Теория множеств

Парадоксы теории множеств

1. Неограниченный принцип абстракции $\{x \mid P(x)\}$

Парадоксы теории множеств

1. Неограниченный принцип абстракции $\{x \mid P(x)\}$
2. $X = \{x \mid x \notin x\}$. Выполнено ли $X \in X$?

Парадоксы теории множеств

1. Неограниченный принцип абстракции $\{x \mid P(x)\}$
2. $X = \{x \mid x \notin x\}$. Выполнено ли $X \in X$?
3. Вариант решения парадокса: а, может, запретить все «опасные» ситуации?

Парадоксы теории множеств

1. Неограниченный принцип абстракции $\{x \mid P(x)\}$
2. $X = \{x \mid x \notin x\}$. Выполнено ли $X \in X$?
3. Вариант решения парадокса: а, может, запретить все «опасные» ситуации?
4. Аксиоматика Цермело — 1908 год, оставим только то, что используют математики.

Парадоксы теории множеств

1. Неограниченный принцип абстракции $\{x \mid P(x)\}$
2. $X = \{x \mid x \notin x\}$. Выполнено ли $X \in X$?
3. Вариант решения парадокса: а, может, запретить все «опасные» ситуации?
4. Аксиоматика Цермело — 1908 год, оставим только то, что используют математики.
5. Что такое множество? Не будем отвечать, поступим иначе.

Парадоксы теории множеств

1. Неограниченный принцип абстракции $\{x \mid P(x)\}$
2. $X = \{x \mid x \notin x\}$. Выполнено ли $X \in X$?
3. Вариант решения парадокса: а, может, запретить все «опасные» ситуации?
4. Аксиоматика Цермело — 1908 год, оставим только то, что используют математики.
5. Что такое множество? Не будем отвечать, поступим иначе.

Определение

Теория множеств — теория первого порядка, с дополнительным нелогическим двуместным функциональным символом $\in$, и следующими дополнительными нелогическими аксиомами и схемами аксиом.

Аксиоматика ZF, равенство

Определение

Равенство «по Лейбницу»: объекты равны, если неразличимы.

Если нечто ходит как утка, выглядит как утка и крякает как утка, то это утка.

Аксиоматика ZF, равенство

Определение

Равенство «по Лейбницу»: объекты равны, если неразличимы.

Если нечто ходит как утка, выглядит как утка и крякает как утка, то это утка.

Определение

Принцип объёмности: объекты равны, если состоят из одинаковых частей

Аксиоматика ZF, равенство

Определение

Равенство «по Лейбницу»: объекты равны, если неразличимы.

Если нечто ходит как утка, выглядит как утка и крякает как утка, то это утка.

Определение

Принцип объёмности: объекты равны, если состоят из одинаковых частей

Определение

$A \subseteq B \equiv \forall x. x \in A \to x \in B$

Аксиоматика ZF, равенство

Определение

Равенство «по Лейбницу»: объекты равны, если неразличимы.

Если нечто ходит как утка, выглядит как утка и крякает как утка, то это утка.

Определение

Принцип объёмности: объекты равны, если состоят из одинаковых частей

Определение

$A \subseteq B \equiv \forall x.x \in A \rightarrow x \in B$
$A = B \equiv A \subseteq B \mathbin{\&} B \subseteq A$

Аксиоматика ZF, равенство

Определение

Равенство «по Лейбницу»: объекты равны, если неразличимы.

Если нечто ходит как утка, выглядит как утка и крякает как утка, то это утка.

Определение

Принцип объёмности: объекты равны, если состоят из одинаковых частей

Определение

$A \subseteq B \equiv \forall x.x \in A \rightarrow x \in B$
$A = B \equiv A \subseteq B \,\&\, B \subseteq A$

Определение

Аксиома равенства: равные множества содержатся в одних и тех же множествах.
$\forall x.\forall y.\forall z.x = y \,\&\, x \in z \rightarrow y \in z.$

Аксиоматика ZF, конструктивные аксиомы

Определение

Аксиома пустого. Существует пустое множество $\varnothing$.

