几种判别准则的汇总

标准型 / 检验数	$\max z=CX$ $AX=b, X\geqslant 0$	$\min z=CX$ $AX=b, X\geqslant 0$
c_j-z_j z_j-c_j	$\leqslant 0$ $\geqslant 0$	$\geqslant 0$ $\leqslant 0$

5.4 单纯形法小结

根据实际问题给出数学模型，列出初始单纯形表。进行标准化，见表。分别以每个约束条件中的松弛变量或人工变量为基变量，列出初始单纯形表。

变量	$x_j \geqslant 0$	不需要处理
	$x_j \leqslant 0$	令 $x'_j = -x_j$, $x'_j \geqslant 0$
	x_j无约束	令 $x_j = x'_j - x''_j$， $x'_j, x''_j \geqslant 0$
约束条件	$b \geqslant 0$	不需要处理
	$b<0$	约束条件两端同乘-1
	$\geqslant$	加松弛变量
	$=$	加人工变量
	$\leqslant$	减去剩余（松弛）变量，加人工变量
目标函数	$\max z$	不需要处理
	$\min z$	令 $z' = -z$, 求 $\max z'$
	加入变量的系数	
	松弛变量	0
	人工变量	-M

应用举例

一般讲，一个经济、管理问题凡满足以下条件时，才能建立线性规划模型。

- (1) 要求解问题的目标函数能用数值指标来表示，且为线性函数；
- (2) 存在着多种方案及有关数据；
- (3) 要求达到的目标是在一定约束条件下实现的，这些约束条件可用线性等式或不等式来描述。

应用举例

- **例10 合理利用线材问题**。现要做100套钢架，每套需用长为2.9m，2.1m和1.5m的元钢各一根。已知原料长7.4m，问应如何下料，使用的原材料最省。
- **解：**最简单做法是，在每一根原材料上截取2.9m，2.1m和1.5m的元钢各一根组成一套，每根原材料剩下料头0.9m（7.4-2.9-2.1-1.5=0.9)。为了做100套钢架，需用原材料100根，共有90m料头。若改为用套裁，这可以节约原材料。下面有几种套裁方案，都可以考虑采用。见表1-11。

表1-11

下料根数 / 长度(m)	方案 I	II	III	IV	V
2.9	1	2		1	
2.5	0		2	2	1
1.5	3	1	2		3
合计	7.4	7.3	7.2	7.1	6.6
料头	0	0.1	0.2	0.3	0.8

应用举例

- 为了得到100套钢架，需要混合使用各种下料方案。设按I方案下料的原材料根数为x_1,II方案为x_2，III方案为x_3，IV方案为x_4,V方案为x_5。根据表1-11的方案，可列出以下数学模型：

$$\min z = 0x_1 + 0.1x_2 + 0.2x_3 + 0.3x_4 + 0.8x_5$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 100 \\ 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 100 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_5 = 100 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

应用举例

- 在以上约束条件中加入人工变量x_6,x_7,x_8；然后用表1-12进行计算。

表1-12

$c_j \rightarrow$			0	-0.1	-0.2	-0.3	-0.8	-M	-M	−M	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
-M	x_6	100	1	2	0	1	0	1	0	0	100/1
-M	x_7	100	0	0	2	2	1	0	1	0	—
-M	x_8	100	[3]	1	2	0	0	0	0	1	100/1
c_j-z_j			4M	-0.1+3M	-0.2+4M	-0.3+3M	-0.8+4M	0	0	0	

应用举例

- 第1次计算

$c_j \rightarrow$			0	-0.1	-0.2	-0.3	-0.8	-M	-M	-M	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
-M	x_6	200/3	0	5/3	-2/3	1	-1	1	0	-1/3	200/3
-M	x_7	100	0	0	2	[2]	1	0	1	0	100/2
1	x_1	100/3	1	1/3	2/3	0	1	0	0	1/3	—
c_j-z_j			0	-0.1+5/3M	-0.2+4/3M	-0.3+3M	-0.8	0	0	-4/3M	

应用举例

- 第2次计算

$c_j \rightarrow$			0	-0.1	-0.2	-0.3	-0.8	-M	-M	-M	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
-M	x_6	50/3	0	[5/3]	-5/3	0	-3/2	1	-1/2	-5	150/15
-0.3	x_4	50	0	1	1	1	1/2	0	1/2	-2	—
0	x_1	100/3	1	1/3	2/3	0	1	0	0	1	100/1
c_j-z_j			0	-0.1+5/3M	0.1-5/3M	0	-0.65-3/2M	0	.15-3/2M	-4/3M	

