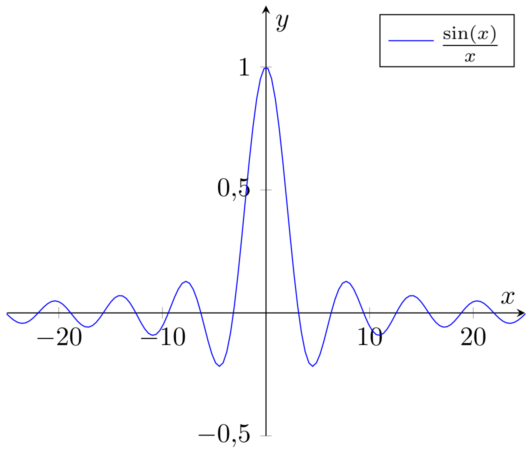
Límites trigonométricos

Velázquez Ramírez Carlos Raúl

20-10-2025

Límites trigonométricos y tendencia a 0

Los siguientes 3 casos, y sus extrapolaciones, poseen limites iguales a 1.



$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin(x)} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(kx)}{x} = 1$$

Puesto que el límite de $\frac{\sin(x)}{x}$ y demás son equivalentes a 1, son útiles para despejar o reducir cietas expresiones trigonométricas más complejas, e.g.,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} \cdot \frac{\cos(x)+1}{\cos(x)+1}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2(x)-1}{x(\cos(x)+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin^2(x)}{x(\cos(x)+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \frac{-\sin(x)}{\cos(x)+1}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(x)}{\cos(x)+1} = 1 \cdot 0 = 0$$

$$Dom_y = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Otro método para atacar límites de funciones trigonométricas es multiplicando por 1 expresado como el cociente del ángulo trigonométrico respectivo al divisor o dividendo, e.g.,

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x+5\sin(6x)}{4x+9\sin(3x)} = \frac{0}{0}, \text{ indeterminación}$$

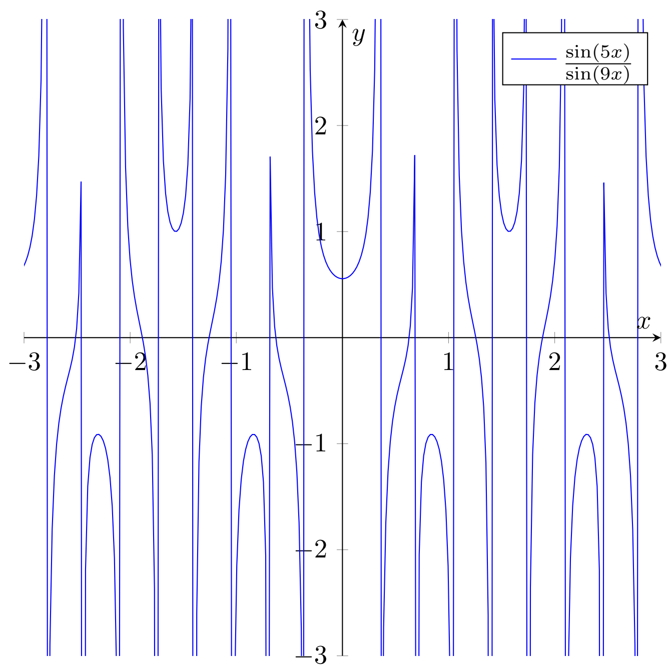
$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{6x}{6x}(2x+5\sin(6x))}{\frac{3x}{3x}(4x+9\sin(3x))} = \lim_{x\to 0} \frac{2x+\frac{3x\sin(6x)}{6x}}{4x+\frac{27x\sin(3x)}{3x}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x+30x\cdot\frac{\sin(6x)}{6x}}{4x+27x\cdot\frac{\sin(3x)}{3x}} = \lim_{x\to 0} \frac{x(2+30\frac{\sin(6x)}{6x})}{x(4+27\frac{\sin(3x)}{3x})} = \lim_{x\to 0} \frac{2+30\frac{\sin(6x)}{6x}}{4+27\frac{\sin(3x)}{3x}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to 0} 2+30\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(6x)}{6x}}{\lim\limits_{x\to 0} 4+27\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{3x}} = \frac{2+30\cdot 1}{4+27\cdot 1} = \frac{32}{31}$$