$$\exists s.\forall t.\neg t \in s$$

Аксиоматика ZF, конструктивные аксиомы

Определение

Аксиома пустого. Существует пустое множество $\varnothing$.

$$\exists s.\forall t.\neg t \in s$$

Определение

Аксиома пары. Существует $\{a, b\}$. Каковы бы ни были два множества a и b, существует множество, состоящее в точности из них.

$$\forall a.\forall b.\exists s.a \in s \,\&\, b \in s \,\&\, \forall c.c \in s \to c = a \vee c = b$$

Аксиоматика ZF, конструктивные аксиомы 2

Определение

Аксиома объединения: существует $\cup x$. *Для любого непустого множества* x *найдется такое множество, которое состоит в точности из тех элементов, из которых состоят элементы* x.

$$\forall x.(\exists y.y \in x) \to \exists p.\forall y.y \in p \leftrightarrow \exists s.y \in s \,\&\, s \in x$$

Аксиоматика ZF, конструктивные аксиомы 2

Определение

Аксиома объединения: существует $\cup x$. *Для любого непустого множества* x *найдется такое множество, которое состоит в точности из тех элементов, из которых состоят элементы* x.

$$\forall x.(\exists y.y \in x) \to \exists p.\forall y.y \in p \leftrightarrow \exists s.y \in s \,\&\, s \in x$$

Определение

Аксиома степени: существует $\mathcal{P}(x)$. *Каково бы ни было множество* x, *существует множество, содержащее в точности все возможные подмножества множества* x.

$$\forall x.\exists p.\forall y.y \in p \leftrightarrow y \subseteq x$$

Аксиоматика ZF. Схема аксиом выделения

Определение

Схема аксиом выделения: существует $\{t \in x \mid \varphi(t)\}$*. Для любого множества* x *и любой формулы от одного аргумента* $\varphi(y)$ *(*b *не входит свободно в* φ*), найдется* b*, в которое входят те и только те элементы из множества* x*, что* $\phi(y)$ *истинно.*

$$\forall x.\exists b.\forall y.y \in b \leftrightarrow (y \in x \mathbin{\&} \varphi(y))$$

Немного теорем

Теорема

Для любого множества X *существует множество* $\{X\}$, *содержащее в точности* X.

Немного теорем

Теорема

Для любого множества X существует множество $\{X\}$, содержащее в точности X.

Доказательство.

Воспользуемся аксиомой пары: $\{X, X\}$ $\square$

Немного теорем

Теорема

Для любого множества X существует множество $\{X\}$, содержащее в точности X.

Доказательство.

Воспользуемся аксиомой пары: $\{X, X\}$ $\square$

Теорема

Пустое множество единственно.

Немного теорем

Теорема

Для любого множества X существует множество $\{X\}$, содержащее в точности X.

Доказательство.

Воспользуемся аксиомой пары: $\{X, X\}$ $\square$

Теорема

Пустое множество единственно.

Доказательство.

Пусть $\forall p.\neg p \in s$ и $\forall p.\neg p \in t$. Тогда $s \subseteq t$ и $t \subseteq s$. $\square$

Немного теорем

Теорема

Для любого множества X существует множество $\{X\}$, содержащее в точности X.

Доказательство.

Воспользуемся аксиомой пары: $\{X, X\}$ $\square$

Теорема

Пустое множество единственно.

Доказательство.

Пусть $\forall p. \neg p \in s$ и $\forall p. \neg p \in t$. Тогда $s \subseteq t$ и $t \subseteq s$. $\square$

Теорема

Для двух множеств s и t существует множество, являющееся их пересечением.

Немного теорем

Теорема

Для любого множества X существует множество $\{X\}$, содержащее в точности X.

Доказательство.

Воспользуемся аксиомой пары: $\{X, X\}$ □

Теорема

Пустое множество единственно.

Доказательство.

Пусть $\forall p.\neg p \in s$ и $\forall p.\neg p \in t$. Тогда $s \subseteq t$ и $t \subseteq s$. □

Теорема

Для двух множеств s и t существует множество, являющееся их пересечением.

Доказательство.

