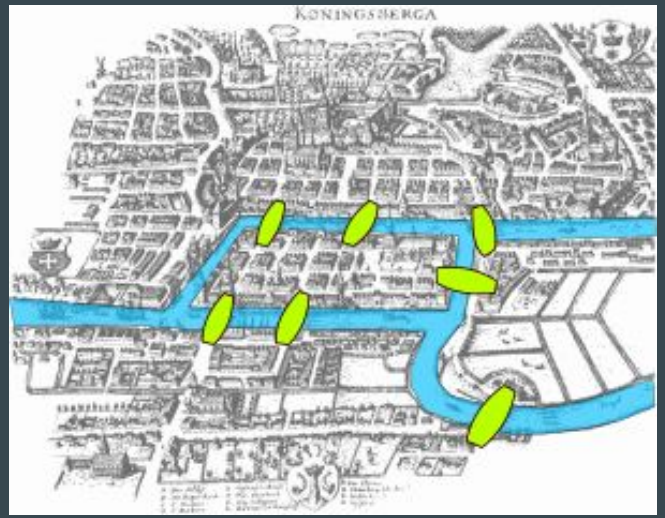
Grafos

...

Algoritmos y Estructuras de Datos
2024

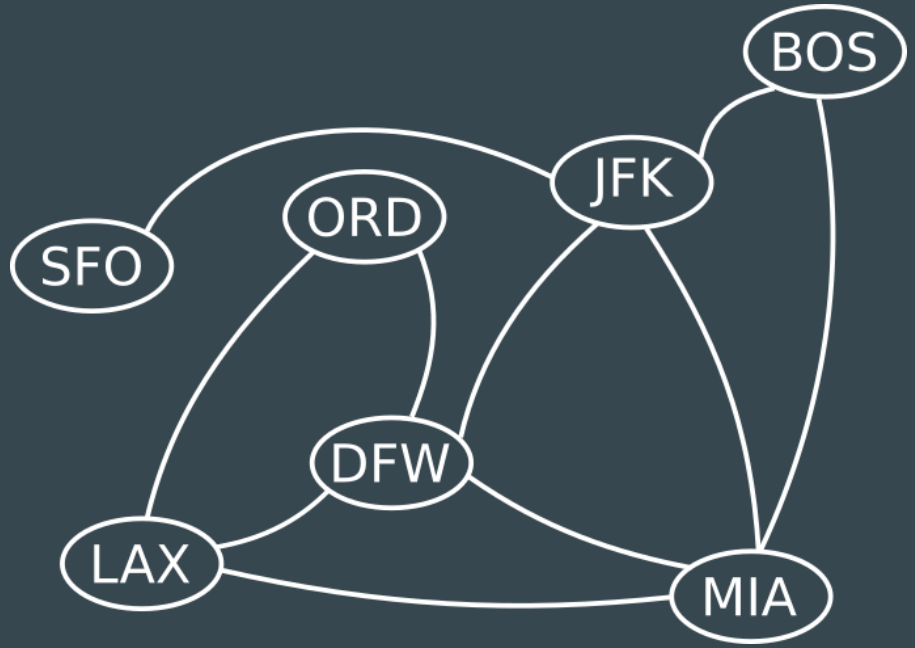
UNRaf UNIVERSIDAD NACIONAL DE RAFAELA

La ciudad de Königsberg, en Prusia, tenía 7 puentes. ¿Existe alguna forma de atravesar la ciudad pasando por cada puente una sola vez?



