

**ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ**  
*Математическая логика, ИТМО, М3235-М3239, весна 2022 года*

**Задание №1. Знакомство с классическим исчислением высказываний.**

1. Будем говорить, что высказывание  $\alpha$  выводится из гипотез  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  (и записывать это как  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n \vdash \alpha$ ), если существует такой вывод  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ , что  $\alpha \equiv \delta_n$ , и каждый из  $\delta_i$  есть либо гипотеза, либо аксиома, либо получается из каких-то предыдущих высказываний по правилу Modus Ponens. Несколько гипотез мы можем обозначить какой-нибудь большой буквой середины греческого алфавита ( $\Gamma, \Delta, \Pi, \Sigma, \Xi$ ): например,  $\Gamma, \alpha, \beta \vdash \sigma$ ; здесь  $\Gamma$  обозначает какое-то множество гипотез.

Докажите:

- (a)  $\vdash (A \rightarrow A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)$
  - (b)  $\vdash A \& B \rightarrow B \& A$
  - (c)  $\vdash A \& B \rightarrow A \vee B$
  - (d)  $\vdash A \rightarrow \neg\neg A$
  - (e)  $A \& \neg A \vdash B$
  - (f)  $\vdash \neg(A \& \neg A)$
2. Известна теорема о дедукции:  $\Gamma, \alpha \vdash \beta$  тогда и только тогда, когда  $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$ . Теорема доказывается конструктивно, то есть она даёт метод для перестроения одного вывода в другой. В рамках данного задания разрешается результат её применения вписать как часть другого вывода как «чёрный ящик» (как макроподстановку). Докажите с её использованием:
- (a)  $\neg A, B \vdash \neg(A \& B)$
  - (b)  $A, \neg B \vdash \neg(A \& B)$
  - (c)  $\neg A, \neg B \vdash \neg(A \& B)$
  - (d)  $\neg A, \neg B \vdash \neg(A \vee B)$
  - (e)  $A, \neg B \vdash \neg(A \rightarrow B)$
  - (f)  $\neg A, B \vdash A \rightarrow B$
  - (g)  $\neg A, \neg B \vdash A \rightarrow B$
  - (h)  $\vdash A \& (B \& B) \rightarrow A \& B$
  - (i)  $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$
  - (j)  $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$  (закон контрапозиции)
  - (k)  $\vdash A \& B \rightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$  (правило де Моргана)
  - (l)  $\vdash \neg(\neg A \& \neg B) \rightarrow A \vee B$  (правило де Моргана)
  - (m)  $\vdash A \& (B \vee C) \rightarrow (A \& B) \vee (A \& C)$  (дистрибутивность 1)
  - (n)  $\vdash A \vee (B \& C) \rightarrow (A \vee B) \& (A \vee C)$  (дистрибутивность 2)
3. Существует несколько аналогов схемы аксиом 10 (аксиомы снятия двойного отрицания). Докажите при любых высказываниях  $\alpha$  и  $\beta$ :
- (a)  $\vdash \alpha \vee \neg\alpha$  (правило исключённого третьего)
  - (b)  $\vdash ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$  (закон Пирса)
  - (c) Предположим, 10 схема аксиом заменена на две другие схемы аксиом:  $((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$  и  $\alpha \rightarrow \neg\alpha \rightarrow \beta$ . В этих условиях покажите  $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$ .
  - (d) Предположим, 10 схема аксиом заменена на две другие схемы аксиом:  $\alpha \vee \neg\alpha$  и  $\alpha \rightarrow \neg\alpha \rightarrow \beta$ . В этих условиях покажите  $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$ .
4. Докажите следующие «странные» формулы:
- (a)  $\vdash (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$ . В самом деле, получается, что из любых двух наугад взятых фактов либо первый следует из второго, либо второй из первого. Например «выполнено как минимум одно из утверждений: (а) если сегодня пасмурно, то курс матлогики все сдадут на А; (б) наоборот, если все сдадут курс матлогики на А, то сегодня пасмурно».

- (b) Обобщение предыдущего пункта: при любом  $n \geq 1$  и любых  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  выполнено  $\vdash (\alpha_1 \rightarrow \alpha_2) \vee (\alpha_2 \rightarrow \alpha_3) \vee \dots \vee (\alpha_{n-1} \rightarrow \alpha_n) \vee (\alpha_n \rightarrow \alpha_1)$
5. В рамках данного задания неравными высказываниями будем называть высказывания  $\alpha$  и  $\beta$ , у которых нет такого переименования переменных, чтобы их таблицы истинности совпали. Например,  $A$  и  $B \& B$  — равные высказывания, ведь высказывания  $E$  и  $E \& E$  имеют одну и ту же таблицу истинности:

$E$	$E \& E$
И	И
Л	Л

Однако, высказывания  $A$  и  $A \rightarrow A$  не равны.

Даны высказывания  $\alpha$  и  $\beta$ , причём  $\vdash \alpha \rightarrow \beta$  и  $\alpha \neq \beta$ . Укажите способ построения высказывания  $\gamma$ , такого, что  $\vdash \alpha \rightarrow \gamma$  и  $\vdash \gamma \rightarrow \beta$ , причём  $\alpha \neq \gamma$  и  $\beta \neq \gamma$ .

6. Покажите, что если  $\alpha \vdash \beta$  и  $\neg \alpha \vdash \beta$ , то  $\vdash \beta$ .

## Задание №2. Теоремы о корректности и полноте классического исчисления высказываний. Интуиционистская логика.

- Теоремы о корректности и полноте классического исчисления высказываний.
  - Заполните пробел в доказательстве корректности исчисления высказываний: покажите, что если  $\vdash \alpha$  и в доказательстве высказывание  $\delta_n$  получено с помощью Modus Ponens из  $\delta_j$  и  $\delta_k \equiv \delta_j \rightarrow \delta_n$ , то  $\models \delta_n$ .
  - Покажите, что если  $\Gamma \vdash \alpha$ , то  $\Gamma \models \alpha$ .
  - Покажите, что если  $\Gamma \models \alpha$ , то  $\Gamma \vdash \alpha$ .
- Предложите топологические пространства и оценку для пропозициональных переменных, опровергающие следующие высказывания:
  - $A \vee \neg A$  (на лекции приводился пример в  $\mathbb{R}$ ; в данном же задании предложите оценку в каком-то другом пространстве, например в  $\mathbb{R}^2$ )
  - $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$
  - $\neg \neg A \rightarrow A$
  - $(A \rightarrow (B \vee \neg B)) \vee (\neg A \rightarrow (B \vee \neg B))$
  - $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow C) \vee (C \rightarrow A)$
  - $\bigvee_{i=1,n} ((A_i \rightarrow A_{(i \bmod n)+1}) \& (A_{(i \bmod n)+1} \rightarrow A_i))$
- Доказуемы ли следующие высказывания в интуиционистской логике?
  - $\neg \neg \neg \neg A \rightarrow \neg \neg A$
  - $\neg A \vee \neg \neg A \vee \neg \neg \neg A$
  - $A \vee B \rightarrow \neg(\neg A \& \neg B)$
  - $\neg(\neg A \vee \neg B) \rightarrow A \& B$
  - $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \vee B)$
  - $(\neg A \vee B) \rightarrow (A \rightarrow B)$
- Известно, что в классической логике любая связка может быть *выражена* как композиция конъюнкций и отрицаний: существует схема высказываний, использующая только конъюнкции и отрицания, задающая высказывание, логически эквивалентное исходной связке. Например, для импликации можно взять  $\neg(\alpha \& \neg \beta)$ , ведь  $\alpha \rightarrow \beta \vdash \neg(\alpha \& \neg \beta)$  и  $\neg(\alpha \& \neg \beta) \vdash \alpha \rightarrow \beta$ . Возможно ли в интуиционистской логике выразить через остальные связки:
  - конъюнкцию?
  - дизъюнкцию?
  - импликацию?

