

Segundo Parcial

Velázquez Ramírez Carlos Raúl

10-11-2025

1. Calcule:

a) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{1 - \sqrt{x+3}} = \frac{0}{0}$, indeterminación.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{1 - \sqrt{x+3}} \cdot \frac{1 + \sqrt{x+3}}{1 + \sqrt{x+3}} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x-2)(x+2)(1 + \sqrt{x+3})}{-(x+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} (2-x)(1 + \sqrt{x+3}) = 4(2) = 8 \end{aligned}$$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin(3x)}{x + \sin(5x)} = \frac{0}{0}$, indeterminación.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin(3x)}{x + \sin(5x)} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{3 \sin(3x)}{3x}}{1 + \frac{5 \sin(5x)}{5x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} 1 - 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{3x}}{\lim_{x \rightarrow 0} 1 + 5 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{5x}} = \frac{1 - 3 \cdot 1}{1 + 5 \cdot 1} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x) - \sin(x)}{x^3} = \frac{0}{0}$, indeterminación.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin(x)}{\cos(x)} - \frac{\sin(x)}{1}}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin(x) - \sin(x) \cos(x)}{\cos(x)}}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)(1 - \cos(x))}{x^3 \cos(x)} \cdot \frac{1 + \cos(x)}{1 + \cos(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)(1 - \cos^2(x))}{x^3 \cos(x)(1 + \cos(x))} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3(x)}{x^3} \cdot \frac{1}{\cos(x) + \cos^2(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(x) + \cos^2(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{1 + 1^2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 1} - x}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 + 2}} = \frac{\infty - \infty}{\infty + \infty}$, indeterminación.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 1} - x}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 + 2}} \cdot \frac{\sqrt{2x^2 + 1} + x}{\sqrt{2x^2 + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{(\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 + 2})(\sqrt{2x^2 + 4} + x)} = \frac{\infty}{\infty}$$

, indeterminación

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}(\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 + 2}) \frac{1}{x}(\sqrt{2x^2 + 1} + x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 + \frac{2}{x^2}})(\sqrt{2 + \frac{1}{x^2}} + 1)}$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{1} + \sqrt{1})(\sqrt{2} + 1)} = \frac{1}{2(\sqrt{2} + 1)} \cdot \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} - 1} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}$$

Un método más simple sería:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 1} - x}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 + 2}} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2 + \frac{1}{x^2}} - 1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{1 + \frac{2}{x^2}}} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}$$

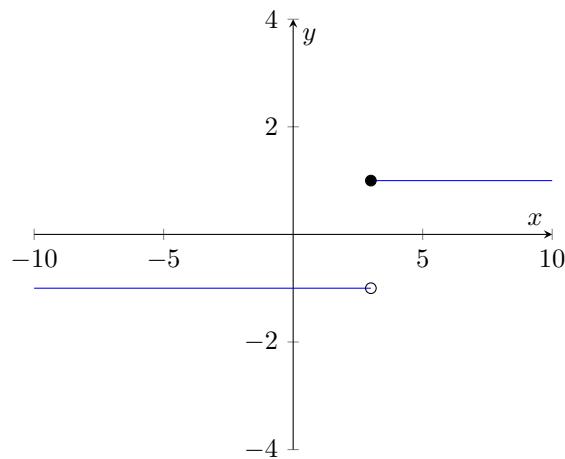
2. Grafique y estudie la continuidad de la función en \mathbb{R} :

$$f(x) \begin{cases} \frac{|x-3|}{x-3}, & \text{si } x \neq 3 \\ 1, & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

$$|x-3| \begin{cases} x-3, & \text{si } x \geq 3 \\ -(x-3), & \text{si } x < 3 \end{cases}$$

$$f(x) \begin{cases} \frac{-(x-3)}{x-3}, & \text{si } x < 3 \\ 1, & \text{si } x = 3 \\ \frac{x-3}{x-3}, & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

$$f(x) \begin{cases} -1, & \text{si } x < 3 \\ 1, & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$



f es continua en $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ por ser polinomio.

Para $x = 3$, estudiamos límites laterales.

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (-1) = -1, \quad x < 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (1) = 1, \quad x > 3$$

Como $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ no existe y, por lo tanto, f no es continua en $x = 3$.

3. Sea $f(x) = x^3 + 1$. Pruebe o refute:

a) la función f es biyectiva.

b) la función f es impar.

a)

Definimos $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Como $Im_f = \mathbb{R}$, f es suprayectiva.

Para la inyectividad, sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_1) = f(x_2)$.

$$\Leftrightarrow x_1^3 + 1 = x_2^3 + 1 \Leftrightarrow x_1^3 = x_2^3 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x_1^3} = \sqrt[3]{x_2^3} \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Así, f es inyectiva.

$\therefore f$ es biyectiva.

b)

f no es impar.

Supóngase lo contrario, entonces $f(-x) = -f(x)$.

Calculamos:

$$f(-x) = (-x^3) + 1 = -x^3 + 1$$

$$-f(x) = -(x^3 + 1) = -x^3 - 1$$

$$f(-x) \neq f(x)$$

4. Sea $f(x) = x^3 + 1$:

a) Calcule su inversa $f^{-1}(x)$.

b) Compruebe aritméticamente y gráficamente $f(x)$ y $f^{-1}(x)$.

a) Sea $y = x^3 + 1$.

$$x^3 + 1 = y$$

$$x^3 = y - 1$$

$$x = \sqrt[3]{y - 1}$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 1}$$

b)

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f(\sqrt[3]{x - 1}) = (\sqrt[3]{x - 1}) + 1 = x - 1 + 1 = x$$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(x^3 + 1) = \sqrt[3]{x^3 + 1 - 1} = \sqrt[3]{x^3} = x$$

$$(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x$$

