单纯形法求解线性规划的思路：

一般线性规划问题具有线性方程组的变量数大于方程个数，这时有不定的解。但可以从线性方程组中找出一个个的单纯形，每一个单纯形可以求得一组解，然后再判断该解使目标函数值是增大还是变小，决定下一步选择的单纯形。这就是迭代，直到目标函数实现最大值或最小值为止。这样，问题就得到了最优解，先举一例来说明。

§1　单纯形法（Simplex Method）原理

1. **凸集**——如果集合C中任意两点X1、 X2，其连线上的所有点也是集合C中的点，则称C为凸集。

2. **凸组合**——设$X^{(1)}$，$X^{(2)}$，…，$X^{(k)}$是n维欧氏空间E^n中的k个点。若存在μ_1，μ_2，…，μ_k，且$0\leqslant\mu_i\leqslant 1$，$\sum_{i=1}^{k}\mu_i=1$，$i=1,2,\cdots,k$ 使 $X=\mu_1 X^{(1)}+\mu_2 X^{(2)}+\cdots+\mu_k X^{(k)}$ 则称X为$X^{(1)}$，$X^{(2)}$，…，$X^{(k)}$的一个凸组合。

3. **顶点**——设K是凸集，$X\in K$；若X不能用不同的两点$X^{(1)}\in K$和$X^{(2)}\in K$的线性组合表示为 $X=\alpha X^{(1)}+(1-\alpha)X^{(2)}$，$(0<\alpha<1)$

则称X为K的一个顶点(或极点)。

定理1 若线性规划问题存在可行域，则其可行域是凸集。

定理2 若X_1，X_2是线性规划的最优解，则X_1，X_2连接线段上的点也都是最优解。

定理3 线性规划问题的可行解$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$为基可行解的充要条件是：X的正分量所对

应的系数列向量是线性独立的。

定理4 线性规划问题的基可行解X对应于可行域D的顶点。

定理5 若线性规划问题有可行解，则其必有基本可行解

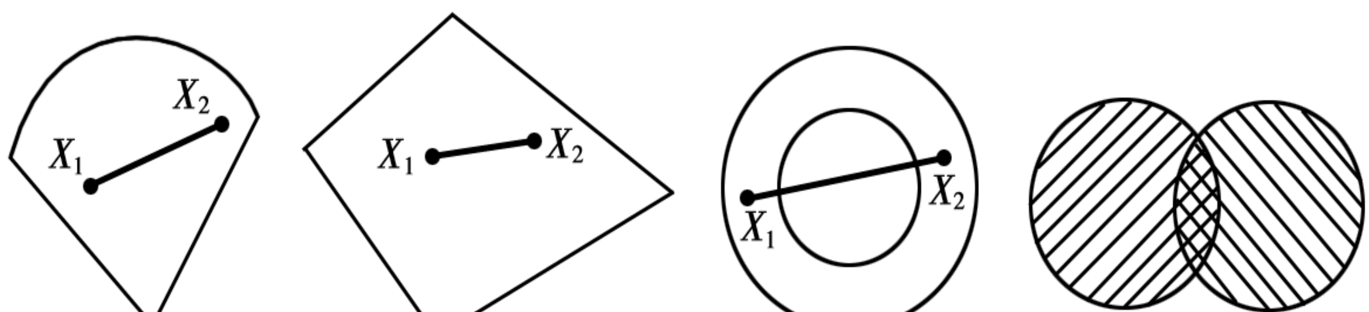
定理6 若线性规划问题有最优解，则一定有基本可行解是最优的。

1.1 基本概念——3个定义

1.凸集

如果集合C中任意两点X_1、 X_2，其连线上的所有点也是集合C中的点，则称C为凸集。（哈工大）

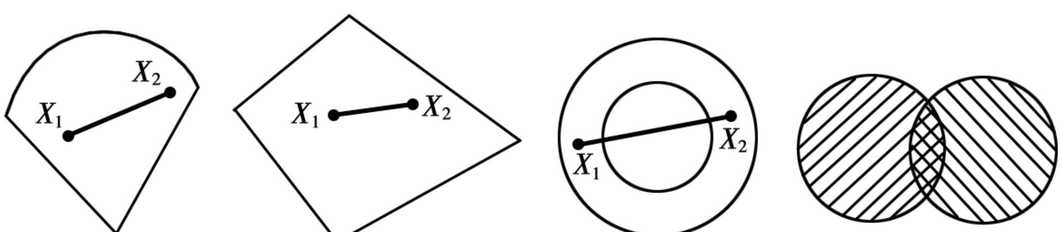
设K是n维欧氏空间的一点集，若任意两点$X(1)\in K$，$X(2)\in K$的连线上的所有点$\alpha X(1)+(1-\alpha)X(2)\in K$，($0\le\alpha\le1$)，则称$K$为凸集。（清华）