$s \cap t = \{x \in s \mid x \in t\}$ □

Упорядоченная пара

Определение

Упорядоченная пара. Упорядоченной парой двух множеств a и b назовём $\{\{a\}, \{a, b\}\}$, или $\langle a, b\rangle$

Теорема

Упорядоченную пару можно построить для любых множеств.

Доказательство.

Применить аксиому пары, теорему о существовании $\{X\}$, аксиому пары. $\square$

Теорема

$\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle$ *тогда и только тогда, когда* $a = c$ *и* $b = d$.

Аксиома бесконечности

Определение

Инкремент: $x' \equiv x \cup \{x\}$

Аксиома бесконечности

Определение

Инкремент: $x' \equiv x \cup \{x\}$

Определение

Аксиома бесконечности. Существует $N : \varnothing \in N \mathbin{\&} \forall x.x \in N \to x' \in N$

Аксиома бесконечности

Определение

Инкремент: $x' \equiv x \cup \{x\}$

Определение

Аксиома бесконечности. Существует $N : \varnothing \in N \,\&\, \forall x.x \in N \rightarrow x' \in N$

В N есть всевозможные множества вида $\varnothing$

Аксиома бесконечности

Определение

Инкремент: $x' \equiv x \cup \{x\}$

Определение

Аксиома бесконечности. Существует $N : \varnothing \in N \,\&\, \forall x.x \in N \rightarrow x' \in N$

В N есть всевозможные множества вида $\varnothing$, $\{\varnothing\}$

Аксиома бесконечности

Определение

Инкремент: $x' \equiv x \cup \{x\}$

Определение

Аксиома бесконечности. Существует $N : \varnothing \in N \,\&\, \forall x.x \in N \rightarrow x' \in N$

В N есть всевозможные множества вида $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$,

Аксиома бесконечности

Определение

Инкремент: $x' \equiv x \cup \{x\}$

Определение

Аксиома бесконечности. Существует $N : \varnothing \in N \,\&\, \forall x. x \in N \rightarrow x' \in N$

В N есть всевозможные множества вида $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$, ...

Аксиома бесконечности

Определение

Инкремент: $x' \equiv x \cup \{x\}$

Определение

Аксиома бесконечности. Существует $N : \varnothing \in N \,\&\, \forall x.x \in N \to x' \in N$

В N есть всевозможные множества вида $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$, ...

(неформально) $\omega = \{\varnothing, \varnothing', \varnothing'', \dots\}$.

Аксиома бесконечности

Определение

Инкремент: $x' \equiv x \cup \{x\}$

Определение

Аксиома бесконечности. Существует $N : \varnothing \in N \,\&\, \forall x.x \in N \to x' \in N$

В N есть всевозможные множества вида $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$, ...

(неформально) $\omega = \{\varnothing, \varnothing', \varnothing'', \dots\}$. Тогда $N_1 = \omega \cup \{\omega, \omega', \omega'', \dots\}$ подходит.

Полный порядок (вполне упорядоченные множества)

1. Частичный: рефлексивность ($a \preceq a$), антисимметричность ($a \preceq b \to b \preceq a \to a = b$), транзитивность ($a \preceq b \to b \preceq c \to a \preceq c$).

Полный порядок (вполне упорядоченные множества)

1. Частичный: рефлексивность ($a \preceq a$), антисимметричность ($a \preceq b \to b \preceq a \to a = b$), транзитивность ($a \preceq b \to b \preceq c \to a \preceq c$).
2. Линейный: частичный + $\forall a.\forall b.a \preceq b \vee b \preceq a$.

Полный порядок (вполне упорядоченные множества)

1. Частичный: рефлексивность ($a \preceq a$), антисимметричность ($a \preceq b \to b \preceq a \to a = b$), транзитивность ($a \preceq b \to b \preceq c \to a \preceq c$).
2. Линейный: частичный $+ \forall a.\forall b.a \preceq b \vee b \preceq a$.
3. Полный: линейный $+$ в любом непустом подмножестве есть наименьший элемент.

