Diferenciación de funciones trigonométricas inversas

Velázquez Ramírez Carlos Raúl

19-11-2025

Teorema de la función inversa

Def. Sea $y = f(x)$ una función biyectiva. Suponemos que existe $f^{-1}(x)$ y es derivable, entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

Exampli gratia:

1) Sea $y = \arcsin(x)$, ¿cómo obtener y'?

Por el teorema de la función inversa,

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

$$\arcsin(x) \Rightarrow \sin(y) = \sin(\arcsin(x)) \Rightarrow \sin(y) = x$$

$$x = \sin(y) \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{d\sin(y)}{dy} = \cos(y)$$

$$\frac{dx}{dy} = \cos(y)$$

$$y' = \frac{1}{\cos(y)}$$

Consideremos que,

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$$

$$\cos(x) = \sqrt{1 - \sin^2(x)}$$

Por lo tanto,

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(y)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\therefore \frac{d(\arcsin(x))}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Si se combina el teorema de la función inversa con la regla de la cadena se tiene que:

$$\frac{d}{dx}\arcsin(v)=\frac{v'}{\sqrt{1-v^2}}$$

, donde $v=v(x)$.

Ejercicio: Obtener $\frac{d}{dx}\operatorname{arc}\cos(x)$,

2)

$$y=\arctan(x)\Rightarrow x=\cot(y)\Rightarrow x'=-\csc^2 y$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{-\csc^2(y)}$$

Debemos pasarla a terminos de x.

Consideremos $\sin^2(x)+\cos^2(x)=1\Rightarrow 1+\cot^2(x)=\csc^2(x)$, al dividir entre $\sin^2(x)$.

Entonces,

$$=\frac{-1}{1+\cot^2(y)}=\frac{-1}{1+x^2}$$

$$\therefore\frac{d}{dx}(\operatorname{arccot}(x))=\frac{-1}{1+x^2}$$