应用举例

- 最终计算表（第3次计算）

$c_j \to$			0	-0.1	-0.2	-0.3	-0.8	-M	-M	-M	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
0.1	x_2	10	0	1	-1	0	-9/10	3/5	-3/10	-1/5	
-0.3	x_4	50	0	0	1	1	1/3	0	1/3	0	
0	x_1	30	1	0	1	0	13/10	-1/5	1/10	2/5	
$c_j - z_j$			0	0	0	0	-0.74	-M+0.06	-M+0.12	-M-0.02	

由计算得到最优下料方案是：

按Ⅰ方案下料30根；

Ⅱ方案下料10根；

Ⅳ方案下料50根。

即需90根原材料可以制造100套钢架。

有非基变量的检验数为零，所以存在多重最优解 。

应用举例

- **例11** （配料问题）某工厂要用三种原材料C、P、H混合调配出三种不同规格的产品A、B、D。已知产品的规格要求，产品单价，每天能供应的原材料数量及原材料单价，分别见表1-13和表1-14。该厂应如何安排生产，使利润收入为最大?

解： 如以A_C表示产品A中C的成分，A_P表示产品A中P的成分，依次类推。

表1-13

产品名称	规 格 要 求	单价（元/kg）
A	原材料C不少于50% 原材料P不超过25%	50
B	原材料C不少于25% 原材料P不超过50%	35
D	不限	25

应用举例

- 根据表1-13有：

$$A_C \geq \frac{1}{2}A, \quad A_P \leq \frac{1}{4}A, \quad B_C \geq \frac{1}{4}B, \quad B_P \leq \frac{1}{2}B \quad (1-39)$$

这里 $A_C+A_P+A_H=A$； $B_C+B_P+B_H=B$ (1-40)

将(1-40)逐个代入(1-39)并整理得到

$$-\frac{1}{2}A_C+\frac{1}{2}A_P+\frac{1}{2}A_H \leq 0$$

$$-\frac{1}{4}A_C+\frac{3}{4}A_P-\frac{1}{4}A_H \leq 0$$

$$-\frac{3}{4}B_C+\frac{1}{4}B_P+\frac{1}{4}B_H \leq 0$$

$$-\frac{1}{2}B_C+\frac{1}{4}B_P-\frac{1}{2}B_H \leq 0$$

应用举例

- 表1-14表明这些原材料供应数量的限额。加入到产品A、B、D的原材料C总量每天不超过100kg，P的总量不超过100kg，H总量不超过60kg。

表1-14

原材料名称	每天最多供应量（kg）	单价/(元/kg)
C	100	65
P	100	25
H	60	35

应用举例

- 由此得约束条件

$$A_C+B_C+D_C\le 100$$
$$A_P+B_P+D_P\le 100$$
$$A_H+B_H+D_H\le 60$$

- 在约束条件中共有9个变量，为计算和叙述方便，分别用$x_1,\ldots,x_9$表示。令

$$x_1=A_c,\ x_2=A_p,\ x_3=A_H,$$
$$x_4=B_C,\ x_5=B_P,\ x_6=B_H,$$
$$x_7=D_C,\ x_8=D_P,\ x_9=D_H.$$

应用举例

- 约束条件可表示为：

$$
\begin{cases}
-\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3 \le 0 \\
-\frac{1}{4}x_1+\frac{3}{4}x_2-\frac{1}{4}x_3 \le 0 \\
-\frac{3}{4}x_4+\frac{1}{4}x_5+\frac{1}{4}x_6 \le 0 \\
-\frac{1}{2}x_4+\frac{1}{2}x_5-\frac{1}{2}x_6 \le 0 \\
x_1+x_4+x_7 \le 100 \\
x_2+x_5+x_8 \le 100 \\
x_3+x_6+x_9 \le 60 \\
x_1,\cdots,x_9 \ge 0
\end{cases}
$$

