第三部分 运输规划

Transportation Model

§ **3-1** 运输规划模型

§ **3-2** 运输模型的求解

§ **3-3** 运输模型的扩展

§3-1 运输规划模型

问题的提出

运输问题：产地、销地、产量、销量

例1 有A_1，A_2，A_3三座铁矿，每天要把生产的铁矿石运往B_1，B_2，B_3，B_4四个炼铁厂。各矿的产量、各厂的销量以及各厂矿间的运价如下表所示。问应如何组织调运才能使运费最少？

§ 3-1 运输规划模型

(百元/百吨)

	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	6	3	2	5	5
A_2	7	5	8	4	2
A_3	3	2	9	7	3
销量	2	3	1	4	

x_{ij} —— A_i运给B_j的铁矿石数量（百吨）

z —— 总运费（百元）

§ 3-1 运输规划模型

(百元/百吨)

	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	6 x_{11}	3 x_{12}	2 x_{13}	5 x_{14}	5
A_2	7 x_{21}	5 x_{22}	8 x_{23}	4 x_{24}	2
A_3	3 x_{31}	2 x_{32}	9 x_{33}	7 x_{34}	3
销量	2	3	1	4	

§ 3-1 运输规划模型

数学模型为:

$$\min z = 6x_{11}+3x_{12}+2x_{13}+5x_{14}+7x_{21}+5x_{22}+8x_{23}+4x_{24}+3x_{31}+2x_{32}+9x_{33}+7x_{34}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}
x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14} = 5 & ① \\
x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24} = 2 & ② \\
x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34} = 3 & ③ \\
x_{11}+x_{21}+x_{31} = 2 & ④ \\
x_{12}+x_{22}+x_{32} = 3 & ⑤ \\
x_{13}+x_{23}+x_{33} = 1 & ⑥ \\
x_{14}+x_{24}+x_{34} = 4 & ⑦ \\
x_{ij} \geqslant 0 \quad (i=1, 2, 3;\ \ j=1, 2, 3, 4)
\end{cases}$$

例3-1

产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	7 x_{11}	15 x_{12}	8 x_{13}	16 x_{14}	60
A_2	5 x_{21}	14 x_{22}	7 x_{23}	13 x_{24}	25
A_3	11 x_{31}	9 x_{32}	15 x_{33}	10 x_{34}	50
销量	60	40	20	15	

解：设 x_{ij} 表示 A_i 加工厂运到 B_j 销售点的产品　　$i=1,2,3;\quad j=1,2,3,4$

$$\min z = 7x_{11}+15x_{12}+8x_{13}+16x_{14}+5x_{21}+14x_{22}+7x_{23}+13x_{24}+11x_{31}+9x_{32}+15x_{33}+10x_{34}$$

产地约束：

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=60$$
$$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=25$$
$$x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=50$$

销地约束：

$$x_{11}+x_{21}+x_{31}=60$$
$$x_{12}+x_{22}+x_{32}=40$$
$$x_{13}+x_{23}+x_{33}=20$$
$$x_{14}+x_{24}+x_{34}=15$$

非负约束：$x_{ij}\ge 0,\ i=1,2,3;\quad j=1,2,3,4$

§ 3-1 运输规划模型

1、运输问题的数学模型

m个产地 A_i，供应量（产量）分别为 a_i， $(i=1,2,\cdots,m)$

n个销地 B_j ，需要量（销量）分别为 b_j， $(j=1,2,\cdots,n)$

A_i 到 B_j 的单位运价为：c_{ij}

A_i 到 B_j 的运量为： x_{ij}

$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ 称为产销平衡

在产销平衡条件下，要求总运费最省的运输方案可表示为：

$$MinZ = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij}$$

产地 \ 销地	B_1	$\cdots$	B_n	产量
A_1	c_{11} x_{11}	$\cdots$ $\cdots$	c_{1n} x_{1n}	a_1
$\vdots$	$\vdots$ $\vdots$	$\ddots$ $\ddots$	$\vdots$ $\vdots$	$\vdots$
A_m	c_{m1} x_{m1}	$\cdots$	c_{mn} x_{mn}	a_m
销量	b_1	$\cdots$	b_n	

