Теорема Лёвенгейма-Сколема

Как пересчитать вещественные числа (неформально)?

1. Номер вещественного числа — первое упоминание в литературе, т.е. $\langle j, y, n, p, r, c \rangle$:
   j — гёделев номер названия научного журнала (книги);
   y — год издания;
   n — номер;
   p — страница;
   r — строка;
   c — позиция

Как пересчитать вещественные числа (неформально)?

1. Номер вещественного числа — первое упоминание в литературе, т.е. $\langle j, y, n, p, r, c\rangle$:
   j — гёделев номер названия научного журнала (книги);
   y — год издания;
   n — номер;
   p — страница;
   r — строка;
   c — позиция
2. Попробуете предъявить число x, не имеющее номера? Это рассуждение сразу даст номер.

Мощность модели и аксиоматизации

Определение

Пусть задана модель $\langle D, F_n, P_n \rangle$ *для некоторой теории первого порядка. Её мощностью будем считать мощность* D*.*

Мощность модели и аксиоматизации

Определение

Пусть задана модель $\langle D, F_n, P_n \rangle$ для некоторой теории первого порядка. Её мощностью будем считать мощность D.

Определение

Пусть задана формальная теория с аксиомами α_n. Её мощность — мощность множества $\{\alpha_n\}$.

Мощность модели и аксиоматизации

Определение

Пусть задана модель $\langle D, F_n, P_n \rangle$ для некоторой теории первого порядка. Её мощностью будем считать мощность D.

Определение

Пусть задана формальная теория с аксиомами α_n. Её мощность — мощность множества $\{\alpha_n\}$.

Пример

Формальная арифметика, исчисление предикатов, исчисление высказываний — счётно-аксиоматизируемые.

Элементарная подмодель

Определение

$\mathcal{M}' = \langle D', F'_n, P'_n \rangle$ — *элементарная подмодель* $\mathcal{M} = \langle D, F_n, P_n \rangle$, *если:*

Элементарная подмодель

Определение

$\mathcal{M}' = \langle D', F'_n, P'_n \rangle$ — *элементарная подмодель* $\mathcal{M} = \langle D, F_n, P_n \rangle$, *если:*

1. $D' \subseteq D$,

Элементарная подмодель

Определение

$\mathcal{M}' = \langle D', F'_n, P'_n \rangle$ — *элементарная подмодель* $\mathcal{M} = \langle D, F_n, P_n \rangle$, *если:*

1. $D' \subseteq D$, F'_n, P'_n — *сужение* F_n, P_n *(замкнутое на* D'*).*

Элементарная подмодель

Определение

$\mathcal{M}' = \langle D', F'_n, P'_n \rangle$ — *элементарная подмодель* $\mathcal{M} = \langle D, F_n, P_n \rangle$, *если:*

1. $D' \subseteq D$, F'_n, P'_n — *сужение* F_n, P_n *(замкнутое на* D'*).*
2. $\mathcal{M} \models \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ *тогда и только тогда, когда* $\mathcal{M}' \models \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ *при* $x_i \in D'$.

Элементарная подмодель

Определение

$\mathcal{M}' = \langle D', F'_n, P'_n \rangle$ — *элементарная подмодель* $\mathcal{M} = \langle D, F_n, P_n \rangle$, *если:*

1. $D' \subseteq D$, F'_n, P'_n *— сужение* F_n, P_n *(замкнутое на* D'*).*
2. $\mathcal{M} \models \varphi(x_1, \dots, x_n)$ *тогда и только тогда, когда* $\mathcal{M}' \models \varphi(x_1, \dots, x_n)$ *при* $x_i \in D'$.

Пример

Когда сужение M *не является элементарной подмоделью?*

Элементарная подмодель

Определение

$\mathcal{M}' = \langle D', F'_n, P'_n \rangle$ — *элементарная подмодель* $\mathcal{M} = \langle D, F_n, P_n \rangle$, *если:*

1. $D' \subseteq D$, F'_n, P'_n — *сужение* F_n, P_n *(замкнутое на* D'*).*
2. $\mathcal{M} \models \varphi(x_1, \dots, x_n)$ *тогда и только тогда, когда* $\mathcal{M}' \models \varphi(x_1, \dots, x_n)$ *при* $x_i \in D'$.

Пример

Когда сужение M *не является элементарной подмоделью?*
$\forall x.\exists y.x \neq y$. *Истинно в* $\mathbb{N}$.

