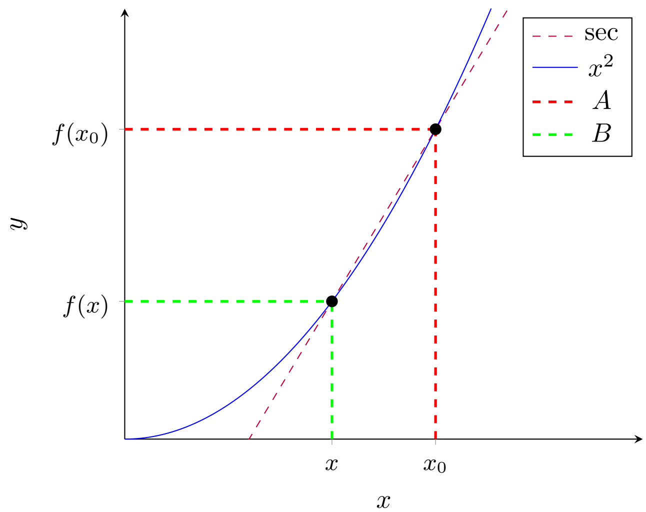
Algunas derivadas

Velázquez Ramírez Carlos Raúl

03-11-2025

Sea $y = f(x)$ y un punto conocido $(x_0, f(x_0))$ y otro punto sobre la curva $B = (x, f(x))$.



La pendiente de la secante que pasa por A y por B en m_{sec} se define como

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Si $B \to A$ entonces $m_{\text{sec}} = m_{\tan}$.

$$m_{\tan} = \lim_{x \to x_0} m_{\text{sec}} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \text{ cociente diferencial}$$

Exampli gratia:

1) Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica $y = x^3$ en el punto de la abscisa $x = 0$.

Sea $f(x) = x^3$ y $x_0 = 0$.

Si $x \neq 0$, calculamos el cociente diferencial,

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^3 - 0}{x - 0} = \frac{x^3}{x} = x^2$$

Entonces,

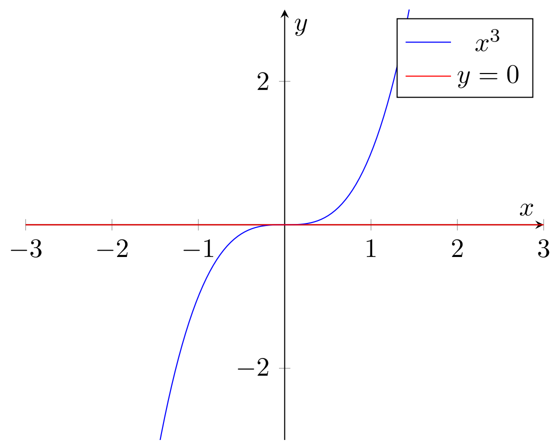
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 0} x^2 = 0$$

Así, $f'(0) = 0$.

Calculemos la ecuación de la recta con $m = f'(0) = 0$ y $(0, 0)$:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y = 0$$



2) Demuestre que $f(x) = \sqrt{x}$ es derivable en $]0, \infty[$ pero no lo es en $x = 0$.

Formulación (no recomendable):

$$y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$y' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Por definición:

$$y = \sqrt{-x^2 - 1} = (-x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$$

$$y' = \frac{1}{2}(-x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{-x^2 - 1}}$$

No hay solución en $\mathbb{R}$

Solución: Sea $x_o \in]0, \infty[$.

Si $x \neq x_0$, entonces,

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_0} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0} \cdot \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}} = \frac{x-x_0}{(x-x_0)(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}$$

Consecuentemente,

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

Como $x_0 > 0$, $f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$ está bien definido.

Pero, si $x_0 = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}-0}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = \infty \therefore f'(x)$ no existe.

