Funciones y límites

Velázquez Ramírez Carlos Raúl

13-10-2025

Composición de funciones

Sean $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$ y sea $f : A \to B$ y $g : B \to C$ funciones. Se define la función copuesta f con g, denotada por $f \circ g : A \to C$ como $(g \circ f)(x) = g(f(x))\, \forall x \in A$.

Exampli gratia: Sean $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2$,

«q compuesta con f» $(f \circ g)(x)$

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= (f(x^2)) \\ &= \sqrt{x} \\ &= |x|, Dom_{f \circ g} = \mathbb{R}\end{aligned}$$

«f compuesta con q» $(g \circ f)(x)$

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(\sqrt{x}) \\ &= (\sqrt{x})^2 \\ &= x, Dom_{g \circ f} = \mathbb{R}\end{aligned}$$

Observaciones:

I. $(g \circ f)(x) \neq (f \circ g)(x)$

II. $Dom_{g \circ f}$ está formado por todos los $x \in Dom_f$ tal que $f(x) \in Dom_g$, es decir

$$Dom g \circ f = \{x \in Dom_f \mid f(x) \in Dom_g\}$$

Exampli gratia: Sean $f(x) = \sqrt{x}$, $Dom_f = [0, \infty[$ y $g(x) = x^2$ $Dom_g = \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}&Dom_{f \circ g} = \{x \in Dom_g | g(x) \in Dom_f\} \\ &Dom_{f \circ g} = \mathbb{R} && \textit{extendido} \\ &Dom_{f \circ g} = \mathbb{R} && \textit{restringido}\end{aligned}$$

Función inversa

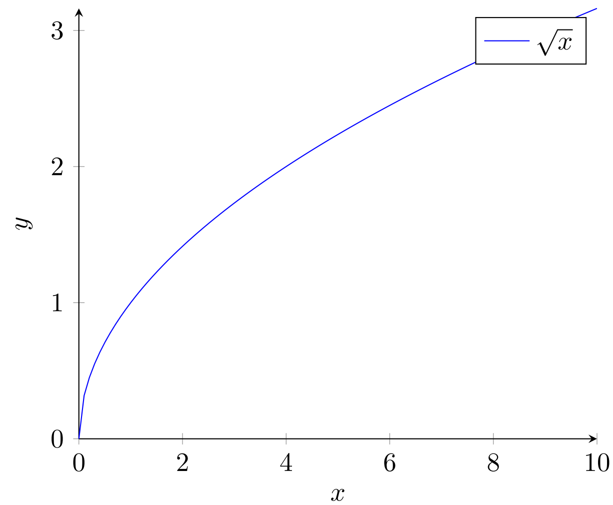
Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R}$ y $g : B \subseteq \mathbb{R} \to A \subseteq \mathbb{R}$ tal que $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) \forall x \in A \cap B$, entonces $f \times g$ son funciones inversas una de la otra.

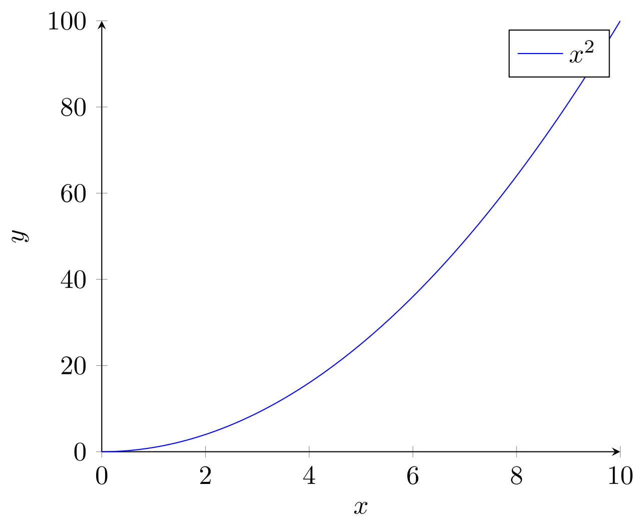
Consecuentemente, f y g son biyectivas y representamos a g como f^{-1}. Ademas

$$(f \circ f^{-1})(x) = x$$

Exampli gratia: Muestre que $y = x^2$ y $y = \sqrt{x}$ son inversas una de la otra. Indique dominios, contradominios e imágenes correspondientes.

Solución: Sean $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^2$. Por un lado, $(f \circ g)(x) = |x|$, por otro, $(g \circ f)(x) = x$.



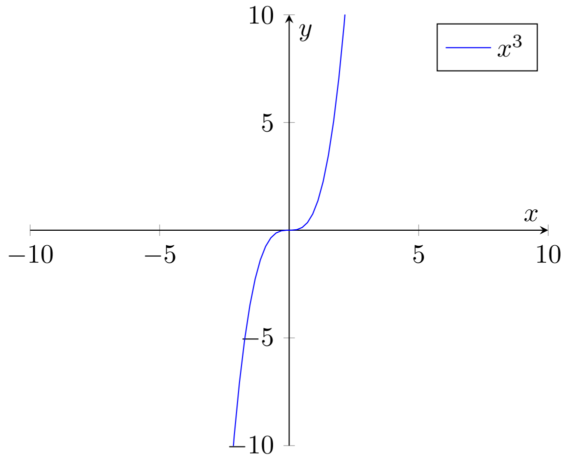


Entonces, $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = \sqrt{x^2} = x$ (se puede cancelar la raíz y el cuadrado, pues estamos trabajando únicamente en $\mathbb{R}^+$).

Como f y g son biyectivas de $[0, \infty[\to [0, \infty[$ y $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$, por lo tanto f y g son inversas una de la otra.

$$f(x) = \sqrt{x}, \qquad f^{-1}(x) = x^2$$
$$g(x) = x^2, \qquad g^{-1} = \sqrt{x}$$

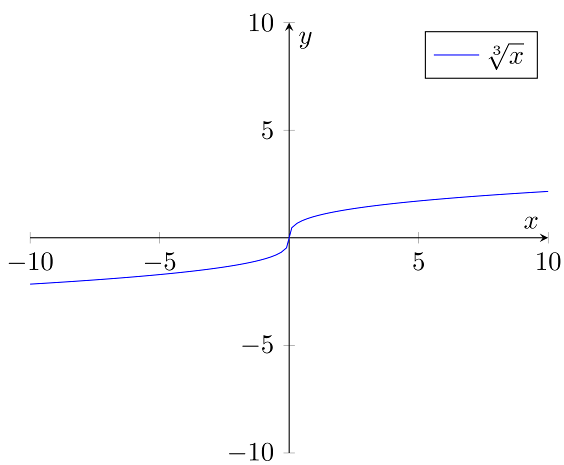
Exampli gratia: Calcule la inversa (de existir) de $f(x) = x^3$



$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, Img_f = \mathbb{R}$, f es biyectiva.

$$\begin{aligned} y &= x^3 \\ x^3 &= y \\ x &= y^{1/3} \\ x &= \sqrt[3]{y} \to y = \sqrt[3]{x} \end{aligned}$$

Sea $g(x) = \sqrt[3]{x}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $Img_g = \mathbb{R}$, g es una biyección.



$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(\sqrt[3]{x}) = (\sqrt[3]{x})^3 = x \\ (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(x^3) = \sqrt[3]{x^3} = x \end{aligned}$$

Como f y g son biyectivas de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x \Rightarrow f$ y g son inversas.

Comprobación: Trazar en un plano $f(x)$, $f^{-1}(x)$ y $y = x$. Un lado de la recta se refleja en la otra.