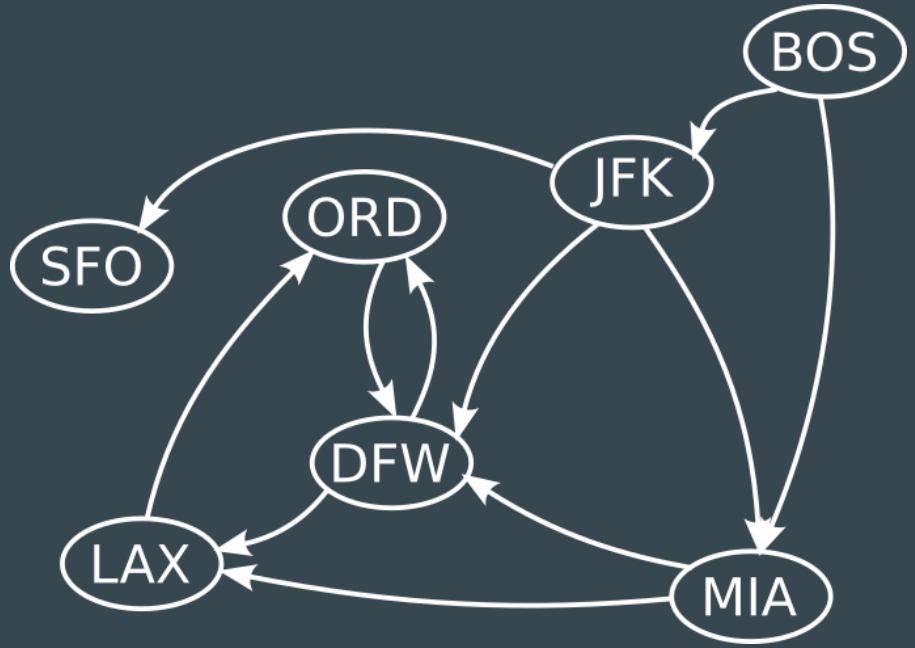
Grafos

- Un grafo es una representación de relaciones entre pares de objetos.
- A cada uno de esos objetos se los denomina **nodo** o **vértice**.
- Las conexiones entre nodos se denominan **aristas** o **arcos**.



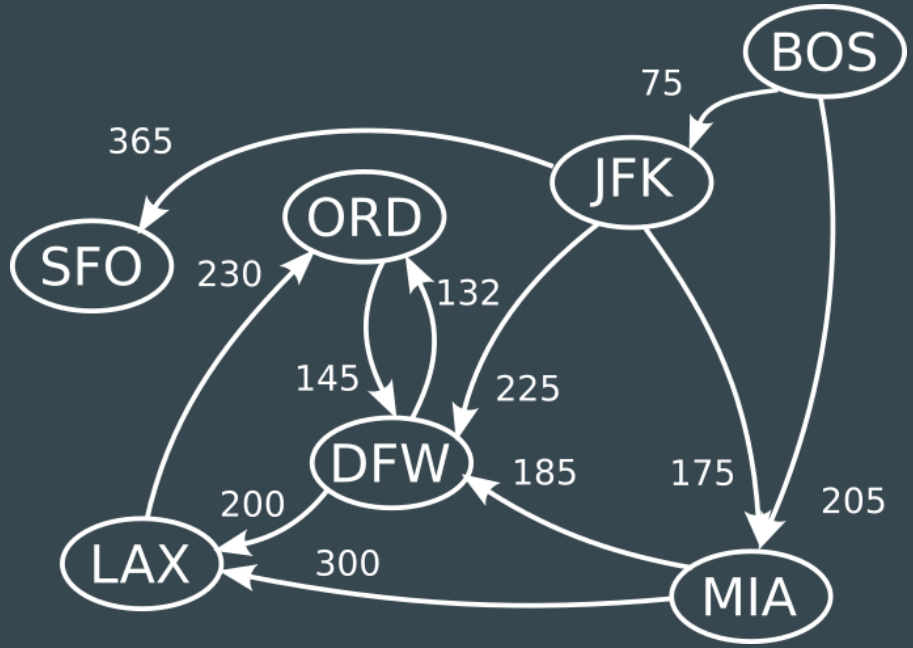
Clasificaciones de grafos

- Las aristas de un grafo pueden ser **dirigidas** si tiene un origen y un destino definido.
- Si no, las aristas se denominan **no dirigidas**.
- El **grafo** será clasificado como **dirigido** o **no dirigido**, dependiendo de las características de sus aristas.



Clasificaciones de grafos

- Además de una dirección, las aristas pueden tener asociados valores llamados **pesos**.
- Dos nodos pueden estar conectados por más de una arista, cada una con su peso determinado.
- Los pesos de que conectan dos nodos en sentidos opuestos también pueden diferir



Caminos

- Un camino es la **secuencia de nodos y aristas** que unen dos nodos particulares.
- En un grafo **dirigido**, si existe un camino que una el nodo *u* con el nodo *v*, se dice que “el nodo *v* es **accesible** desde el nodo *u*”.
- Por más que *v* sea accesible desde *u*, no necesariamente se da la relación inversa.
- En un grafo no dirigido, se dice que los nodos están **conectados**.

Representaciones

- Existen 3 formas de representación principales:
  - Matrices de adyacencia
  - Listas de adyacencia
    - Listas anidadas
    - Diccionarios
  - Objetos

Matrices de adyacencia

- A cada nodo de un grafo se le asigna un número desde 0 hasta *V*, siendo *V* el número de nodos en el grafo.
- Se construye una matriz de tamaño *V* * *V*, donde:

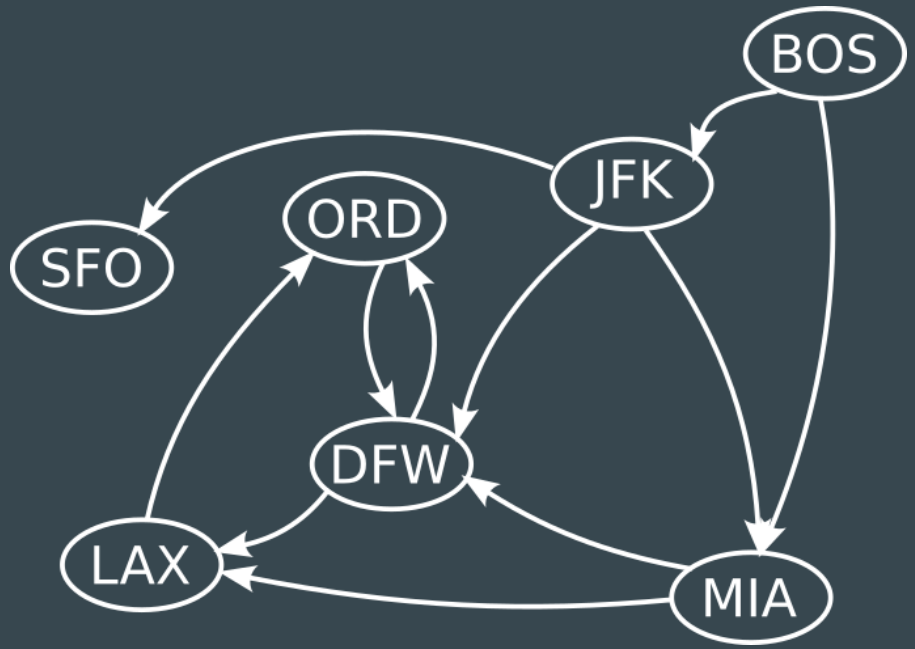
$$A_{ij} \begin{cases} 1 \text{ si } i \text{ y } j \text{ están conectados} \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases}$$

Grafos no ponderados

$$A_{ij} \begin{cases} \text{el peso de la unión entre } i \text{ y } j \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases}$$

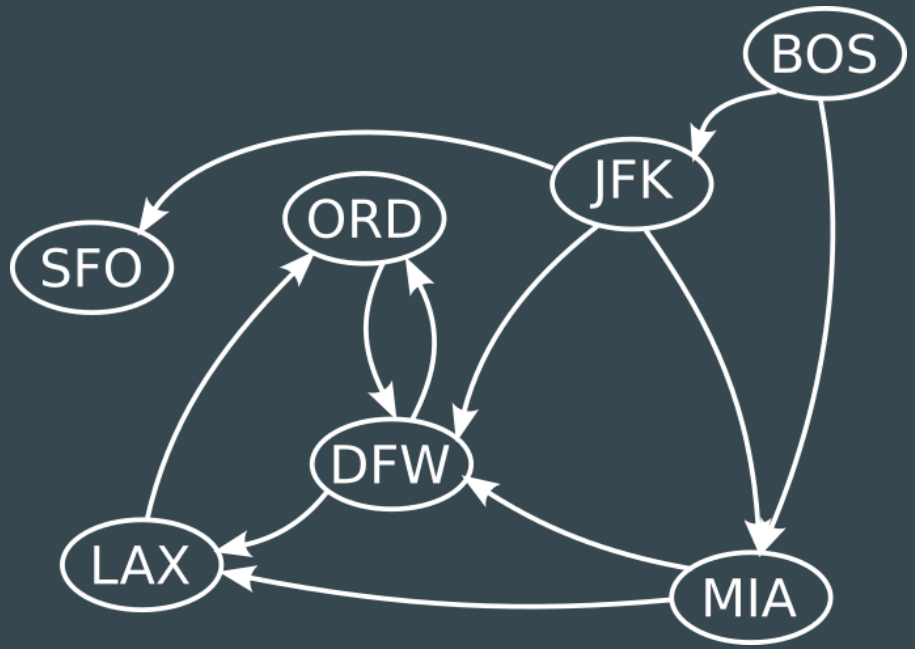
Grafos ponderados

Matrices de adyacencia



Indice	Aeropuerto
0	SFO
1	BOS
2	JFK
3	ORD
4	DFW
5	LAX
6	MIA

Matrices de adyacencia



	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0	1
2	1	0	0	0	1	0	1
3	0	0	0	0	1	0	0
4	0	0	0	1	0	1	0
5	0	0	0	1	0	0	0
6	0	0	0	0	1	1	0

Matrices de adyacencia

Grafos no ponderados

```
sfo = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
bos = [0, 0, 1, 0, 0, 0, 1]
jfk = [1, 0, 0, 0, 1, 0, 1]
ord = [0, 0, 0, 0, 1, 0, 0]
dfw = [0, 0, 0, 1, 0, 1, 0]
lax = [0, 0, 0, 1, 0, 0, 0]
mia = [0, 0, 0, 0, 1, 1, 0]

matriz_ady = [sfo, bos, jfk, ord,
              dfw, lax, mia]

print("ORD – DFW: ", matriz_ady[3,4])
```

