# Camino más Corto

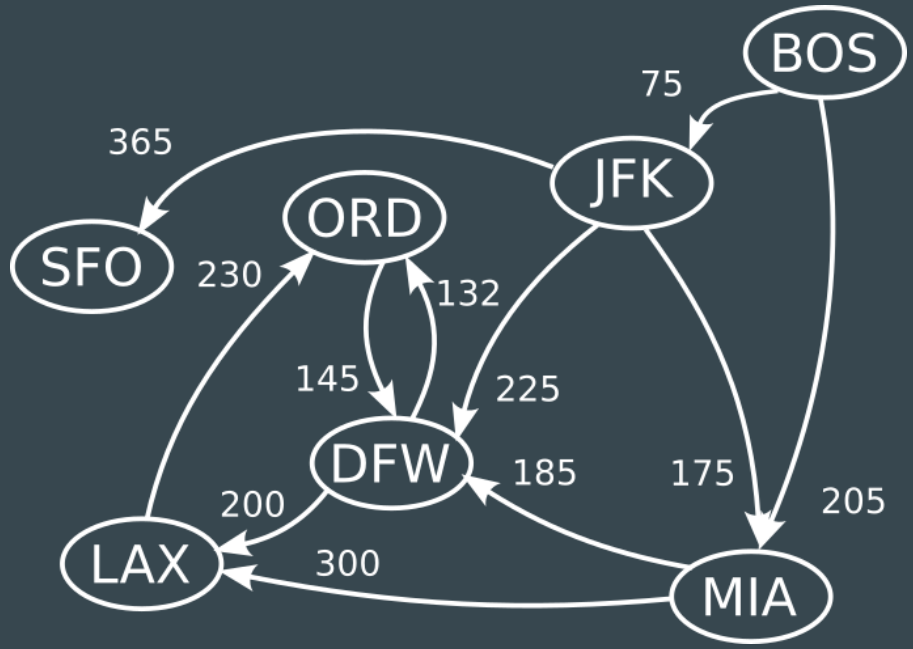
...

Algoritmos y Estructuras de Datos
2024

UNRaf UNIVERSIDAD NACIONAL DE RAFAELA

# Grafos (pequeño repaso)

- Un grafo es una representación de relaciones entre pares de objetos.
- A cada uno de esos objetos se los denomina **nodo** o **vértice**.
- Las conexiones entre nodos se denominan **aristas** o **arcos**.
- Los grafos pueden ser **dirigidos** y **ponderados**, según las características de sus aristas.



# Grafos (pequeño repaso)

```
sfo = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
bos = [0, 0, 75, 0, 0, 0, 205]
jfk = [365, 0, 0, 0, 225, 0, 175]
ord = [0, 0, 0, 0, 145, 0, 0]
dfw = [0, 0, 0, 132, 0, 200, 0]
lax = [0, 0, 0, 230, 0, 0, 0]
mia = [0, 0, 0, 0, 185, 300, 0]

matriz_ady = [sfo, bos, jfk, ord,
              dfw, lax, mia]
```

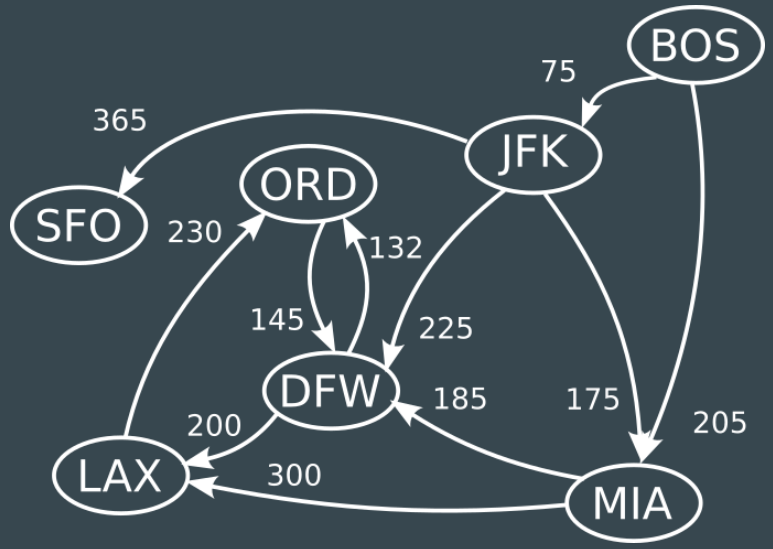
Matrices de adyacencia

```
dicc_ady = { “SFO”: {},
             “BOS”: {“JFK”: 75,
                     “MIA”: 205},
             “JFK”: {“SFO”: 365,
                     “DFW”: 225,
                     “MIA”: 175},
             “ORD”: {“DFW”: 145},
             “DFW”: {“ORD”: 135,
                     “LAX”: 200},
             “LAX”: {“ORD”: 230},
             “MIA”: {“DFW”: 185,
                     “LAX”: 330}
           }
```

Listas de adyacencia

# Caminos

- Un camino es la **secuencia de nodos y aristas** que unen dos nodos particulares.
- El peso de un camino es la suma de todos los pesos que lo componen.