Полный порядок (вполне упорядоченные множества)

1. Частичный: рефлексивность ($a \preceq a$), антисимметричность ($a \preceq b \rightarrow b \preceq a \rightarrow a = b$), транзитивность ($a \preceq b \rightarrow b \preceq c \rightarrow a \preceq c$).
2. Линейный: частичный $+ \forall a.\forall b.a \preceq b \vee b \preceq a$.
3. Полный: линейный + в любом непустом подмножестве есть наименьший элемент.

Пример

$\mathbb{Z}$ *не вполне упорядочено: в* $\mathbb{Z}$ *нет наименьшего.*

Полный порядок (вполне упорядоченные множества)

1. Частичный: рефлексивность ($a \preceq a$), антисимметричность ($a \preceq b \to b \preceq a \to a = b$), транзитивность ($a \preceq b \to b \preceq c \to a \preceq c$).
2. Линейный: частичный $+ \forall a.\forall b.a \preceq b \vee b \preceq a$.
3. Полный: линейный + в любом непустом подмножестве есть наименьший элемент.

Пример

$\mathbb{Z}$ не вполне упорядочено: в $\mathbb{Z}$ нет наименьшего.

Пример

Отрезок $[0, 1]$ не вполне упорядочен: $(0, 1)$ не имеет наименьшего.

Полный порядок (вполне упорядоченные множества)

1. Частичный: рефлексивность ($a \preceq a$), антисимметричность ($a \preceq b \to b \preceq a \to a = b$), транзитивность ($a \preceq b \to b \preceq c \to a \preceq c$).
2. Линейный: частичный + $\forall a.\forall b.a \preceq b \vee b \preceq a$.
3. Полный: линейный + в любом непустом подмножестве есть наименьший элемент.

Пример

$\mathbb{Z}$ *не вполне упорядочено: в* $\mathbb{Z}$ *нет наименьшего.*

Пример

Отрезок $[0, 1]$ *не вполне упорядочен:* $(0, 1)$ *не имеет наименьшего.*

Пример

$\mathbb{N}$ *вполне упорядочено.*

Ординалы

Определение

Транзитивное множество X: $\forall x.\forall y.x \in y \mathbin{\&} y \in X \rightarrow x \in X$.

Ординалы

Определение

Транзитивное множество X: $\forall x.\forall y.x \in y \& y \in X \rightarrow x \in X$.

Определение

Ординал — вполне упорядоченное отношением $(\in)$ *транзитивное множество.*

Ординалы

Определение

Транзитивное множество X: $\forall x.\forall y.x \in y \,\&\, y \in X \rightarrow x \in X$.

Определение

Ординал — вполне упорядоченное отношением $(\in)$ *транзитивное множество.*

Пример

Ординалы: $\varnothing$,

Ординалы

Определение

Транзитивное множество X: $\forall x.\forall y.x \in y \,\&\, y \in X \rightarrow x \in X$.

Определение

Ординал — вполне упорядоченное отношением $(\in)$ *транзитивное множество.*

Пример

Ординалы: $\varnothing$, $\varnothing'$,

Ординалы

Определение

Транзитивное множество X: $\forall x.\forall y.x \in y \;\&\; y \in X \to x \in X$.

Определение

Ординал — вполне упорядоченное отношением $(\in)$ *транзитивное множество.*

Пример

Ординалы: $\varnothing, \varnothing', \varnothing'', \dots$

Ординалы

Определение

Транзитивное множество X: $\forall x.\forall y.x \in y \& y \in X \to x \in X$.

Определение

Ординал — вполне упорядоченное отношением $(\in)$ *транзитивное множество.*

Пример

Ординалы: $\varnothing$, $\varnothing'$, $\varnothing''$, $\ldots$

Определение

Предельный ординал: такой x, *что* $x \neq \varnothing$ *и нет* $y : y' = x$

Ординалы

Определение

Транзитивное множество X: $\forall x.\forall y.x \in y \mathbin{\&} y \in X \rightarrow x \in X$.

Определение

Ординал — вполне упорядоченное отношением $(\in)$ *транзитивное множество.*

Пример

Ординалы: $\varnothing$, $\varnothing'$, $\varnothing''$, $\ldots$

Определение

Предельный ординал: такой x, *что* $x \neq \varnothing$ *и нет* $y : y' = x$

Определение

Ординал x *конечный, если он меньше любого предельного.*

Ординалы

Определение

Транзитивное множество X: $\forall x.\forall y.x \in y \mathbin{\&} y \in X \rightarrow x \in X$.