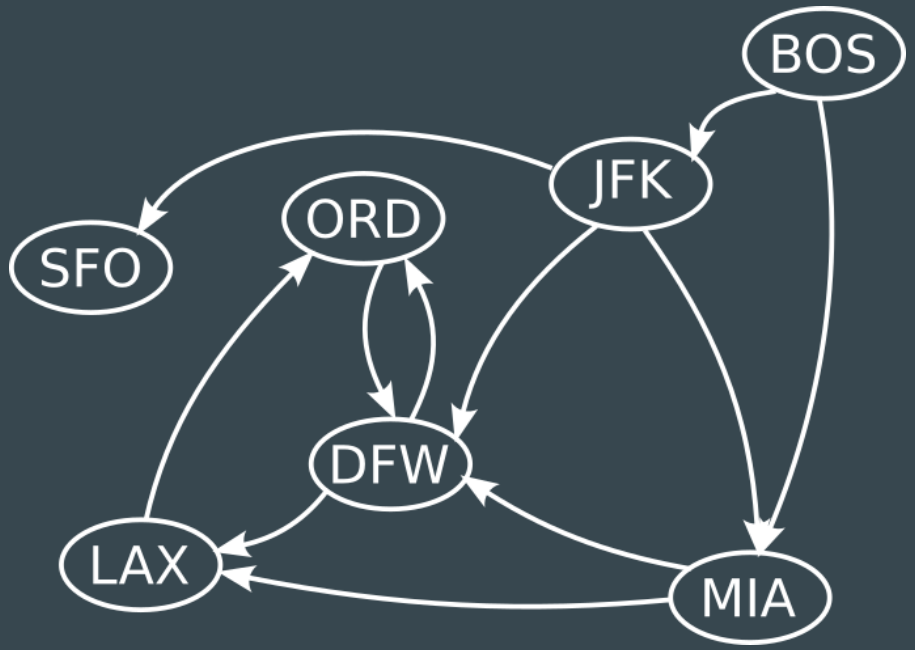
Grafos ponderados

```
sfo = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
bos = [0, 0, 75, 0, 0, 0, 205]
jfk = [365, 0, 0, 0, 225, 0, 175]
ord = [0, 0, 0, 0, 145, 0, 0]
dfw = [0, 0, 0, 132, 0, 200, 0]
lax = [0, 0, 0, 230, 0, 0, 0]
mia = [0, 0, 0, 0, 185, 300, 0]

matriz_ady = [sfo, bos, jfk, ord,
              dfw, lax, mia]

print("ORD – DFW: ", matriz_ady[3,4])
```

Listas de adyacencia

- Los grafos también pueden representarse como múltiples listas, una por cada nodo.
- Cada lista posee todos los nodos conectados al nodo correspondiente.
- En Python, dado que no existe nativamente el tipo de dato “matriz”, las implementaciones de matrices y listas de adyacencias son muy similares.

Listas de adyacencia




```
sfo = []
bos = [“JFK”, “MIA”]
jfk = [“SFO”, “DFW”, “MIA”]
ord = [“DFW”]
dfw = [“ORD”, “LAX”]
lax = [“ORD”]
mia = [“DFW”, “LAX”]

lista_ady = [sfo, bos, jfk, ord,
             dfw, lax, mia]

for i in lista_ady[3]:
  if i ==“DFW”:
    print(True)
```

Listas de adyacencia

- Las listas de adyacencia también pueden implementarse usando diccionarios.
- Esta estrategia hace más simple acceder a los distintos nodos.

```
dicc_ady = { “SFO”: {},
             “BOS”: {“JFK”: 75, “MIA”: 205},
             “JFK”: {“SFO”: 365, “DFW”: 225, “MIA”: 175},
             “ORD”: {“DFW”: 145},
             “DFW”: {“ORD”: 135, “LAX”: 200},
             “LAX”: {“ORD”: 230},
             “MIA”: {“DFW”: 185, “LAX”: 330}
            }

print(“ORD-DFW: ”, dicc_ady[“ORD”][“DFW”])
```

Objetos

- Otra forma de implementar grafos es definiendo **clases** específicas para nodos y aristas.
- La clase **nodo** contiene el elemento del nodo.
- Dependiendo del tipo de grafo, la clase **arista** va a contener distintos elementos:
  - Origen
  - Destino
  - Peso
  - ...

