Límites y definicón formal

Velázquez Ramírez Carlos Raúl

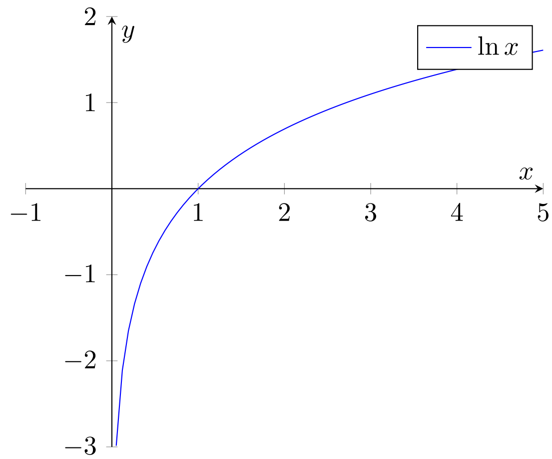
27-10-2025

Logaritmo natural y exponencial natural

$$\ln :]0, \infty[\to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \ln x$$

$$Img_{ln} = \mathbb{R}$$



Propiedades del logaritmo natural:

$$\ln a^x = x \ln a$$

$$\ln ab = \ln a + \ln b$$

$$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

$$\ln e = 1$$

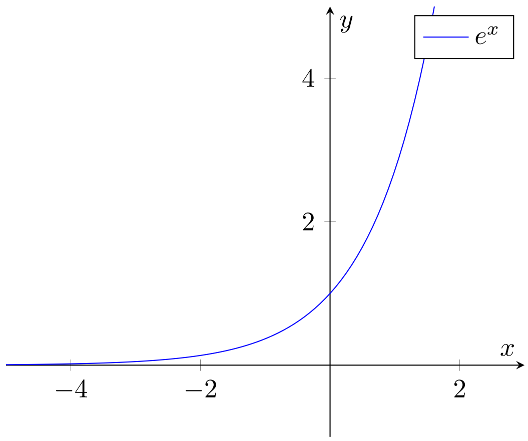
$$\ln(1) = 0$$

Función exponencial natural:

$$exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto e^x$$

$$Im_{ln} =]0, \infty[$$



Si exp se define como $exp : \mathbb{R} \to]0, \infty[$, entonces exp y ln son una inversa de la otra.

$$\ln(e^x) = x$$

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} \ln x \text{ no puede evaluarse}$$

$$\lim_{x\to 0} \ln x, \text{ esta expresión no tiene sentido}$$

$$\lim_{x\to -\infty} e^x = 0$$

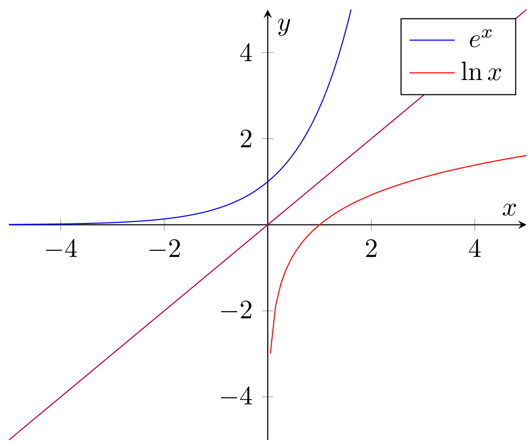
$$\lim_{x\to \infty} e^x = \infty$$

$$\lim_{x\to 0} e^x = 1$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{e^{-x}} = \lim_{x\to \infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x\to -\infty} e^{-x} = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0$$

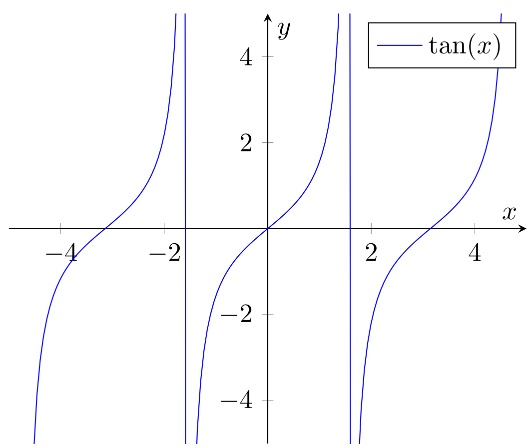


Otras funciones trigonométricas

$$f(x) = \tan(x)$$

$$Dom_{\tan(x)} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{(2k+1)\pi}{2} \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$$