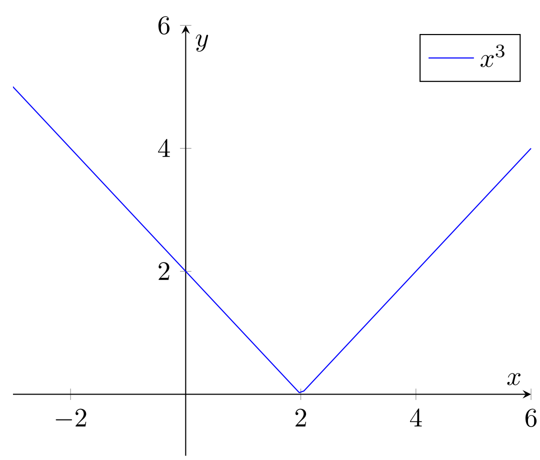
3) Demuestre que $f(x) = |x-2|$ no es derivable en $x_0 = 2$.

$$|x-2| \begin{cases} x-2 & \text{, si } x \geq 2 \\ -(x-2) & \text{, si } x < 2 \end{cases}$$

Debido al punto esquina, el límite no es derivable.

4) Sea $x_0 = 2$ y $x \neq x_0$. Calculemos el coeficiente diferencial.

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{|x-2|-0}{x-2} - \frac{|x-2|}{x-2}$$



Para calcular $\lim\limits_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$, necesitamos estudiar los límites laterales:

Por izq.:

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{-(x-2)-0}{x-2} = -1, \text{ con } x < 2$$

Por der.:

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2) - 0}{x - 2} = 1, \text{ con } x > 2$$

Como los límites laterales son distintos, $\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ no existe.

Por tanto f no es derivable en $x_0 = 2$.

No ha de hacer el siguiente caso, donde:

$$f'(x) \begin{cases} 1 & \text{, si } x \geq 2 \\ -1 & \text{, si } x < 2 \end{cases}$$

5) Determine la derivada de $f(x) = \frac{x+6}{x-4}$ en cualquier punto del dominio.

Sea $x \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$. Si $x \neq x_0$, calculamos el cociente diferencial.

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\frac{x+6}{x-4} - \frac{x_0+6}{x_0-4}}{x - x_0} = \frac{\frac{(x_0-4)(x+6)-(x-4)(x_0+6)}{(x-4)(x_0-4)}}{\frac{x-x_0}{1}}$$

$$= \frac{(x_0-4)(x+6) - (x-4)(x_0+6)}{(x-4)(x_0-4)(x-x_0)} = \frac{x_0 x + 6x_0 - 4x - 24 - x x_0 - 6x + 4x_0 + 24}{(x-4)(x_0-4)(x-x_0)}$$

$$= \frac{10(x_0 - x)}{(x-4)(x_0-4)(x-x_0)} = \frac{-10}{(x-4)(x_0-4)}$$

Entonces,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{-10}{(x-4)(x_0-4)} = \frac{-10}{(x_0-4)^2}$$

6) Sea $\lim\limits_{x \to -3^+} \frac{|x-4|-7}{x+3}$.

$$|x-4| \begin{cases} x - 4 & \text{, si } x \geq 4 \\ -(x-4) & \text{, si } x < 4 \end{cases}$$

Puesto que $-3 < 4$ entonces se toma el caso dos,

$$\lim_{x \to -3^+} \frac{-(x-4) - 7}{x+3} = \lim_{x \to -3^+} \frac{-x-3}{x+3}, \text{ con } x > -3$$

7) Sea $\lim\limits_{x \to \pi} \frac{\tan(x-\pi)}{x-\pi} = \frac{0}{0}$, indeterminación.

Sea $u = x - \pi$, de tal modo que conforme x se acerce a π, u se acerca a 0. Entonces $\frac{\tan(x-\pi)}{x-\pi} = \frac{\tan u}{u}$.

Como $x \to \pi$, entonces $u \to 0$.

Consideremos que,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = \frac{0}{0}, \text{ indeterminación}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{x}{1}} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1 = 1$$

Entonces,

$$\lim_{u \to 0} \frac{\tan u}{u} = \lim_{u \to 0} \frac{\frac{\sin u}{\cos u}}{\frac{u}{1}} = \lim_{u \to 0} \frac{\sin u}{u \cos u} = \lim_{u \to 0} \frac{\sin u}{u} \cdot \lim_{u \to 0} \frac{1}{\cos u} = 1 \cdot 1 = 1$$