Элементарная подмодель

Определение

$\mathcal{M}' = \langle D', F'_n, P'_n \rangle$ — *элементарная подмодель* $\mathcal{M} = \langle D, F_n, P_n \rangle$, *если:*

1. $D' \subseteq D$, F'_n, P'_n *— сужение* F_n, P_n *(замкнутое на* D'*).*
2. $\mathcal{M} \models \varphi(x_1, \dots, x_n)$ *тогда и только тогда, когда* $\mathcal{M}' \models \varphi(x_1, \dots, x_n)$ *при* $x_i \in D'$.

Пример

Когда сужение M *не является элементарной подмоделью?*
$\forall x.\exists y.x \neq y$. *Истинно в* $\mathbb{N}$. *Но пусть* $D' = \{\Box\}$.

Теорема Лёвенгейма-Сколема

Теорема

Пусть T — множество всех формул теории первого порядка. Пусть теория имеет некоторую модель $\mathcal{M}$. Тогда найдётся элементарная подмодель $\mathcal{M}'$, причём $|\mathcal{M}'| = \max(\aleph_0, |T|)$.

Теорема Лёвенгейма-Сколема

Теорема

Пусть T — множество всех формул теории первого порядка. Пусть теория имеет некоторую модель $\mathcal{M}$. Тогда найдётся элементарная подмодель $\mathcal{M}'$, причём $|\mathcal{M}'| = \max(\aleph_0, |T|)$.

Доказательство.

(Схема доказательства)

1. Построим D_0 — множество всех значений, которые упомянуты в языке теории.

Теорема Лёвенгейма-Сколема

Теорема

Пусть T — множество всех формул теории первого порядка. Пусть теория имеет некоторую модель $\mathcal{M}$. Тогда найдётся элементарная подмодель $\mathcal{M}'$, причём $|\mathcal{M}'| = \max(\aleph_0, |T|)$.

Доказательство.

(Схема доказательства)

1. Построим D_0 — множество всех значений, которые упомянуты в языке теории.
2. Будем последовательно пополнять D_i: $D_0 \subseteq D_1 \subseteq D_2 \ldots$, следя за мощностью. $D' = \cup D_i$.
3. Покажем, что $\langle D', F_n, P_n \rangle$ — требуемая подмодель.

$\square$

Начальный D_0

Пусть $\{f_k^0\}$ — все 0-местные функциональные символы теории.

Начальный D_0

Пусть $\{f_k^0\}$ — все 0-местные функциональные символы теории.

1. $D_0 = \{[\![f_k^0]\!]\}$, если есть хотя бы один f_k^0.

Начальный D_0

Пусть $\{f_k^0\}$ — все 0-местные функциональные символы теории.

1. $D_0 = \{[\![f_k^0]\!]\}$, если есть хотя бы один f_k^0.
2. Если таких f_k^0 нет, возьмём какое-нибудь одно значение из D.

Начальный D_0

Пусть $\{f_k^0\}$ — все 0-местные функциональные символы теории.

1. $D_0 = \{[\![f_k^0]\!]\}$, если есть хотя бы один f_k^0.
2. Если таких f_k^0 нет, возьмём какое-нибудь одно значение из D.

Начальный D_0

Пусть $\{f_k^0\}$ — все 0-местные функциональные символы теории.

1. $D_0 = \{[\![f_k^0]\!]\}$, если есть хотя бы один f_k^0.
2. Если таких f_k^0 нет, возьмём какое-нибудь одно значение из D.

Очевидно, $|D_0| \leq |T|$.

Пополнение D

Фиксируем некоторый D_k. Напомним, T — множество всех формул теории. Рассмотрим $\varphi \in T$.

Пополнение D

Фиксируем некоторый D_k. Напомним, T — множество всех формул теории. Рассмотрим $\varphi \in T$.

1. φ не имеет свободных переменных — пропустим.

Пополнение D

Фиксируем некоторый D_k. Напомним, T — множество всех формул теории. Рассмотрим $\varphi \in T$.

1. φ не имеет свободных переменных — пропустим.
2. φ имеет хотя бы одну свободную переменную y.

Пополнение D

Фиксируем некоторый D_k. Напомним, T — множество всех формул теории. Рассмотрим $\varphi \in T$.