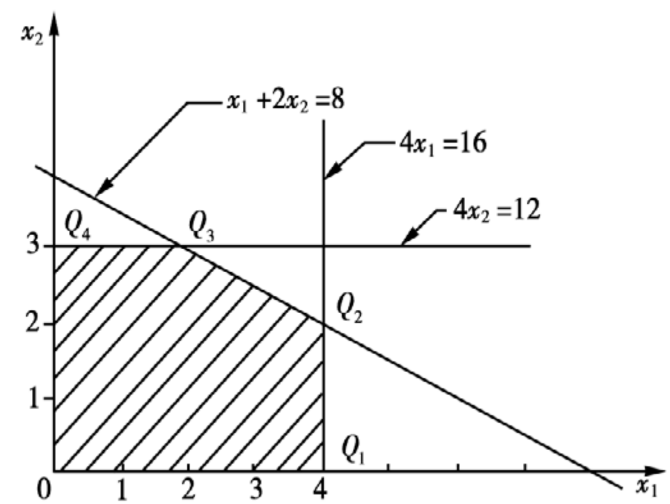
(a) (b) (c) (d)

1.1 基本概念——3个定义

- 实心圆，实心球体，实心立方体等都是凸集，圆环不是凸集。从直观上讲，凸集没有凹入部分，其内部没有空洞。图中的(a)(b)是凸集，(c)不是凸集。
- 阴影部分是凸集。
- 任何两个凸集的交集是凸集，



(a) (b) (c) (d)



1.1 基本概念——3个定义

2. 凸组合

设$X^{(1)}$，$X^{(2)}$，…，$X^{(k)}$是n维欧氏空间E^n中的k个点。若存在 μ_1，μ_2，…，μ_k，且$0 \leqslant \mu_i \leqslant 1$，$\sum_{i=1}^{k} \mu_i = 1$，$i=1, 2, \cdots, k$

使 $X = \mu_1 X^{(1)} + \mu_2 X^{(2)} + \cdots + \mu_k X^{(k)}$

则称X为$X^{(1)}$，$X^{(2)}$，…，$X^{(k)}$的一个凸组合

当$0 < \mu_i < 1$时，称为**严格凸组合**。

1.1 基本概念——3个定义

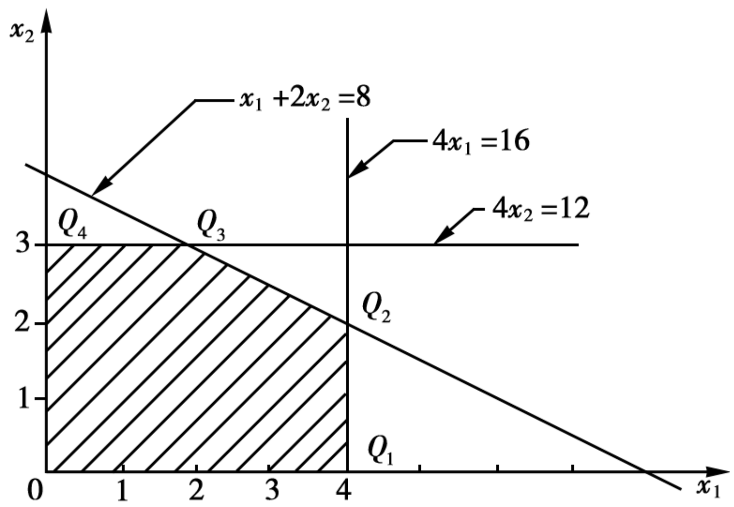
3. 顶点

设 K 是凸集，$X \in K$；若 X 不能用不同的两点 $X^{(1)} \in K$ 和 $X^{(2)} \in K$ 的线性组合表示为

$$X = \alpha X^{(1)} + (1-\alpha) X^{(2)},\quad (0 < \alpha < 1)$$

则称 X 为 K 的一个顶点(或极点)。

图中的0，$Q_{1,2,3,4}$ 都是顶点。



1.2 基本概念——6个定理

定理1 若线性规划问题存在可行域，则其可行域是凸集。

$$D=\left(X\left|\sum_{j=1}^{n}P_jx_j=b\,,\quad x_j\geq 0\right.\right)$$

1.2 基本概念——6个定理

定理1的证明：

只需证明*D*中任意两点连线上的点必然在*D*内即可。

设$X^{(1)}$，$X^{(2)}$是*D*内的任意两点；且$X^{(1)} \neq X^{(2)}$。

$$X^{(1)} = \left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \cdots, x_n^{(1)}\right)^T$$

$$X^{(2)} = \left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \cdots, x_n^{(2)}\right)^T$$

则有

$$\sum_{j=1}^{n} P_j x_j^{(1)} = b,\ x_j^{(1)} \geq 0,\ j = 1,2,\cdots,n$$

$$\sum_{j=1}^{n} P_j x_j^{(2)} = b,\ x_j^{(2)} \geq 0,\ j = 1,2,\cdots,n$$

令 $X=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$ 为 $x^{(1)}, x^{(2)}$连线上的任意一点，即

$$X = \alpha X^{(1)} + (1-\alpha) X^{(2)} \quad (0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$$