(d) отрицание?

Если да, предложите формулу и два вывода. Если нет — докажите это (например, предложив соответствующую модель).

5. *Теорема Гливенко.* Обозначим доказуемость высказывания  $\alpha$  в классической логике как  $\vdash_{\text{к}} \alpha$ , а в интуиционистской — как  $\vdash_{\text{и}} \alpha$ . Оказывается возможным показать, что какое бы ни было  $\alpha$ , если  $\vdash_{\text{к}} \alpha$ , то  $\vdash_{\text{и}} \neg\neg\alpha$ . А именно, покажите, что:

- (a) Если  $\alpha$  — аксиома, полученная из схем 1–9 исчисления высказываний, то  $\vdash_{\text{и}} \neg\neg\alpha$ .
- (b)  $\vdash_{\text{и}} \neg\neg(\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha)$
- (c)  $\neg\neg\alpha, \neg\neg(\alpha \rightarrow \beta) \vdash_{\text{и}} \neg\neg\beta$
- (d) Докажите утверждение теоремы ( $\vdash_{\text{к}} \alpha$  влечёт  $\vdash_{\text{и}} \neg\neg\alpha$ ), опираясь на предыдущие пункты, и покажите, что классическое исчисление высказываний противоречиво тогда и только тогда, когда противоречиво интуиционистское.

6. Возможно ли предложить такой набор множеств  $S$  из  $\mathbb{R}$  (формально:  $S \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ ), чтобы при выборе его в качестве истинностного множества  $\mathbb{V}$ , при сохранении правил вычисления значений связок для интуиционистской логики, получилась бы полная и корректная модель для классического исчисления высказываний?

7. Пусть  $S$  — некоторое множество. Рассмотрим  $\mathbb{V} = \mathcal{P}(S)$ , определим связки так:

$$\begin{aligned} \llbracket \alpha \&\beta \rrbracket &= \llbracket \alpha \rrbracket \cap \llbracket \beta \rrbracket \\ \llbracket \alpha \vee \beta \rrbracket &= \llbracket \alpha \rrbracket \cup \llbracket \beta \rrbracket \\ \llbracket \alpha \rightarrow \beta \rrbracket &= S \setminus \llbracket \alpha \rrbracket \cup \llbracket \beta \rrbracket \\ \llbracket \neg\alpha \rrbracket &= S \setminus \llbracket \alpha \rrbracket \end{aligned}$$

Также, будем считать, что  $\models \alpha$ , если  $\llbracket \alpha \rrbracket = S$ .

Покажите, что получившееся:

- (a) корректная модель классического исчисления высказываний. Для уменьшения рутинной работы достаточно показать выполнение схем аксиом 5,9,10 и правила Modus Ponens.
- (b) полная модель классического исчисления высказываний.

### Задание №3. Интуиционистская логика и натуральный вывод.

1. Напомним определения: *замкнутое* множество — такое, дополнение которого открыто. *Внутренностью* множества  $A^\circ$  назовём наибольшее открытое множество, содержащееся в  $A$ . *Замыканием* множества  $\bar{A}$  назовём наименьшее замкнутое множество, содержащее  $A$ . Назовём *окрестностью* точки  $x$  такое открытое множество  $V$ , что  $x \in V$ . Будем говорить, что точка  $x \in A$  *внутренняя*, если существует окрестность  $V$ , что  $V \subseteq A$ . Точка  $x \in A$  — *граничная*, если любая её окрестность  $V$  пересекается как с  $A$ , так и с его дополнением.
  - (a) Покажите, что  $A$  открыто тогда и только тогда, когда все точки  $A$  — внутренние. Также покажите, что  $A^\circ = \{x | x \in A \text{ \& } x \text{ — внутренняя точка}\}$ .
  - (b) Покажите, что  $A$  замкнуто тогда и только тогда, когда содержит все свои граничные точки. Также покажите, что  $\bar{A} = \{x | x \in A \text{ \& } x \text{ — внутренняя или граничная точка}\}$ . Верно ли, что  $\bar{A} = X \setminus ((X \setminus A)^\circ)$ ?
  - (c) Покажите, что внутренность и замыкание корректно определены (что существуют соответствующие наибольшее и наименьшее множества).
  - (d) Введём топологию на деревьях способом, рассмотренным на лекции. Рассмотрим некоторое множество вершин  $V$ . Опишите множества  $V^\circ$  и  $\bar{V}$ . Какие вершины будут являться граничными для  $V$ ?
  - (e) Пусть  $A \subseteq B$ . Как связаны  $A^\circ$  и  $B^\circ$ , а также  $\bar{A}$  и  $\bar{B}$ ?
  - (f) Верно ли  $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$  и  $(A \cup B)^\circ = A^\circ \cup B^\circ$ ?
  - (g) Покажите, что  $\overline{(A^\circ)}^\circ = A^\circ$ .