Caminos entre “JFK” y “LAX”:

- 'JFK', 'DFW', 'LAX': 425
- 'JFK', 'MIA', 'DFW', 'LAX': 560
- 'JFK', 'MIA', 'LAX': 505

# Camino más corto entre nodos

- Para calcular todas las distancias de un nodo a los otros, se podría seguir una estrategia de **fuerza bruta**:
  - Elegir un nodo inicio.
  - Para cada nodo *n* dentro del grafo, calcular todas las distancias desde inicio hasta *n*.
  - Elegir la menor distancia dentro de todos los resultados.

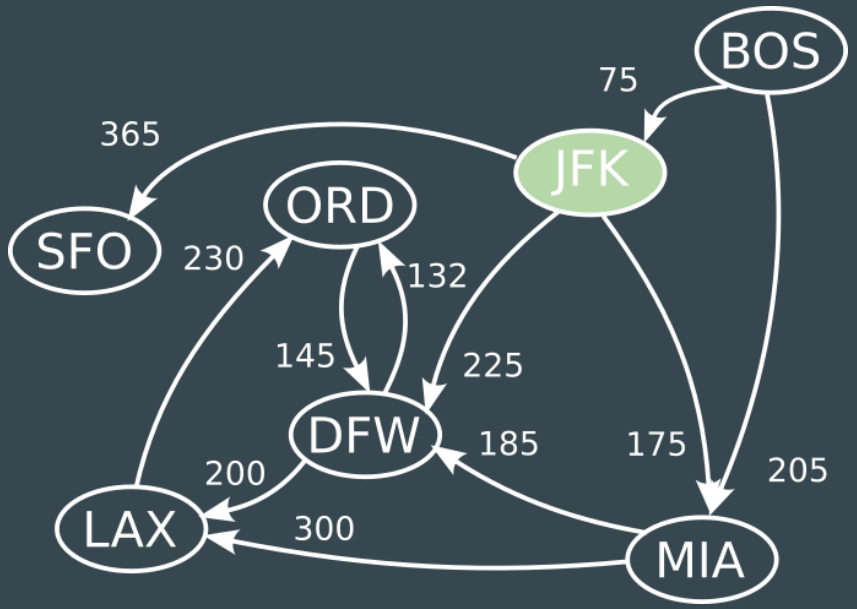
# Camino más corto entre nodos

- Una forma de optimizar el código sería aplicando la estrategia de la **poda**
  - Elegir un nodo inicio.
  - Para cada nodo *n* dentro del grafo, calcular cada distancia desde inicio hasta *n*.
  - Si la distancia intermedia es mayor a la distancia menor conocida, no continuar.

# Camino más corto entre nodos: Dijkstra

- El algoritmo de Dijkstra permite calcular el menor camino desde un inicio a todos los nodos de un grafo.
- Es un **algoritmo ávido** que consiste en calcular las distancias desde un nodo a los adyacentes, y **continuar el cálculo desde el nodo de menor distancia**.
- El algoritmo comienza con el nodo de inicio y termina cuando todos los nodos accesibles fueron visitados.
- Para cada nodo *n* se almacena la distancia mínima desde el inicio y el nodo anterior que conduce a *n*.

# Algoritmo de Dijkstra: ejemplo

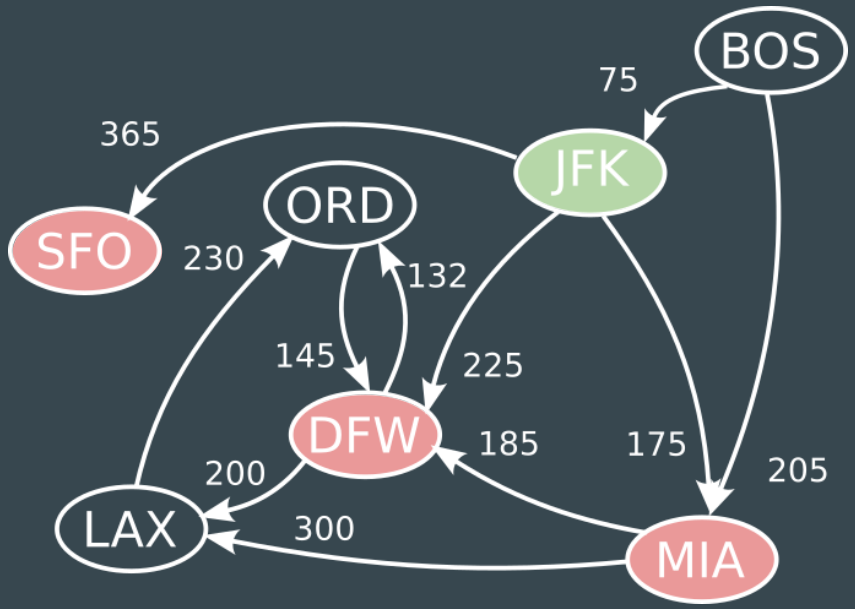



Actual = “JFK”