1. φ не имеет свободных переменных — пропустим.
2. φ имеет хотя бы одну свободную переменную y.
    2.1 $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$ при $y, x_i \in D_k$ бывает истинным и ложным — ничего не меняем

Пополнение D

Фиксируем некоторый D_k. Напомним, T — множество всех формул теории. Рассмотрим $\varphi \in T$.

1. φ не имеет свободных переменных — пропустим.
2. φ имеет хотя бы одну свободную переменную y.
   2.1 $\varphi(y, x_1, \ldots, x_n)$ при $y, x_i \in D_k$ бывает истинным и ложным — ничего не меняем
   2.2 $\varphi(y, x_1, \ldots, x_n)$ при $y \in D$ и $x_i \in D_k$ либо всегда истинен, либо всегда ложен — ничего не меняем

Пополнение D

Фиксируем некоторый D_k. Напомним, T — множество всех формул теории. Рассмотрим $\varphi \in T$.

1. φ не имеет свободных переменных — пропустим.
2. φ имеет хотя бы одну свободную переменную y.
   2.1 $\varphi(y, x_1, \ldots, x_n)$ при $y, x_i \in D_k$ бывает истинным и ложным — ничего не меняем
   2.2 $\varphi(y, x_1, \ldots, x_n)$ при $y \in D$ и $x_i \in D_k$ либо всегда истинен, либо всегда ложен — ничего не меняем
   2.3 $\varphi(y, x_1, \ldots, x_n)$ при $y, x_i \in D_k$ тождественно истинен или ложен, но при $y' \in D \setminus D_k$ отличается — добавим y' к D_{k+1}.

Пополнение D

Фиксируем некоторый D_k. Напомним, T — множество всех формул теории. Рассмотрим $\varphi \in T$.

1. φ не имеет свободных переменных — пропустим.
2. φ имеет хотя бы одну свободную переменную y.
   2.1 $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$ при $y, x_i \in D_k$ бывает истинным и ложным — ничего не меняем
   2.2 $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$ при $y \in D$ и $x_i \in D_k$ либо всегда истинен, либо всегда ложен — ничего не меняем
   2.3 $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$ при $y, x_i \in D_k$ тождественно истинен или ложен, но при $y' \in D \setminus D_k$ отличается — добавим y' к D_{k+1}. Вместе добавим всевозможные $[\![\theta(y')]\!]$.

Пополнение D

Фиксируем некоторый D_k. Напомним, T — множество всех формул теории. Рассмотрим $\varphi \in T$.

1. φ не имеет свободных переменных — пропустим.
2. φ имеет хотя бы одну свободную переменную y.
   2.1 $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$ при $y, x_i \in D_k$ бывает истинным и ложным — ничего не меняем
   2.2 $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$ при $y \in D$ и $x_i \in D_k$ либо всегда истинен, либо всегда ложен — ничего не меняем
   2.3 $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$ при $y, x_i \in D_k$ тождественно истинен или ложен, но при $y' \in D \setminus D_k$ отличается — добавим y' к D_{k+1}. Вместе добавим всевозможные $[\![\theta(y')]\!]$.

Всего добавили не больше $|T| \cdot |D_k|$.

Пополнение D

Фиксируем некоторый D_k. Напомним, T — множество всех формул теории. Рассмотрим $\varphi \in T$.

1. φ не имеет свободных переменных — пропустим.
2. φ имеет хотя бы одну свободную переменную y.
   2.1 $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$ при $y, x_i \in D_k$ бывает истинным и ложным — ничего не меняем
   2.2 $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$ при $y \in D$ и $x_i \in D_k$ либо всегда истинен, либо всегда ложен — ничего не меняем
   2.3 $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$ при $y, x_i \in D_k$ тождественно истинен или ложен, но при $y' \in D \setminus D_k$ отличается — добавим y' к D_{k+1}. Вместе добавим всевозможные $[\![\theta(y')]\!]$.

Всего добавили не больше $|T| \cdot |D_k|$. $|\cup D_i| \leq |T| \cdot |D_k| \cdot |\aleph_0| = \max(|T|, |\aleph_0|)$

$\mathcal{M}'$ — элементарная подмодель

Индукцией по структуре формул $\tau \in T$ покажем, что все формулы можно вычислить, и что $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}'} = [\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}}$.

$\mathcal{M}'$ — элементарная подмодель

Индукцией по структуре формул $\tau \in T$ покажем, что все формулы можно вычислить, и что $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}'} = [\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}}$.

1. База, 0 связок. $\tau \equiv P(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$.