Recorrido de grafos

- Similar a los árboles, los recorridos pueden ser **por anchura** o **por profundidad**.
- En el recorrido por anchura, se define el nodo de comienzo y se añaden todos los nodos unidos a él a una cola.
- Los siguientes nodos se recorren siguiendo el orden en la cola.
- Se debe llevar la cuenta de qué nodos ya fueron visitados, para no entrar en bucles infinitos (por ejemplo, ORD ⇔ DFW).

Recorrido por anchura: pseudocódigo

```
entrada: grafo, nodo inicio.

agregar inicio a la cola de nodo por visitar
mientras que haya nodos en la cola:
    quitar nodo de la cola
    agregar nodo a la lista de visitados
    por cada nodo conectado a nodo visitando:
      si no fue visitado, agregar a la cola de nodos por visitar
```

Recorrido por anchura: código

```
def anchura(grafo, inicio):

  por_visitar = [inicio]
  visitados = []

  while len(por_visitar) > 0:
    actual = por_visitar.pop(0)

    if actual not in visitados:
      visitados.append(actual)

      for n in grafo[actual]:
        por_visitar.append(n)

  return visitados
```

Recorrido por profundidad

- En el recorrido por profundidad, se define el nodo de comienzo y, recursivamente, se visitan todos los nodos conectados a ese inicio.
- Nuevamente, se debe llevar la cuenta de qué nodos ya fueron visitados, para no entrar en bucles infinitos.

Recorrido por profundidad: pseudocódigo

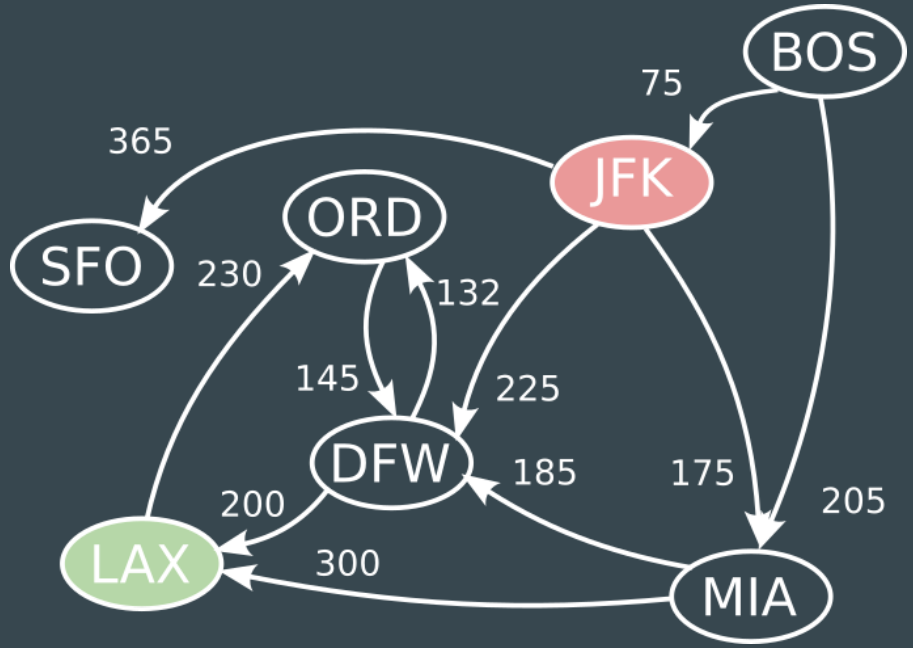
```
entrada: grafo, nodo inicio, lista visitados.


agregar inicio a visitados
por cada nodo conectado a inicio:
    si nodo no está en visitados:
        visitar(grafo, nodo, visitados)
devolver visitados
```

Recorrido por profundidad: código

```
def profundidad(grafo, inicio, visitados = None):
  if visitados == None:
    visitados = []
  visitados.append(inicio)
  for n in grafo[inicio]:
    if n not in visitados:
      visitados = profundidad(grafo, n, visitados)
  return visitados
```