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i & (i=1,2,\cdots\cdots,m) \quad \text{产地约束} \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j & (j=1,2,\cdots\cdots,n) \quad \text{销地约束} \\ x_{ij} \geq 0 \end{cases}$$

从运输问题约束条件系数矩阵中取出前$m+n-1$行和x_{1n}，x_{2n}，…，x_{mn}，x_{11}，x_{12}，…，$x_{1,n-1}$对应的共$m+n-1$列组成$m+n-1$阶行列式，如下右面行列式所示：

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} & \cdots & x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn}
\end{array}
$$

$$
\begin{bmatrix}
1 & 1 & \cdots & 1 & & & & & & & & & \\
 & & & & 1 & 1 & \cdots & 1 & & & & & \\
 & & & & & & & & \ddots & & & & \\
 & & & & & & & & & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
1 & & & & 1 & & & & \cdots & 1 & & & \\
 & 1 & & & & 1 & & & & & 1 & & \\
 & & \ddots & & & & \ddots & & & & & \ddots & \\
 & & & 1 & & & & 1 & & & & & 1
\end{bmatrix}
$$

$$
\begin{array}{cccccccc}
x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{mn} & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1,n-1}
\end{array}
$$

$$
\left|\begin{array}{cccc:cccc}
1 & & & & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 & 1 & & & & & & \\
 & & \ddots & & & & & \\
 & & & 1 & & & & \\
\hdashline
 & & & & 1 & & & \\
 & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & 1
\end{array}\right| \neq 0
$$

因行列式不等于0，所以运输问题的秩为$m+n-1$。由秩、基、基变量之间的关系可以知道，运输问题基变量的个数为$m+n-1$个。

§ 3-1 运输规划模型

表式模型

产地 \ 销地	B_1	$\cdots$	B_n	产量
A_1	x_{11} c_{11}	$\cdots$ $\cdots$	x_{1n} c_{1n}	a_1
$\vdots$	$\vdots$ $\vdots$	$\ddots$ $\ddots$	$\vdots$ $\vdots$	$\vdots$
A_m	x_{m1} c_{m1}	$\cdots$	x_{mn} c_{mn}	a_m
销量	b_1	$\cdots$	b_n	

- 产销平衡的运输问题：$\Sigma a_i = \Sigma b_j$
- 产大于销的运输问题：$\Sigma a_i > \Sigma b_j$
- 产小于销的运输问题：$\Sigma a_i < \Sigma b_j$

§ 3-1 运输规划模型

运输模型有两个特点：

(1) 它有**m×n**个变量，**m+n**个约束方程

(2) 其系数阵具有特殊的结构

$$
A = \left(\begin{array}{cccccccccccc}
1 & 1 & 1 & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & & & & \\
 & & & & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & & & & 1 & & & & 1 & & & \\
 & 1 & & & & 1 & & & & 1 & & \\
 & & 1 & & & & 1 & & & & 1 & \\
 & & & 1 & & & & 1 & & & & 1
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right\} m=3\text{行} \\
\left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} n=4\text{行}
\end{array}
$$

§3-2 运输模型的求解

求解运输问题的方法——表上作业法

步骤：

（1）给出初始可行方案；

（2）判断是否最优方案；

（3）基变换；

（4）重复（2）（3）直到达优。

一、确定初始可行解

（一）最小元素法

（二）伏格尔法

1、最小元素法的基本思想：从单位运价表中最小运价开始确定产销关系，依次类推，一直到给出初始方案为止。

销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	7 [35]	15 [×]	8 [20]	16 [5]	60
A_2	5 [25]	14 [×]	7 [×]	13 [×]	25
A_3	11 [×]	9 [40]	15 [×]	10 [10]	50
销量	60	40	20	15	

初始可行解为：

$$X = \begin{bmatrix} 35 & \times & 20 & 5 \\ 25 & \times & \times & \times \\ \times & 40 & \times & 10 \end{bmatrix}$$

