3　对偶问题的基本性质

- (1) 对称性：对偶问题的对偶是原问题 ;
- (2)弱对偶性：若X是原问题的可行解，*Y*是对偶问题的可行解。则存在$CX \leq Yb$;
- (3) 无界性：若原问题(对偶问题)为无界解，则其对偶问题(原问题)无可行解;
- (4) 可行解是最优解时的性质 ;
- (5) 对偶定理：若原问题有最优解，那么对偶问题也有最优解；且目标函数值相等;
- (6) 互补松弛性 ;
- (7) 原问题检验数与对偶问题解的关系。

（1）对称性： 对偶问题的对偶是原问题。

在下面的讨论中，假定线性规划的原问题对偶问题分别为

原问题

$$\max\ z=\sum_{j=1}^{n}c_j x_j$$

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j \le b_i & (i=1,\cdots,m)\\ x_j \ge 0 & (j=1,\cdots,n)\end{cases}$$

对偶问题

$$\min\ \omega=\sum_{i=1}^{m}b_i y_i$$

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{m}a_{ij}y_i \le c_j & (i=1,\cdots,m)\\ y_i \ge 0 & (j=1,\cdots,n)\end{cases}$$

（1）对称性： 对偶问题的对偶是原问题。

证明：设原问题是

$$\max z=CX;\ AX\le b;\quad X\ge 0$$

根据对偶问题的对称变换关系，可以找到它的对偶问题是

$$\min w=Yb;\ YA\ge C;\quad Y\ge 0$$

若将上式两边取负号，又因min w=max(-w)可得到

$$\max(-w)=-Yb;\ -YA\le -C;\quad Y\ge 0$$

根据对称变换关系，得到上式的对偶问题是

$$\min(-w')=-CX;\quad -AX\ge -b;\ X\ge 0$$

又因 min($-w'$)=max w'，可得

$$\text{Max } w'=\max z=CX;\quad AX\le b;\ X\ge 0$$

这就是原问题。

（2）弱对偶性

若$\overline{X}$是原问题的可行解，$\overline{Y}$是对偶问题的可行解

则存在$C\overline{X} \le \overline{Y}b$

或者

如果$\overline{x_j}$是原问题的可行解,$\overline{y_i}$是对偶问题的可行解,

则恒有$\sum_{j=1}^{n} c_j \overline{x_j} \le \sum_{i=1}^{m} b_i \overline{y_i}$

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \overline{x_j} \le \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \overline{y_i} \right) \overline{x_j} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \overline{x_j}\, \overline{y_i}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \overline{x_j} \right) \overline{y_i} \le \sum_{i=1}^{m} b_i \overline{y_i}$$

（3）最优性

如果$\hat{x}_j$是原问题的可行解，$\hat{y}_i$是对偶问题的可行解，

且有$\sum_{j=1}^{n} c_j \hat{x}_j = \sum_{i=1}^{m} b_i \hat{y}_i$ 则$\hat{x}_j$是原问题的最优解，$\hat{y}_i$是对偶问题的最优解。

证：设x^*是原问题的最优解,y^*是对偶问题的最优解,有

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \hat{x}_j \le \sum_{j=1}^{n} c_j x^* \;；\quad \sum_{i=1}^{m} b_i y^* \le \sum_{i=1}^{m} b_i \hat{y}_i$$

已知 $\sum_{j=1}^{n} c_j \hat{x}_j = \sum_{i=1}^{m} b_i \hat{y}_i$

故 $\sum_{j=1}^{n} c_j \hat{x}_j = \sum_{j=1}^{n} c_j x^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y^* = \sum_{i=1}^{m} b_i \hat{y}_i$

（3）最优性

可行解是最优解时的性质

设 $\hat{X}$是原问题的可行解，$\hat{Y}$是对偶问题的可行解，

当 $C\hat{X}=\hat{Y}b$ 时，$\hat{X},\hat{Y}$是最优解。

证明:

设：$\hat{\mathrm{X}}$是原问题的可行解，$\hat{Y}$是对偶问题的可行解

当$C\hat{X}=\hat{Y}b$时，$\hat{X},\hat{Y}$是最优解.

