

Теоремы Гёделя о неполноте арифметики

Самоприменимость

Определение

Пусть ξ — формула с единственной свободной переменной x_1 . Тогда:
 $\langle \ulcorner \xi \urcorner, p \rangle \in W_1$, если $\vdash \xi(\overline{\ulcorner \xi \urcorner})$ и p — номер доказательства.

Определение

Отношение W_1 рекурсивно, поэтому выражено в Ф.А. формулой ω_1 со свободными переменными x_1 и x_2 , причём:

1. $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner \varphi \urcorner}, \overline{p})$, если p — гёделев номер доказательства самоприменения φ ;
2. $\vdash \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \varphi \urcorner}, \overline{p})$ иначе.

Определение

Определим формулу $\sigma(x_1) := \forall p. \neg \omega_1(x_1, p)$.

Первая теорема Гёделя о неполноте арифметики

Определение

Если для любой формулы $\phi(x)$ из $\vdash \phi(0), \vdash \phi(\bar{1}), \vdash \phi(\bar{2}), \dots$ выполнено $\nvdash \exists x. \neg \phi(x)$, то теория омега-непротиворечива.

Теорема

Первая теорема Гёделя о неполноте арифметики

- ▶ Если формальная арифметика непротиворечива, то $\nvdash \sigma(\overline{\neg \sigma})$.
- ▶ Если формальная арифметика ω -непротиворечива, то $\nvdash \neg \sigma(\overline{\neg \sigma})$.

Доказательство теоремы Гёделя

Напомним: $\sigma(x_1) := \forall p. \neg \omega_1(x_1, p)$. $W_1(\ulcorner \xi \urcorner, p)$ — p есть доказательство самоприменения ξ .

Доказательство.

- Пусть $\vdash \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$. Значит, p — номер доказательства.

Доказательство теоремы Гёделя

Напомним: $\sigma(x_1) := \forall p. \neg \omega_1(x_1, p)$. $W_1(\ulcorner \xi \urcorner, p)$ — p есть доказательство самоприменения ξ .

Доказательство.

- Пусть $\vdash \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$. Значит, p — номер доказательства. Тогда $\langle \ulcorner \sigma \urcorner, p \rangle \in W_1$.

Доказательство теоремы Гёделя

Напомним: $\sigma(x_1) := \forall p. \neg \omega_1(x_1, p)$. $W_1(\ulcorner \xi \urcorner, p)$ — p есть доказательство самоприменения ξ .

Доказательство.

- ▶ Пусть $\vdash \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$. Значит, p — номер доказательства. Тогда $\langle \ulcorner \sigma \urcorner, p \rangle \in W_1$.
Тогда $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \bar{p})$.

Доказательство теоремы Гёделя

Напомним: $\sigma(x_1) := \forall p. \neg \omega_1(x_1, p)$. $W_1(\ulcorner \xi \urcorner, p)$ — p есть доказательство самоприменения ξ .

Доказательство.

- ▶ Пусть $\vdash \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$. Значит, p — номер доказательства. Тогда $\langle \ulcorner \sigma \urcorner, p \rangle \in W_1$. Тогда $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \bar{p})$. Тогда $\vdash \exists p. \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$.

Доказательство теоремы Гёделя

Напомним: $\sigma(x_1) := \forall p. \neg \omega_1(x_1, p)$. $W_1(\ulcorner \xi \urcorner, p)$ — p есть доказательство самоприменения ξ .

Доказательство.

- Пусть $\vdash \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$. Значит, p — номер доказательства. Тогда $\langle \ulcorner \sigma \urcorner, p \rangle \in W_1$. Тогда $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \overline{p})$. Тогда $\vdash \exists p. \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$. То есть $\vdash \neg \forall p. \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$.

Доказательство теоремы Гёделя

Напомним: $\sigma(x_1) := \forall p. \neg \omega_1(x_1, p)$. $W_1(\ulcorner \xi \urcorner, p)$ — p есть доказательство самоприменения ξ .

Доказательство.