运费为： $z = 35\times7+20\times8+16\times5+25\times5+40\times9+10\times10=1070$

2、最小元素法给出的是基可行解

（1）是可行解

$$\left.\begin{array}{l} x_{ij} \le \min(a_i, b_j) \\ x_{ij} \ge 0 \quad \text{（运量}\geqslant 0\text{）} \\ \text{求解过程保证每行或每列为等式} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{是可行解}$$

（2）得到**m+n－1**个数字格

每填入一个数字划去一行或一列，总共**m＋n**行，最后一个数填入时同时划去一行和一列。

（3）（**m+n－1**）个数字格对应的系数列向量是线性无关的

（3）（m+n−1）个数字格对应的系数列向量是线性无关的

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccccc} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccccccccccc}
1 & 1 & 1 & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & & & & 1 & & & & 1 & & & \\
 & 1 & & & & 1 & & & & 1 & & \\
 & & 1 & & & & 1 & & & & 1 & \\
 & & & 1 & & & & 1 & & & & 1
\end{array}\right]
\end{array}
$$

相当于在系数矩阵划去了$P_{22}= e_2+ e_{3+2}$、$P_{23}= e_2+ e_{3+3}$和$P_{24}= e_2+ e_{3+4}$，剩余的系数列向量中不再包含e_2，不可能与P_{21}线性相关，因此从剩余的变量中任选一个变量都不会与已选变量线性相关。

当x_{21}填入数字划去一列后，x_{22}、x_{23}和x_{24} 均被划去，不可能为数字格。

销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	7	15	8	16	60
A_2	25 5	× 14	× 7	× 13	25
A_3	11	9	15	10	50
销量	60	40	20	15	

伏格尔法的基本思想：

最小运费与次小运费之间有差额，差额越大，不按最小运费调运时，运费增加越多，因而对差额最大处应采用最小运费调运方案。

产粮区 化肥厂	B_1	B_2	产量
A_1	15 7	× 5	15
A_2	5 2	20 1	25
销量	20	20	z=180

产粮区 化肥厂	B_1	B_2	产量
A_1	× 7	15 5	15
A_2	20 2	5 1	25
销量	20	20	z=165

产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量	行差额			
A_1	40 7	× 15	20 8	× 16	60	1	1	1	1
A_2	20 5	× 14	× 7	5 13	25	2	2	2	2
A_3	× 11	40 9	× 15	10 10	50	1	1		
销量	60	40	20	15					
列差额	2	[5]	1	3					
	2		1	[3]					
	2		1	[3]					
	[2]		1						

初始可行解为：

$$X=\begin{bmatrix} 40 & \times & 20 & \times \\ 20 & \times & \times & 5 \\ \times & 40 & \times & 10 \end{bmatrix}$$

运费为：

$$z=40\times7+20\times8+20\times5+5\times13+40\times9+10\times10$$
$$=1065$$

两种方法的区别

最小元素法：从最小单位运价开始

伏格尔法：差额最大的行或列中的最小单位运价

二、解的最优性判定

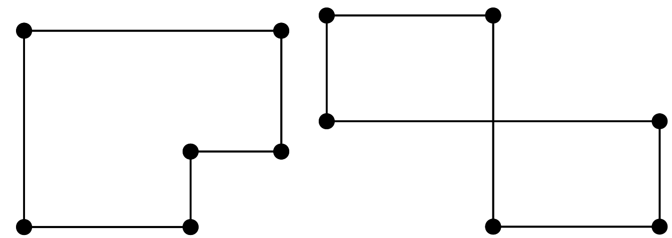
（一）闭回路法

（二）位势法

（一）闭回路法

1、闭回路：从某一空格出发，沿水平或垂直方向前进，当遇到有数字格时可以任意转90度继续前进，也可以穿过有数字格继续前进，直到回到起始点。这样就可以找到一个且只有一个闭回路。

$$\begin{bmatrix} \times & \times & 4 & 3 \\ 3 & \times & 1 & \times \\ \times & 6 & \times & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \times & \times & 4 & 3 \\ 3 & \times & 1 & \times \\ \times & 6 & \times & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \times & \times & 4 & 3 \\ 3 & \times & 1 & \times \\ \times & 6 & \times & 3 \end{bmatrix}$$



