二 线性规划与目标规划

第1章　线性规划与单纯形法
第2章　对偶理论与灵敏度分析
第3章　运输问题
第4章　目标规划

第2章 对偶理论和灵敏度分析

第1节 单纯形法的矩阵描述

将该线性规划问题的约束条件加入松弛变量后，得到标准型：

$$\max z = CX + 0X_s$$
$$AX + IX_s = b$$
$$X，X_s \geq 0$$

其中I 是m×m单位矩阵。

第1节 单纯形法的矩阵描述

若以X_s为基变量，并标记成$X_{B,}$ 可将系数矩阵（A，I）分为（B，N）两块。B是基变量的系数矩阵，N是非基变量的系数矩阵。并同时将决策变量也分为两部分：

$$X=\begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix}$$

相应地可将目标函数系数C分为两部分：C_B和C_N，分别对应于基变量X_B和非基变量X_N，并且记作

$$C=(C_B, C_N)$$

第1节　单纯形法的矩阵描述

若经过迭代运算后，可表示为：

基变量

$$X_B=\begin{pmatrix}X_{B_1}\\ X_{S_1}\end{pmatrix}\text{可包含原基变量和松弛变量}$$

$$\text{非基变量：}X_N=\begin{pmatrix}X_{N_1}\\ X_{S_2}\end{pmatrix};$$

相应有

$$\text{系数矩阵}A=\begin{pmatrix}B\\ N\end{pmatrix};\text{其中}N=\begin{pmatrix}N_1\\ S_2\end{pmatrix};$$

$$\text{松弛变量：}X_S=\begin{pmatrix}X_{S_1}\\ X_{S_2}\end{pmatrix}\to\begin{matrix}\text{基变量}\\ \text{非基变量}\end{matrix}$$

第1节 单纯形法的矩阵描述

线性规划问题可表示为：

目标函数 $\max z = \mathrm{C_B} X_B + C_N X_N$

$$= C_B X_B + C_{N_1} X_{N_1} + C_{S_2} X_{S_2} \quad (2-1)$$

约束条件 $\mathrm{BX_B} + N X_N = B X_B + N_1 X_{N_1} + S_2 X_{S_2}$

$$= b \qquad (2-2)$$

非负条件 $\mathrm{X_B}, X_N \ge 0 \qquad (3-2)$

第1节 单纯形法的矩阵描述

将（2-2）式移项及整理后得到：

$$BX_B = b - N_1 X_{N_1} - S_2 X_{S_2};$$

$$X_B = B^{-1}b - B^{-1}N_1 X_{N_1} - B^{-1}S_2 X_{s_2};$$

目标函数：

$$z = C_B B^{-1} b + (C_{N_1} - C_B B^{-1} N_1) X_{N_1}$$

$$+ (C_{S_2} - C_B B^{-1} I) X_S$$

第1节 单纯形法的矩阵描述

令非基变量=0，由上式得到：

基可行解 $X^{(1)}=\begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix};$

目标函数的值 $z=C_B B^{-1}b$

第1节 单纯形法的矩阵描述

（1）非基变量的系数表示为：

$$(C_{N_1}-C_B B^{-1} N_1)$$

对应已用的检验数符号

$$\mathrm{c}_{\mathrm{j}}-z_j(j=1,2,\cdots,n)$$

检验数也可表示为：

$$\mathrm{C}-\mathrm{C}_{\mathrm{B}} B^{-1} A \text{与} -\mathrm{C}_{\mathrm{B}} B^{-1}$$

第1节 单纯形法的矩阵描述

（2） θ规则表示为：

RHS值

表示选用>0的分量

$$\theta = min\left[\frac{(B^{-1}b)_i}{(B^{-1}P_j)_i} \middle| (B^{-1}P_j)_i > 0\right] = \frac{(B^{-1}b)_i}{(B^{-1}P_j)_i}$$

换入变量的系数向量

第1节 单纯形法的矩阵描述

（3）单纯形表与矩阵表示的关系

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & B^{-1}N_1 & B^{-1} \\ 1 & 0 & C_N - C_B B^{-1} N_1 & -C_B B^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -z \\ X_B \\ X_{N_1} \\ X_{N_2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ -C_B B^{-1} b \end{bmatrix} \qquad (2-7)$$

第1节 单纯形法的矩阵描述

单纯形表中的数据

	基变量 ←	非基变量	→	等式右边
	X_B	X_N	X_s	RHS
系数矩阵	$B^{-1}B=1$	$B^{-1}N_1$	B^{-1}	$B^{-1}b$
检验数	0	$C_{N_1}-C_BB^{-1}N_1$	$-C_BB^{-1}$	$-C_BB^{-1}b$