证：若$C\hat{X}=\hat{Y}b$，根据性质2可知，对偶问题的

所有可行解$\overline{Y}$都存在$\overline{Y}b\geq\hat{C}X$;因$C\hat{X}=\hat{Y}b$,

所以$\overline{Y}b\geq\hat{Y}b$.可见是使目标函数取值最小的可行解，

因而是最优解.

同理可证明，对原问题的所有可行解$\overline{X}$,

存在$C\hat{X}=\hat{Y}b\geq C\overline{X}$,所以是最优解.　证毕。

（4）无界性

无界性：若原问题(对偶问题)为无界解，则其对偶问题(原问题)无可行解。

注意：这个性质的逆不成立，因为当原问题（对偶问题）无可行解时，其对偶问题（原问题）无可行解，或具有无界解

证：由性质（2）可知，

$\bar{Y}b \geq C\bar{X} \to \infty$,是不可能成立。

$LP:$ $\qquad$ $DP:$

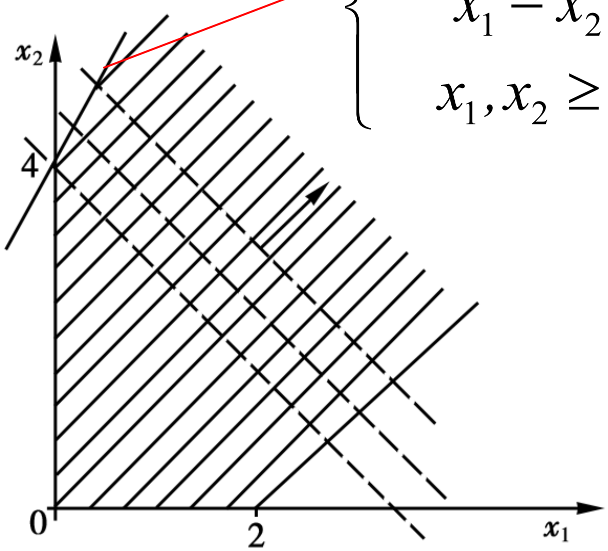
$$\max z = x_1 + x_2 \qquad \min \omega = 4y_1 + 2y_2$$

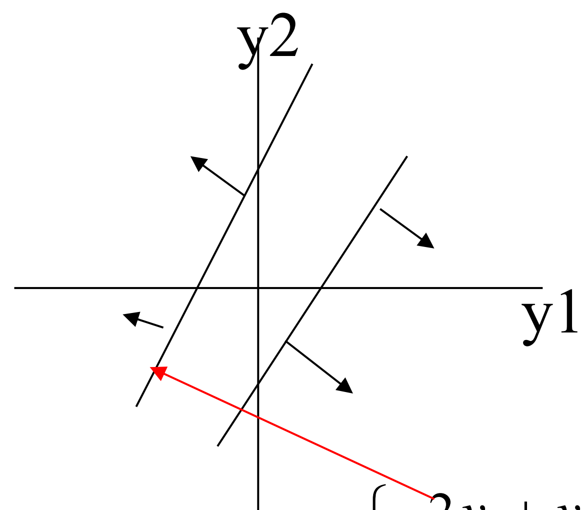
$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2y_1 + y_2 \geq 1 \\ y_1 - y_2 \geq 1 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

（4）无界性——例题求解

- 从两图对比可明显看到原问题无界，
  其对偶问题无可行解

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1 - x_2 \le 2 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$





$$\begin{cases} -2y_1 + y_2 \ge 1 \\ y_1 - y_2 \ge 1 \\ y_1, y_2 \ge 0 \end{cases}$$

（5）强对偶性（对偶定理）

对偶定理：若原问题有最优解，那么对偶问题也有最优解；且目标函数值相等。

证：设$\hat{X}$是原问题的最优解，它对应的基矩阵B,

必存在$C - C_B B^{-1} A \le 0$,即得到$\hat{Y}A \ge C$,其中$\hat{Y} = C_B B^{-1}$.