Определение

Ординал — вполне упорядоченное отношением $(\in)$ *транзитивное множество.*

Пример

Ординалы: $\varnothing$, $\varnothing'$, $\varnothing''$, $\ldots$

Определение

Предельный ординал: такой x, *что* $x \neq \varnothing$ *и нет* $y : y' = x$

Определение

Ординал x *конечный, если он меньше любого предельного.*

Теорема

Если x, y *— ординалы, то* $x \in y$ *или* $y \in x$.

Предельные ординалы, ω

Определение

ω — *наименьший предельный ординал.*

Предельные ординалы, ω

Определение

ω — наименьший предельный ординал.

Теорема

ω существует.

Предельные ординалы, ω

Определение

ω — наименьший предельный ординал.

Теорема

ω существует.

Доказательство.

Пусть $\omega = \{x \in N \mid x \text{ конечен}\}$. Пусть θ таков, что $\theta \in \omega$. Тогда θ конечен.

Предельные ординалы, ω

Определение

ω — наименьший предельный ординал.

Теорема

ω существует.

Доказательство.

Пусть $\omega = \{x \in N \mid x \text{ конечен}\}$. Пусть θ таков, что $\theta \in \omega$. Тогда θ конечен. Пусть θ таков, что $\theta' = \omega$. Тогда $\theta \in \omega$. $\square$

Пример

ω' — тоже ординал.

Операции над ординалами

Определение

$\sup x$ — *наименьший ординал, содержащий* x*:* $x \subseteq \sup x$.

Операции над ординалами

Определение

$\sup x$ — *наименьший ординал, содержащий* x*:* $x \subseteq \sup x$.

Пример

$\sup\{\varnothing', \varnothing'', \varnothing''''\} = \{\varnothing, \varnothing', \varnothing'', \varnothing''', \varnothing''''\} =$

Операции над ординалами

Определение

$\sup x$ — *наименьший ординал, содержащий* x*:* $x \subseteq \sup x$*.*

Пример

$\sup\{\varnothing', \varnothing'', \varnothing''''\} = \{\varnothing, \varnothing', \varnothing'', \varnothing''', \varnothing''''\} = \varnothing'''''$

Операции над ординалами

Определение

$\sup x$ — *наименьший ординал, содержащий* x*:* $x \subseteq \sup x$.

Пример

$\sup\{\varnothing', \varnothing'', \varnothing''''\} = \{\varnothing, \varnothing', \varnothing'', \varnothing''', \varnothing''''\} = \varnothing'''''$

$$a + b \equiv \begin{cases} a, & b \equiv \varnothing \\ (a+c)', & b \equiv c' \\ \sup\{a + c \mid c \prec b\}, & b \text{ — предельный ординал} \end{cases}$$

Операции над ординалами

Определение

$\sup x$ — *наименьший ординал, содержащий* x*:* $x \subseteq \sup x$*.*

Пример

$\sup\{\varnothing', \varnothing'', \varnothing''''\} = \{\varnothing, \varnothing', \varnothing'', \varnothing''', \varnothing''''\} = \varnothing'''''$

$$a + b \equiv \begin{cases} a, & b \equiv \varnothing \\ (a+c)', & b \equiv c' \\ \sup\{a + c \mid c \prec b\}, & b \text{ — предельный ординал} \end{cases}$$

Пример

$\omega + 1 = \omega \cup \{\omega\}$;

Операции над ординалами

Определение

$\sup x$ — *наименьший ординал, содержащий x: $x \subseteq \sup x$.*

Пример

$\sup\{\varnothing', \varnothing'', \varnothing''''\} = \{\varnothing, \varnothing', \varnothing'', \varnothing''', \varnothing''''\} = \varnothing'''''$

$$a + b \equiv \begin{cases} a, & b \equiv \varnothing \\ (a + c)', & b \equiv c' \\ \sup\{a + c \mid c \prec b\}, & b \text{ — предельный ординал} \end{cases}$$