X 的每一个分量是 $x_j = \alpha x_j^{(1)} + (1-\alpha) x_j^{(2)}$，将它代入约束条件，

得到

1.2 基本概念——6个定理

$$\sum_{j=1}^{n} P_j x_j = \sum_{j=1}^{n} P_j \left[\alpha x_j^{(1)} - (1-\alpha) x_j^{(2)}\right]$$

$$= \alpha \sum_{j=1}^{n} P_j x_j^{(1)} + \sum_{j=1}^{n} P_j x_j^{(2)} - \alpha \sum_{j=1}^{n} P_j x_j^{(2)}$$

$$= \alpha b + b - \alpha b = b$$

又因 $x_j^{(1)}, x_j^{(2)} \geq 0, \alpha > 0, 1-\alpha > 0$，所以 $x_j \geq 0$， j=1, 2, ⋯, n。

由此可见 X∈D，D 是凸集。

证毕。

1.2 基本概念——6个定理

定理2 若X_1，X_2是线性规划的最优解，则X_1，X_2连接线段上的点也都是最优解。

证明：X是X_1, X_2连线上的点

$$X = \alpha X_1 + (1-\alpha) X_2$$

最优解 $Z^* = CX_1 = CX_2$

将X代入目标函数中

$$Z = CX = C\left(\alpha X_1 + (1-\alpha) X_2\right) = CX_2 = Z^*$$

X也是最优解

1.2 基本概念——6个定理

定理3　　线性规划问题的可行解$X=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$为基可行解的充要条件是：$X$的正分量所对应的系数列向量是线性独立的。

证：（1）必要性由基可行解的定义可知。

（2）充分性若向量 P_1，P_2，$\cdots$，P_k线性独立，则必有 $k \leqslant m$；当 $k=m$ 时，它们恰构成一个基，从而 $X=(x_1, x_2, \cdots, x_k, 0 \cdots 0)$为相应的基可行解。当 $k<m$ 时，则一定可以从其余的列向量中取出 $m-k$ 个与

$$P_1, P_2, \cdots, P_k$$

构成最大的线性独立向量组，其对应的解恰为 X，所以根据定义它是基可行解。

1.2 基本概念——6个定理

定理4 线性规划问题的基可行解*X*对应于可行域*D*的顶点。

(1)X 不是基本可行解 $\Rightarrow$ 不是可行域的顶点

不失 一般性，设X的前m个分量为正，且对应的系数列向量线性相关

故有：

$$\sum_{j=1}^{n} P_j x_j = b_i \qquad （1）$$

$$\delta_1 P_1 + \delta_2 P_2 + \cdots + \delta_m P_m = 0 \qquad （2）$$

前m项为正，后$m-n$为0，则（1）可变为

$$\sum_{i=1}^{m} P_i x_i = b_i$$

定理4证明

引入一个μ，设$\mu \neq 0$则（2）$\times \mu$有

(1)$+$(2)$\times \mu$，　(1)-(2)$\times \mu$得

$$(x_1 + \mu\delta_1)P_1 + (x_2 + \mu\delta_2)P_2 + \cdots + (x_m + \mu\delta_m)P_m = b_i$$

$$(x_1 - \mu\delta_1)P_1 + (x_2 - \mu\delta_2)P_2 + \cdots + (x_m - \mu\delta_m)P_m = b_i$$

简写$\sum_{i=1}^{m}(x_i \pm \mu\delta_i)P_i = b_i$与$\sum_{i=1}^{m} P_i x_i = b_i$相比较

得$x_i \pm \mu\delta_i$为2个解向量；

选择调整μ一定能找到$\mu = -\dfrac{x_i}{\delta_i}$使对所有的$i$有$x_i \pm \mu\delta_i \geq 0$，

X_1，X_2是两个可行解

$\mathrm{X} = \dfrac{1}{2}\mathrm{X}_1 + \dfrac{1}{2}\mathrm{X}_2$，不是顶点。

定理4证明

（2）X不是可行域的顶点$\Rightarrow$ X 不是基本可行解

不失一般性，设$X=\left(x_1,x_2,\cdots x_m,0,\cdots 0\right)$不是可行域的顶点，

因而可以找到可行域中的另外两个不同的点Y和Z,

有$X=\alpha Y+(1-\alpha)Z \quad (0<\alpha<1)$,也可以写成

$x_j=\alpha y_j+(1-\alpha)z_j \ (0<\alpha<1)$

假设X是基可行解，则有$P_1,\cdots,P_m$线性无关，

因$\alpha>0, 1-\alpha>0$,故当$j>m$，$x_j=0$时，必然有$y_j=z_j=0$

因为$\sum_{j=1}^{n}P_j y_j=\sum_{j=1}^{m}P_j y_j=b_i \qquad (1)$

所以$\sum_{j=1}^{n}P_j z_j=\sum_{j=1}^{m}P_j z_j=b_i \qquad (2)$

(1) - (2)得$\sum_{j=1}^{m}P_j(y_j-z_j)=0$

因不全为0，故$P_1,\cdots,P_m$线性相关，与假设矛盾，即X 不是基本可行解