若$\hat{Y}$是对偶问题的可行解，使得$\omega = \hat{Y}b = C_B B^{-1} b$

因原问题的$\hat{X}$是最优解，使目标函数取值$z = C\hat{X} = C_B B^{-1} b$

由此，得到$\hat{Y}b = C_B B^{-1} b = C\hat{X}$

可见$\hat{Y}$是对偶问题的最优解。

（5）强对偶性（对偶定理）

如果原问题有最优解，其对偶问题也一定有最优解，且有max z=min w

证:将原问题加上松弛变量化成标准形式

$$\max z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j+x_{si}=b_i\\ x_j\geq 0, x_{si}\geq 0\end{cases}$$

用单纯性法求解，当所有$\sigma\leq 0$时，得到最优解

$-\mathrm{Y}=-\mathrm{C_B B^{-1}}\leq 0$,即$y_i\geq 0$

$\sigma=\mathrm{C}-\mathrm{C_B B^{-1}}A=\mathrm{C}-\mathrm{Y}A\leq 0$ 即 $\sum_{i=1}^{m}a_{ij}y_i\geq c_j$

由此y_i是对偶问题的可行解，又因为有

$$z=\mathrm{CX}=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j=\mathrm{C_B B^{-1}}b=\sum_{i=1}^{m}b_iy_i$$

由性质2，y_i是对偶问题的最优解，且$\max z=\min\omega$

（6）互补松弛性

在线性规划问题的最优解中，如果对应于某一约束条件的对偶变量的值为非零，则该约束条件取严格等式，反之，如果约束条件取严格不等式，则其对应的对偶变量一定为零。

也即

$$\text{如果}\hat{y}_i > 0, \qquad \text{则} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\hat{x}_j = b_i$$

$$\text{如果}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\hat{x}_j < b_i \ \text{则} \quad \hat{y}_i = 0$$

或

$$\text{如果}\hat{x}_j > 0, \qquad \text{则} \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\hat{y}_i = c_j$$

$$\text{如果}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\hat{y}_i > c_j \ \text{则} \quad \hat{x}_j = 0$$

$a_{i\,j}$

（6）互补松弛性

证明：由弱对偶性、对偶定理有

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \hat{x}_j \le \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\hat{x}_j\hat{y}_i \le \sum_{i=1}^{m} b_i\hat{y}_i$$

$\sum_{j=1}^{n} c_j \hat{x}_j = \sum_{i=1}^{m} b_i\hat{y}_i$ 得

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \hat{x}_j = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\hat{x}_j\hat{y}_i = \sum_{i=1}^{m} b_i\hat{y}_i$$

即 $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\hat{x}_j\hat{y}_i = \sum_{i=1}^{m} b_i\hat{y}_i$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\hat{x}_j\hat{y}_i - \sum_{i=1}^{m} b_i\hat{y}_i = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\hat{x}_j - b_i\right)\hat{y}_i = 0$$

因为$\hat{y}_i \ge 0$，$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\hat{x}_j - b_i \le 0$

所以对于所有的i,有

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\hat{x}_j - b_i\right)\hat{y}_i = 0$$

$\hat{y}_i > 0$则$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\hat{x}_j - b_i = 0$，即$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\hat{x}_j = b_i$

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\hat{x}_j - b_i < 0$，即$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\hat{x}_j < b_i$则$\hat{y}_i = 0$

由弱对偶性、对偶定理有

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \hat{x}_j \le \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\hat{x}_j\hat{y}_i \le \sum_{i=1}^{m} b_i\hat{y}_i$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \hat{x}_j = \sum_{i=1}^{m} b_i\hat{y}_i$$ 得

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \hat{x}_j = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\hat{x}_j\hat{y}_i = \sum_{i=1}^{m} b_i\hat{y}_i$$

即 $\sum_{j=1}^{n} c_j \hat{x}_j = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\hat{x}_j\hat{y}_i$