Visitados = [“JFK”]

| Nodo | Distancia | Anterior |
|---|---|---|
| JFK | 0 | None |
| BOS | Inf | - |
| SFO | Inf | - |
| MIA | Inf | - |
| ORD | Inf | - |
| DFW | Inf | - |
| LAX | Inf | - |

# Algoritmo de Dijkstra: ejemplo




¿ $D_{mia} > D_{jfk-mia}$ ?

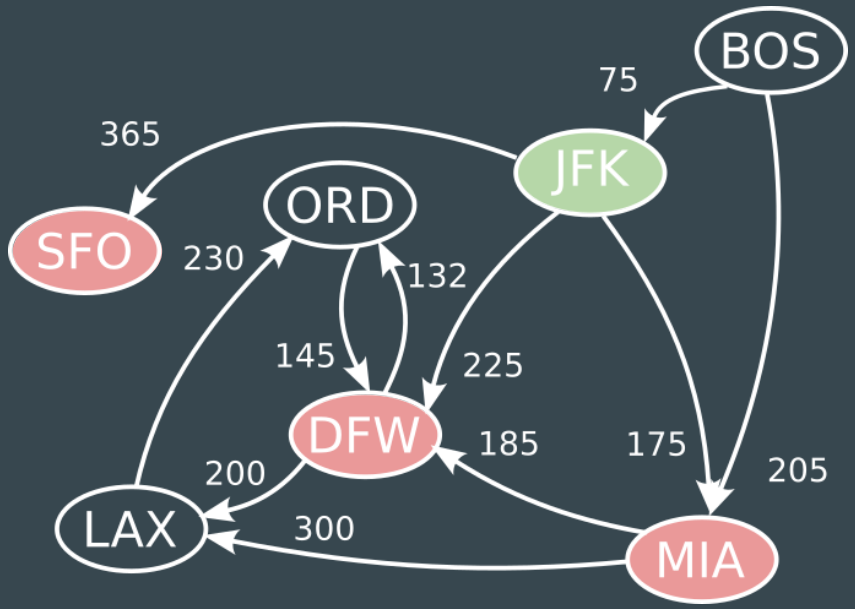
¿Inf > 175 ?

Actual = “JFK”

Visitados = [“JFK”]

| Nodo | Distancia | Anterior |
|---|---|---|
| JFK | 0 | None |
| BOS | Inf | - |
| SFO | Inf | - |
| MIA | Inf | - |
| ORD | Inf | - |
| DFW | Inf | - |
| LAX | Inf | - |

# Algoritmo de Dijkstra: ejemplo

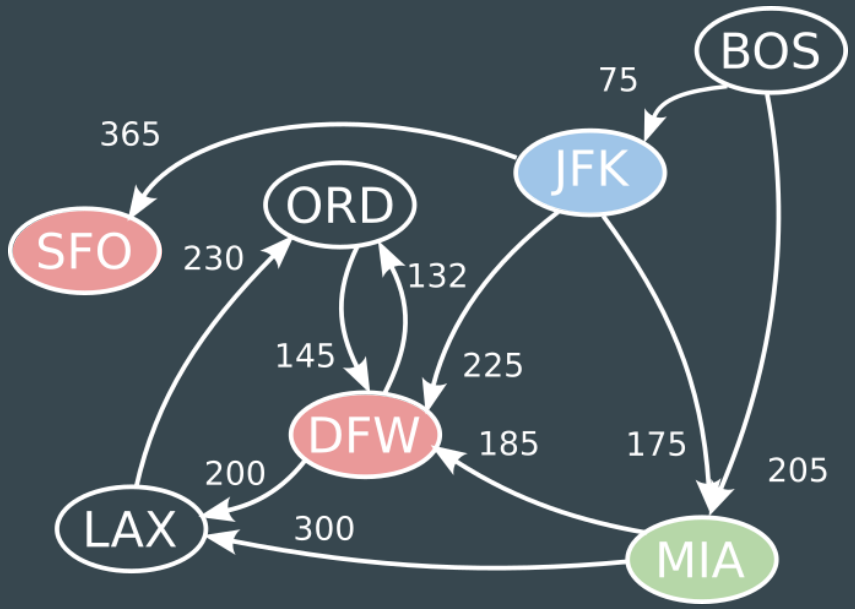



Actual = “JFK”