Пример

$\omega + 1 = \omega \cup \{\omega\}$; $1 + \omega = \sup\{1 + \varnothing, 1 + 1, 1 + 2, \ldots\}$

Операции над ординалами

Определение

$\sup x$ — *наименьший ординал, содержащий* x*:* $x \subseteq \sup x$*.*

Пример

$\sup\{\varnothing', \varnothing'', \varnothing''''\} = \{\varnothing, \varnothing', \varnothing'', \varnothing''', \varnothing''''\} = \varnothing'''''$

$$a + b \equiv \begin{cases} a, & b \equiv \varnothing \\ (a+c)', & b \equiv c' \\ \sup\{a + c \mid c \prec b\}, & b \text{ — предельный ординал} \end{cases}$$

Пример

$\omega + 1 = \omega \cup \{\omega\}$; $1 + \omega = \sup\{1 + \varnothing, 1 + 1, 1 + 2, \dots\} = \omega$

Ещё операции над ординалами

$$a \cdot b \equiv \begin{cases} 0, & b \equiv \varnothing \\ (a \cdot c) + a, & b \equiv c' \\ \sup\{a \cdot c \mid c \prec b\}, & b \text{ — предельный ординал} \end{cases}$$

Ещё операции над ординалами

$$a \cdot b \equiv \begin{cases} 0, & b \equiv \varnothing \\ (a \cdot c) + a, & b \equiv c' \\ \sup\{a \cdot c \mid c \prec b\}, & b \text{ — предельный ординал} \end{cases}$$

$$a^b \equiv \begin{cases} 1, & b \equiv \varnothing \\ (a^c) \cdot a, & b \equiv c' \\ \sup\{a^c \mid c \prec b\}, & b \text{ — предельный ординал} \end{cases}$$

Ещё операции над ординалами

$$a \cdot b \equiv \begin{cases} 0, & b \equiv \varnothing \\ (a \cdot c) + a, & b \equiv c' \\ \sup\{a \cdot c \mid c \prec b\}, & b \text{ — предельный ординал} \end{cases}$$

$$a^b \equiv \begin{cases} 1, & b \equiv \varnothing \\ (a^c) \cdot a, & b \equiv c' \\ \sup\{a^c \mid c \prec b\}, & b \text{ — предельный ординал} \end{cases}$$

Пример

$\omega \cdot \omega = \sup\{\omega, \omega \cdot 2, \omega \cdot 3, \dots\}$

Ординалы (порядковые числа) и порядок

Пример

Гостиница с ω *номерами, въезжает постоялец.*

Ординалы (порядковые числа) и порядок

Пример

Гостиница с ω *номерами, въезжает постоялец.* $1 + \omega = \omega$

Ординалы (порядковые числа) и порядок

Пример

Гостиница с ω *номерами, въезжает постоялец.* $1+\omega=\omega$ *Добавить элемент перед бесконечностью.*

Пример

Ввести особое значение $+\infty$*.*

Ординалы (порядковые числа) и порядок

Пример

Гостиница с ω номерами, въезжает постоялец. $1 + \omega = \omega$ *Добавить элемент перед бесконечностью.*

Пример

Ввести особое значение $+\infty$. $\omega + 1 \neq \omega$

Ординалы (порядковые числа) и порядок

Пример

Гостиница с ω номерами, въезжает постоялец. $1 + \omega = \omega$ *Добавить элемент перед бесконечностью.*

Пример

Ввести особое значение $+\infty$. $\omega + 1 \neq \omega$ *Добавить элемент после бесконечности.*

Ординалы (порядковые числа) и порядок

Пример

Гостиница с ω номерами, въезжает постоялец. $1 + \omega = \omega$ *Добавить элемент перед бесконечностью.*

Пример

Ввести особое значение $+\infty$. $\omega + 1 \neq \omega$ *Добавить элемент после бесконечности.*

Пример

Упорядочивание алгебраических типов.

Ординалы (порядковые числа) и порядок

Пример

Гостиница с ω *номерами, въезжает постоялец.* $1 + \omega = \omega$ *Добавить элемент перед бесконечностью.*

Пример

Ввести особое значение $+\infty$. $\omega + 1 \neq \omega$ *Добавить элемент после бесконечности.*

Пример

Упорядочивание алгебраических типов.