说明：（1）闭回路中，除起始点为空格外，其余角点均为数字格

（2）对每一个空格，闭回路存在且唯一。

（3）任意空格对应的是非基变量，非基变量对应的系数列向量可用其闭回路上所有角点处数字格（基变量）的系数列向量线性表示。

（4）利用表上作业法得到的**m+n-1**个基变量之间不存在闭回路。

2、闭回路法计算检验数

销地 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	35 7 +	× 15	20 8 −	5 16	60
A_2	25 5 −	× 14	× 7 +	× 13	25
A_3	× 11	40 9	× 15	10 10	50
销量	60	40	20	15	

（23）的闭回路为（23）—（21）—（11）—（13）—（23）

运费变化：7－5＋7－8＝1

说明给（23）格运1吨，相应调整其它相关运量后，总运费会增加。

$$\sigma_{23} = 1$$

2、闭回路法计算检验数

产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	35 7 +	× 15	20 8 —	5 16	60
A_2	25 5 —	× 14	× 7 +	× 13	25
A_3	× 11	40 9	× 15	10 10	50
销量	60	40	20	15	

如果检验数为正，表明沿此闭回路的调整会使总费用增加；如果检验数为负，表明沿此闭回路的调整会使总费用减少。

产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1		0			60
A_2		1	1	-1	25
A_3	10		13		50
销量	60	40	20	15	

如果求得所有空格点的检验数都大于等于零，则当前运输方案为最优方案；如果还有空格的检验数小于零，则还要进一步调整当前运输方案。

结论：

1、运输问题肯定存在可行解

2、判断所给的解是初始基可行解的依据

（**1**）（**m+n－1**）个数字格；（**2**）数字格之间不存在闭回路

产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	3	11 [3]	3 [4]	10	7
A_2	1	9 [3]	2 [1]	8	4
A_3	7 [3]	4	10	5 [6]	9
销量	3	6	5	6	

（二）位势法

设：对应前m行的对偶变量为u_i，对应后n行的对偶变量为v_j

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} & c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} & \cdots & c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \\
x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} & \cdots & x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn}
\end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccccccccccccc}
1 & 1 & \cdots & 1 & & & & & & & & & \\
 & & & & 1 & 1 & \cdots & 1 & & & & & \\
 & & & & & & & & \ddots & & & & \\
 & & & & & & & & & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
\hline
1 & & & & 1 & & & & \cdots & 1 & & & \\
 & 1 & & & & 1 & & & & & 1 & & \\
 & & \ddots & & & & \ddots & & & & & \ddots & \\
 & & & 1 & & & & 1 & & & & & 1
\end{array}\right]
\begin{array}{ccc}
= & a_1 & u_1 \\
= & a_2 & u_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
= & a_m & u_m \\
\hline
= & b_1 & v_1 \\
= & b_2 & v_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
= & b_n & v_n
\end{array}$$

$$\max \omega = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j$$

$$\begin{cases} u_i + v_j \le c_{ij} \\ u_i, v_j \text{无约束}, i = 1, \cdots, m; j = 1, \cdots, n \end{cases}$$

$$\begin{array}{l}
u_1 + v_1 \le c_{11} \\
u_1 + v_2 \le c_{12} \\
\vdots \\
u_1 + v_n \le c_{1n}
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
u_2 + v_1 \le c_{21} \\
u_2 + v_2 \le c_{22} \\
\vdots \\
u_2 + v_n \le c_{2n}
\end{array}$$

$$\vdots$$

$$\begin{array}{l}
u_m + v_1 \le c_{m1} \\
u_m + v_2 \le c_{m2} \\
\vdots \\
u_m + v_n \le c_{mn}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} & c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} & \cdots & c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \\
x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} & \cdots & x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn}
\end{array}$$

$$\begin{bmatrix}
1 & 1 & \cdots & 1 & & & & & & & & & \\
 & & & & 1 & 1 & \cdots & 1 & & & & & \\
 & & & & & & & & \ddots & & & & \\
 & & & & & & & & & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
1 & & & & 1 & & & & \cdots & 1 & & & \\
 & 1 & & & & 1 & & & & & 1 & & \\
 & & \ddots & & & & \ddots & & & & & \ddots & \\
 & & & 1 & & & & 1 & & & & & 1
\end{bmatrix}
\begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \\ v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{matrix}$$

