontinua en $\underline{x = 4}$, el cual pertenece al intervalo $\underline{[2, 5]}$.

Además, $\underline{g(2) = -1}$ y $\underline{g(5) = 2}$.

Si $\underline{k \in]-1, 2[}$, no hay valor alguno de c en $\underline{]2, 5[}$, tal que $g(c) = k$.



En particular, si $k = 1$, entonces $g(6) = 1$, pero $6 \notin [2, 5]$.

$$\textit{Error}: f \text{ es continua en } [2, 5] \; (\textit{falso}) \Rightarrow 6 \notin]2, 5[$$

3) Sea $f(x) = 4 + 3x - x^2$, $f : [2, 5] \to \mathbb{R}$.

Verifique que el TVI se cumple para $f(c) = 1$ trazando la gráfica de f y la recta de $y = 1$.

$$f(2) = 6$$

$$f(5) = -6$$

Como $f(5) \le f(c) \le f(2)$, por el TVI, $\exists c \in]2, 5[$ tal que $f(c) = 1$.

$$4 + 3x - x^2 = 1$$

$$x^2 - 3x - 4 = -1$$

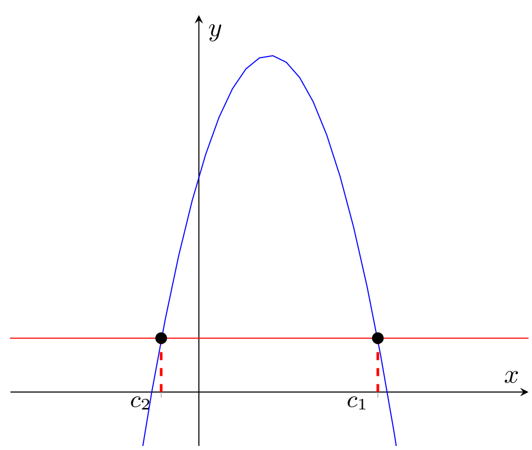
$$x^2 - 3x - 3 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{2}$$

$$c_1 = \frac{2 + \sqrt{21}}{2},\ c_2 = \frac{2 - \sqrt{21}}{2}$$

$$f(x) = -x^2 + 3x + 4 = -(x^2 - 3x - 4) = -[x^2 - 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} - 4] = -[(x - \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4} - \frac{16}{4}]$$

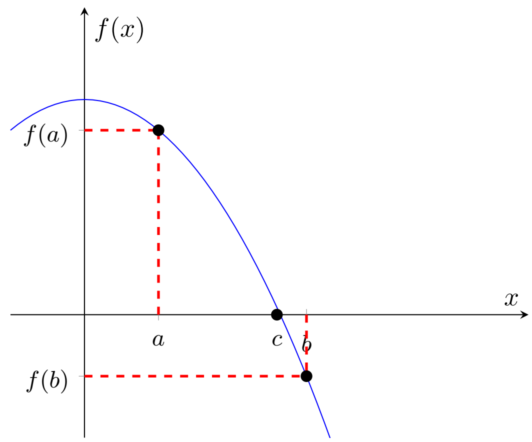
$$= -(x - \frac{3}{2})^2 + \frac{25}{4}$$



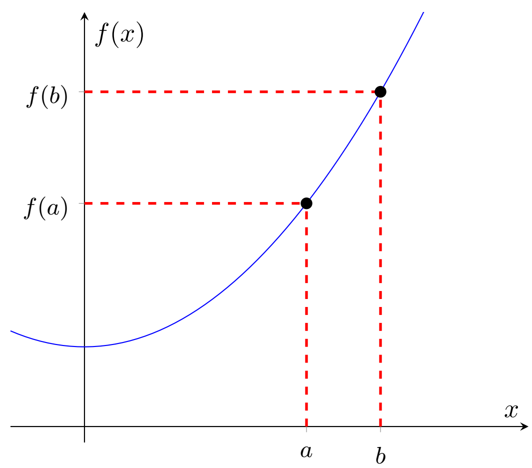
Pero como $f : [2, 5]$, se deshecha c_2 pues no vive en el dominio, contrario a c_1.

Corolario: Teorema de Bolzano

Sea f continua en $[a, b]$ y sean $f(a)$ y $f(b)$ de signos opuestos. Entonces existe $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = 0$.



Un ejemplo donde el Teorema de Bolzano no puede ser aplicado sería el siguiente:



Donde la gráfica no cruza el eje x.