- ▶ Пусть $\vdash \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$. Значит, p — номер доказательства. Тогда $\langle \ulcorner \sigma \urcorner, p \rangle \in W_1$. Тогда $\vdash \omega_1(\ulcorner \sigma \urcorner, \bar{p})$. Тогда $\vdash \exists p. \omega_1(\ulcorner \sigma \urcorner, p)$. То есть $\vdash \neg \forall p. \neg \omega_1(\ulcorner \sigma \urcorner, p)$. То есть $\vdash \neg \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$. Противоречие.

Доказательство теоремы Гёделя

Напомним: $\sigma(x_1) := \forall p. \neg \omega_1(x_1, p)$. $W_1(\ulcorner \xi \urcorner, p)$ — p есть доказательство самоприменения ξ .

Доказательство.

- ▶ Пусть $\vdash \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$. Значит, p — номер доказательства. Тогда $\langle \ulcorner \sigma \urcorner, p \rangle \in W_1$. Тогда $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \overline{p})$. Тогда $\vdash \exists p. \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$. То есть $\vdash \neg \forall p. \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$. То есть $\vdash \neg \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$. Противоречие.
- ▶ Пусть $\vdash \neg \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$.

Доказательство теоремы Гёделя

Напомним: $\sigma(x_1) := \forall p. \neg \omega_1(x_1, p)$. $W_1(\ulcorner \xi \urcorner, p)$ — p есть доказательство самоприменения ξ .

Доказательство.

- ▶ Пусть $\vdash \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$. Значит, p — номер доказательства. Тогда $\langle \ulcorner \sigma \urcorner, p \rangle \in W_1$. Тогда $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \bar{p})$. Тогда $\vdash \exists p. \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$. То есть $\vdash \neg \forall p. \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$. То есть $\vdash \neg \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$. Противоречие.
- ▶ Пусть $\vdash \neg \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$. То есть $\vdash \exists p. \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$.

Доказательство теоремы Гёделя

Напомним: $\sigma(x_1) := \forall p. \neg \omega_1(x_1, p)$. $W_1(\ulcorner \xi \urcorner, p)$ — p есть доказательство самоприменения ξ .

Доказательство.

- ▶ Пусть $\vdash \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$. Значит, p — номер доказательства. Тогда $\langle \ulcorner \sigma \urcorner, p \rangle \in W_1$. Тогда $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \overline{p})$. Тогда $\vdash \exists p. \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$. То есть $\vdash \neg \forall p. \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$. То есть $\vdash \neg \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$. Противоречие.
- ▶ Пусть $\vdash \neg \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$. То есть $\vdash \exists p. \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$.
 - ▶ Но найдётся ли натуральное число p , что $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \overline{p})$?

Доказательство теоремы Гёделя

Напомним: $\sigma(x_1) := \forall p. \neg \omega_1(x_1, p)$. $W_1(\ulcorner \xi \urcorner, p)$ — p есть доказательство самоприменения ξ .

Доказательство.

- ▶ Пусть $\vdash \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$. Значит, p — номер доказательства. Тогда $\langle \ulcorner \sigma \urcorner, p \rangle \in W_1$. Тогда $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \bar{p})$. Тогда $\vdash \exists p. \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$. То есть $\vdash \neg \forall p. \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$. То есть $\vdash \neg \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$. Противоречие.
- ▶ Пусть $\vdash \neg \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$. То есть $\vdash \exists p. \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$.
 - ▶ Но найдётся ли натуральное число p , что $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \bar{p})$? Пусть нет. То есть $\vdash \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \bar{0})$, $\vdash \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \bar{1})$, ...

Доказательство теоремы Гёделя

Напомним: $\sigma(x_1) := \forall p. \neg \omega_1(x_1, p)$. $W_1(\ulcorner \xi \urcorner, p)$ — p есть доказательство самоприменения ξ .

Доказательство.