Visitados = [“JFK”]

| Nodo | Distancia | Anterior |
|---|---|---|
| JFK | 0 | None |
| BOS | Inf | - |
| SFO | 365 | JFK |
| MIA | 175 | JFK |
| ORD | Inf | - |
| DFW | 225 | JFK |
| LAX | Inf | - |

# Algoritmo de Dijkstra: ejemplo

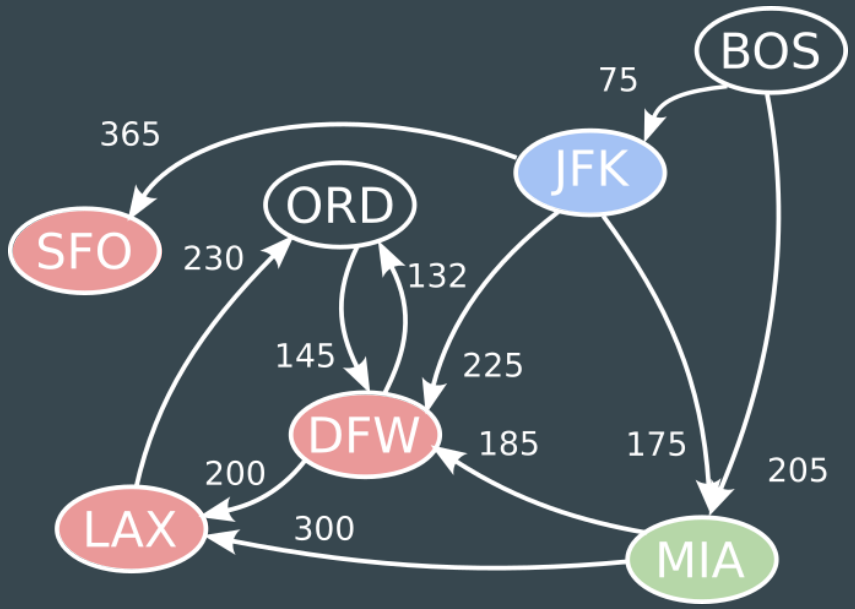



Actual = “MIA”

Visitados = [“JFK”, “MIA”]

| Nodo | Distancia | Anterior |
|---|---|---|
| JFK | 0 | None |
| BOS | Inf | - |
| SFO | 365 | JFK |
| MIA | 175 | JFK |
| ORD | Inf | - |
| DFW | 225 | JFK |
| LAX | Inf | - |

# Algoritmo de Dijkstra: ejemplo




Actual = “MIA”

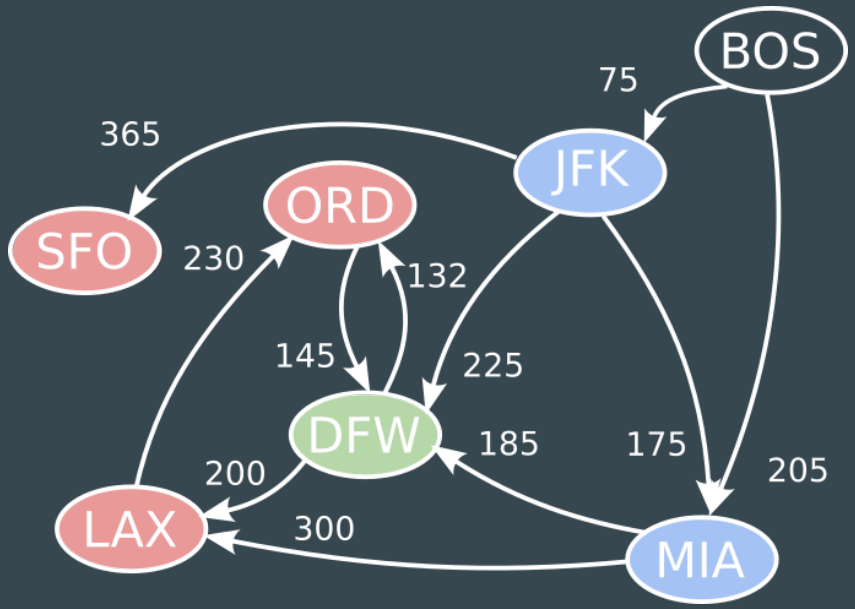
Visitados = [“JFK”, “MIA”]

| Nodo | Distancia | Anterior |
|---|---|---|
| JFK | 0 | None |
| BOS | Inf | - |
| SFO | 365 | JFK |
| MIA | 175 | JFK |
| ORD | Inf | - |
| DFW | 225 | JFK |
| LAX | 475 | MIA |

¿ $D_{dfw} > D_{jfk-mia} + D_{mia-dfw}$ ?

