

# Segundo Parcial

Velázquez Ramírez Carlos Raúl

10-11-2025

# 1. Calcule:

a)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-4}{1-\sqrt{x+3}} = \frac{0}{0}$ , indeterminación.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-4}{1-\sqrt{x+3}} \cdot \frac{1+\sqrt{x+3}}{1+\sqrt{x+3}} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x-2)(x+2)(1+\sqrt{x+3})}{-(x+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} (2-x)(1+\sqrt{x+3}) = 4(2) = 8 \end{aligned}$$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-\sin(3x)}{x+\sin(5x)} = \frac{0}{0}$ , indeterminación.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-\sin(3x)}{x+\sin(5x)} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\frac{3\sin(3x)}{3x}}{1+\frac{5\sin(5x)}{5x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} 1-3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{3x}}{\lim_{x \rightarrow 0} 1+5 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{5x}} = \frac{1-3 \cdot 1}{1+5 \cdot 1} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)-\sin(x)}{x^3} = \frac{0}{0}$ , indeterminación.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin(x)}{\cos(x)} - \frac{\sin(x)}{1}}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin(x)-\sin(x)\cos(x)}{\cos(x)}}{\frac{x^3}{1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)(1-\cos(x))}{x^3 \cos(x)} \cdot \frac{1+\cos(x)}{1+\cos(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)(1-\cos^2(x))}{x^3 \cos(x)(1+\cos(x))} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3(x)}{x^3} \cdot \frac{1}{\cos(x)+\cos^2(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(x)+\cos^2(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{1+1^2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

d)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+2}} = \frac{\infty-\infty}{\infty}$ , indeterminación.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+2}} \cdot \frac{\sqrt{2x^2+1}+x}{\sqrt{2x^2+1}+x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1}{(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+2})(\sqrt{2x^2+4}+x)} = \frac{\infty}{\infty} \\ &, \text{ indeterminación} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+2})\frac{1}{x}(\sqrt{2x^2+1}+x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{1}{x^2}}{(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{2}{x^2}})(\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}+1)}$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{1} + \sqrt{1})(\sqrt{2} + 1)} = \frac{1}{2(\sqrt{2} + 1)} \cdot \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} - 1} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}$$

Un método más simple sería:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 1} - x}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 + 2}} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2 + \frac{1}{x^2}} - 1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{1 + \frac{2}{x^2}}} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}$$

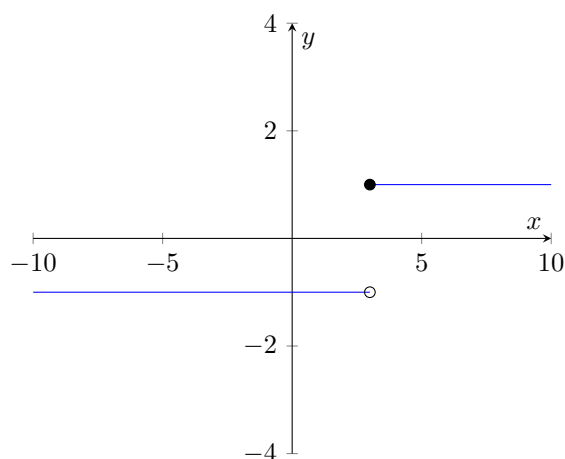
## 2. Grafique y estudie la continuidad de la función en $\mathbb{R}$ :

$$f(x) \begin{cases} \frac{|x-3|}{x-3} & , \text{ si } x \neq 3 \\ 1 & , \text{ si } x = 3 \end{cases}$$

$$|x-3| \begin{cases} x-3 & , \text{ si } x \geq 3 \\ -(x-3) & , \text{ si } x < 3 \end{cases}$$

$$f(x) \begin{cases} \frac{-(x-3)}{x-3} & , \text{ si } x < 3 \\ 1 & , \text{ si } x = 3 \\ \frac{x-3}{x-3} & , \text{ si } x > 3 \end{cases}$$

$$f(x) \begin{cases} -1 & , \text{ si } x < 3 \\ 1 & , \text{ si } x \geq 3 \end{cases}$$



$f$  es continua en  $\mathbb{R} \setminus \{3\}$  por ser polinomio.

Para  $x = 3$ , estudiamos límites laterales.

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (-1) = -1, x < 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (1) = 1, x > 3$$

Como  $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$  no existe y, por lo tanto,  $f$  no es continua en  $x = 3$ .

### 3. Sea $f(x) = x^3 + 1$ . Pruebe o refute:

a) la función  $f$  es biyectiva.

b) la función  $f$  es impar.

a)

Definimos  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Como  $Im_f = \mathbb{R}$ ,  $f$  es suprayectiva.

Para la inyectividad, sean  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  tal que  $f(x_1) = f(x_2)$ .

$$\Leftrightarrow x_1^3 + 1 = x_2^3 + 1 \Leftrightarrow x_1^3 = x_2^3 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x_1^3} = \sqrt[3]{x_2^3} \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Así,  $f$  es inyectiva.

$\therefore f$  es biyectiva.

b)

$f$  no es impar.

Supóngase lo contrario, entonces  $f(-x) = -f(x)$ .

Calculamos:

$$f(-x) = (-x^3) + 1 = -x^3 + 1$$

$$-f(x) = -(x^3 + 1) = -x^3 - 1$$

$$f(-x) \neq -f(x)$$

4. Sea  $f(x) = x^3 + 1$ :

a) Calcule su inversa  $f^{-1}(x)$ .

b) Compruebe aritméticamente y gráficamente  $f(x)$  y  $f^{-1}(x)$ .

a) Sea  $y = x^3 + 1$ .

$$x^3 + 1 = y$$

$$x^3 = y - 1$$

$$x = \sqrt[3]{y - 1}$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 1}$$

b)

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f(\sqrt[3]{x - 1}) = (\sqrt[3]{x - 1})^3 + 1 = x - 1 + 1 = x$$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(x^3 + 1) = \sqrt[3]{x^3 + 1 - 1} = \sqrt[3]{x^3} = x$$

$$(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x$$