- (h) *Задача Куратовского.* Будем применять операции взятия внутреннейности и замыкания к некоторому множеству всевозможными способами. Сколько различных множеств может всего получиться?
2. Примеры топологий. Для каждого из примеров ниже проверьте, задано ли в нём топологическое пространство, и ответьте на следующие вопросы, если это так: каковы окрестности точек в данной топологии; каковы будут внутренность и замыкание для данного множества (определите это прямо); каковы замкнутые множества в данной топологии; является ли данная топология моделью для классической логики; связно ли данное пространство.
- (a) Топология Зарисского на  $\mathbb{R}$ :  $\Omega = \{\emptyset\} \cup \{X \subseteq \mathbb{R} \mid \mathbb{R} \setminus X \text{ конечно}\}$ , то есть пустое множество и все множества с конечным дополнением.
- (b) Топология стрелки на  $\mathbb{R}$ :  $\Omega = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(x, +\infty) \mid x \in \mathbb{R}\}$ , то есть пустое, всё пространство и все открытые лучи.
- (c) Множество всех бесконечных подмножеств  $\mathbb{R}$ :  $\Omega = \{\emptyset\} \cup \{X \subseteq \mathbb{R} \mid X \text{ бесконечно}\}$
- (d) Множество всевозможных объединений арифметических прогрессий:  $A(a) = \{a \cdot x \mid x \in \mathbb{Z}\}$ ;  $X \in \Omega$ , если  $X = \emptyset$  или  $X = \bigcup_i A(a_i)$  (все  $a_i > 0$ ). Будет ли это топологическим пространством, если мы будем рассматривать арифметические прогрессии в полной форме, в виде  $a \cdot x + b$ ?
3. Связность.
- (a) Связны ли  $\mathbb{Q}$  и  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  как топологические подпространства  $\mathbb{R}$ ?
- (b) Связно ли множество  $\{0, 1\}$  в топологии стрелки и в топологии Зарисского?
- (c) Покажите, что дерево с отмеченным корнем (с рассмотренной на лекции топологией) связно.
- (d) Покажите, что если лес связан в топологическом смысле, то он состоит из одного дерева.
4. Натуральный вывод был описан на лекции, но примеров доказательств не приводилось. Приведём такой пример:

$$\frac{\frac{\alpha \& \beta \vdash \alpha \& \beta}{\alpha \& \beta \vdash \beta} \quad \frac{\alpha \& \beta \vdash \alpha \& \beta}{\alpha \& \beta \vdash \alpha}}{\alpha \& \beta \vdash \beta \& \alpha}$$

Постройте следующие доказательства в натуральном выводе:

- (a)  $\alpha \vdash \neg \neg \alpha$
- (b)  $\neg \alpha \vee \beta \vdash \alpha \rightarrow \beta$
- (c)  $\alpha \rightarrow \beta \vdash \neg \beta \rightarrow \neg \alpha$
- (d)  $\alpha \vee \beta \vdash \neg(\neg \alpha \& \neg \beta)$
5. Чтобы избежать путаницы, обозначим выводимость в ИИВ «гильбертовского стиля» как  $\vdash_{\Gamma}$ , а знак  $\vdash$  в ИИВ «системы натурального (естественного) вывода» как  $\vdash_{\text{н}}$ .

Напомним, что языки гильбертовского и натурального выводов отличаются (обозначим эти языки как  $\mathcal{L}_{\Gamma}$  и  $\mathcal{L}_{\text{н}}$  соответственно).

Определим функции, отображающие языки друг в друга:  $|\cdot|_{\text{н}} : \mathcal{L}_{\Gamma} \rightarrow \mathcal{L}_{\text{н}}$  и  $|\cdot|_{\Gamma} : \mathcal{L}_{\text{н}} \rightarrow \mathcal{L}_{\Gamma}$ . Они сохраняют почти все значения, кроме лжи ( $\perp$ ) и отрицания ( $\neg$ ):

$$|\sigma|_{\text{н}} = \begin{cases} |\alpha|_{\text{н}} \rightarrow \perp, & \sigma \equiv \neg \alpha \\ |\alpha|_{\text{н}} \star |\beta|_{\text{н}}, & \sigma \equiv \alpha \star \beta \\ X, & \sigma \equiv X \end{cases} \quad |\sigma|_{\Gamma} = \begin{cases} A \& \neg A, & \sigma \equiv \perp \\ |\alpha|_{\Gamma} \star |\beta|_{\Gamma}, & \sigma \equiv \alpha \star \beta \\ X, & \sigma \equiv X \end{cases}$$

Естественным образом расширим эти операции на контексты:  $|\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n| = |\gamma_1|, |\gamma_2|, \dots, |\gamma_n|$ .

- (a) Пусть  $\Gamma \vdash_{\Gamma} \alpha$ . Покажите, что  $|\Gamma|_{\text{н}} \vdash_{\text{н}} |\alpha|_{\text{н}}$ : предложите общую схему перестроения доказательства, постройте доказательства для трёх случаев базы (схема аксиом 2, схема аксиом 5, схема аксиом 9) и одного случая перехода индукции.
- (b) Пусть  $\Gamma \vdash_{\text{н}} \alpha$ . Покажите, что  $|\Gamma|_{\Gamma} \vdash_{\Gamma} |\alpha|_{\Gamma}$  (постройте схему доказательства, и покажите один случай базы и три случая перехода индукции).
- (c) Покажите аналог теоремы о дедукции:  $\Gamma \vdash_{\text{н}} \alpha \rightarrow \beta$  тогда и только тогда, когда  $\Gamma, \alpha \vdash_{\text{н}} \beta$ .

6. Покажите, что открытые множества топологического пространства с отношением порядка ( $\subseteq$ ) образуют импликативную решётку с нулём.
7. Напомним, что линейным порядком называется такой порядок  $\langle X, \leq \rangle$ , что для любых  $x, y \in X$  выполнено  $x \leq y$  или  $y \leq x$ . Задаёт ли линейный порядок решётку? Дистрибутивна, импликативна ли она, есть ли в ней 0 и 1?
8. Рассмотрим  $\mathbb{N}_0$  (натуральные числа с нулём) с традиционным отношением порядка как решётку. Каков будет смысл операций  $(+)$ ,  $(\cdot)$  и  $(\rightarrow)$  в данной решётке, определены ли 0 или 1? Верно ли, что  $2 \cdot 2 = 4$  или  $2 + 2 = 4$ ? Приведите какие-нибудь три свойства традиционных определений  $(+)$  и  $(\cdot)$ , которые будут всё равно выполнены при таком переопределении, и три свойства, которые перестанут выполняться.
9. Постройте следующие примеры:
  - (а) непустого частично-упорядоченного множества, имеющего операцию  $(+)$  для всех элементов, но не имеющего  $(\cdot)$  для некоторых; имеющего операцию  $(\cdot)$  для всех элементов, но не имеющего  $(+)$  для некоторых.
  - (б) решётки, не являющейся дистрибутивной решёткой; импликативной решётки без 0.
  - (в) дистрибутивной, но не импликативной решётки (эта решётка не может быть конечной).
10. Покажите, что в дистрибутивной решётке (всегда  $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$ ) также выполнено и  $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$ .
11. Покажите следующие тождества и свойства для импликативных решёток:
  - (а) ассоциативность:  $a + (b + c) = (a + b) + c$  и  $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ ;
  - (б) монотонность: пусть  $a \leq b$  и  $c \leq d$ , тогда  $a + c \leq b + d$  и  $a \cdot c \leq b \cdot d$ ;
  - (в) Законы поглощения:  $a \cdot (a + b) = a$ ;  $a + (a \cdot b) = a$ ;
  - (г)  $a \leq b$  выполнено тогда и только тогда, когда  $a \rightarrow b = 1$ ;
  - (д) из  $a \leq b$  следует  $b \rightarrow c \leq a \rightarrow c$  и  $c \rightarrow a \leq c \rightarrow b$ ;
  - (е) из  $a \leq b \rightarrow c$  следует  $a \cdot b \leq c$ ;
  - (ж)  $b \leq a \rightarrow b$  и  $a \rightarrow (b \rightarrow a) = 1$ ;
  - (з)  $a \rightarrow b \leq ((a \rightarrow (b \rightarrow c)) \rightarrow (a \rightarrow c))$ ;
  - (и)  $a \leq b \rightarrow a \cdot b$  и  $a \rightarrow (b \rightarrow (a \cdot b)) = 1$ ;
  - (к)  $a \rightarrow c \leq (b \rightarrow c) \rightarrow (a + b \rightarrow c)$ ;
  - (л) импликативная решётка дистрибутивна:  $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$
12. Докажите, основываясь на формулах предыдущих заданий, что ИИВ (вариант натурального вывода) корректно, если в качестве модели выбрать импликативную решётку с 0, а функции оценок определить так:

$$\begin{aligned}
 \llbracket \alpha \&\beta \rrbracket &= \llbracket \alpha \rrbracket \cdot \llbracket \beta \rrbracket \\
 \llbracket \alpha \vee \beta \rrbracket &= \llbracket \alpha \rrbracket + \llbracket \beta \rrbracket \\
 \llbracket \alpha \rightarrow \beta \rrbracket &= \llbracket \alpha \rrbracket \rightarrow \llbracket \beta \rrbracket \\
 \llbracket \neg \alpha \rrbracket &= \llbracket \alpha \rrbracket \rightarrow 0 \\
 \llbracket \perp \rrbracket &= 0
 \end{aligned}$$

Оценка турникета определяется через импликацию:  $\llbracket \gamma_1, \dots, \gamma_n \vdash \alpha \rrbracket = \llbracket \gamma_1 \rightarrow \dots \gamma_n \rightarrow \alpha \rrbracket$ .

## Задание №4. Интуиционистская логика.

1. Покажите, что какая бы ни была формула  $\alpha$  и модель Крипке, если  $W_i \Vdash \alpha$  и  $W_i \leq W_j$ , то  $W_j \Vdash \alpha$ .
2. Общезначимы ли следующие высказывания в ИИВ? Опровергните, построив модель Крипке, или докажите, построив натуральный вывод.
  - (а)  $P \vee \neg P$ ;
  - (б)  $\neg \neg P \rightarrow P$ ;
  - (в)  $P \vee \neg P \vee \neg \neg P \vee \neg \neg \neg P$ ;
  - (г)  $((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow P$ ;

- (e)  $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow C) \vee (C \rightarrow A)$ ;
  - (f)  $\neg(\neg A \& \neg B) \rightarrow A \vee B$ ;
  - (g)  $(\neg A \vee B) \rightarrow (A \rightarrow B)$ ;
  - (h)  $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \vee B)$ ;
  - (i)  $\neg \perp$ .
3. Рассмотрим некоторую модель Крипке  $\langle \mathfrak{M}, \leq, \Vdash \rangle$ . Пусть  $\Omega = \{W \subseteq \mathfrak{M} \mid \text{если } W_i \in W \text{ и } W_i \leq W_j, \text{ то } W_j \in W\}$ . Пусть  $\mathcal{W}_\alpha := \{W_i \in \mathfrak{M} \mid W_i \Vdash \alpha\}$  (множество миров, где вынуждена формула  $\alpha$ ).
- (a) На лекции формулировалась теорема без доказательства, что пара  $\langle \mathfrak{M}, \Omega \rangle$  — топологическое пространство. Докажите её.
  - (b) Пусть  $\mathcal{W}_\alpha$  и  $\mathcal{W}_\beta$  — открытые множества. Выразите  $\mathcal{W}_{\alpha \& \beta}$  и  $\mathcal{W}_{\alpha \vee \beta}$  через  $\mathcal{W}_\alpha$  и  $\mathcal{W}_\beta$  и покажите, что они также открыты.
  - (c) Пусть  $\mathcal{W}_\alpha$  и  $\mathcal{W}_\beta$  — открытые множества. Выразите  $\mathcal{W}_{\alpha \rightarrow \beta}$  через них и покажите, что оно также открыто.
  - (d) Покажите, что  $\Omega$  — в точности множество всех множеств миров, на которых может быть вынуждена какая-либо формула. А именно, покажите, что для любой формулы  $\alpha$  множество миров  $\mathcal{W}_\alpha$ , где она вынуждена, всегда открыто ( $\mathcal{W}_\alpha \in \Omega$ ) — и что для любого открытого множества найдётся формула, которая вынуждена ровно на нём (для  $Q \in \Omega$  существует формула  $\alpha$ , что  $\mathcal{W}_\alpha = Q$ ).
4. Постройте топологическое пространство, соответствующее (в смысле предыдущего задания) модели Крипке, опровергающей высказывание  $\neg\neg P \rightarrow P$ . Постройте соответствующую ему табличную модель.
5. Назовём *древовидной* моделью Крипке модель, в которой множество миров  $\mathfrak{M}$  упорядочено как дерево: (a) существует наименьший мир  $W_0$ ; (b) для любого  $W_i \neq W_0$  существует единственный предшествующий мир  $W_k : W_k < W_i$ .
- (a) Докажите, что любое высказывание, опровергаемое моделью Крипке, может быть опровергнуто древовидной моделью Крипке.
  - (b) Найдите высказывание, которое не может быть опровергнуто древовидной моделью Крипке высотой менее 2.
  - (c) Покажите, что для любого натурального  $n$  найдётся опровержимое в моделях Крипке высказывание, неопровергаемое никакой моделью с  $n$  мирами.
6. Покажите, что модель Крипке с единственным миром задаёт классическую модель (в ней выполнены все доказуемые в КИВ высказывания).
7. Пусть заданы алгебры Гейтинга  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ , гомоморфизм  $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  и согласованные оценки  $\llbracket \cdot \rrbracket_{\mathcal{A}}$  и  $\llbracket \cdot \rrbracket_{\mathcal{B}}$ :  $\varphi(\llbracket \alpha \rrbracket_{\mathcal{A}}) = \llbracket \alpha \rrbracket_{\mathcal{B}}$ .
- (a) Покажите, что гомоморфизм сохраняет порядок: если  $a_1 \leq a_2$ , то  $\varphi(a_1) \leq \varphi(a_2)$ .
  - (b) Покажите, что если  $\llbracket \alpha \rrbracket_{\mathcal{A}} = 1_{\mathcal{A}}$ , то  $\llbracket \alpha \rrbracket_{\mathcal{B}} = 1_{\mathcal{B}}$ .
8. Пусть заданы алгебры Гейтинга  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ . Всегда ли можно построить гомоморфизм  $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ?
9. Пусть  $\mathcal{A}$  — алгебра Гейтинга. Покажите, что  $\Gamma(\mathcal{A})$  — алгебра Гейтинга и гёделева алгебра.
10. Пусть  $\mathcal{A}$  — булева алгебра. Всегда ли (возможно ли, что)  $\Gamma(\mathcal{A})$  будет булевой алгеброй?