¿225 > 175 + 185 ?

# Algoritmo de Dijkstra: ejemplo




¿ $D_{lax} > D_{jfk-dfw} + D_{dfw-lax}$ ?

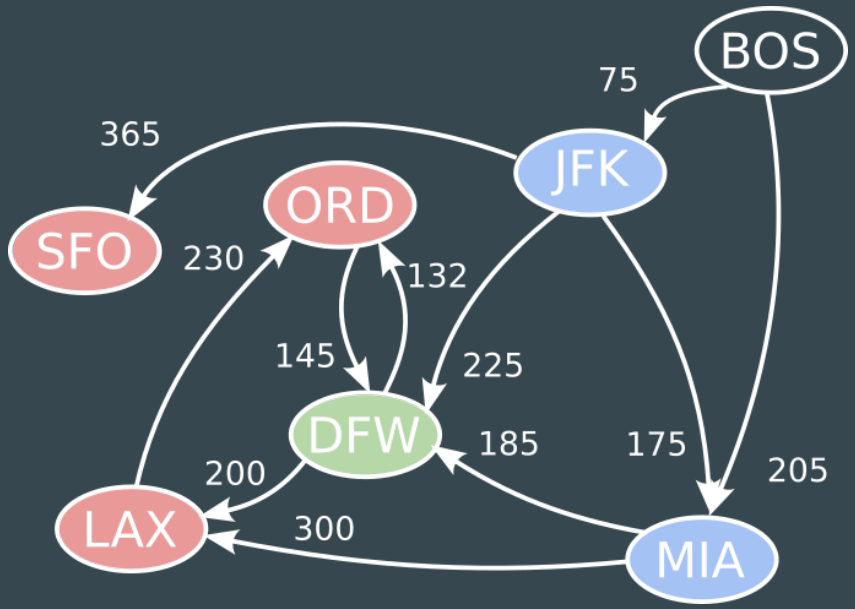
¿475 > 225 + 200 ?

Actual = “DFW”

Visitados = [“JFK”, “MIA”]

| Nodo | Distancia | Anterior |
|---|---|---|
| JFK | 0 | None |
| BOS | Inf | - |
| SFO | 365 | JFK |
| MIA | 175 | JFK |
| ORD | 357 | DFW |
| DFW | 225 | JFK |
| LAX | 475 | MIA |

# Algoritmo de Dijkstra: ejemplo

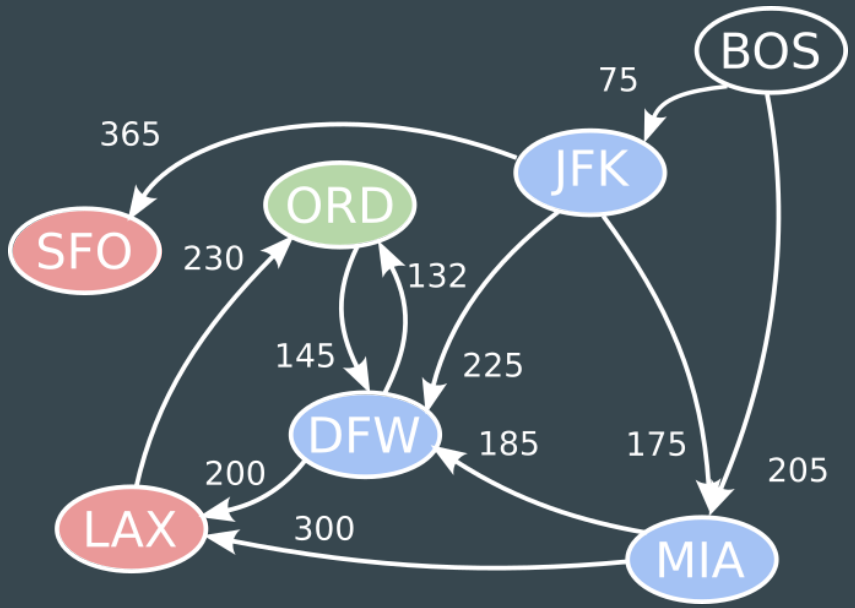



Actual = “DFW”

Visitados = [“JFK”, “MIA”]

| Nodo | Distancia | Anterior |
|---|---|---|
| JFK | 0 | None |
| BOS | Inf | - |
| SFO | 365 | JFK |
| MIA | 175 | JFK |
| ORD | 357 | DFW |
| DFW | 225 | JFK |
| LAX | 445 | DFW |