- ▶ Пусть $\vdash \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$. Значит, p — номер доказательства. Тогда $\langle \ulcorner \sigma \urcorner, p \rangle \in W_1$. Тогда $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \bar{p})$. Тогда $\vdash \exists p. \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$. То есть $\vdash \neg \forall p. \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$. То есть $\vdash \neg \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$. Противоречие.
- ▶ Пусть $\vdash \neg \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$. То есть $\vdash \exists p. \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$.
 - ▶ Но найдётся ли натуральное число p , что $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \bar{p})$? Пусть нет. То есть $\vdash \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \bar{0})$, $\vdash \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \bar{1})$, ... По ω -непротиворечивости $\not\vdash \exists p. \neg \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$.

Доказательство теоремы Гёделя

Напомним: $\sigma(x_1) := \forall p. \neg \omega_1(x_1, p)$. $W_1(\ulcorner \xi \urcorner, p)$ — p есть доказательство самоприменения ξ .

Доказательство.

- ▶ Пусть $\vdash \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$. Значит, p — номер доказательства. Тогда $\langle \ulcorner \sigma \urcorner, p \rangle \in W_1$. Тогда $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \overline{p})$. Тогда $\vdash \exists p. \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$. То есть $\vdash \neg \forall p. \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$. То есть $\vdash \neg \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$. Противоречие.
- ▶ Пусть $\vdash \neg \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$. То есть $\vdash \exists p. \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$.
 - ▶ Но найдётся ли натуральное число p , что $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \overline{p})$? Пусть нет. То есть $\vdash \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \overline{0})$, $\vdash \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \overline{1})$, ... По ω -непротиворечивости $\not\vdash \exists p. \neg \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$. Значит, найдётся натуральное p , что $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \overline{p})$.

Доказательство теоремы Гёделя

Напомним: $\sigma(x_1) := \forall p. \neg \omega_1(x_1, p)$. $W_1(\ulcorner \xi \urcorner, p)$ — p есть доказательство самоприменения ξ .

Доказательство.

- ▶ Пусть $\vdash \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$. Значит, p — номер доказательства. Тогда $\langle \ulcorner \sigma \urcorner, p \rangle \in W_1$. Тогда $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \bar{p})$. Тогда $\vdash \exists p. \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$. То есть $\vdash \neg \forall p. \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$. То есть $\vdash \neg \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$. Противоречие.
- ▶ Пусть $\vdash \neg \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$. То есть $\vdash \exists p. \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$.
 - ▶ Но найдётся ли натуральное число p , что $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \bar{p})$? Пусть нет. То есть $\vdash \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \bar{0})$, $\vdash \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \bar{1})$, ... По ω -непротиворечивости $\not\vdash \exists p. \neg \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$. Значит, найдётся натуральное p , что $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \bar{p})$. То есть, $\langle \ulcorner \sigma \urcorner, p \rangle \in W_1$.

Доказательство теоремы Гёделя

Напомним: $\sigma(x_1) := \forall p. \neg \omega_1(x_1, p)$. $W_1(\ulcorner \xi \urcorner, p)$ — p есть доказательство самоприменения ξ .

Доказательство.

- ▶ Пусть $\vdash \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$. Значит, p — номер доказательства. Тогда $\langle \ulcorner \sigma \urcorner, p \rangle \in W_1$. Тогда $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \bar{p})$. Тогда $\vdash \exists p. \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$. То есть $\vdash \neg \forall p. \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$. То есть $\vdash \neg \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$. Противоречие.
- ▶ Пусть $\vdash \neg \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$. То есть $\vdash \exists p. \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$.
 - ▶ Но найдётся ли натуральное число p , что $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \bar{p})$? Пусть нет. То есть $\vdash \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \bar{0})$, $\vdash \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \bar{1})$, ... По ω -непротиворечивости $\not\vdash \exists p. \neg \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$. Значит, найдётся натуральное p , что $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \bar{p})$. То есть, $\langle \ulcorner \sigma \urcorner, p \rangle \in W_1$. То есть, p — доказательство самоприменения W_1 : $\vdash \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$.