## Задание №5. Исчисление предикатов

1. Докажем теоремы про подстановку и свободу для подстановки:
- (a) Рассмотрим замену  $\alpha[x := y]$ . Пусть в этой замене есть свобода для подстановки  $y$  вместо  $x$  в  $\alpha$  и  $y$  не входит свободно в  $\alpha$ . Необходимы ли оба условия — или какое-нибудь следует из другого?
  - (b) Если  $y$  свободен для подстановки вместо  $x$  в  $\alpha$ , то  $\llbracket \alpha[x := y] \rrbracket = \llbracket \alpha \rrbracket^{x:=y}$ .
  - (c) Если  $\theta$  свободна для подстановки вместо  $x$  в  $\alpha$ , то  $\llbracket \alpha[x := \theta] \rrbracket = \llbracket \alpha \rrbracket^{x:=\theta}$ .

- (d) Если нет свободы для подстановки  $\theta$  вместо  $x$  в  $\alpha$ , то бывает, что  $\llbracket \alpha[x := \theta] \rrbracket \neq \llbracket \alpha \rrbracket^{x:=\theta}$ .
- (e) Возможны ли случаи, когда нет свободы для подстановки  $\theta$  вместо  $x$  в  $\alpha$ , но  $\llbracket \alpha[x := \theta] \rrbracket = \llbracket \alpha \rrbracket^{x:=\theta}$ ?
2. Покажите, что исчисление предикатов корректно:
- (a) если  $\vdash \alpha$ , то  $\models \alpha$ ;
- (b) если  $\Gamma \vdash \alpha$ , то  $\Gamma \models \alpha$
3. Докажите следующие формулы в исчислении предикатов:
- (a)  $(\forall x.\phi) \rightarrow (\forall y.\phi[x := y])$ , если есть свобода для подстановки  $y$  вместо  $x$  в  $\phi$  и  $y$  не входит свободно в  $\phi$ .
- (b)  $(\exists x.\phi) \rightarrow (\exists y.\phi[x := y])$ , если есть свобода для подстановки  $y$  вместо  $x$  в  $\phi$  и  $y$  не входит свободно в  $\phi$ .
- (c)  $(\forall x.\phi) \rightarrow (\exists x.\phi)$
- (d)  $(\forall x.\forall x.\phi) \rightarrow (\forall x.\phi)$
- (e)  $(\forall x.\phi) \rightarrow (\neg \exists x.\neg \phi)$
- (f)  $(\exists x.\phi) \rightarrow (\neg \forall x.\neg \phi)$
- (g)  $(\forall x.\neg \phi) \rightarrow (\neg \exists x.\phi)$
- (h)  $(\exists x.\neg \phi) \rightarrow (\neg \forall x.\phi)$
4. Опровергните формулы  $\phi \rightarrow \forall x.\phi$  и  $(\exists x.\phi) \rightarrow (\forall x.\phi)$
5. Рассмотрим формулу  $\alpha$  с двумя свободными переменными  $x$  и  $y$  (мы предполагаем, что эти метаварьи соответствуют разным переменным). Определите, какие из сочетаний кванторов выводятся из каких — и приведите соответствующие доказательства или опровержения:
- (a)  $\forall x.\forall y.\alpha, \forall y.\forall x.\alpha$
- (b)  $\exists x.\exists y.\alpha, \exists y.\exists x.\alpha$
- (c)  $\forall x.\forall y.\alpha, \forall x.\exists y.\alpha, \exists x.\forall y.\alpha, \exists x.\exists y.\alpha$
- (d)  $\forall x.\exists y.\alpha, \exists y.\forall x.\alpha$
6. Научимся выносить квантор всеобщности «наружу»:
- (a) Покажите, что если  $x$  не входит свободно в  $\alpha$ , то
- $$\vdash (\alpha \& \forall x.\beta) \rightarrow (\forall x.\alpha \& \beta) \quad \text{и} \quad \vdash ((\forall x.\beta) \& \alpha) \rightarrow (\forall x.\beta \& \alpha)$$
- (b) Покажите, что
- $$\vdash ((\forall x.\alpha) \& (\forall y.\beta)) \rightarrow \forall x.\forall y.\alpha \& \beta$$
- где  $x$  не входит свободно в  $\beta$ , а  $y$  — в  $\alpha$ .
7. Научимся вносить квантор всеобщности «внутрь»:
- (a) Покажите, что если  $x$  не входит свободно в  $\alpha$ , то
- $$\vdash (\forall x.\alpha \& \beta) \rightarrow (\alpha \& \forall x.\beta) \quad \text{и} \quad \vdash (\forall x.\beta \& \alpha) \rightarrow ((\forall x.\beta) \& \alpha)$$
- (b) Покажите, что если  $x$  не входит свободно в  $\beta$ , а  $y$  — в  $\alpha$ , то
- $$\vdash (\forall x.\forall y.\alpha \& \beta) \rightarrow (\forall x.\alpha) \& (\forall y.\beta)$$
8. Научимся работать со спрятанными глубоко кванторами. Пусть  $\vdash \alpha \rightarrow \beta$ , тогда:
- (a) Докажите:
- $$\vdash \psi \vee \alpha \rightarrow \psi \vee \beta \quad \vdash \psi \& \alpha \rightarrow \psi \& \beta \quad \vdash (\psi \rightarrow \alpha) \rightarrow (\psi \rightarrow \beta) \quad \vdash (\beta \rightarrow \psi) \rightarrow (\alpha \rightarrow \psi)$$
- (b) Сформулируйте и докажите аналогичное свойство для отрицания.
- (c) Докажите  $\vdash (\forall x.\alpha) \rightarrow (\forall x.\beta)$ . Надо ли наложить на формулы  $\alpha$  и  $\beta$  какие-либо ограничения?
- (d) Докажите  $\vdash (\exists x.\alpha) \rightarrow (\exists x.\beta)$ . Надо ли наложить на формулы  $\alpha$  и  $\beta$  какие-либо ограничения?

## Задание №6. Неразрешимость исчисления предикатов, аксиоматика Пеано и формальная арифметика

1. Постройте машины Тьюринга:

- (a) Превращающую строку из 0 и 1 в пустую (заменяет все символы на  $\varepsilon$ );
- (b) Прибавляющую 1 к двоичному числу на ленте;
- (c) Разрешающую язык четверичных чисел, делящихся на 3 (оставляющую на ленте букву «д» или «н», в зависимости от делимости);
- (d) Копирующую строку из 0 и 1, заканчивающуюся на \*, на свободное место на ленте за звёздочкой. Например, 10100\* станет 10100\*10100.