# Algoritmo de Dijkstra: ejemplo

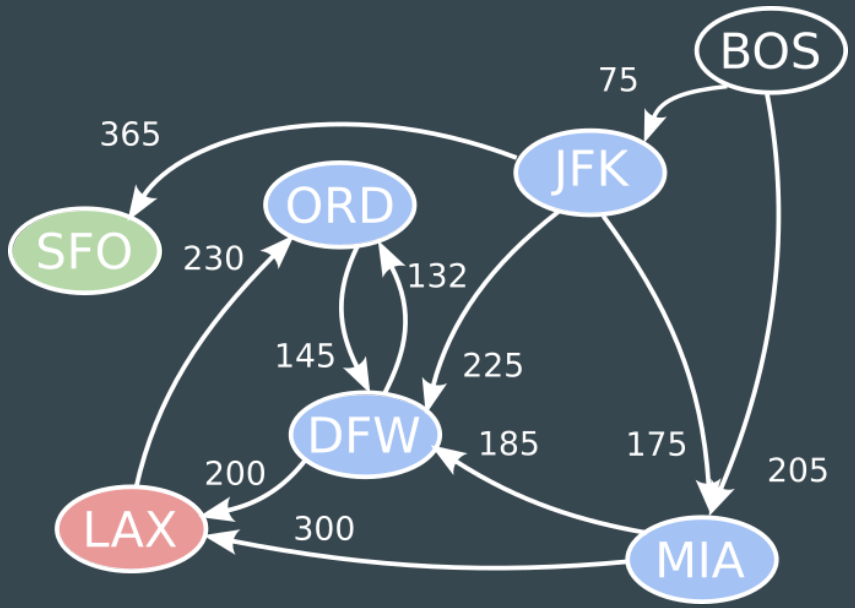



Actual = “ORD”

Visitados = [“JFK”, “MIA”, “DFW”]

| Nodo | Distancia | Anterior |
|---|---|---|
| JFK | 0 | None |
| BOS | Inf | - |
| SFO | 365 | JFK |
| MIA | 175 | JFK |
| ORD | 357 | DFW |
| DFW | 225 | JFK |
| LAX | 445 | DFW |

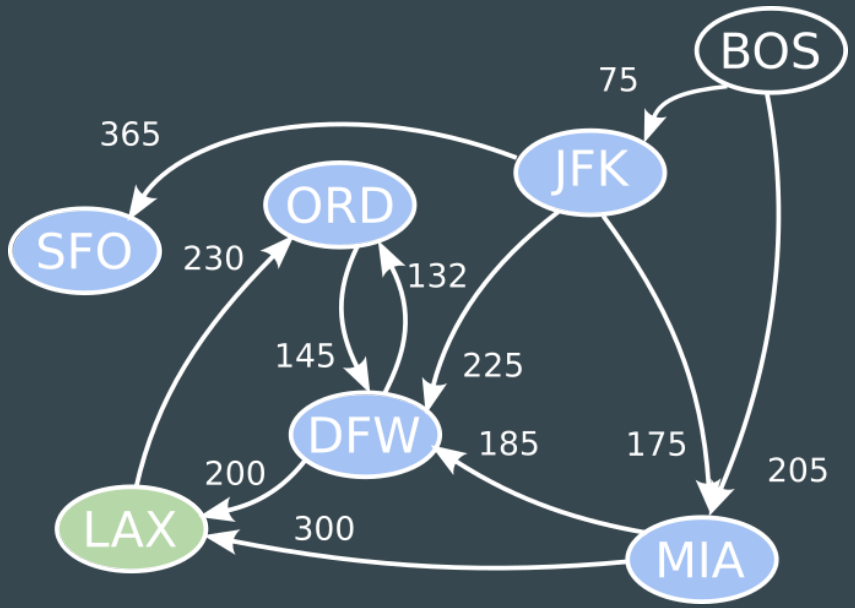
# Algoritmo de Dijkstra: ejemplo




Actual = “SFO”
Visitados = [“JFK”, “MIA”, “DFW”, “ORD]

| Nodo | Distancia | Anterior |
|---|---|---|
| JFK | 0 | None |
| BOS | Inf | - |
| SFO | 365 | JFK |
| MIA | 175 | JFK |
| ORD | 357 | DFW |
| DFW | 225 | JFK |
| LAX | 445 | DFW |

# Algoritmo de Dijkstra: ejemplo




Actual = “LAX”
Visitados = [“JFK”, “MIA”, “DFW”, “ORD, “SFO”]

| Nodo | Distancia | Anterior |
|---|---|---|
| JFK | 0 | None |
| BOS | Inf | - |
| SFO | 365 | JFK |
| MIA | 175 | JFK |
| ORD | 357 | DFW |
| DFW | 225 | JFK |
| LAX | 445 | DFW |