Доказательство теоремы Гёделя

Напомним: $\sigma(x_1) := \forall p. \neg \omega_1(x_1, p)$. $W_1(\ulcorner \xi \urcorner, p)$ — p есть доказательство самоприменения ξ .

Доказательство.

- ▶ Пусть $\vdash \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$. Значит, p — номер доказательства. Тогда $\langle \ulcorner \sigma \urcorner, p \rangle \in W_1$. Тогда $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \bar{p})$. Тогда $\vdash \exists p. \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$. То есть $\vdash \neg \forall p. \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$. То есть $\vdash \neg \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$. Противоречие.
- ▶ Пусть $\vdash \neg \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$. То есть $\vdash \exists p. \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$.
 - ▶ Но найдётся ли натуральное число p , что $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \bar{p})$? Пусть нет. То есть $\vdash \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \bar{0})$, $\vdash \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \bar{1})$, ... По ω -непротиворечивости $\nvdash \exists p. \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$. Значит, найдётся натуральное p , что $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \bar{p})$. То есть, $\langle \ulcorner \sigma \urcorner, p \rangle \in W_1$. То есть, p — доказательство самоприменения W_1 : $\vdash \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$. Противоречие.



Почему теорема о неполноте?

Теорема

Формальная арифметика с классической моделью — неполна

Почему теорема о неполноте?

Теорема

Формальная арифметика с классической моделью — неполна

Доказательство.

Полная теория — теория, в которой любая общезначимая формула доказуема.

Почему теорема о неполноте?

Теорема

Формальная арифметика с классической моделью — неполна

Доказательство.

Полная теория — теория, в которой любая общезначимая формула доказуема.
Рассмотрим Ф.А. с классической моделью.

Почему теорема о неполноте?

Теорема

Формальная арифметика с классической моделью — неполна

Доказательство.

Полная теория — теория, в которой любая общезначимая формула доказуема.
Рассмотрим Ф.А. с классической моделью. Из теоремы Гёделя имеем $\not\vdash \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$.

Почему теорема о неполноте?

Теорема

Формальная арифметика с классической моделью — неполна

Доказательство.

Полная теория — теория, в которой любая общезначимая формула доказуема.
Рассмотрим Ф.А. с классической моделью. Из теоремы Гёделя имеем $\not\models \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$.
Рассмотрим $\sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}) \equiv \forall p. \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$, p : нет числа p , что p — номер доказательства $\sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$.

Почему теорема о неполноте?

Теорема

Формальная арифметика с классической моделью — неполна

Доказательство.

Полная теория — теория, в которой любая общезначимая формула доказуема.
Рассмотрим Ф.А. с классической моделью. Из теоремы Гёделя имеем $\not\vdash \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$.
Рассмотрим $\sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}) \equiv \forall p. \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$, p : нет числа p , что p — номер доказательства $\sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$. То есть, $\llbracket \forall p. \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p) \rrbracket = \text{И}$.

Почему теорема о неполноте?

Теорема

Формальная арифметика с классической моделью — неполна

Доказательство.

Полная теория — теория, в которой любая общезначимая формула доказуема.
Рассмотрим Ф.А. с классической моделью. Из теоремы Гёделя имеем $\not\models \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$.
Рассмотрим $\sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}) \equiv \forall p. \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$, p : нет числа p , что p — номер доказательства $\sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$. То есть, $\llbracket \forall p. \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p) \rrbracket = \text{И}$. То есть, $\models \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$. □

Первая теорема Гёделя о неполноте в форме Россера

Определение

$$\theta_1 \leq \theta_2 \equiv \exists p. p + \theta_1 = \theta_2 \qquad \theta_1 < \theta_2 \equiv \theta_1 \leq \theta_2 \ \& \ \neg \theta_1 = \theta_2$$

Первая теорема Гёделя о неполноте в форме Россера

Определение

$$\theta_1 \leq \theta_2 \equiv \exists p. p + \theta_1 = \theta_2 \quad \theta_1 < \theta_2 \equiv \theta_1 \leq \theta_2 \ \& \ \neg \theta_1 = \theta_2$$