应用举例

- 目标函数
  - 目的是使利润最大，即产品价格减去原材料的价格为最大。
  - 产品价格为：$50(x_1+x_2+x_3)$——产品A

    $35(x_4+x_5+x_6)$ —— 产品B

    $25(x_7+x_8+x_9)$ —— 产品D
  - 原材料价格为：$65(x_1+x_4+x_7)$——原材料C

    $25(x_2+x_5+x_8)$ —— 原材料P

    $35(x_3+x_6+x_9)$ —— 原材料H
- 为了得到初始解，在约束条件中加入松弛变量x_{10}～x_{16}，得到数学模型：

应用举例

- 例11的线性规划模型

目标函数 $\max z = -15x_1 + 25x_2 + 15x_3 - 30x_4 + 10x_5 - 40x_7 - 10x_9 + $

$+ 0\left(x_{10} + x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16}\right)$

约束条件

$$
\begin{cases}
-\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + x_{10} = 0 \\
-\frac{1}{4}x_1 + \frac{3}{4}x_2 - \frac{1}{4}x_3 + x_{11} = 0 \\
-\frac{3}{4}x_4 + \frac{1}{4}x_5 + \frac{1}{4}x_6 + x_{12} = 0 \\
-\frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_5 - \frac{1}{2}x_6 + x_{13} = 0 \\
x_1 + x_4 + x_7 + x_{14} = 100 \\
x_2 + x_5 + x_8 + x_{15} = 100 \\
x_3 + x_6 + x_9 + x_{16} = 60 \\
x_1, \cdots, x_9, x_{10}, \cdots, x_{18} \geq 0
\end{cases}
$$

应用举例

- 最优解
  - 用单纯形法计算，经过四次迭代，得最优解为：

    $x_1=100, x_2=50, x_3=50$
  - 这表示：需要用原料C为100kg，P为50kg，H为50kg，构成产品A。
  - 即每天只生产产品A为200kg，分别需要用原料C为100kg，P为50kg，H为50kg。
  - 从最终计算表中得到，总利润是z=500元/天。

应用举例

- **例12 生产与库存的优化安排问题**

 某工厂生产五种产品(i=1,…,5)，上半年各月对每种产品的最大市场需求量为d_{ij}(i=1,…,5;j=1,…,6)。已知每件产品的单件售价为S_i元，生产每件产品所需要工时为a_{i}，单件成本为C_i元；该工厂上半年各月正常生产工时为r_j(j=1,…,6)，各月内允许的最大加班工时为r_j';C_i'为加班单件成本。又每月生产的各种产品如当月销售不完，可以库存。库存费用为H_i(元/件·月)。假设1月初所有产品的库存为零，要求6月底各产品库存量分别为k_i件。现要求为该工厂制定一个生产计划，在尽可能利用生产能力的条件下，获取最大利润。

应用举例

解： 设x_{ij}和x_{ij}'分别为该工厂第i种产品的第j个月在正常时间和加班时间内的生产量；y_{ij}为i种产品在第j月的销售量，w_{ij}为第i种产品第j月末的库存量。根据题意，可用以下模型描述：

(1) 各种产品每月的生产量不能超过允许的生产能力，表示为：

$$\sum_{i=1}^{5} a_i x_i \le r_j, \quad j = 1, \cdots, 6$$

$$\sum_{i=1}^{5} a_i x_i' \le r_j', \quad j = 1, \cdots, 6$$

应用举例

(2) 各种产品每月销售量不超过市场最大需求量

$$y_{ij} \le d_{ij} \ (i=1,\ldots,5; j=1,\ldots,6)$$

(3) 每月末库存量等于上月末库存量加上该月产量减掉当月的销售量

$$\omega_{ij} = \omega_{i,j-1} + x_{ij} + x_{ij}^{'} - y_{ij}$$

$$i = 1,\cdots,5;\ j = 1,\cdots,6$$

其中 $\omega_{i0} = 0,\ \omega_{i6} = k_i$

(4) 满足各变量的非负约束

$$x_{ij} \ge 0,\ x_{ij}' \ge 0,\ y_{ij} \ge 0,$$

$$(i=1,\ldots,5;\ j=1,\ldots,6)$$

$$w_{ij} \ge 0 (i=1,\ldots,5;\ j=1,\ldots,5)$$

应用举例

（5）该工厂上半年总盈利最大可表示为：

$$\max z=\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{6}[S_i y_{ij}-C_i x_{ij}-C_i^{'} x_{ij}^{'}]-\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{6}H_i\omega_{ij}$$

应用举例

例13 连续投资问题

某部门在今后五年内考虑给下列项目投资，已知：

- 项目A，从第一年到第四年每年年初需要投资，并于次年末回收本利115%；
- 项目B，第三年初需要投资，到第五年末能回收本利125%，但规定最大投资额不超过4万元；
- 项目C，第二年初需要投资，到第五年末能回收本利140%，但规定最大投资额不超过3万元；
- 项目D，五年内每年初可购买公债，于当年末归还，并加利息6%。
- 该部门现有资金10万元，问它应如何确定给这些项目每年的投资额，使到第五年末拥有的资金的本利总额为最大?

