对偶单纯形法

一、对偶单纯形法的思路

在单纯形表中，b列对应于原问题的一个基可行解，而检验数行则对应其对偶问题的一个基解。在前面我们进行单纯形表的迭代中，始终保持原问题为基可行解（即b列大于等于零），而对偶问题为非可行解（即检验数行含有正值），一旦检验数行由非可行解变为基可行解，则原问题和对偶问题同时达到最优解。

根据对偶问题的对称性，单纯形表的迭代过程也可以反过来进行，即保持对偶问题始终是基可行解（即保持 $\sigma = C - C_B B^{-1} A \le 0$）而使原问题从非可行解逐步迭代到基可行解，从而使原问题和对偶问题同时得到最优解。这种单纯形表的应用方法称为对偶单纯形法。

c_j			3	4	0	0	0	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ_i
0	x_3	8	1	2	1	0	0	4
0	x_4	16	4	0	0	1	0	—
0	x_5	12	0	4	0	0	1	3
		0	3	4	0	0	0	
0	x_3	2	1	0	1	0	-1/2	2
0	x_4	16	4	0	0	1	0	4
4	x_2	3	0	1	0	0	1/4	—
		12	3	0	0	0	-1	
3	x_1	2	1	0	1	0	-1/2	—
0	x_4	8	0	0	-4	1	2	4
4	x_2	3	0	1	0	0	1/4	12
		18	0	0	-3	0	1/2	
3	x_1	4	1	0	0	1/4	0	
0	x_5	4	0	0	-2	1/2	1	
4	x_2	2	0	1	1/2	-1/8	0	
		20	0	0	-2	-1/4	0	

二、使用对偶单纯形法的条件及优势

使用对偶单纯形法的条件

1、单纯形表中的b列至少要有一个负的分量；

2、单纯形表中检验数行的全部元素不大于零。

使用对偶单纯形法的优势

1、避免使用人工变量；

2、原问题初始解不一定是基可行解；

2、对于变量少于约束的问题，可以转化成对偶问题，用对偶单纯形法；

3、灵敏度分析中，有时要用对偶单纯形法。

原问题

$$\max z = 4y_1 + 3y_2$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 \le 2 \\ y_1 - y_2 \le 3 \\ 2y_1 + 3y_2 \le 5 \\ y_1 + y_2 \le 2 \\ 3y_1 + y_2 \le 3 \\ y_1, y_2 \ge 0 \end{cases}$$

对偶问题

$$\min \omega = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 \ge 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 \ge 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

三、对偶单纯形法步骤

1、列出初始单纯形表，检验b列

非负，且检验数行≤0，则优；

有负数，且检验数行≤0，进行入第二步。

2、确定换出变量

$$\min_i \left\{ (B^{-1}b)_i \,\middle|\, (B^{-1}b)_i < 0 \right\} = (B^{-1}b)_l$$

$\boldsymbol{x_l}$ 换出，即绝对值大的先换出

3、确定换入变量

检查*l*行的系数 $\boldsymbol{a_{lj}}$ （j=1，2，…，n）， 若所有$\boldsymbol{a_{lj} \geq 0}$ 则无可行解，

否则，对 $\boldsymbol{a_{lj} \prec 0}$ 计算 $\theta = \min_j \left\{ \dfrac{c_j - z_j}{a_{lj}} \,\middle|\, a_{lj} < 0 \right\} = \dfrac{c_k - z_k}{a_{lk}}$

$\boldsymbol{x_k}$ ，换入

按θ规则确定的变量能保证 $\boldsymbol{c_j - z_j \leq 0}$

4、以$\boldsymbol{a_{lk}}$ 为主元素，按单纯形法在表中进行迭代，直到最优。

$$\min \omega = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 4 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\max z = -2x_1 - 3x_2 - 4x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_5 = -4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

	c_j		-2	-3	-4	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	-3	-1	-2	-1	1	0
0	x_5	-4	[-2]	1	-3	0	1
			-2	-3	-4	0	0
0	x_4	-1	0	[-5/2]	1/2	1	-1/2
-2	x_1	2	1	-1/2	3/2	0	-1/2
			0	-4	-1	0	-1
-3	x_2	2/5	0	1	-1/5	-2/5	1/5
-2	x_1	11/5	1	0	7/5	-1/5	-2/5
			0	0	-9/5	-8/5	-1/5

$$\theta = \min_j \left\{ \frac{c_j - z_j}{a_{lj}} \middle| a_{lj} \prec 0 \right\} = \frac{c_k - z_k}{a_{lk}}$$