Определение

Пусть $\langle \ulcorner \xi \urcorner, p \rangle \in W_2$, если $\vdash \neg \xi(\overline{\ulcorner \xi \urcorner})$. Пусть ω_2 выражает W_2 в формальной арифметике

Первая теорема Гёделя о неполноте в форме Россера

Определение

$$\theta_1 \leq \theta_2 \equiv \exists p. p + \theta_1 = \theta_2 \quad \theta_1 < \theta_2 \equiv \theta_1 \leq \theta_2 \ \& \ \neg \theta_1 = \theta_2$$

Определение

Пусть $\langle \ulcorner \xi \urcorner, p \rangle \in W_2$, если $\vdash \neg \xi(\overline{\ulcorner \xi \urcorner})$. Пусть ω_2 выражает W_2 в формальной арифметике

Теорема

Рассмотрим $\rho(x_1) = \forall p. \omega_1(x_1, p) \rightarrow \exists q. q \leq p \ \& \ \omega_2(x_2, q)$.

Первая теорема Гёделя о неполноте в форме Россера

Определение

$$\theta_1 \leq \theta_2 \equiv \exists p. p + \theta_1 = \theta_2 \quad \theta_1 < \theta_2 \equiv \theta_1 \leq \theta_2 \ \& \ \neg \theta_1 = \theta_2$$

Определение

Пусть $\langle \ulcorner \xi \urcorner, p \rangle \in W_2$, если $\vdash \neg \xi(\overline{\ulcorner \xi \urcorner})$. Пусть ω_2 выражает W_2 в формальной арифметике

Теорема

Рассмотрим $\rho(x_1) = \forall p. \omega_1(x_1, p) \rightarrow \exists q. q \leq p \ \& \ \omega_2(x_2, q)$. Тогда $\nVdash \rho(\overline{\ulcorner \rho \urcorner})$ и $\nVdash \neg \rho(\overline{\ulcorner \rho \urcorner})$.

Первая теорема Гёделя о неполноте в форме Россера

Определение

$$\theta_1 \leq \theta_2 \equiv \exists p. p + \theta_1 = \theta_2 \quad \theta_1 < \theta_2 \equiv \theta_1 \leq \theta_2 \ \& \ \neg \theta_1 = \theta_2$$

Определение

Пусть $\langle \ulcorner \xi \urcorner, p \rangle \in W_2$, если $\vdash \neg \xi(\overline{\ulcorner \xi \urcorner})$. Пусть ω_2 выражает W_2 в формальной арифметике

Теорема

Рассмотрим $\rho(x_1) = \forall p. \omega_1(x_1, p) \rightarrow \exists q. q \leq p \ \& \ \omega_2(x_2, q)$. Тогда $\nVdash \rho(\overline{\ulcorner \rho \urcorner})$ и $\nVdash \neg \rho(\overline{\ulcorner \rho \urcorner})$. $\rho(\overline{\ulcorner \rho \urcorner})$: «Меня легче опровергнуть, чем доказать»

Формальное доказательство

Неполнота варианта теории, изложенной выше, формально доказана на Coq, Russell O'Connor, 2005:

“My proof, excluding standard libraries and the library for Pocklington’s criterion, consists of 46 source files, 7 036 lines of specifications, 37 906 lines of proof, and 1 267 747 total characters. The size of the gzipped tarball (gzip -9) of all the source files is 146 008 bytes, which is an estimate of the information content of my proof.”

```
Theorem Incompleteness : forall T : System,  
  Included Formula NN T ->  
  RepresentsInSelf T ->  
  DecidableSet Formula T ->  
  exists f : Formula,  
  Sentence f /\ (SysPrf T f \/ SysPrf T (notH f) -> Inconsistent LNN T).
```

Определение

Обозначим за $\psi(x, p)$ формулу, выражающую в формальной арифметике рекурсивное отношение $Proof$: $\langle \ulcorner \xi \urcorner, p \rangle \in Proof$, если p — гёделев номер доказательства ξ .