小结

1）掌握矩阵的运算；

2）理解基矩阵的作用；

3）了解矩阵运算与单纯表的关系。

单纯形法的矩阵描述

记线性规划问题为 $A = (a_{ij})_{m\times n} = (BN)$

$$Max = CX$$

$$\begin{cases} AX = b \\ X \geq 0 \end{cases}$$

其中, $C = (C_1, \cdots, C_m, C_{m+1}, \cdots, C_n)$

$$= (\quad C_B \quad\quad C_N \quad)$$

$$X = (X_1, \cdots, X_m, X_{m+1}, \cdots, X_n)$$

$$= (\quad X_B \quad\quad X_N \quad)$$

则上式变为

$$Max = C_B X_B + C_N X_N$$

$$\begin{cases} AX = (BN)\begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix} = BX_B + NX_N = b \\ X \geq 0 \end{cases}$$ B为可行基

从$\mathrm{BX_B} + \mathrm{NX_N} = \mathrm{b}$解出

$$\mathrm{X_B} = \mathrm{B}^{-1}(b - \mathrm{NX_N}) = \mathrm{B}^{-1}b - \mathrm{B}^{-1}\mathrm{NX_N}$$

相应于B的基本可行解自然是

$\mathrm{X_B} = \mathrm{B}^{-1}b$，$\mathrm{X_N} = 0$得

$$Z = C_B \mathrm{B}^{-1} b$$

为判断$\mathrm{X} = \begin{pmatrix} \mathrm{B}^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$是否为最优解，将其代入$Z$值

即$Z = CX = (C_B C_N)\begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix} = C_B \mathrm{B}^{-1} b + (C_N - C_B \mathrm{B}^{-1} N) X_N$

其中$C_N - C_B \mathrm{B}^{-1} N$为非基变量的检验数

当所有检验数都小于等于0时，此解为最优解，

当所有检 验数大于0时，可继续求解。具体过程见下表：

$C_j \rightarrow$	C
基b	X^T
b	A
$C_j - Z_j$	$C - C_B A$
$B_2^{-1}b$ $C_j - Z_j$	$B_2^{-1}A$ $C - C_{B_2} B_2^{-1} A$
$B^{-1}b$	$B^{-1}b$
$C_j - Z_j$	$C - C_B B^{-1} A$

单纯形法算例

$c_j \rightarrow$			2	3	0	0	0	
c_i	基	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	8	1	2	1	0	0	B_0^{-1}
0	x_4	16	4	0	0	1	0	
0	x_5	12	0	(4)	0	0	1	
	σ_j		2	3	0	0	0	
0	x_3	2	(1)	0	1	0	-1/2	B_1^{-1}
0	x_4	16	4	0	0	1	0	
3	x_2	3	0	1	0	0	1/4	
	σ_j		2	0	0	0	-3/4	
2	x_1	2	1	0	1	0	-1/2	B_2^{-1}
0	x_4	16	0	0	-4	1	(2)	
3	x_2	3	0	1	0	0	1/4	
	σ_j		0	0	-2	0	1/4	
2	x_1	4	1	0	0	1/4	0	B_3^{-1}
0	x_5	4	0	0	2	1/2	1	
3	x_2	2	0	1	1/2	-1/8	0	
	σ_j		0	0	-3/2	-1/8	0	

大M法算例

$c_j \rightarrow$			3	-1	-1	0	0	$-M$	$-M$	
c_i	基	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	x_4	11	1	-2	1	1	0	0	0	
$-$M	x_6	3	-4	1	2	0	-1	1	0	B_0^{-1}
$-$M	x_7	1	-2	0	(1)	0	0	0	1	
	σ_j		3-6M	-1+M	-1+3M	0	-M	0	0	
0	x_4	10	3	-2	0	1	0	0	-1	
$-$M	x_6	1	0	（1）	0	0	-1	1	-2	B_1^{-1}
-1	x_3	1	-2	0	1	0	0	0	1	
	σ_j		1	-1+M	0	0	-M	0	1-3M	
0	x_4	12	3	0	0	1	2	2	-5	
-1	x_2	1	0	1	0	0	-1	1	-2	B_2^{-1}
-1	x_3	1	-2	0	1	0	0	0	1	
	σ_j		1	0	0	0	-1	1-M	-1-M	
3	x_1	4	1	0	0	1/3	-2/3	2/3	-5/3	
-1	x_2	1	0	1	0	0	-1	1	-2	B_3^{-1}
-1	x_3	9	0	0	1	2/3	-4/3	4/3	-7/3	
	σ_j		0	0	0	-1/3	-1/3	1/3-M	2/3-M	