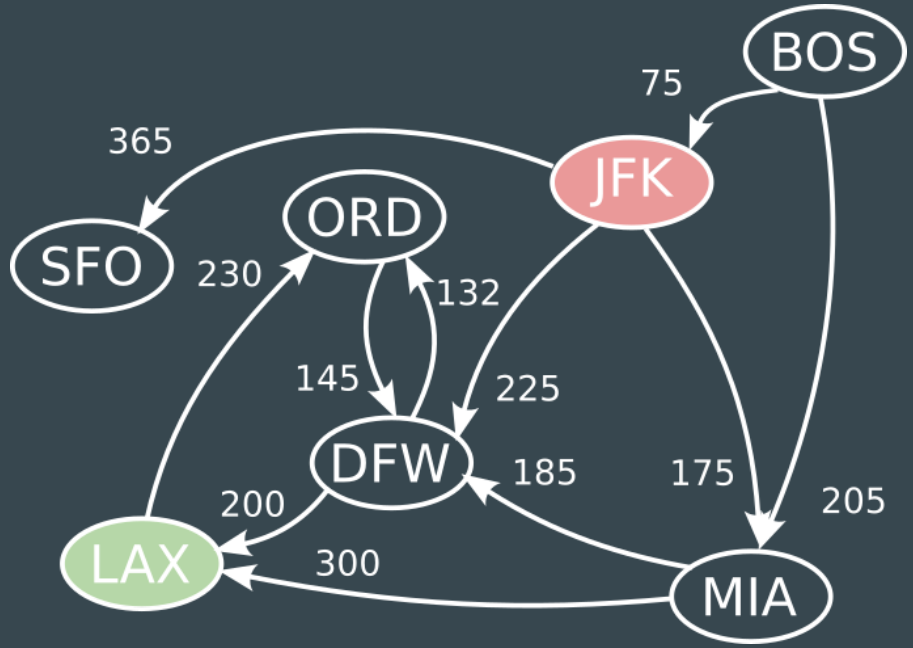
Caminos (de nuevo)

- Pueden existir distintos caminos para unir dos nodos.
- Por ejemplo, para llegar al nodo “LAX” desde el nodo “JFK” existen 3 caminos distintos, cada uno con su peso:
  - JFK -> MIA -> LAX (505)
  - JFK -> DFW -> LAX (425)
  - JFK -> MIA -> DFW -> LAX (560)

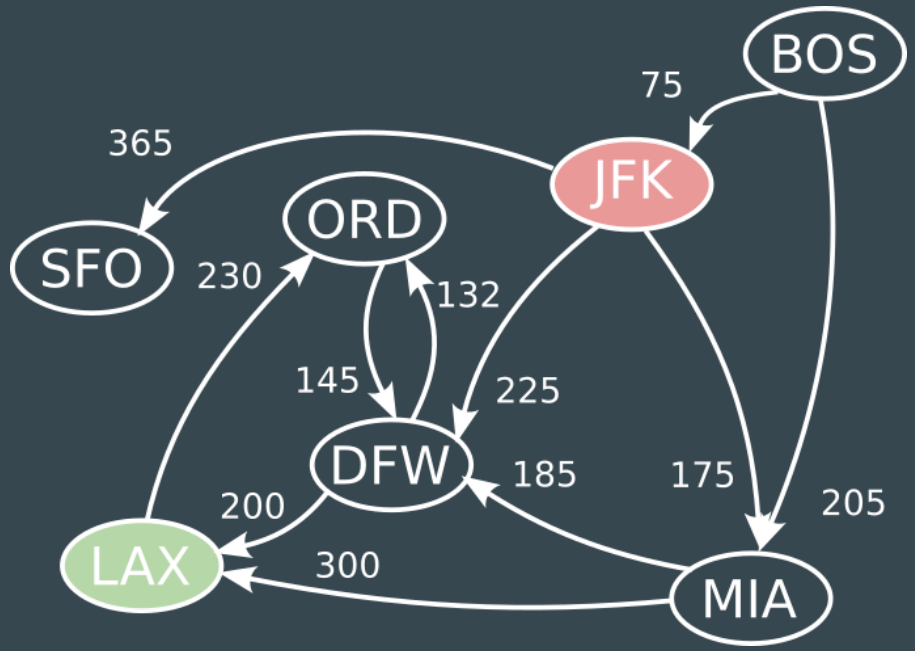


Caminos (de nuevo)

- Una alternativa para reconstruir estos caminos es visitar recursivamente todos los nodos hasta llegar al nodo destino.
- En cada llamada recursiva es posible almacenar el nodo que se está visitando y el peso de la unión que nos llevó a él.
- Como en los recorrido por profundidad, es necesario guardar los nodos que se van visitando



Caminos (de nuevo)