Определение

Обозначим за $\psi(x, p)$ формулу, выражающую в формальной арифметике рекурсивное отношение *Proof*: $\langle \ulcorner \xi \urcorner, p \rangle \in \text{Proof}$, если p — гёделев номер доказательства ξ .

Обозначим $\pi(x) \equiv \exists p. \psi(x, p)$

Consis

Определение

Обозначим за $\psi(x, p)$ формулу, выражающую в формальной арифметике рекурсивное отношение $Proof$: $\langle \ulcorner \xi \urcorner, p \rangle \in Proof$, если p — гёделев номер доказательства ξ .

Обозначим $\pi(x) \equiv \exists p. \psi(x, p)$

Определение

Формулой *Consis* назовём формулу $\neg \pi(\overline{\ulcorner 1 = 0 \urcorner})$

Consis

Определение

Обозначим за $\psi(x, p)$ формулу, выражающую в формальной арифметике рекурсивное отношение $Proof$: $\langle \ulcorner \xi \urcorner, p \rangle \in Proof$, если p — гёделев номер доказательства ξ .

Обозначим $\pi(x) \equiv \exists p. \psi(x, p)$

Определение

Формулой *Consis* назовём формулу $\neg \pi(\overline{\ulcorner 1 = 0 \urcorner})$

Неформальный смысл: «формальная арифметика непротиворечива»

Вторая теорема Гёделя о неполноте арифметики

Теорема

Если Consis доказуем, то формальная арифметика противоречива.

Доказательство.

(неформально)

Вторая теорема Гёделя о неполноте арифметики

Теорема

Если Consis доказуем, то формальная арифметика противоречива.

Доказательство.

(неформально) Формулировка 1 теоремы Гёделя о неполноте арифметики: «если Ф.А. непротиворечива, то недоказуемо $\sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ ».

Вторая теорема Гёделя о неполноте арифметики

Теорема

Если Consis доказуем, то формальная арифметика противоречива.

Доказательство.

(неформально) Формулировка 1 теоремы Гёделя о неполноте арифметики: «если Ф.А. непротиворечива, то недоказуемо $\sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ ». То есть, $\forall p. \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$.

Вторая теорема Гёделя о неполноте арифметики

Теорема

Если Consis доказуем, то формальная арифметика противоречива.

Доказательство.

(неформально) Формулировка 1 теоремы Гёделя о неполноте арифметики: «если Ф.А. непротиворечива, то недоказуемо $\sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ ». То есть, $\forall p. \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$. То есть, если Consis, то $\sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$.

Вторая теорема Гёделя о неполноте арифметики

Теорема

Если Consis доказуем, то формальная арифметика противоречива.

Доказательство.

(неформально) Формулировка 1 теоремы Гёделя о неполноте арифметики: «если Ф.А. непротиворечива, то недоказуемо $\sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ ». То есть, $\forall p. \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$. То есть, если Consis, то $\sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$. То есть, если Consis, то $\sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$, — и это можно доказать, то есть $\vdash \text{Consis} \rightarrow \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$.

Вторая теорема Гёделя о неполноте арифметики

Теорема

Если Consis доказуем, то формальная арифметика противоречива.

Доказательство.

(неформально) Формулировка 1 теоремы Гёделя о неполноте арифметики: «если Ф.А. непротиворечива, то недоказуемо $\sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ ». То есть, $\forall p. \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$. То есть, если Consis, то $\sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$. То есть, если Consis, то $\sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$, — и это можно доказать, то есть $\vdash \text{Consis} \rightarrow \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$. Однако, если формальная арифметика непротиворечива, то $\nvdash \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$.