2. Предложите способ закодировать машину Тьюринга в алфавите из конечного количества символов (количество не должно зависеть от машины).

3. Покажите в аксиоматике Пеано:

- (a) ассоциативность сложения;
- (b) коммутативность умножения;
- (c) дистрибутивность  $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ ;
- (d) ассоциативность умножения;

4. Рассмотрим аксиоматику Пеано. Определим отношение «меньше или равно» так:  $0 \leq a$  и  $a' \leq b'$ , если  $a \leq b$ . Покажите, что:

- (a)  $x \leq x + y$ ;
- (b)  $x \leq x \cdot y$  (укажите, когда это так — в остальных случаях приведите контрпримеры);
- (c)  $a'' + b'' \leq (a'') \cdot (b'')$ ;
- (d) Если существует  $n$ , что  $x + n = y$ , то  $x \leq y$ .
- (e) Будем говорить, что  $a$  делится на  $b$  с остатком, если существуют такие  $p$  и  $q$ , что  $a = b \cdot p + q$  и  $0 \leq q < b$ . Покажите, что  $p$  и  $q$  всегда существуют и единственны, если  $b > 0$ .

5. Обозначим за  $\bar{n}$  представление числа  $n$  в формальной арифметике, по сути это ноль с  $n$  штрихами:

$$\bar{n} = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ (\bar{k})', & n = k + 1 \end{cases}$$

Докажите в формальной арифметике:

- (a)  $\vdash \bar{2} \cdot \bar{2} = \bar{4}$  (теперь вы знаете правду);
- (b)  $\vdash \forall p. (\exists q. q' = p) \vee p = 0$  (единственность нуля — нужна ли здесь аксиома A3?);
- (c)  $\vdash p \cdot q = 0 \rightarrow p = 0 \vee q = 0$  (отсутствие делителей нуля);

6. Будем говорить, что  $k$ -местное отношение  $R$  выразимо в формальной арифметике, если существует формула формальной арифметики  $\rho$  со свободными переменными  $x_1, \dots, x_k$ , что:

- (a) для всех  $\langle a_1, \dots, a_k \rangle \in R$  выполнено  $\vdash \rho[x_1 := \bar{a}_1] \dots [x_k := \bar{a}_k]$  (доказуема формула  $\rho$  с подставленными значениями  $a_1, \dots, a_k$  вместо свободных переменных  $x_1, \dots, x_k$ );
- (b) для всех  $\langle a_1, \dots, a_k \rangle \notin R$  выполнено  $\vdash \neg \rho[x_1 := \bar{a}_1] \dots [x_k := \bar{a}_k]$ .

Выразите в формальной арифметике (укажите формулу  $\rho$  и докажите требуемые свойства про неё):

- (a) «полное» отношение  $R = \mathbb{N}^2$ ;
- (b) отношение  $(=)$ ;
- (c) унарное отношение «быть чётным числом».



## Задание №7. Выразимость и представимость. Теорема Гёделя о неполноте арифметики.

1. Докажите, что следующие функции примитивно-рекурсивны. Для каждой функции предложите программу; например, на языке C++ (с шаблонами), или на любом другом языке, где можно формально записать выражение для рекурсивной функции.

(a) ограниченное вычитание:

$$a \dot{-} b = \begin{cases} a - b, & a \geq b \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

(b) умножение;

(c) возведение в степень;

(d) целочисленное деление;

(e) остаток от деления;

(f) проверка числа на простоту;

(g) поиск  $n$ -го простого числа;

(h) наибольший общий делитель двух чисел;

(i) частичный логарифм;

(j) пусть  $l = 2^{a_0} \cdot 3^{a_1} \cdot \dots \cdot p_{n-1}^{a_{n-1}}$ , определите функцию «голова списка»;

(k) хвост списка;

(l) конкатенация списков.

2. Покажите, что функция Аккермана рекурсивна, для этого:

(a) реализуйте стек: функции добавления элемента в стек и изъятия элемента из стека;

(b) реализуйте функцию Аккермана.

3. Докажите (без пропусков частей доказательств), что следующие функции представимы в формальной арифметике:

(a) примитив  $Z$ ;

(b) примитив  $N$ ;

(c) декремент (ограниченное вычитание 1).

4. Найдите константы  $b$  и  $c$  бета-функции Гёделя для последовательности трёх чисел 10, 3, 7.

5. Определим характеристическую функцию для отношения  $R$ :

$$C_R(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1, & \langle x_1, \dots, x_n \rangle \in R \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Покажите, что  $C_R(x_1, \dots, x_n)$  представимо в формальной арифметике тогда и только тогда, когда  $R$  выразимо в формальной арифметике.

6. Покажите, что в теории первого порядка доказуемы все формулы тогда и только тогда, когда доказуема формула  $\bar{1} = 0$  (иными словами, когда теория противоречива).

7. Предложите непротиворечивую, но  $\omega$ -противоречивую теорию первого порядка.

## Задание 8. Теория множеств

1. Пусть заданы списки (в любом языке программирования)  $L(\alpha)$ , хранящие значения типа  $\alpha$ . Реализуйте следующие функции, являющиеся аналогами конструктивных аксиом теории множеств:

(a) **empty** :  $L(\alpha)$ , строит пустой список, и **pair** :  $(\alpha, \alpha) \rightarrow L(\alpha)$ , формирует список из двух своих аргументов.

(b) **flatten** :  $L(L(\alpha)) \rightarrow L(\alpha)$ , соединяет все списки внутри списка в один.

(c) **powerset** :  $L(\alpha) \rightarrow L(L(\alpha))$ , делает из списка список всех возможных подсписков.