$\mathcal{M}'$ — элементарная подмодель

Индукцией по структуре формул $\tau \in T$ покажем, что все формулы можно вычислить, и что $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}'} = [\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}}$.

1. База, 0 связок. $\tau \equiv P(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$. Если $x_i \in D'$, то значит, добавлены на некоторых шагах (максимальный пусть t). Поэтому в D_{t+1} можно вычислить формулу, и её значение сохранилось.

$\mathcal{M}'$ — элементарная подмодель

Индукцией по структуре формул $\tau \in T$ покажем, что все формулы можно вычислить, и что $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}'} = [\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}}$.

1. База, 0 связок. $\tau \equiv P(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$. Если $x_i \in D'$, то значит, добавлены на некоторых шагах (максимальный пусть t). Поэтому в D_{t+1} можно вычислить формулу, и её значение сохранилось.
2. Переход. Пусть формулы из k связок сохраняют значения. Рассмотрим τ с $k+1$ связкой.

$\mathcal{M}'$ — элементарная подмодель

Индукцией по структуре формул $\tau \in T$ покажем, что все формулы можно вычислить, и что $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}'} = [\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}}$.

1. База, 0 связок. $\tau \equiv P(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$. Если $x_i \in D'$, то значит, добавлены на некоторых шагах (максимальный пусть t). Поэтому в D_{t+1} можно вычислить формулу, и её значение сохранилось.
2. Переход. Пусть формулы из k связок сохраняют значения. Рассмотрим τ с $k+1$ связкой.
   - 2.1 $\tau \equiv \rho \star \sigma$ — очевидно.

$\mathcal{M}'$ — элементарная подмодель

Индукцией по структуре формул $\tau \in T$ покажем, что все формулы можно вычислить, и что $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}'} = [\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}}$.

1. База, 0 связок. $\tau \equiv P(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$. Если $x_i \in D'$, то значит, добавлены на некоторых шагах (максимальный пусть t). Поэтому в D_{t+1} можно вычислить формулу, и её значение сохранилось.
2. Переход. Пусть формулы из k связок сохраняют значения. Рассмотрим τ с $k+1$ связкой.
   - 2.1 $\tau \equiv \rho \star \sigma$ — очевидно.
   - 2.2 $\tau \equiv \forall y.\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$.

$\mathcal{M}'$ — элементарная подмодель

Индукцией по структуре формул $\tau \in T$ покажем, что все формулы можно вычислить, и что $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}'} = [\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}}$.

1. База, 0 связок. $\tau \equiv P(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$. Если $x_i \in D'$, то значит, добавлены на некоторых шагах (максимальный пусть t). Поэтому в D_{t+1} можно вычислить формулу, и её значение сохранилось.
2. Переход. Пусть формулы из k связок сохраняют значения. Рассмотрим τ с $k+1$ связкой.
   2.1 $\tau \equiv \rho \star \sigma$ — очевидно.
   2.2 $\tau \equiv \forall y.\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$. Каждый x_i добавлен на каком-то шаге — максимум t.

$\mathcal{M}'$ — элементарная подмодель

Индукцией по структуре формул $\tau \in T$ покажем, что все формулы можно вычислить, и что $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}'} = [\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}}$.

1. База, 0 связок. $\tau \equiv P(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$. Если $x_i \in D'$, то значит, добавлены на некоторых шагах (максимальный пусть t). Поэтому в D_{t+1} можно вычислить формулу, и её значение сохранилось.
2. Переход. Пусть формулы из k связок сохраняют значения. Рассмотрим τ с $k+1$ связкой.
   - 2.1 $\tau \equiv \rho \star \sigma$ — очевидно.
   - 2.2 $\tau \equiv \forall y.\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$. Каждый x_i добавлен на каком-то шаге — максимум t. Если $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$ бывает истинен и ложен при $y_t, y_f \in D$, то $y_t, y_f \in D_{t+1}$ (по построению).

$\mathcal{M}'$ — элементарная подмодель

Индукцией по структуре формул $\tau \in T$ покажем, что все формулы можно вычислить, и что $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}'} = [\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}}$.