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \hat{x}_j - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\hat{x}_j\hat{y}_i = \sum_{j=1}^{n}\left(c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\hat{y}_i\right)\hat{x}_j = 0$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \hat{x}_j - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\hat{x}_j\hat{y}_i = \sum_{j=1}^{n}\left(c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\hat{y}_i\right)\hat{x}_j = 0$$

因为$\hat{x}_j \ge 0$，$c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\hat{y}_i \le 0$

所以对于所有的i,有

$$\left(c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\hat{y}_i\right)\hat{x}_j = 0$$

即 $\hat{x}_j > 0$ 则$c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\hat{y}_i = 0$, 即$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\hat{y}_i = c_j$

$c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\hat{y}_i < 0$，即$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\hat{y}_i > c_j$ 则$\hat{y}_i = 0$

(6) 互补松弛性

- 互补松弛性

若$\hat{X},\hat{Y}$分别为原问题和对偶问题的可行解，

那么$\hat{Y}X_S=0$和$Y_S\hat{X}=0$;当且仅当，$\hat{X},\hat{Y}$为最优解。

证：设原问题和对偶问题的标准关系是

原问题	对偶问题
$\max z=CX$	$\min \omega=Yb$
$AX+X_S=b$	$YA-Y_S=C$
$X,X_S\geq 0$	$Y,Y_S\geq 0$

（6）互补松弛性

- 互补松弛性

将原问题目标函数中的系数向量C用C=YA-Y_S代替后，得到

$$z=(YA-Y_S)X=YAX-Y_SX \qquad (2\text{-}15)$$

将对偶问题的目标函数中系数列向量b，用b=AX+X_S代替后，

得到 $w=Y(AX+X_S)=YAX+YX_S \qquad (2\text{-}16)$

- 若$Y_S\hat{X}=0, \hat{Y}X_S=0$;则$\hat{Y}b=\hat{Y}A\hat{X}=C\hat{X}$,

  由性质（3），可知$\hat{X},\hat{Y}$是最优解。

- 又若分别是原问题和对偶问题的最优解，

  根据性质（3），则有$CX=YAX=Yb$

  由（2－15），（2－16）式可知，必有

  $\hat{Y}X_S=0, Y_S\hat{X}=0$

(7)单纯形法的双层含义

- 用单纯形法求解线性规划问题时，迭代的每一步在得到该问题的一个基本可行解的同时，其检验数的相反数就构成对偶问题的一个基本解

- 在单纯形表中，原问题的松弛变量对应对偶问题的变量，对偶问题的剩余变量对应原问题的变量；这些互相对应的变量如果在一个问题的解中是基变量，则在另一个问题的解中是非基变量，将这两个解带入各自的目标函数中，z=w

（7）单纯形法的双层含义

- 原问题检验数与对偶问题解的关系

设原问题是

$$\max z=CX;\ AX+X_S=b;\ X,X_S\geq 0$$

它的对偶问题是

$$\min w=Yb;\ YA-Y_S=C;\ Y,Y_S\geq 0$$

则原问题单纯形表的检验数行对应其对偶问题的一个基解，其对应关系见表2-5。

（7）单纯形法的双层含义

X_B	X_N	X_S
0	$C_N - C_B B^{-1} N$	$-C_B B^{-1}$
Y_{S1}	Y_{S2}	$-Y$

Y_{S1}是对应原问题中基变量X_B的剩余变量，
Y_{S2}是对应原问题中非基变量X_N的剩余变量。

（7）单纯形法的双层含义

证：设B是原问题的一个可行基，于是$A=(B,N)$；原问题可改写为

$$\max z=C_BX_B+C_NX_N$$
$$BX_B+NX_N+X_S=b$$
$$X_B，X_N，X_S\geq 0$$

相应地对偶问题可表示为

$$\min w=Yb$$
$$YB-Y_{S1}=C_B \qquad (2\text{-}17)$$
$$\mathrm{YN}-\mathrm{Y}_{\mathrm{S2}}=C_N \qquad (2\text{-}18)$$
$$Y，Y_{S1},Y_{S2}\geq 0$$