B^{-1}的构造方法

首先构造一个矩阵H，构造的方法是在一个$m \times m$的单位矩阵中抽掉第l列

换上另一列 $\begin{bmatrix} -a_{1k}/a_{lk} \\ \vdots \\ 1/a_{lk} \\ \vdots \\ -a_{mk}/a_{lk} \end{bmatrix}$ 得：

$$H = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & -a_{1k}/a_{lk} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1/a_{lk} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & -a_{mk}/a_{lk} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

将H左乘迭代前的逆矩阵B_{old}^{-1},就可以得到迭代后的基的逆矩阵B_{new}^{-1}

例 用单纯形法的矩阵算法求解

$$\max z = 4x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 6 \\ x_1 + x_2 \le 9 \\ 3x_1 - x_2 \le 15 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

将其化为标准形式

$$\max z = 4x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 9 \\ 3x_1 - x_2 + x_5 = 15 \\ x_1 \cdots x_5 \ge 0 \end{cases}$$

其中：$c = (c_N, c_B) = (4,2,0,0,0)$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 15 \end{bmatrix}$$

求解过程

(1)确定初始解

$\sigma_{\mathrm{N}}=$（4,2），$\max\sigma_{\mathrm{N}}=\sigma_1=4, x_1$为换入变量

$\theta=\min\{-,\quad 9/1,\quad 15/3\}=15/3, x_5$为换出变量

(2)第一次迭代，新的基变量为$(x_3,\quad x_4,\quad x_1)$

$$\mathrm{B}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&1/3\\0&1&-1/3\\0&0&1/3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1/3\\0&1&-1/3\\0&0&1/3\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{X}_{\mathrm{B}}=\begin{bmatrix}x_3\\x_4\\x_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1/3\\0&1&-1/3\\0&0&1/3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\9\\15\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11\\4\\5\end{bmatrix}$$

$$C_B=(0,\quad 0,\quad 4)$$

$$\sigma_{\mathrm{N}}=C_N-C_B\mathrm{B}^{-1}P_N=(2,\quad 0)-(0,\quad 0,\quad 4)\begin{bmatrix}1&0&1/3\\0&1&-1/3\\0&0&1/3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0\\1&0\\-1&1\end{bmatrix}$$

$$=(10/3,\quad -4/3)$$

$\max\sigma_{\mathrm{N}}=\sigma_2=10/3, x_2$为换入变量,

$$\mathrm{P}_2'=\begin{bmatrix}1&0&1/3\\0&1&-1/3\\0&0&1/3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5/3\\4/3\\-1/3\end{bmatrix}$$

$\theta=\min\{33/3,\quad 3,\quad -\}=3, x_4$为换出变量

(3)第二次迭代，新的基变量为$(x_3,\quad x_2,\quad x_1)$

$$\mathrm{B}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -5/4 & 0\\ 0 & 4/3 & 0\\ 0 & 1/4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1/3\\ 0 & 1 & -1/3\\ 0 & 0 & 1/3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -5/4 & 3/4\\ 0 & 4/3 & -1/4\\ 0 & 1/4 & 1/4\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{X_B}=\begin{bmatrix}x_3\\ x_2\\ x_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -5/4 & 3/4\\ 0 & 4/3 & -1/4\\ 0 & 1/4 & 1/4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\ 9\\ 15\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\ 3\\ 6\end{bmatrix}$$

$$C_B=(0,\quad 2,\quad 4)$$

$$\sigma_{\mathrm{N}}=C_N-C_B\mathrm{B}^{-1}P_N=-(0,\quad 2,\quad 4)\begin{bmatrix}-5/4 & 3/4\\ 4/3 & -1/4\\ 1/4 & 1/4\end{bmatrix}=(-10/4,\quad -1/2)$$

因全部检验数<0，故本次迭代中的解为

$(x_1,\quad x_2,\quad x_3,\quad x_4,\quad x_5)=(6,\quad 3,\quad 6,\quad 0,\quad 0)$即为问题的最优解。

填空

cj			2	-1	1	0	0	0
			x1	x2	x3	x4	x5	x6
0	x4	60	3	1	1	1	0	0
0	x5	10	1	-1	2	0	1	0
0	x6	20	1	1	-1	0	0	1
cj- zj			2	-1	1	0	0	0
	⁞		⁞					
0	x4					1	-1	-2
2	x1					0	1/2	1/2
-1	x2					0	-1/2	1/2
cj- zj								

填空

cj			3	5	4	0	0	0
			x1	x2	x3	x4	x5	x6
5	x2	8/3	2/3	1	0	1/3	0	0
0	x5	14/3	-4/3	0	5	-2/3	1	0
0	x6	29/3	-5/3	0	4	-2/3	0	1
cj- zj			-1/3	0	4	-5/3	0	0
⋮			⋮					
5	x2					15/41	8/41	-10/41
4	x3					-6/41	5/41	4/41
3	x1					-2/41	-12/41	15/41
cj- zj								