原问题任意变量的检验数

$$\sigma_{ij} = c_{ij} - YP_{ij}$$

$$= c_{ij} - (u_1, \cdots, u_m, v_1, \cdots, v_n)\begin{bmatrix} \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$= c_{ij} - (u_i + v_j)$$

基变量的检验数 $\sigma_{ij} = 0$，则 $u_i + v_j = c_{ij}$　　（m+n-1）个基变量

得到（m+n-1）个 $u_i + v_j = c_{ij}$，令任一个 u_i 或 v_j 等于0，解出所有 u_i 和 v_j

然后利用已经求得的 u_i 和 v_j 计算所有非基变量的检验数

$u_i+v_j=c_{ij}$ $\sigma_{ij}=c_{ij}-(u_i+v_j)$

销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量	u_i	B_1	B_2	B_3	B_4
	位势表						检验数表			
A_1	7 (35) +	15 (×)	8 (20)	16 (5) —	60	0		0		
A_2	5 (25) —	14 (×)	7 (×)	13 (×) +	25	-2		1	1	-1
A_3	11 (×)	9 (40)	15 (×)	10 (10)	50	-6	10		13	
销量	60	40	20	15	Z=1070					
v_j	7	15	8	16						

销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量	u_i	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	7 (40)	15 (×)	8 (20)	16 (×)	60	0		1		1
A_2	5 (20)	14 (×)	7 (×)	13 (5)	25	-2		2	1	
A_3	11 (×)	9 (40)	15 (×)	10 (10)	50	-5	9		12	
销量	60	40	20	15	Z=1065					
v_j	7	14	8	15						

三、解的改进—闭回路调整法

1、确定换入变量： $\min\{\sigma_{ij} \prec 0\}$ x_{ij} 换入

2、确定换出变量

（1）以x_{ij}为起点寻找闭合回路

（2）从x_{ij}出发，沿任意一个方向对回路拐角上的变量（包括x_{ij}）依次标“＋”和“－”，标有“－”的变量中最小者是出变量，记为θ。

3、迭代

标有“－”的格，减去θ；标有“＋”的格加上θ。

4、判优

计算新解的非基变量检验数，若所有 $\sigma_{ij} \geq 0$，则得优，否则重复以上步骤。

四、无穷多最优解

位势表							检验数表			
产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量	u_i	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3 [×]	11 [×]	3 [5]	10 [2]	7	0	0	2		
A_2	1 [3]	9 [×]	2 [×]	8 [1]	4	-2		2	1	
A_3	7 [×]	4 [6]	10 [×]	5 [3]	9	-5	9		12	
销量	3	6	5	6	Z=85					
v_j	3	9	3	10						

x_{11} 的检验数为0，则可得到另外一个最优解

$$\begin{bmatrix} \times & {}^{+}\times & 5^{-} & 2 \\ 3 & {}^{-}\times & {}^{+}\times & 1 \\ \times & 6 & \times & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & \times & 5 & \times \\ 1 & \times & \times & 3 \\ \times & 6 & \times & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & \times & 5 & 1 \\ 2 & \times & \times & 2 \\ \times & 6 & \times & 3 \end{bmatrix}$$

$$z = 3\times 2 + 3\times 5 + 1\times 1 + 8\times 1 + 4\times 6 + 5\times 3 = 85$$

五、退化解

1、确定初始解时出现退化解（用最小元素法）

销地 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	× 3	× 11	1 4	6 5	7
A_2	× 7	× 7	4 3	× 8	4
A_3	3 1	6 2	× 10	× 6	9
销量	3	6	5	6	

补充0的原则：

（1）尽量先选运费小的变量；

（2）补充后不能由某个基变量独占一行和一列。（否则，检验数无法计算）

2、闭回路调整过程中出现退化解

（1）闭回路中标有“—”的基变量，同时有多个达到最小。

设$\sigma_{22} \prec 0$

$$\begin{bmatrix} 2 & \times & 5 & \times \\ 1 & \times & \times & 3 \\ \times & 3 & \times & 6 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & \times & 5 & \times \\ 1 & 3 & \times & 0 \\ \times & \times & \times & 9 \end{bmatrix}$$