Условия выводимости Гильберта-Бернайса-Лёфа

Определение

Будем говорить, что формула ψ , выражающая отношение *Proof*, формула π и формула *Consis* соответствуют условиям Гильберта-Бернайса-Лёфа, если следующие условия выполнены для любой формулы α :

1. $\vdash \alpha$ влечет $\vdash \pi(\overline{\Gamma\alpha})$
2. $\vdash \pi(\overline{\Gamma\alpha}) \rightarrow \pi(\overline{\Gamma\pi(\overline{\Gamma\alpha})})$
3. $\vdash \pi(\overline{\Gamma\alpha \rightarrow \beta}) \rightarrow \pi(\overline{\Gamma\alpha}) \rightarrow \pi(\overline{\Gamma\beta})$

Первая теорема Гёделя о неполноте ещё раз

Лемма

Лемма об автоссылках. Для любой формулы $\phi(x_1)$ можно построить такую замкнутую формулу α (не использующую неаксиоматических предикатных и функциональных символов), что $\vdash \phi(\overline{\ulcorner \alpha \urcorner}) \leftrightarrow \alpha$.

Теорема

Существует такая замкнутая формула γ , что если Ф.А. непротиворечива, то $\nvdash \gamma$, а если Ф.А. ω -непротиворечива, то и $\nvdash \neg\gamma$.

Доказательство.

Рассмотрим $\phi(x_1) \equiv \neg\pi(x_1)$. Тогда по лемме об автоссылках существует γ , что $\vdash \gamma \leftrightarrow \neg\pi(\overline{\ulcorner \gamma \urcorner})$.

- ▶ Предположим, что $\vdash \gamma$. Тогда $\vdash \gamma \rightarrow \neg\pi(\overline{\ulcorner \gamma \urcorner})$, то есть $\nvdash \gamma$
- ▶ Предположим, что $\vdash \neg\gamma$. Тогда $\vdash \pi(\overline{\ulcorner \gamma \urcorner})$, то есть $\vdash \exists p.\psi(\overline{\ulcorner \gamma \urcorner}, p)$. Тогда по ω -непротиворечивости найдётся p , что $\vdash \psi(\overline{\ulcorner \gamma \urcorner}, \overline{p})$, то есть $\vdash \gamma$.



Доказательство второй теоремы Гёделя

1. Пусть γ таково, что $\vdash \gamma \leftrightarrow \neg\pi(\overline{\Gamma\gamma})$.
2. Покажем $\pi(\overline{\Gamma\gamma}) \vdash \pi(\overline{\Gamma 1 = 0})$.
 - 2.1 По условию 2, $\vdash \pi(\overline{\Gamma\gamma}) \rightarrow \pi(\overline{\Gamma\pi(\overline{\Gamma\gamma})})$. По теореме о дедукции $\pi(\overline{\Gamma\gamma}) \vdash \pi(\overline{\Gamma\pi(\overline{\Gamma\gamma})})$;
 - 2.2 Так как $\vdash \pi(\overline{\Gamma\gamma}) \rightarrow \neg\gamma$, то по условию 1 $\vdash \pi(\overline{\Gamma\pi(\overline{\Gamma\gamma}) \rightarrow \neg\gamma})$;
 - 2.3 По условию 3, $\pi(\overline{\Gamma\gamma}) \vdash \pi(\overline{\Gamma\pi(\overline{\Gamma\gamma})}) \rightarrow \pi(\overline{\Gamma\pi(\overline{\Gamma\gamma}) \rightarrow \neg\gamma}) \rightarrow \pi(\overline{\Gamma\neg\gamma})$;
 - 2.4 Таким образом, $\pi(\overline{\Gamma\gamma}) \vdash \pi(\overline{\Gamma\neg\gamma})$;
 - 2.5 Однако, $\vdash \gamma \rightarrow \neg\gamma \rightarrow 1 = 0$. Условие 3 (применить два раза) даст $\pi(\overline{\Gamma\gamma}) \vdash \pi(\overline{\Gamma 1 = 0})$.
3. $\neg\pi(\overline{\Gamma 1 = 0}) \rightarrow \neg\pi(\overline{\Gamma\gamma})$ (т. о дедукции, контрапозиция).
4. $\vdash \neg\pi(\overline{\Gamma 1 = 0}) \rightarrow \gamma$ (определение γ).