第2章 对偶理论和灵敏度分析

第1节　单纯形法的矩阵描述
第2节　改进单纯形法
第3节　对偶问题的提出
第4节　线性规划的对偶理论
第5节　对偶问题的经济解释——影子价格
第6节　对偶单纯形法
第7节　灵敏度分析
第8节* 参数线性规划

线性规划的对偶理论

1. 对偶问题的提出
2. 原问题与对偶问题的关系
3. 对偶问题的基本性质
4. 影子价格
5. 对偶单纯形法
6. 灵敏度分析
7. 参数线性规化

1.对偶问题的提出

例某工厂生产甲、乙两种产品，每件纯利润为6元和4元。每件产品需人力工作时间2小时和3小时，机器工作时间为4小时和2小时。已知该厂每天能提供300小时人力工作时间，320小时的机器工作时间，问应如何安排生产，才能使工厂获利最大。

现在，有一个工厂想租贷，该工厂的机器和工人生产这 两种产品，问应如何定价机器和人力工作时间，双方才能便于达成协议。

分析：就原工厂来说，希望定价尽量高，放弃生产的收益不能低于自己生产所得。

对租贷工厂来说，希望定价尽可能低，至少不能越过原来的实际生产所得的利润。

设x_1, x_2为甲、乙两种产品的生产件数，得

$$\max z = 6x_1 + 4x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 300 \\ 4x_1 + 2x_2 \le 320 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

设一个人力工作时的单价为y_1元，一个机器工作时间的单价为y_2元，则

$$\min \omega = 300y_1 + 320y_2$$

$$\begin{cases} 2y_1 + 4y_2 \ge 6 \\ 3y_1 + 2y_2 \ge 4 \\ y_1, y_2 \ge 0 \end{cases}$$

1.对偶问题的提出

对于线性规划问题

$$Max = CX$$

$$\begin{cases} AX = B \\ X \geq 0 \end{cases} \qquad (*)$$

$$Min = B^T Y^T$$

$$\begin{cases} A^T Y^T = C^T \\ Y^T \geq 0 \end{cases} \qquad (**)$$

（**）为（*）的对偶问题，而称（*）为原问题。

2 原问题与对偶问题的关系

- 原问题（LP）：

$$max\ z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0$$

2 原问题与对偶问题的关系

- 对偶问题(DP)

$$\min \omega = y_1 b_1 + y_2 b_2 + \cdots + y_\mathrm{m} b_m$$

$$(y_1, y_2, \cdots, y_m)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \geq (c_1, c_2, \cdots, c_n)$$

$$y_1, y_2, \cdots, y_m \geq 0$$

2 原问题与对偶问题的关系

- 下列形式的变换关系为对称形式

原问题 （LP） 对偶问题(DP)

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 \qquad \min \omega = 8y_1 + 16y_2 + 12y_3$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \le 16 \\ 4x_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 + 4y_2 \ge 2 \\ 2y_1 + 4y_3 \ge 3 \\ y_1, y_2, y_3 \ge 0 \end{cases}$$

2 原问题与对偶问题的关系

- 非对称形式的变换关系
  - 原问题的约束条件中含有等式约束条件时，按以下步骤处理。
  - 设等式约束条件的线性规划问题为

$$max\ z=\sum_{j=1}^{n}c_j x_j$$

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i, & i=1,2,\cdots m\\ x_j\geq 0, j=1,2,\cdots,n\end{cases}$$

2 原问题与对偶问题的关系

- 非对称形式的变换关系
  - 第一步：先将等式约束条件分解为两个不等式约束条件

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1,2,\cdots m \\ x_j \ge 0, \ j = 1,2,\cdots,n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b \quad j = 1,2,\cdots,m \quad (2-13) \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b \quad j = 1,2,\cdots,m \\ \Downarrow \\ -\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le -b \quad i = 1,2,\cdots,m \quad (2-14) \end{cases}$$