Neg of nat | Pos of nat

Ординалы (порядковые числа) и порядок

Пример

Гостиница с ω *номерами, въезжает постоялец.* $1 + \omega = \omega$ *Добавить элемент перед бесконечностью.*

Пример

Ввести особое значение $+\infty$*.* $\omega + 1 \neq \omega$ *Добавить элемент после бесконечности.*

Пример

Упорядочивание алгебраических типов.

Neg of nat | Pos of nat

$\omega + \omega$ — в самом деле, `Neg 5` $\prec$ `Pos 5`. `Neg 5` в данном упорядочении соответствует 5, а `Pos 5` соответствует $\omega + 5$.

Дизъюнктные множества

Определение

Дизъюнктное (разделённое) множество — множество, элементы которого не пересекаются.

$$Dj(x) \equiv \forall y.\forall z.(y \in x \mathbin{\&} z \in x \mathbin{\&} \neg y = z) \rightarrow \neg\exists t.t \in y \mathbin{\&} t \in z$$

Дизъюнктные множества

Определение

Дизъюнктное (разделённое) множество — множество, элементы которого не пересекаются.

$$Dj(x) \equiv \forall y.\forall z.(y \in x \mathbin{\&} z \in x \mathbin{\&} \neg y = z) \to \neg\exists t.t \in y \mathbin{\&} t \in z$$

Пример

Дизъюнктное: $\{\{1, 2\}, \{\to\}, \{\alpha, \beta, \gamma\}\}$

Дизъюнктные множества

Определение

Дизъюнктное (разделённое) множество — множество, элементы которого не пересекаются.

$$Dj(x) \equiv \forall y.\forall z.(y \in x \,\&\, z \in x \,\&\, \neg y = z) \rightarrow \neg \exists t.t \in y \,\&\, t \in z$$

Пример

Дизъюнктное: $\{\{1, 2\}, \{\rightarrow\}, \{\alpha, \beta, \gamma\}\}$
Не дизъюнктное: $\{\{1, 2\}, \{\rightarrow\}, \{\alpha, \beta, \gamma, 1\}\}$

Прямое произведение множеств

Определение

Прямое произведение дизъюнктного множества a *— множество* $\times a$ *всех таких множеств* b*, что:*

- b *пересекается с каждым из элементов множества* a *в точности в одном элементе*
- b *содержит элементы только из* $\cup a$*.*

$$\forall b.b \in \times a \leftrightarrow (b \subseteq \cup a \,\&\, \forall y.y \in a \rightarrow \exists! x.x \in y \,\&\, x \in b)$$

Прямое произведение множеств

Определение

Прямое произведение дизъюнктного множества a — множество $\times a$ всех таких множеств b, что:

- *b пересекается с каждым из элементов множества a в точности в одном элементе*
- *b содержит элементы только из $\cup a$.*

$$\forall b.b \in \times a \leftrightarrow (b \subseteq \cup a \,\&\, \forall y.y \in a \rightarrow \exists! x.x \in y \,\&\, x \in b)$$

Пример

$\times\{\{\triangle, \square\}, \{1, 2, 3\}\} = \{\{\triangle, 1\}, \{\triangle, 2\}, \{\triangle, 3\}, \{\square, 1\}, \{\square, 2\}, \{\square, 3\}\}$

Аксиома выбора

Определение

Прямое произведение непустого дизъюнктного множества, не содержащего пустых элементов, непусто.

$$\forall t.Dj(t) \rightarrow (\forall x.x \in t \rightarrow \exists p.p \in x) \rightarrow (\exists p.p \in \times t)$$

Аксиома выбора

Определение

Прямое произведение непустого дизъюнктного множества, не содержащего пустых элементов, непусто.

$$\forall t.Dj(t) \to (\forall x.x \in t \to \exists p.p \in x) \to (\exists p.p \in \times t)$$

Альтернативные варианты: любое множество можно вполне упорядочить,

Аксиома выбора

Определение

Прямое произведение непустого дизъюнктного множества, не содержащего пустых элементов, непусто.

$$\forall t.Dj(t) \to (\forall x.x \in t \to \exists p.p \in x) \to (\exists p.p \in \times t)$$

Альтернативные варианты: любое множество можно вполне упорядочить, любая сюръективная функция имеет частичную обратную, и т.п.

