Límites infinitos

Velázquez Ramírez Carlos Raúl

24-10-2025

Exampli gratia:

1)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+5x-1}{3x^2+6x+9} = \frac{\infty}{\infty}$$

Dividir entre la x de mayor potencia:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{5x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2}+\frac{6x}{x^2}+\frac{9}{x^2}} = \frac{2}{3}, \text{ puesto que dividir } \frac{\infty}{\infty} \text{ es igual a } 0$$

2)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

3)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+4}{x^2+8x-1} = \frac{\infty}{\infty}, \text{ indeterminación}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{x^2}+\frac{4}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{8x}{x^2}-\frac{1}{x^2}} = \frac{0}{1} = 0$$

4)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+8x+2}{x-4} = \frac{\infty}{\infty}, \text{ indeterminación}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^3}{x^3}+\frac{8x}{x^3}+\frac{2}{x^3}}{\frac{x}{x^3}-\frac{4}{x^3}} = \frac{1}{0} = \infty, \text{ otra indeterminación}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+8x+2}{x-4} = \lim_{x\to infty} x^2+4x+24+\frac{98}{x-4} = \infty, \text{ irresoluble}$$

Resumen: $\lim_{x\to\infty} \frac{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m}$ puede tener:

$$\text{Casos:} \begin{cases} \frac{a_n}{b_n}, & n=m \\ \infty, & n>m \\ 0, & n<m \end{cases}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x^6+x^2+x-1}{8x^6+3x-2} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

5)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^3+1}}{x+4} = \infty, \text{ indeterminación}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{x^3+1}}{\sqrt{x^3}}}{\frac{x+4}{\sqrt{x^3}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{x^3}{x^3}+\frac{1}{x^3}}}{\frac{x}{x^{3/2}}+\frac{4}{x^{3/2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{4}{\sqrt{x^3}}} = \frac{\sqrt{1}}{0} = \infty, \text{ nuevamente indeterminación}$$

6)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x-3}{\sqrt{9x^2+7}} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3x}{x}-\frac{3}{x}}{\frac{\sqrt{9x^2+7}}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3-\frac{3}{x}}{\frac{\sqrt{9x^2+7}}{\sqrt{x^2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3-\frac{3}{x}}{\sqrt{\frac{9x^2+7}{x^2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3-\frac{3}{x}}{\sqrt{9+\frac{7}{x^2}}} = \frac{3}{\sqrt{9}} = 1$$

7)

$$\lim_{x\to\infty} (\sqrt{2x-1}-\sqrt{x+8}) = \infty - \infty$$

Multiplicar por el conjugado:

$$\lim_{x\to\infty} (\sqrt{2x-1}-\sqrt{x+8}) \cdot \frac{\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+8}}{\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+8}} = \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{2x-1})^2-(\sqrt{x+8})^2}{\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+8}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x-9}{\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+8}} = \frac{\infty}{\infty}, \text{ indeterminación}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{x}-\frac{9}{x}}{\frac{\sqrt{2x-1}}{x}+\frac{\sqrt{x+8}}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{9}{x}}{\frac{\sqrt{2x-1}}{\sqrt{x^2}}+\frac{\sqrt{x+8}}{\sqrt{x^2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{9}{x}}{\sqrt{\frac{2x-1}{x^2}}+\sqrt{\frac{x+8}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{9}{x}}{\sqrt{\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{8}{x^2}}} = \frac{1}{0}$$

Paridad

Def. Una función f se dice que es par si $f(-x) = f(x) \forall x \in Dom_f$.

Def. Una función f se dice que es impar si $f(-x) = -f(x) \forall x \in Dom_f$.

Exampli gratia:

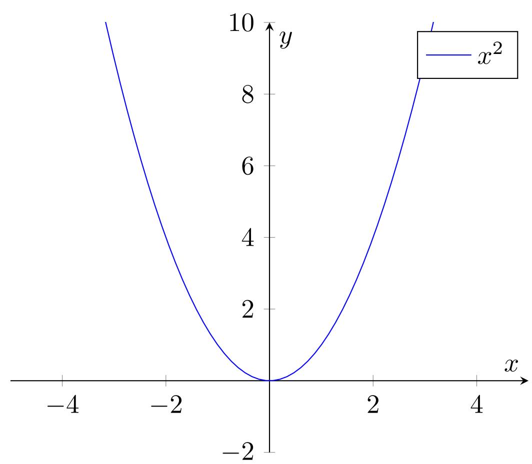
1) $f(x) = x^2$.

f es par. En efecto, sea $x \in Dom_f = \mathbb{R}$.

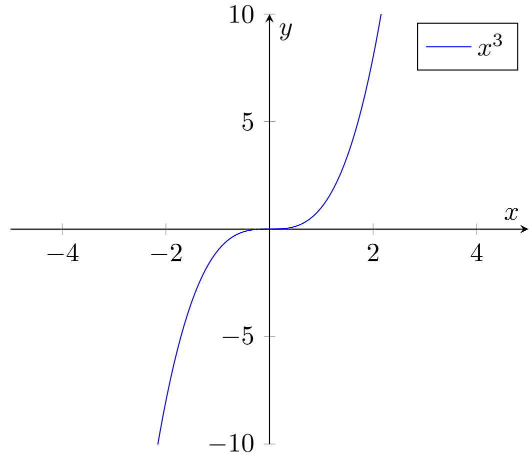
$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

$$f(-1) = (-1)^2 = 1$$

$$f(1) = (1)^2 = 1$$



2) $f(x) = x^3$.



f es impar. En efecto, sea $x \in Dom_f = \mathbb{R}$

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$$

Hay una simetría respecto al eje.

Funciones pares: Han de tener simetría con el eje Y.

$$f(x) = x^4 \; f(x) = x^2 - 1 \;\; f(x) = \cos(x) \; f(x) = |x|$$

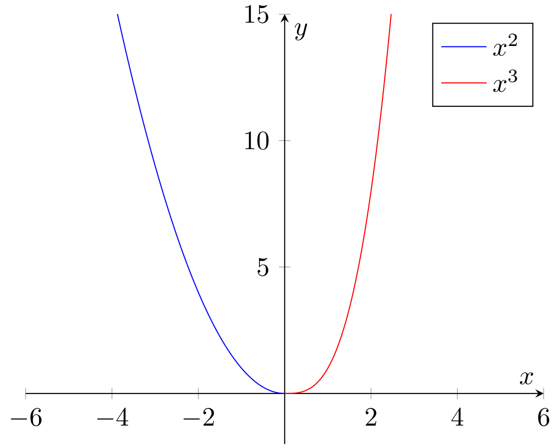
Funciones impares: Han de pasar en el origen para ser impares.

$$f(x) = \sin(x) \;\; f(x) = mx$$

¿Es $f(x)$ par, impar o ninguna?

$$\text{Sea } f(x) = \begin{cases} x^2 & , \; x \leq 0 \\ x^3 & , \; x > 0 \end{cases}$$

$$Dom_f = \mathbb{R}$$



$$f(-2) = 4, \ f \text{ no es par}$$

$$f(2) = 8, \ f \text{ no es impar}$$

¿Es $\tan x$ es par, impar o ninguna?

Como $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ y sabemos que $\sin x$ es impar y $\cos x$ es par, entonces, sea $x \in Dom_f$ con $f(x) = \tan x$.

$$Dom_f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{(2n+1)\pi}{2} \,|\, n \in \mathbb{Z}\}$$

$$f(-x) = \tan -x = \frac{\sin -x}{\cos -x} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x = -f(x)$$

$$\therefore \tan x \text{ es impar}$$