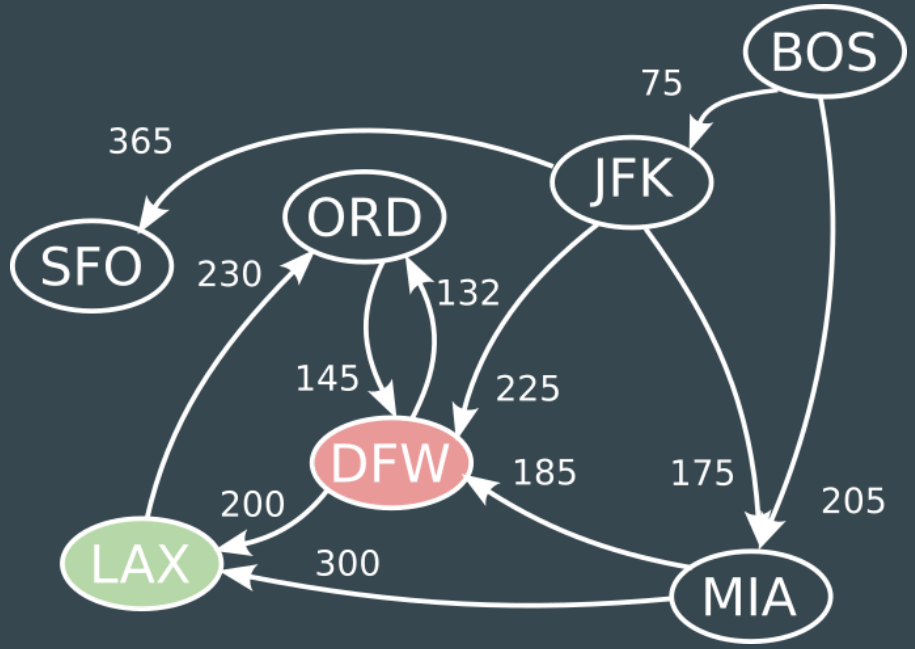



```
inicio = JFK
fin = LAX
camino = [JFK]
visitados = [JFK]

unidos a JFK:
```

- SFO
- DFW
- MIA

```
visitamos DFW
```

Caminos (de nuevo)



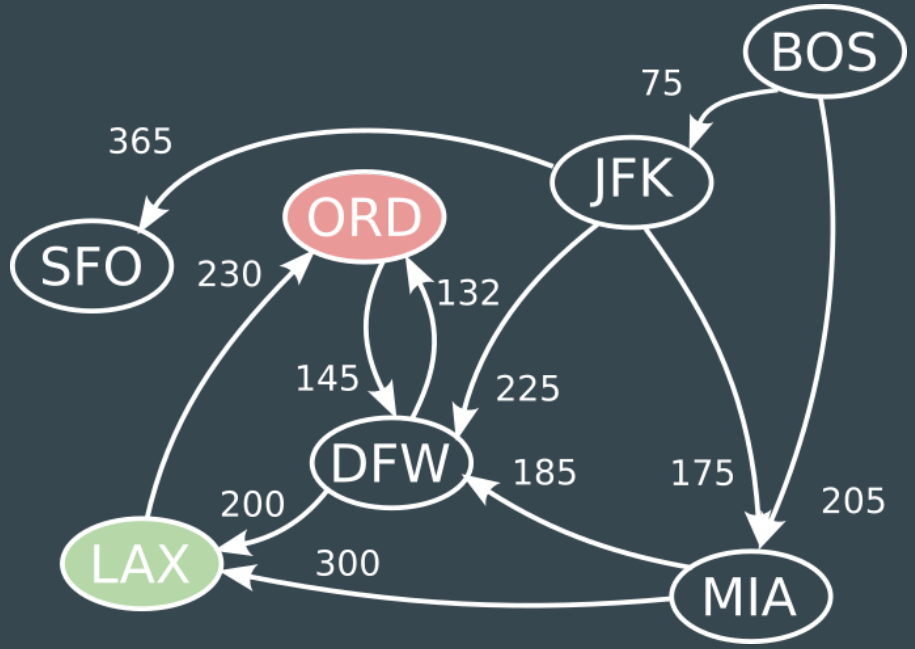
inicio = **DFW**
fin = LAX
camino = [JFK, DFW]
visitados = [JFK, DFW]

unidos a DFW:

- ORD
- LAX

visitamos ORD

Caminos (de nuevo)



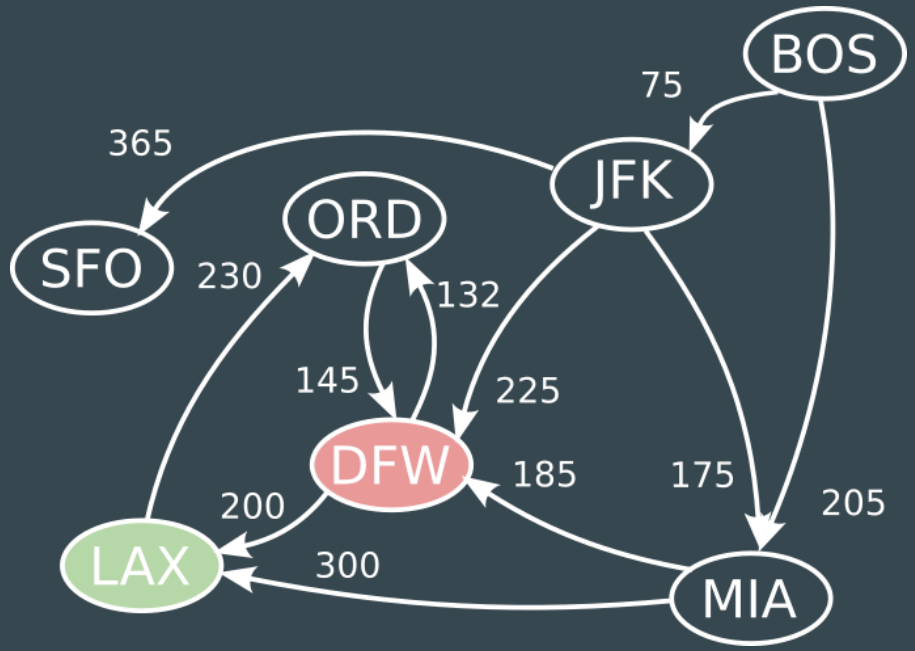
inicio = **ORD**
fin = LAX
camino = [JFK, DFW, ORD]
visitados = [JFK, DFW, ORD]