Exampli gratia:

1) Estudie las raíces del polinomio $p(x) = x^3 - x^2 + 1$.

Por medio del Teorema de Descartes:

$$p(x) \Rightarrow 2 \text{ o } 0 \text{ raíces positivas} \Rightarrow 0 \text{ raíces complejas.}$$

$$p(-x) \Rightarrow 1 \text{ raíz negativa} \Rightarrow 2 \text{ raíces complejas.}$$

$$p(-1) = -1$$

$$p(1) = 1$$

$$p(0) = 1$$

La raíz negativa, por el teorema de Bolzano, está en $]-1,0[$.

Por medio del método de bisección:

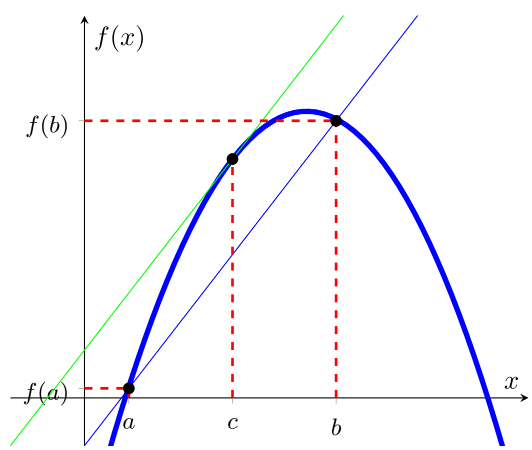
$$p(-\frac{1}{2}) = (-\frac{1}{2})^3 - (-\frac{1}{2})^2 + 1 = -\frac{1}{8} - \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{8} > 0$$

Teorema del valor medio (TVM)

Sea f continua en $[a,b]$ y derivable en $]a,b[$. Entonces, existe un punto $c \in]a,b[$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Donde $f'(c)$ es la pendiente de la recta tangente, y $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ es la pendiente del segmento de recta que une $(a, f(a))$ con $(b, f(b))$.



Exampli gratia: Determine los valores $a, b, c \in \mathbb{R}$ tal que f satisfaga la hipótesis del TVM en $[0,3]$.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{, si } x = 0 \\ ax + b & \text{, si } 0 < x \leq 1 \\ x^2 + 4x + c & \text{, si } 1 < x \leq 3 \end{cases}$$

Primero, estudiemos la continuidad de f en $[0,3]$. Como $f(x) = ax + b$ en $]0,1[$, f es continua por se un polinomio.

Como $f(x) = x^2 + 4x + c$ en $]1,3[$, f es continua por ser un polinomio.

Notemos que f es continua por izq. en $x = 3$.

Vemos las condiciones para que f sea continua en $x = 0$ y continua en $x = 1$.

$$f(0) = 1,\ f(1) = a + b$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0,\, x>0} (ax + b) = b;\ f(0) = \lim_{x \to 0^+} f(x) \Leftrightarrow b = 1$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1,\, x<1} (ax + b) = a + b$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1,\, x>1} (x^2 + 4x + c) = 5 + c$$

De $f(1) = \lim_{x \to 1} f(x)$, se tiene que $f(1) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x)$.

$$a + b = a + b = 5 + c \Leftrightarrow a + b = 5 + c$$

Pero $b = 1 \Rightarrow a + 1 = 5 + c \Rightarrow a = c + 4$.

Ahora, estudiemos la derivabilidad de f en $]0, 5[$, ¿qué pasa en $x = 1$?

Calculemos $f'(1)$ por medio de sus derivadas laterales:

$$f'(1^-) = \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1,\, x<1} \frac{(ax + b) - (a + b)}{x - 1} = \lim_{x \to 1,\, x<1} \frac{a(x - 1)}{x - 1} = a$$

$$f'(1^+) \lim_{xto1^+} \frac{f(x) = f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1,\, x>1} \frac{(x^2 + 4x + c) - (a + b)}{x - 1}$$

$$\text{Considerando } b = 1 \ \Rightarrow \lim_{x \to 1,\, x>1} \frac{x^2 + 4x + c - a - 1}{x - 1}$$

$$\text{Considerando } c - a = -4 \ \Rightarrow \lim_{xto1,\, x>1} \frac{x^2 + 4x + (-4) - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1,\, x>1} \frac{x^2 + 4x - 5}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1,\, x>1} \frac{(x + 5)(x - 1)}{x - 1} = 6$$