$$\min \left\{ \frac{-2}{-2}, -, \frac{-4}{-3} \right\} = 1$$

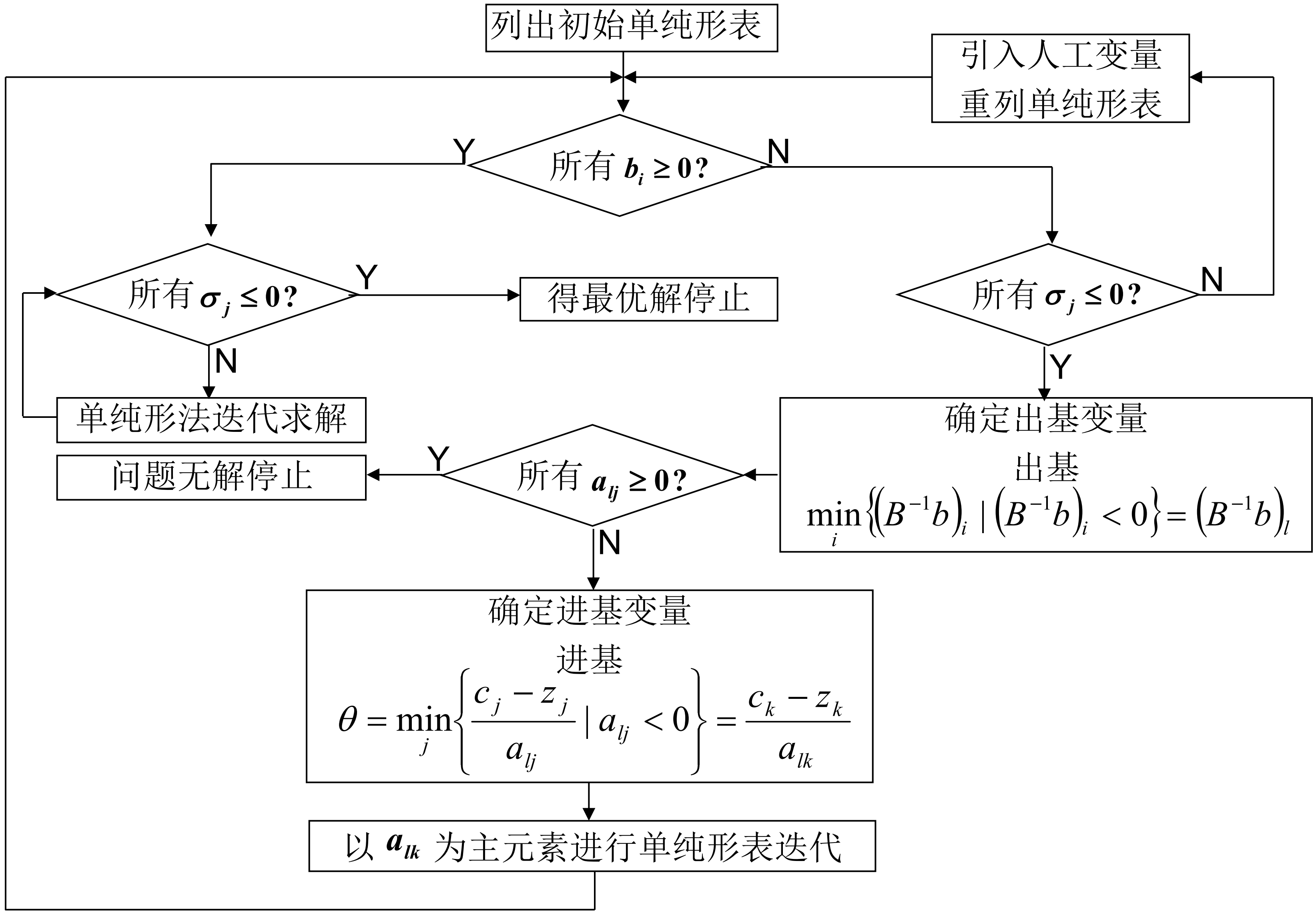
$$\min \left\{ \frac{-4}{-5/2}, -, \frac{-1}{-1/2} \right\} = \frac{8}{5}$$

最优解: $X^* = (11/5, 2/5, 0)^T$ $Y^* = (8/5, 1/5)$ $\omega^* = 28/5$

四、单纯形法与对偶单纯形法的比较

单纯形法	对偶单纯形法
原问题为基可行解 $(B^{-1}b \geq 0)$ ， 但存在 $(\sigma_j > 0)$	对偶问题为基可行解 $(\boldsymbol{\sigma_j \leq 0})$， 但存在 $(B^{-1}b < 0)$
进基 $\max\limits_j \{\sigma_j \mid \sigma_j > 0\} = \sigma_k$ ， $\boldsymbol{x_k}$ 进基	出基 $\min\limits_i \{b_i \mid b_i < 0\} = b_l$ ， $\boldsymbol{x_l}$ 出基
出基 $\min\limits_i \left\{ \dfrac{(B^{-1}b)_i}{a_{ik}} \middle\vert a_{ik} > 0 \right\} = \dfrac{(B^{-1}b)_k}{a_{lk}}$	进基 $\min\limits_j \left\{ \dfrac{\sigma_j}{a_{lj}} \middle\vert a_{lj} < 0 \right\} = \dfrac{\sigma_k}{a_{lk}}$
迭代	迭代

五、线性规划问题用单纯形表的求解步骤



六、求min时，有哪些变化

保持检验数行大于等于0

$$\theta = \min_j \left\{ \frac{c_j - z_j}{-a_{lj}} \middle| a_{lj} < 0 \right\} = \frac{c_k - z_k}{-a_{lk}}$$