$$Dom_y = \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

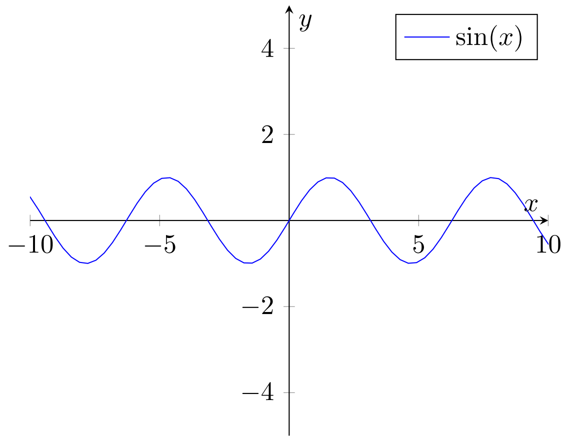
Visualmente, en una forma simple, tenemos que,



$$g(x) = \frac{\sin(5x)}{\sin(9x)}$$

$$Dom_g = \mathbb{R}\setminus\{k\pi | k\in\mathbb{Z}\}$$

Nota: Se ha de considerar que $\lim\limits_{x\to\infty}\sin(x)$ no existe porque sus valores oscilan entre -1 y 1.



Límites infinitos

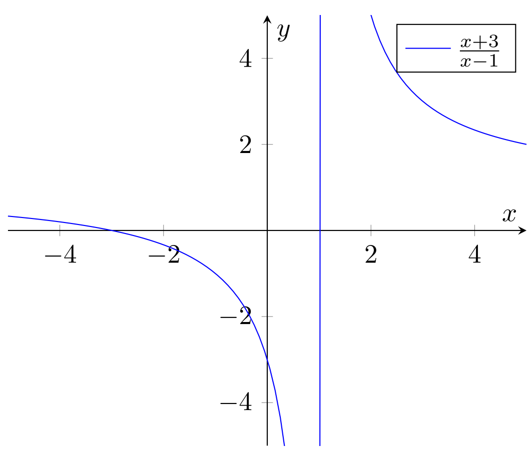
Exampli gratia: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+3}{x-1}$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+3}{x-1} = \frac{\infty}{\infty}, \text{ indeterminación}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}(x+3)}{\frac{1}{x}(x-1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{3}{0}}{1-\frac{1}{x}} = \frac{1}{1} = 1$$

O, también,

$$\frac{x+3}{x-1} = \frac{x-1+4}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} + \frac{4}{x-1} = \frac{4}{x-1} + 1$$



Límites con valor absoluto

Exampli gratia: En el caso $\lim\limits_{x\to 0} \frac{|x-2|-2}{x}$, tenemos que considerar la definición de valor absoluto,

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{si } x \geq 2 \\ -(x-2) & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

Y como el límite tiende a 0, se da uso del segundo caso,

$$\lim_{x\to 0} \frac{|x-2|-2}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-(x-2)-2}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-x+2-2}{x} = \lim_{x\to 0}(-1) = -1$$

Vecindades

Def. La suceción (a_n), $n \in \mathbb{N}$ converge a $L \in \mathbb{R}$ si $\forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} \,|\, \forall n \geq N \implies |a_n - L| < \epsilon$.

Vecindad del punto $a \in \mathbb{R}$ en radio r,

$$V_r(a) =]a-r, a+r[= \{x \in \mathbb{R} \,|\, |x-a| < r\}$$

Exampli gratia:

1) Sea $(\frac{1}{n})_{n=1}^{\infty} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots)$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Sea $\epsilon > 0$ arbitrario,

$$|a_n - L| = |\frac{1}{n} - 0| = |\frac{1}{n}| = \frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{n} < \epsilon \iff 1 < n\epsilon$$

$$\iff n > \frac{1}{\epsilon}$$

Si $\epsilon = \frac{1}{10}$, $n > 10$,

$$a_{n+1} = \frac{1}{11}$$

$$\text{Acaso } \frac{1}{11} \in V_{\frac{1}{10}}(0)$$

$$|\frac{1}{11} - 0| < \frac{1}{10}$$

$$\frac{1}{11} < \frac{1}{10} \iff 10 < 11$$

2) Sea $V_{0,1}(4) =]3{,}9, 4{,}1[= \{x \in \mathbb{R} \,|\, |x-4| < 0{,}1\}$, ¿$x = 4{,}2 \in V_{0,1}(4)$?

$$|4{,}2 - 4| < 0{,}1$$

$$0{,}2 < 0{,}1, \text{ contradicción}$$

$$\therefore 4{,}2 \notin V_{0,1}(4)$$