Определение

Аксиоматика ZF + аксиома выбора = ZFC

Аксиома выбора

Определение

Прямое произведение непустого дизъюнктного множества, не содержащего пустых элементов, непусто.

$$\forall t.Dj(t) \to (\forall x.x \in t \to \exists p.p \in x) \to (\exists p.p \in \times t)$$

Альтернативные варианты: любое множество можно вполне упорядочить, любая сюръективная функция имеет частичную обратную, и т.п.

Определение

Аксиоматика ZF + аксиома выбора = ZFC

Дискуссия вокруг аксиомы выбора

Пример

Парадокс Банаха-Тарского: трёхмерный шар равносоставен двум своим копиям.

Дискуссия вокруг аксиомы выбора

Пример

Парадокс Банаха-Тарского: трёхмерный шар равносоставен двум своим копиям.

Теорема

Теорема (Гёдель, 1938): аксиома выбора не добавляет противоречий в ZF.

Дискуссия вокруг аксиомы выбора

Пример

Парадокс Банаха-Тарского: трёхмерный шар равносоставен двум своим копиям.

Теорема

Теорема (Гёдель, 1938): аксиома выбора не добавляет противоречий в ZF.

Теорема

Теорема (Коэн, 1963): аксиома выбора не следует из других аксиом ZF.

Дискуссия вокруг аксиомы выбора

Пример

Парадокс Банаха-Тарского: трёхмерный шар равносоставен двум своим копиям.

Теорема

Теорема (Гёдель, 1938): аксиома выбора не добавляет противоречий в ZF.

Теорема

Теорема (Коэн, 1963): аксиома выбора не следует из других аксиом ZF.

Пример

Односторонние функции: Sha256 и т.п. У Sha256 есть обратная.

Дискуссия вокруг аксиомы выбора

Пример

Парадокс Банаха-Тарского: трёхмерный шар равносоставен двум своим копиям.

Теорема

Теорема (Гёдель, 1938): аксиома выбора не добавляет противоречий в ZF.

Теорема

Теорема (Коэн, 1963): аксиома выбора не следует из других аксиом ZF.

Пример

Односторонние функции: Sha256 и т.п. У Sha256 есть обратная.

Теорема

Теорема Диаконеску: ZFC поверх интуиционистского исчисления предикатов содержит правило исключённого третьего.

Ещё аксиомы

Определение

Аксиома фундирования. В каждом непустом множестве найдется элемент, не пересекающийся с исходным множеством.

$$\forall x.x = \varnothing \vee \exists y.y \in x \,\&\, y \cap x = \varnothing$$

Аксиома фундирования исключает множества, которые могут принадлежать сами себе (возможно, через цепочку принадлежностей): $X \in Y \in Z \in X$

Ещё аксиомы

Определение

Аксиома фундирования. В каждом непустом множестве найдется элемент, не пересекающийся с исходным множеством.

$$\forall x.x = \varnothing \vee \exists y.y \in x \,\&\, y \cap x = \varnothing$$

Аксиома фундирования исключает множества, которые могут принадлежать сами себе (возможно, через цепочку принадлежностей): $X \in Y \in Z \in X$

Определение

Схема аксиом подстановки. Если задана некоторая функция f, представимая в исчислении предикатов (то есть задана некоторая формула ϕ, такая, что $f(x) = y$ тогда и только тогда, когда $\phi(x, y) \,\&\, \exists! z \phi(x, z)$), то для любого множества S существует множество f(S) — образ множества S при отображении f.

$$\forall s.(\forall x.\forall y_1.\forall y_2.x \in s \& \phi(x, y_1) \& \phi(x, y_2) \to y_1 = y_2) \to (\exists t.\forall y.y \in t \leftrightarrow \exists x.x \in s \& \phi(x, y))$$