# Algoritmo de Dijkstra: pseudocódigo

- Entrada: **grafo**, nodo **inicio**

- Inicializar tabla de **resultados** con distancias y **anteriores**:
  - Si n == inicio: distancia = 0 y anterior = None
  - Si no: distancia = Inf y anterior = None
- Inicializar nodo **actual** = inicio
- Inicializar lista **visitados** como lista vacía

# Algoritmo de Dijkstra: pseudocódigo

- Mientras que **actual** != **None**:
  - Agregar **actual** a **visitados**.
  - Por cada nodo ***n*** adyacente a **actual**:
    - Calcular distancia desde ***n*** al inicio pasando por **actual**
    - Si la distancia nueva es menor a la conocida, actualizar valores
  - Elegir siguiente nodo
    - Si existe: menor distancia dentro de resultados y que no haya sido visitado
    - Sino, retornar None

# Algoritmo de Dijkstra: código

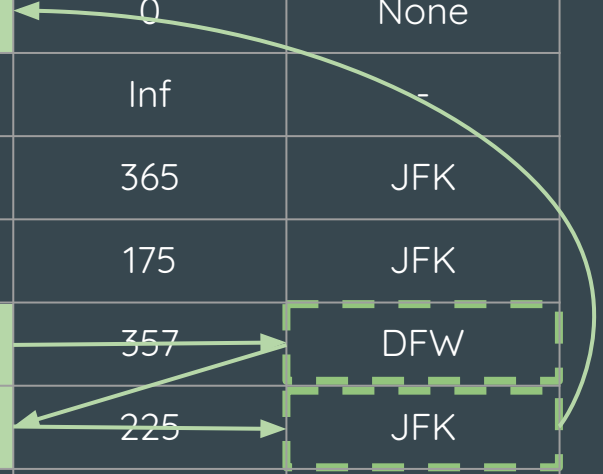
```
def dijkstra(grafo, inicio):
  actual = inicio
  visitados = []
  resultados = {}
  for g in grafo:
    if g == inicio:
      resultados[g] = {"Distancia": 0, "Anterior": None}
    else:
      resultados[g] = {"Distancia": float("inf"), "Anterior": None}

  while actual != None:
    visitados.append(actual)
    for g in grafo[actual]:
      if resultados[g]["Distancia"] > resultados[actual]["Distancia"] + grafo[actual][g]:
        resultados[g]["Distancia"] = resultados[actual]["Distancia"] + grafo[actual][g]
        resultados[g]["Anterior"] = actual
    actual = distancia_menor(resultados, visitados)

  return resultados
```

# Algoritmo de Dijkstra: código

```
def distancia_menor(resultados, visitados):
  dist = float('inf')
  nodo = None
  for r in resultados:
    if resultados[r]["Distancia"] < dist and r not in visitados:
      dist = resultados[r]["Distancia"]
      nodo = r
  return nodo
```

# Reconstruyendo el camino mínimo

| Nodo | Distancia | Anterior |
|---|---|---|
| JFK | 0 | None |
| BOS | Inf | - |
| SFO | 365 | JFK |
| MIA | 175 | JFK |
| ORD | 357 | DFW |
| DFW | 225 | JFK |
| LAX | 445 | DFW |



- Para encontrar el camino mínimo a un nodo, se debe recorrer la lista de nodos anteriores hasta llegar al inicio.
- Por ejemplo, el camino hasta “ORD” se calcularía cómo:
  - “ORD”
  - “DFW” (anterior a “ORD”)
  - “JFK” (anterior a “DFW”)

# Reconstruyendo el camino mínimo: pseudocódigo

- Inicializar **camino** como lista vacía
- Inicializar **actual** como nodo final

- Mientras que **actual** != **inicio**
  - agregar **actual** a **camino**
  - Actualizar **actual** por su **anterior** según Dijkstra
- Devolver **camino**

# Reconstruyendo el camino mínimo

```
def recontruir_camino(resultados, inicio, fin):
    camino = []
    actual = fin
    while actual != inicio:
        camino = [actual] + camino
        actual = resultados[actual]["Anterior"]
    camino = [inicio] + camino
    return camino
```

# Distancia mínima entre todos los pares de nodos

- El algoritmo de Diijkstra permite encontrar las distancias de un nodo particular al resto de los nodos accesibles.
- Si se quisieran conocer todas las distancias, se debería ejecutar el código *n* veces.
- Una alternativa para disminuir el número de cálculos es el algoritmo de **Floyd**.