2 原问题与对偶问题的关系

- 非对称形式的变换关系
  - 第二步：按对称形式变换关系可写出它的对偶问题
    - 设y_i'是对应(2-13)式的对偶变量，y_i''是对应(2-14)式的对偶变量，i=1,2,…，m

$$min\ \omega = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i' + \sum_{i=1}^{m} \left(-b_i y_i''\right)$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i' + \sum_{i=1}^{m} \left(-a_{ij} y_i''\right) \geq c_j, j = 1,2,\cdots n \\ y_i', y_i'' \geq 0, \quad i = 1,2,\cdots m \end{cases}$$

2 原问题与对偶问题的关系

将上述规划问题的各式整理后得到

$$\min \omega = \sum_{i=1}^{m} b_i \left(y_i' - y_i'' \right)$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \left(y_i' - y_i'' \right) \geq c_j, \quad j = 1,2,\cdots,n$$

$$令 y_i = \left(y_i' - y_i'' \right), \quad y_i', y_i'' \geq 0$$

$$\Downarrow$$

$$\min \omega = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j, \quad j = 1,2,\cdots,n \\ y_i \text{ 为无约束}, i = 1.2.\cdots, m \end{cases}$$

2 原问题与对偶问题的关系

- 标准型原问题与对偶问题的关系

x_j \ y_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	原关系	$\min \omega$
y_1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	$\le$	b_1
y_2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	$\le$	b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
y_m	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	$\le$	b_m
对偶关系	$\ge$	$\ge$	$\cdots$	$\ge$		
maxz	c_1	c_2	$\cdots$	c_{mn}	maxz =	$\min \omega$

2 原问题与对偶问题的关系

① 原问题的目标函数是求最大值，而对偶问题则是求最小值；

② 一个问题中有几个约束条件，另一个问题就有几个变量；

③ 一个问题中有几个变量，另一个问题就有几个约束条件；

④ 一个问题目标函数的系数就是另一个问题约束条件的右端项；

⑤ 原问题目标函数是求最大，它的约束条件是≤号；对偶问题目标函数是求最小，它的约束条件是≥号

这些关系可以用下面表格形式表示

原问题（对偶问题）	对偶问题（原问题）
目标函数max z	目标函数min ω
变量 $\begin{cases} \text{n个} \\ x_j \geq 0 \\ x_j \leq 0 \\ x_j\text{无约束} \end{cases}$	$\left.\begin{matrix} \text{n个} \\ \text{第}j\text{个为} \geq \\ \text{第}j\text{个为} \leq \\ \text{第}j\text{个为} = \end{matrix}\right\}$ 约束条件
目标函数中变量的系数	约束条件的右端项
约束条件 $\begin{cases} \text{m个} \\ \text{第}i\text{个为} \leq 0 \\ \text{第}i\text{个为} \geq 0 \\ \text{第}i\text{个为} = \end{cases}$	$\left.\begin{matrix} m\text{个} \\ y_i \geq 0 \\ y_i \leq 0 \\ y_i\text{无约束} \end{matrix}\right\}$ 变量
约束条件的右端项 $\Rightarrow$	目标函数变量的系数
目标函数变量系数 $\Rightarrow$	约束条件的RHS

写出下列线性规划的对偶问题

（1）$\max z = 5x_1 + 6x_2 + 3x_3$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5 \\ -x_1 + 5x_2 - x_3 \geq 3 \\ 4x_1 + 7x_2 + 3x_3 \leq 8 \\ x_1\text{无约束}, x_2 \geq 0, x_3 \leq 0 \end{cases}$$

（2）$\min z = 2x_1 + 2x_2 + 4x_3$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 \geq 2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 3 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 5 \\ x_1, x_2 \geq 0, x_3\text{无约束} \end{cases}$$

(3) $\min z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i & i=1,\cdots,m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j & j=1,\cdots,n \\ x_{ij} \geq 0 \quad i=1,\cdots,m & j=1,\cdots,n \end{cases}$$

(4) $\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i & i=1,\cdots,m_1 < m \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i & i=m_1+1,\cdots,m \\ x_j \geq 0 & j=1,\cdots,n_1 < n \\ x_j \text{无约束} & j=n_1+1,\cdots,n \end{cases}$$