（2）作改进时，该闭回路上标记为“—”的数字格中含有0，此时调整量为 $\theta = 0$。

设$\sigma_{14} \prec 0$

$$\begin{bmatrix} 2^{-} & \times & 5^{+} & \times \\ 1^{+} & \times & \times^{-} & 0 \\ \times & 3 & \times & 6 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & \times & 5 & 0 \\ 1 & \times & \times & \times \\ \times & 3 & \times & 6 \end{bmatrix}$$

§3-3 运输模型的扩展

一、不平衡运输模型

二、需求不确定运输模型

三、运输模型的应用

二、 不平衡运输问题

前面所述运输问题的理论与表上作业法的计算，都是以产销平衡为前提的，即各产地的总产出等于各销地的总销量。即：

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

但在实际的运输问题中，产销量往往是不平衡的，为了应用上述理论和表上作业法进行计算，就需要一定的技术措施，把产销不平衡的运输问题化为产销平衡的运输问题来处理。

1、产大于销：加入假想销地

$$MinZ = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \succ \sum_{j=1}^{n} b_j$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i \quad (i = 1,2,\cdots\cdots,m) & \text{产地约束} \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j = 1,2,\cdots\cdots,n) & \text{销地约束} \\ x_{ij} \ge 0 \end{cases}$$

此时考虑多余的物资在何处存贮，假想一个存贮地

销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	假想销地	产量
A_1	3	11	4	5	0	8
A_2	7	7	3	8	0	5
A_3	1	2	10	6	0	10
销量	3	6	5	6	3	

$$MinZ = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} = a_i & (i = 1,2,\cdots\cdots,m) & \text{产地约束} \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j & (j = 1,2,\cdots\cdots,n) & \text{销地约束} \\ x_{ij} \geq 0 \end{cases}$$

2、销大于产：

加入假想产地

产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	3	11	4	5	8
A_2	7	7	3	8	5
A_3	1	2	10	6	10
假想产地	0	0	0	0	4
销量	5	7	7	8	

$$MinZ = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i & (i = 1,2,\cdots\cdots,m) & \text{产地约束} \\ \sum_{i=1}^{m+1} x_{ij} = b_j & (j = 1,2,\cdots\cdots,n) & \text{销地约束} \\ x_{ij} \geq 0 \end{cases}$$

例3.1

产地 \ 销地	I	II	III	IV	产量
A	16	13	22	17	50
B	14	13	19	15	60
C	19	20	23	—	50
最低需求	30	70	0	10	
最高需求	50	70	30	不限	

产量：50＋60＋50＝160

最低需求：30＋70＋0＋10＝110

最高需求不限

现有产量下，I、II、III满足最低需求，IV的最大分配量为160－100＝60，所以，最高需求为50＋70＋30＋60＝210

因为最低需求不能由假想产地供给，所以模型如下。

产地 \ 销地	I'	I''	II	III	IV'	IV''	产量
A	16	16	13	22	17	17	50
B	14	14	13	19	15	15	60
C	19	19	20	23	M	M	50
D	M	0	M	0	M	0	50
最高需求	30	20	70	30	10	50	

例3.2 某厂按合同规定需于当年每个季度末分别提供**10**，**15**，**25**，**20**台同一规格的柴油机，已知该厂各季度的生产能力及生产每台柴油机的成本如表，又如果生产出来的柴油机当季度不交货，每台积压一个季度需要存储费用、维护费用**0.15**万元，要求在完成合同的情况下，作出使该厂全年生产（包括存储、维护）费用最小的决策。

季度	生产能力（台）	单位成本（万元）
I	25	10.8
II	35	11.1
III	30	11.0
IV	10	11.3

季度	I	II	III	IV	D	产量
I	10.8	10.95	11.10	11.25	0	25
II	M	11.1	11.25	11.40	0	35
III	M	M	11.0	11.15	0	30
IV	M	M	M	11.3	0	10
销量	10	15	25	20	30	