unidos a ORD:

- DFW

No visitamos ninguno y **sacamos el último del camino**

Caminos (de nuevo)



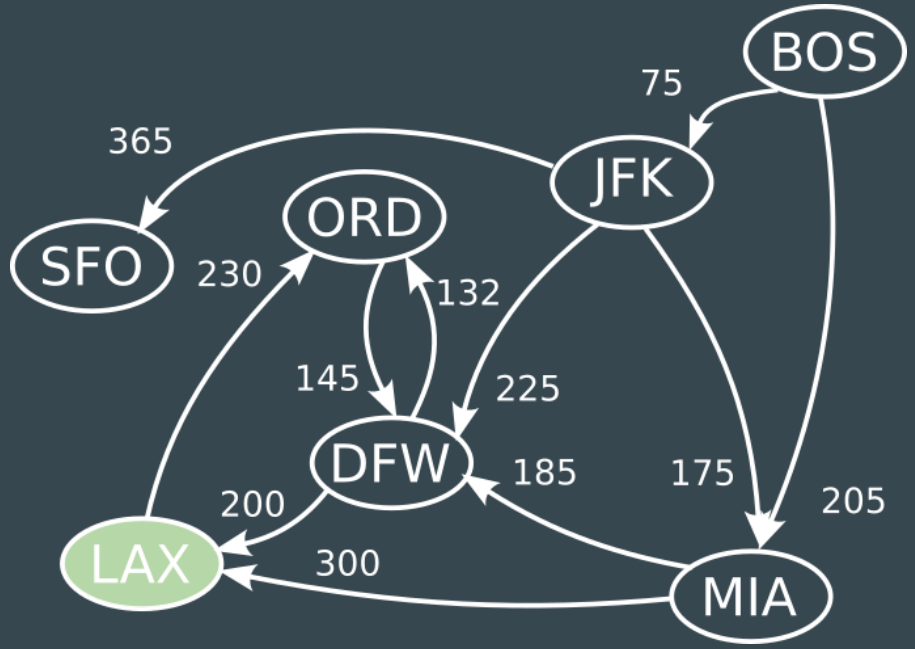
inicio = **DFW**
fin = LAX
camino = [JFK, DFW]
visitados = [JFK, DFW, ORD]

unidos a DFW:

- ORD
- LAX

visitamos LAX

Caminos (de nuevo)




```
inicio = LAX
fin = LAX
camino = [JFK, DFW, LAX]
visitados = [JFK, DFW, ORD]

inicio == final:
  imprimimos camino
```

Caminos: pseudocódigo

```
entrada: grafo, inicio, fin, visitados, ruta parcial.

si inicio == fin:
  imprimir ruta parcial
sino:
  agregar inicio a visitados
  agregar inicio a ruta parcial
  por cada nodo conectado a inicio:
    si nodo no está en visitados:
        rutas(grafo, inicio, fin, visitados, ruta parcial)
  quitar inicio de ruta parcial
```

Recorrido por anchura: código

```
def rutas(grafo, inicio, fin, ruta_parcial = None, visitados = None):
  if ruta_parcial == None:
    ruta_parcial = []
  if visitados == None:
    visitados = []

  if fin == inicio:
    print(ruta_parcial + [inicio])
  else:
    visitados.append(inicio)
    ruta_nueva = ruta_parcial + [inicio]
    for i in grafo[inicio]:
      if i not in visitados:
        rutas(grafo, i, fin, ruta_nueva, visitados)
    visitados.pop()
```

Bibliografía

- Goodrich, M. T., Tamassia, R., & Goldwasser, M. H. (2013). Data structures and algorithms in Python. Capítulo 13
- Cormen, T. H., Leiserson, C. E., Rivest, R. L., & Stein, C. (2022). Introduction to algorithms. MIT press. Capítulo 22