1. База, 0 связок. $\tau \equiv P(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$. Если $x_i \in D'$, то значит, добавлены на некоторых шагах (максимальный пусть t). Поэтому в D_{t+1} можно вычислить формулу, и её значение сохранилось.
2. Переход. Пусть формулы из k связок сохраняют значения. Рассмотрим τ с $k+1$ связкой.
   - 2.1 $\tau \equiv \rho \star \sigma$ — очевидно.
   - 2.2 $\tau \equiv \forall y.\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$. Каждый x_i добавлен на каком-то шаге — максимум t. Если $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$ бывает истинен и ложен при $y_t, y_f \in D$, то $y_t, y_f \in D_{t+1}$ (по построению). Поэтому если $\mathcal{M} \not\models \forall y.\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$, то и $\mathcal{M}' \not\models \forall y.\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$.

$\mathcal{M}'$ — элементарная подмодель

Индукцией по структуре формул $\tau \in T$ покажем, что все формулы можно вычислить, и что $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}'} = [\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}}$.

1. База, 0 связок. $\tau \equiv P(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$. Если $x_i \in D'$, то значит, добавлены на некоторых шагах (максимальный пусть t). Поэтому в D_{t+1} можно вычислить формулу, и её значение сохранилось.
2. Переход. Пусть формулы из k связок сохраняют значения. Рассмотрим τ с $k+1$ связкой.
   - 2.1 $\tau \equiv \rho \star \sigma$ — очевидно.
   - 2.2 $\tau \equiv \forall y.\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$. Каждый x_i добавлен на каком-то шаге — максимум t. Если $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$ бывает истинен и ложен при $y_t, y_f \in D$, то $y_t, y_f \in D_{t+1}$ (по построению). Поэтому если $\mathcal{M} \not\models \forall y.\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$, то и $\mathcal{M}' \not\models \forall y.\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$. Если же $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$ не меняется от y, то тем более $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}'} = [\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}}$.

$\mathcal{M}'$ — элементарная подмодель

Индукцией по структуре формул $\tau \in T$ покажем, что все формулы можно вычислить, и что $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}'} = [\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}}$.

1. База, 0 связок. $\tau \equiv P(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$. Если $x_i \in D'$, то значит, добавлены на некоторых шагах (максимальный пусть t). Поэтому в D_{t+1} можно вычислить формулу, и её значение сохранилось.
2. Переход. Пусть формулы из k связок сохраняют значения. Рассмотрим τ с $k+1$ связкой.
   - 2.1 $\tau \equiv \rho \star \sigma$ — очевидно.
   - 2.2 $\tau \equiv \forall y.\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$. Каждый x_i добавлен на каком-то шаге — максимум t. Если $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$ бывает истинен и ложен при $y_t, y_f \in D$, то $y_t, y_f \in D_{t+1}$ (по построению). Поэтому если $\mathcal{M} \not\models \forall y.\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$, то и $\mathcal{M}' \not\models \forall y.\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$. Если же $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$ не меняется от y, то тем более $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}'} = [\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}}$.
   - 2.3 $\tau \equiv \exists y.\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$ — аналогично.

«Парадокс» Сколема

1. Как известно, $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| > |\mathbb{N}| = \aleph_0$.

«Парадокс» Сколема

1. Как известно, $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| > |\mathbb{N}| = \aleph_0$. Однако, ZFC — счётно-аксиоматизируемая теория.

«Парадокс» Сколема

1. Как известно, $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| > |\mathbb{N}| = \aleph_0$. Однако, ZFC — счётно-аксиоматизируемая теория. Значит, существует счётная модель ZFC, то есть $|\mathbb{R}| = \aleph_0$.

«Парадокс» Сколема

1. Как известно, $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| > |\mathbb{N}| = \aleph_0$. Однако, ZFC — счётно-аксиоматизируемая теория. Значит, существует счётная модель ZFC, то есть $|\mathbb{R}| = \aleph_0$. В чём ошибка?

«Парадокс» Сколема

1. Как известно, $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| > |\mathbb{N}| = \aleph_0$. Однако, ZFC — счётно-аксиоматизируемая теория. Значит, существует счётная модель ZFC, то есть $|\mathbb{R}| = \aleph_0$. В чём ошибка?
2. У равенств разный смысл, первое — в предметном языке, второе — в метаязыке.

«Парадокс» Сколема

1. Как известно, $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| > |\mathbb{N}| = \aleph_0$. Однако, ZFC — счётно-аксиоматизируемая теория. Значит, существует счётная модель ZFC, то есть $|\mathbb{R}| = \aleph_0$. В чём ошибка?
2. У равенств разный смысл, первое — в предметном языке, второе — в метаязыке. Внутри теории не выразить все способы нумерации, которые возможны.