- (d) **filter** :  $(\alpha \rightarrow \text{bool}) \rightarrow L(\alpha) \rightarrow L(\alpha)$ , выделяет из списка все элементы, соответствующие условию.
2. На самом деле ординалы — это не списки, а деревья. Перепишите задачу 1 соответствующим образом, и напишите функцию **ordinal** :  $\text{int} \rightarrow \text{set}$ , строящую ординал, соответствующий заданному числу. Множество можно строить только через аналоги функций из 1 задания.
3. Определим упорядоченную пару  $\langle a, b \rangle := \{\{a\}, \{a, b\}\}$ . Покажите, что:
- (a) Упорядоченная пара — множество.
  - (b)  $\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle$  тогда и только тогда, когда  $a = c$  и  $b = d$ .
4. Докажите, что следующие конструкции являются множествами:
- (a) пересечение всех элементов множества  $(\bigcap a)$ ;
  - (b)  $a \setminus b$  (разность множеств);
  - (c)  $a \uplus b$  (дизъюнктное объединение множеств:  $\{\langle x, 0 \rangle \mid x \in a\} \cup \{\langle x, 1 \rangle \mid x \in b\}$ );
  - (d)  $a \times b$  (декартово произведение множеств:  $\{\langle p, q \rangle \mid p \in a, q \in b\}$ ).
5. Определите формулу  $\varphi(x)$  для свойства « $x$  — конечный ординал». Укажите замкнутый вид для формулы  $\omega$ .
6. Покажите, что если  $x$  — ординал, то  $x'$  — тоже ординал.
7. Верно ли, что если  $x'$  — ординал, то  $x$  — тоже ординал?
8. Покажите, что на множестве  $\omega$  выполняется аксиоматика Пеано (полная формализация рассуждений не требуется, но из изложения должно быть понятно, как эту формализацию в рамках теории первого порядка получить):
- (a)  $\forall x. x \in \omega \rightarrow \neg x' = \emptyset$
  - (b)  $\forall x. \forall y. x \in \omega \ \& \ y \in \omega \rightarrow x' = y' \rightarrow x = y$
  - (c) (указание к следующему пункту) покажите, что если  $\vdash \forall x. \neg \phi(x) \rightarrow A \ \& \ \neg A$ , то  $\vdash \forall x. \phi(x)$ .
  - (d) Если  $\phi(\emptyset)$  и  $\forall x. x \in \omega \rightarrow \phi(x) \rightarrow \phi(x')$ , то  $\forall x. x \in \omega \rightarrow \phi(x)$ .
9. Проверьте следующие равенства (докажите или опровергните):
- (a)  $\omega \cdot \bar{2} = \bar{2} \cdot \omega$
  - (b)  $\omega \cdot \bar{2} = \omega + \omega$
  - (c)  $(\omega + \bar{1})^{\bar{2}} = \omega^{\bar{2}} + \bar{2} \cdot \omega + \bar{1}$
  - (d)  $\omega^\omega = (\omega^{\bar{2}})^\omega$
  - (e)  $\omega^{\omega + \bar{1}} = \omega^\omega + \bar{1}$
  - (f) Имеет ли место ассоциативность сложения и/или умножения?

## Задание 9. Аксиома выбора. Мощность множеств

1. Верно ли, что  $1^\omega = \omega$  и/или  $\omega^1 = \omega$ ?
2. Зачёт за пункт ставится, если одновременно решены два подпункта: (i) Покажите, что множество  $\omega^\omega$  имеет счётную мощность. (ii) Определим  $\uparrow k$  (башню из омег) так:

$$\uparrow k = \begin{cases} \omega, & k = 1 \\ \omega^{\uparrow n}, & k = n' \end{cases}$$

Скажем,  $\uparrow 3 = \omega^{(\omega^\omega)}$ . Будет ли счётным ординал  $\sup\{\uparrow k \mid k \in \omega\}$ ?

3. Существует ли ординал, которому соответствует множество неотрицательных рациональных чисел и упорядоченность на нём? То есть, существует ли ординал  $\sigma$ , что существует биекция  $f : \mathbb{Q}^+ \rightarrow \sigma$ , причём для всех  $a, b \in \mathbb{Q}^+$  из  $a \leq b$  следует  $f(a) \leq f(b)$  (и обратно).
4. Верно ли, что для любого отношения полного порядка на счётном множестве существует соответствующий ему ординал, имеющий тот же порядок?

5. Покажите следующее (обозначим за  $\mathcal{F}(p, q)$  множество функций из  $p$  в  $q$ ):
- (а)  $|a| = 0$  тогда и только тогда, когда  $a = \emptyset$ ;
  - (б) если  $|a| \leq |b|$ , то  $|\mathcal{F}(g, a)| \leq |\mathcal{F}(g, b)|$ ;
  - (с) если  $|a| \leq |b|$  и  $\bar{0} < |g|$ , то  $|\mathcal{F}(a, g)| \leq |\mathcal{F}(b, g)|$ ;
  - (д)  $|\mathcal{F}(\bar{0}, a)| = \bar{1}$ ,  $|\mathcal{F}(\bar{1}, a)| = \bar{1}$ ; если  $|a| > 0$ , то  $|\mathcal{F}(a, \bar{0})| = \bar{0}$ ;
  - (е) если  $|a| \geq \aleph_0$  и  $0 < |n| < \aleph_0$ , то  $|\mathcal{F}(a, n)| = a$ .
6. Покажите эквивалентность следующих определений конечного множества (задание  $(k)$  предполагает доказательство импликации  $(k) \rightarrow (k')$ ; возможно, некоторые из переходов потребуют аксиому выбора):
- (а)  $a$  конечно, если каждое непустое семейство подмножеств  $a$  имеет максимальный по включению элемент. Например, при  $a = \{0, 1, 2\}$  в семействе подмножеств  $\{\emptyset, \{0, 1\}, \{1, 2\}\}$  элементы  $\{0, 1\}$  и  $\{1, 2\}$  — максимальны.
  - (б)  $a$  конечно, если  $\mathcal{P}(a)$  не равномощно своему собственному подмножеству (собственное подмножество — подмножество, не совпадающее с множеством).
  - (с)  $a$  конечно, если оно не равномощно своему собственному подмножеству.
  - (д)  $a$  конечно, если  $|a| = \emptyset$  или  $|a| \cdot \bar{2} > |a|$ .
  - (е)  $a$  конечно, если  $|a| = \emptyset$  или  $|a| = \bar{1}$  или  $|a|^2 > |a|$ .
  - (ф)  $a$  конечно, если  $|a| < \aleph_0$ .
7. Покажите, что функция  $f : a \rightarrow b$  биективна (т.е. инъективна и сюръективна) тогда и только тогда, когда  $\forall y. \exists! x. \phi(x, y)$ . Здесь за  $\phi(x, y)$  мы обозначаем формулу, представляющую функцию  $f$  в теории множеств, по аналогии с формальной арифметикой.
8. Покажите, что если  $a$  и  $b$  — непустые множества, то существует функция из  $a$  в  $b$  (однако, функция не обязана быть инъективной или сюръективной).
9. Пусть множество  $a$  вполне упорядоченное. Назовём множество  $\{x \in a \mid x < y\}$ , где  $y \in a$ , начальным отрезком  $a$ . Рассмотрим произвольную пару вполне упорядоченных множеств  $a$  и  $b$ . Покажите, что либо между  $a$  и  $b$  есть биекция, сохраняющая порядок (такая, что  $x < y$  влечёт  $f(x) < f(y)$ ), либо есть инъективное отображение из одного множества в начальный отрезок другого, также сохраняющее порядок.

## Задание 10. Система $S_\infty$

1. Определите отношение «больше или равно». Покажите, что  $x^2 \geq x$ .
2. Покажите аксиому  $\forall a. a \cdot 0 = 0$ .
3. Постройте и докажите дополнительное правило вывода

$$\frac{\forall a. \forall b. a = b}{\forall a. \forall b. a' = b'}$$

Какой порядок имеет доказательство?