# Algoritmo de Floyd

- El algoritmo de Floyd utiliza una **matriz de adyacencia** para calcular las distancias entre todos los pares de nodos.
- Este algoritmo tiene muchas coincidencias con el algoritmo de **Dijkstra**.
- Para facilitar los cálculos, al comienzo las **distancias entre nodos no adyacentes** se establece como **infinita**.
- Luego se recorre la **matriz** completa y se comprueba si la distancia conocida entre dos nodos es mayor a la distancia entre esos nodos, pasando por un nodo adicional:

$$\text{¿ } D_{ij} > D_{ik} + D_{kj} \text{ ?}$$

# Algoritmo de Floyd: ejemplo

j →

i ↓

| | SFO | BOS | JFK | ORD | DFW | LAX | MIA |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **SFO** | 0 | Inf | Inf | Inf | Inf | Inf | Inf |
| **BOS** | Inf | 0 | 75 | Inf | Inf | Inf | 205 |
| **JFK** | 365 | Inf | 0 | Inf | 225 | Inf | 175 |
| **ORD** | Inf | Inf | Inf | 0 | 145 | Inf | Inf |
| **DFW** | Inf | Inf | Inf | 132 | 0 | 200 | Inf |
| **LAX** | Inf | Inf | Inf | 230 | Inf | 0 | Inf |
| **MIA** | Inf | Inf | Inf | Inf | 185 | 300 | 0 |

Calculando la distancia mínima entre **BOS** y **SFO**:

$i = 1$; $j = 0$; $D_{10}$ = Inf

k = 0: $D_{10}$ = Inf; $D_{00}$ = 0 => No cambiar
k = 1: $D_{11}$ = 0; $D_{10}$ = Inf => No cambiar
k = 2: $D_{12}$ = 75; $D_{20}$ = 365 => **Cambiar**
**Dij = 440**
k = 3: $D_{13}$ = Inf; $D_{30}$ = Inf => No cambiar
k = 4: $D_{14}$ = Inf; $D_{40}$ = Inf => No cambiar
k = 5: $D_{15}$ = Inf; $D_{50}$ = Inf => No cambiar
k = 6: $D_{16}$ = 205; $D_{60}$ = Inf => No cambiar

# Algoritmo de Floyd: ejemplo

j →

i ↓

| | SFO | BOS | JFK | ORD | DFW | LAX | MIA |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **SFO** | 0 | Inf | Inf | Inf | Inf | Inf | Inf |
| **BOS** | Inf | 0 | 75 | Inf | Inf | Inf | 205 |
| **JFK** | 365 | Inf | 0 | Inf | 225 | Inf | 175 |
| **ORD** | Inf | Inf | Inf | 0 | 145 | Inf | Inf |
| **DFW** | Inf | Inf | Inf | 132 | 0 | 200 | Inf |
| **LAX** | Inf | Inf | Inf | 230 | Inf | 0 | Inf |
| **MIA** | Inf | Inf | Inf | Inf | 185 | 300 | 0 |

Calculando la distancia mínima entre **JFK** y **LAX**:

i = 2; j = 5; $D_{25}$ = Inf

k = 0: $D_{20}$ = 365; $D_{05}$ = Inf => No cambiar
k = 1: $D_{21}$ = Inf; $D_{15}$ = Inf => No cambiar
k = 2: $D_{22}$ = 0; $D_{25}$ = Inf => No cambiar
k = 3: $D_{23}$ = Inf; $D_{35}$ = Inf => No cambiar
k = 4: $D_{24}$ = 225; $D_{45}$ = 200 => **Cambiar**
**Dij = 425**
k = 5: $D_{25}$ = Inf; $D_{55}$ = Inf => No cambiar
k = 6: $D_{26}$ = 175; $D_{65}$ = 300 => No cambiar

# Algoritmo de Floyd: pseudocódigo

- Entrada: matriz de adyacencia

- Preparar la matriz resultado, cambiando los 0 de la entrada por infinitos
- Para cada nodo intermedio(k):
  - Para cada nodo de inicio (i):
    - Para cada nodo final (j):
      - Calcular $D_{ij}$ y la suma entre $D_{ik}$ y $D_{kj}$
      - Si corresponde, actualizar valores

# Algoritmo de Floyd: código

```
def preparar_matriz(matriz):
  for i in range (0, len(matriz)):
    for j in range (0, len(matriz)):
      if i != j and matriz[i][j] == 0:
        matriz[i][j] = float("inf")
  return matriz

def floyd(matriz):
  for k in range (0, len(matriz)):
    for i in range (0, len(matriz)):
      for j in range (0, len(matriz)):
        if matriz[i][j] > matriz[i][k] + matriz[k][j]:
          matriz[i][j] = matriz[i][k] + matriz[k][j]
  return matriz
```

# Bibliografía


- Goodrich, M. T., Tamassia, R., & Goldwasser, M. H. (2013). Data structures and algorithms in Python. Capítulo 14.6
- Cormen, T. H., Leiserson, C. E., Rivest, R. L., & Stein, C. (2022). Introduction to algorithms. MIT press. Capítulos 24 y 25