这里$Y_S=(Y_{S1}，Y_{S2})$。

（7）单纯形法的双层含义

当求得原问题的一个解：$X_B=B^{-1}b$,其相应的检验数为

$$C_N-C_BB^{-1}N \text{ 与 } \quad -C_BB^{-1}$$

现分析这些检验数与对偶问题的解之间的关系：令$Y=C_BB^{-1}$,将它代入(2-17)式，(2-18)式得

$$Y_{S1}=0, -Y_{S2}=C_N-C_BB^{-1}N$$

证毕。

例题　对偶问题的基本性质

- 例4　已知线性规划问题

$$\max z = x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 \le 2 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 \le 1 \\ 4x_1 + 7x_2 + 3x_3 \le 8 \\ \quad x_1, x_2,, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

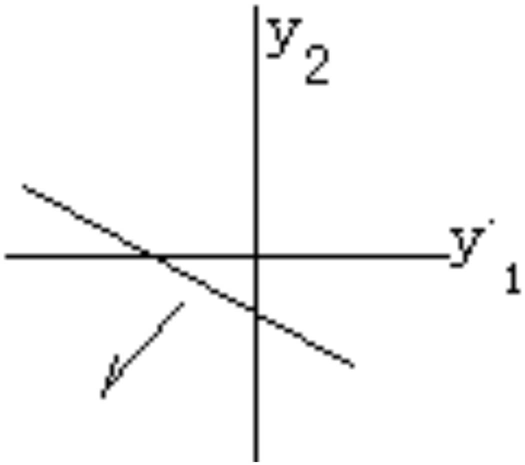
试用对偶理论证明上述线性规划问题无最优解。

例题　对偶问题的基本性质

- 上述问题的对偶问题为

$$\min \quad \omega = 2y_1 + y_2$$

$$\begin{cases} -y_1 - 2y_2 \geq 1 \\ y_1 + y_2 \geq 1 \\ y_1 - y_2 \geq 0 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$



由第1约束条件，可知对偶问题无可行解；
原问题虽然有可行解，但无最优解。

例题　对偶问题的基本性质

- 例5　已知线性规划问题

$$\min z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 \ge 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 \ge 3 \\ \quad x_j \ge 0, j = 1, \cdots, 5 \end{cases}$$

已知其对偶问题的最优解为$y_1^*=4/5$，$y_2^*=3/5$；$z=5$。试用对偶理论找出原问题的最优解 。

例题　对偶问题的基本性质

- 例5　已知线性规划问题

$$\min z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 \geq 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 \geq 3 \\ x_j \geq 0, j = 1, \cdots, 5 \end{cases}$$

解：先写出它的对偶问题

$$\max \quad \omega = 4y_1 + 3y_2$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 \leq 2 & (1) \\ y_1 - y_2 \leq 3 & (2) \\ 2y_1 + 3y_2 \leq 5 & (3) \\ y_1 + y_2 \leq 2 & (4) \\ 3y_1 + y_2 \leq 3 & (5) \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

例题　对偶问题的基本性质

$$\max \quad \omega = 4y_1 + 3y_2$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 \le 2 & (1) \\ y_1 - y_2 \le 3 & (2) \\ 2y_1 + 3y_2 \le 5 & (3) \\ y_1 + y_2 \le 2 & (4) \\ 3y_1 + y_2 \le 3 & (5) \\ y_1, y_2 \ge 0 \end{cases}$$

将$y_1^* =4/5$, $y_2^* =3/5$的值代入约束条件，

得（2）=1/5<3，（3）=17/5<5，（4）=7/5<2

它们为严格不等式；由互补松弛性得

$x_2^*=x_3^*=x_4^*=0$。

因y_1，$y_2 \ge 0$；原问题的两个约束条件应取等式，故有

$x_1^*+3x_5^*=4$，$2x_1^*+x_5^*=3$

求解后得到$x_1^*=1, x_5^*=1$；故原问题的最优解为

$X^*=(1，0，0，0，1)^T$；$w^*=5$