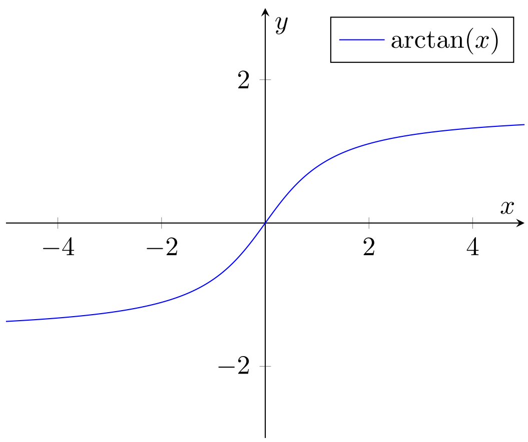
$$Img_{\tan(x)} = \mathbb{R}$$



$$f(x) = \arctan(x)$$

$$Dom_g = \mathbb{R}$$

$$Img_g =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$



Si restringimos la función $f(x) = \tan x$ al intervalo $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, entonces $\tan x$ y $\arctan x$ son funciones inversas una de la otra.

$$\tan(\arctan x) = x$$

$$\arctan(\tan x) = x$$

Límites (definicón rigurosa)

Def. Vecindad, entorno o recinto: Sea $a \in \mathbb{R}$ y $\epsilon > 0$. La vecindad del punto a con radio ϵ, $V_\epsilon(a)$, se define como

$$V_\epsilon(a) := \{x \in \mathbb{R} \,|\, |x - a| < \epsilon\}$$

Exampli gratia:

1) $V_1(\frac{3}{4}) := \{x \in \mathbb{R} \,|\, |x - \frac{3}{4}| < \epsilon\}$

$$|x - \frac{3}{4}| < \epsilon, \text{ por propiedades del valor absoluto, se tiene que}$$

$$-\epsilon < x - \frac{3}{4} < \epsilon$$

$$\frac{3}{4} - \epsilon < x < \frac{3}{4} + \epsilon$$

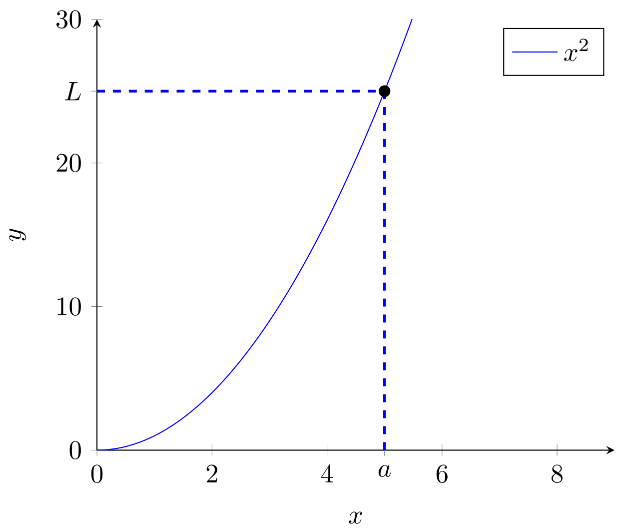
$$x \in]\frac{3}{4} - \epsilon, \frac{3}{4} + \epsilon[$$

2) Exprese el intervalo $]2,6[$ como una vecindad.

$$]2,6[= V_2(4)$$

Def. Existencia del límite: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ significa que $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 \,|\, \forall x \in Dom_f \,|\, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$.

Lo cual quiere decir que $x \in V_\delta(a) \Rightarrow f(x) \in V_\epsilon(L)$.



Exampli gratia:

1) Demuestre que $\lim\limits_{x \to 2}(x + 3) = 5$.

Demostración: Sea $\epsilon > 0$ arbitrario. Para encontrar la $\delta > 0$, estimamos

$$|f(x) - L| = |x + 3 - 5| = |x - 2| < \epsilon$$

Si $|x - 2| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \delta = \epsilon$.

2) Demuestre que $\lim\limits_{x \to 4}(\frac{1}{2}x + 1) = 3$.

Demostración: Sea $\epsilon > 0$ arbitrario. Si $\delta = 2\epsilon$. Supongamos que $|x - 4| < \delta$. Se verifica $|f(x) - L| = |\frac{1}{2}x + 1 - 3| = |\frac{1}{2}x - 2| = |\frac{1}{2}(x - 4)| = \frac{1}{2}|x - 4| < \frac{1}{2}\delta = \epsilon$.