4. Постройте утверждение, доказательство которого не может иметь порядок, меньший  $\omega$ .
5. Добавьте в исчисление связку  $(\rightarrow)$  и:
  - (а) Введите правила для импликации. Покажите, что в  $S_\infty$  эти правила выполнены.
  - (б) Покажите, что если  $\pi$  и  $\rho$  — замкнутые формулы, то в  $S_\infty$  выполнен закон Пирса  $((\pi \rightarrow \rho) \rightarrow \pi) \rightarrow \pi$ .
6. Пусть формулы  $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$  и  $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$  доказаны при любых формулах  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ .
  - (а) Достройте доказательство

$$\frac{\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha \quad (\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)}{\alpha \rightarrow \alpha}$$

- (б) Устраните сечения согласно методу из разобранной на занятии теоремы из доказательства в предыдущем пункте.

## Задание 11. Лямбда-исчисление

- Напомним правила расстановки скобок в лямбда-выражениях. Лямбда-абстракция ведёт себя жадно: включает всё, что может. Пример:  $\lambda z.(\lambda x.a\ b\ c\ \lambda y.d\ e)\ f$  эквивалентно  $\lambda z.((\lambda x.(a\ b\ c\ (\lambda y.(d\ e))))\ f)$ . В аппликациях скобки расставляются слева направо:  $\lambda z.(\lambda x.(a\ b\ c\ (\lambda y.(d\ e))))\ f$  можно преобразовать в  $(\lambda z.((\lambda x.(((a\ b)\ c)\ (\lambda y.(d\ e))))\ f))$ .

- Расставьте скобки в выражении:  $\lambda z.\lambda x.a\ b\ c\ \lambda y.d\ e\ f$
- Уберите все «лишние» скобки из выражения:  $(\lambda f.((\lambda x.(f\ (f\ (x\ (\lambda z.(z\ x))))))\ z))$
- Всегда ли лишние скобки можно убрать единственным образом (когда из результирующего выражения нельзя больше убрать ни одной пары скобок)? Докажите или опровергните.

- Напомним/дадим следующие определения:

- Бета-редекс — выражение вида  $(\lambda x.A)B$
- Редукция лямбда-выражения — подстановка выражения вместо переменной в бета-редексе:  $(\lambda x.A)\ B \rightarrow_\beta A[x := B]$ . Замена может производиться внутри выражения:  $\lambda s.(\lambda x.x)\ t \rightarrow_\beta \lambda s.t$
- Многошаговая бета-редукция (бета-редуцируемость) — транзитивное и рефлексивное замыкание бета-редукции:  $(\lambda x.x)\ (\lambda x.x)\ (\lambda x.x)\ (\lambda x.x) \rightarrow_\beta \lambda x.x$
- Лямбда-выражение в нормальной форме — в нём невозможно сделать ни одной редукции.
- Некоторые термы для представления логических выражений в лямбда-исчислении:

Обозначение	лямбда-терм	название
$T$	$\lambda a.\lambda b.a$	истина
$F$	$\lambda a.\lambda b.b$	ложь
$Not$	$\lambda x.x\ F\ T$	отрицание
$And$	$\lambda x.\lambda y.x\ y\ F$	конъюнкция

Проредукцируйте следующие выражения и найдите нормальную форму:

- $T\ F$
- $(T\ Not\ (\lambda t.t))\ F$
- $And\ (And\ F\ F)\ T$

- Постройте лямбда-выражения для следующих булевских выражений:

- Дизъюнкция
- Стрелка Пирса («или-не»)
- Исключающее или

- Напомним определения с лекций:

$$f^{(n)}\ X ::= \begin{cases} X, & n = 0 \\ f^{(n-1)}\ (f\ X), & n > 0 \end{cases}$$

Обозначение	лямбда-терм	название
$\bar{n}$	$\lambda f.\lambda x.f^{(n)}\ x$	чёрчевский нумерал
$(+1)$	$\lambda n.\lambda f.\lambda x.n\ f\ (f\ x)$	прибавление 1
$(+)$	$\lambda a.\lambda b.a\ (+1)\ b$	сложение

Используя данные определения и определения операций из аксиоматики Пеано, постройте выражения для следующих операций над числами. Для демонстрации корректности работы используйте интерпретатор лямбда-исчисления, например LCI <http://www.chatzi.org/lci/>.

- Умножение на 2 ( $Mul2$ )
- Умножение
- Возведение в степень
- Проверка на чётность
- IsZero: возвращает  $T$ , если аргумент равен нулю, иначе  $F$

(f) Деление на 3

5. Ещё немного определений:

Обозначение	лямбда-терм	название
$MkPair$	$\lambda a. \lambda b. (\lambda x. x \ a \ b)$	создание пары
$PrL$	$\lambda p. p \ T$	левая проекция
$PrR$	$\lambda p. p \ F$	правая проекция

- (a) Убедитесь, что  $PrL \ (MkPair \ a \ b) \rightarrow_{\beta} a$ .
- (b) Постройте операцию вычитания 1 из числа
- (c) Постройте операцию вычитания чисел
- (d) Постройте операцию деления на 3 (могут потребоваться пары и/или вычитания)
- (e) Постройте операцию деления чисел
- (f) Сравнение двух чисел ( $IsLess$ ) — истина, если первый аргумент меньше второго.

Для демонстрации корректности работы используйте интерпретатор лямбда-исчисления, например LCI <http://www.chatzi.org/lci/>.

6. Покажите при помощи изоморфизма Карри-Ховарда следующие высказывания (для демонстрации укажите выражение на Хаскеле/Окамле, имеющее соответствующий тип):

- (a)  $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$
- (b)  $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \neg \beta) \rightarrow \neg \alpha$
- (c)  $\alpha \rightarrow \neg \neg \alpha$
- (d)  $(\neg \alpha \vee \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$
- (e)  $(\alpha \ \& \ \beta) \rightarrow \neg(\neg \alpha \vee \neg \beta)$

7. Алгебраические типы называются так потому, что позволяют ввести своеобразную алгебру на типах: собственно алгебраический тип (тип-сумма)  $(\alpha + \beta)$  — сумма, пара  $(\alpha \times \beta)$  — произведение, функция  $(\alpha \rightarrow \beta)$  — возведение в степень  $\beta^{\alpha}$ . Докажите следующие тождества (напишите две функции — первая из правой части равенства делает левую, а вторая — из левой правую):

- (a)  $\alpha \times (\beta + \gamma) = \alpha \times \beta + \alpha \times \gamma$
- (b)  $\alpha^{\beta + \gamma} = \alpha^{\beta} \times \alpha^{\gamma}$
- (c)  $\alpha^{\beta \times \gamma} = (\alpha^{\beta})^{\gamma}$  (иначе называется *карринг*)