应用举例

解： (1) 确定决策变量

这是一个连续投资问题，与时间有关。但这里设法用线性规划方法，静态地处理。以$x_{iA},x_{iB},x_{iC},x_{iD}$($i$=1,2,…，5)分别表示第i年年初给项目A，B，C，D的投资额，它们都是待定的未知变量。根据给定的条件，将变量列于表1-15中。

表1-15

项目	第一年	第二年	第三年	第四年	第五年
A	x_{1A}	x_{2A}	x_{3A}	x_{4A}	/
B	/	/	x_{3B}	/	/
C	/	x_{2C}	/	/	/
D	x_{1D}	x_{2D}	x_{3D}	x_{4D}	x_{5D}

第6节 应用举例

(2) 投资额应等于手中拥有的资金额

由于项目D每年都可以投资，并且当年末即能回收本息。所以该部门每年应把资金全部投出去，手中不应当有剩余的呆滞资金。因此

- 第一年：该部门年初拥有100000元，所以有$x_{1A}+x_{1D}=100000$
- 第二年：因第一年给项目A的投资要到第二年末才能回收。所以该部门在第二年初拥有资金额仅为项目D在第一年回收的本息$x_{1D}(1+6\%)$。于是第二年的投资分配是$x_{2A}+x_{2C}+x_{2D}=1.06x_{1D}$
- 第三年初的资金额是从项目A第一年投资及项目D第二年投资中回收的本利总和：$x_{1A}(1+15\%)$及$x_{2D}(1+6\%)$。于是第三年的资金分配为

$$x_{3A}+x_{3B}+x_{3D}=1.15x_{1A}+1.06x_{2D}$$

- 第四年：与以上分析相同，可得$x_{4A}+x_{4D}=1.15x_{2A}+1.06x_{3D}$
- 第五年：$x_{5D}=1.15x_{3A}+1.06x_{4D}$

应用举例

此外，由于对项目B、C的投资有限额的规定，即：

$$x_{3B} \le 40000$$

$$x_{2C} \le 30000$$

(3) 目标函数

问题是要求在第五年末该部门手中拥有的资金额达到最大，与五年末资金有关的变量是：$x_{4A}, x_{3B}, x_{2C}, x_{5D}$;因此这个目标函数可表示为：

$$\max z = 1.15x_{4A} + 1.40x_{2C} + 1.25x_{3B} + 1.06x_{5D}$$

应用举例

（4）数学模型

经过以上分析，这个与时间有关的投资问题可以用以下线性规划模型来描述：

目标函数： $\max z = 1.15x_{4A} + 1.25x_{2B} + 1.4x_{2C} + 1.06x_{5D}$

约束条件：

$$
\begin{cases}
x_{1A} + x_{1D} = 100000 \\
x_{2A} + x_{2C} + x_{2D} - 1.06x_{1D} = 0 \\
x_{3A} + x_{3B} + x_{3D} - 1.15x_{1A} - 1.06x_{2D} = 0 \\
x_{4A} + x_{4D} - 1.15x_{2A} - 1.06x_{3D} = 0 \\
x_{5D} - 1.15x_{3A} - 1.06x_{4D} = 0 \\
x_{3B} \le 40000 \\
x_{2C} \le 30000 \\
x_{iA}, x_{iB}, x_{iC}, x_{iD} \ge 0, \quad i = 1,2,\cdots,5
\end{cases}
$$

应用举例

(5) 用两阶段单纯形法计算结果得到

第一年：x_{1A}=34783元，x_{1D}=65217元

第二年：x_{2A}=39130元，x_{2C}=30000元，x_{2D}=0

第三年：x_{3A}=0，x_{3B}=40000元，x_{3D}=0

第四年：x_{4A}=45000元，x_{4D}=0

第五年：x_{5D}=0

到第五年末该部门拥有资金总额为143,750元，即盈利43.75%。

应用举例

- 另一个的投资方案：
  - 第一年： x_{1A}=71698元，x_{1D}=28300元
  - 第二年： x_{2A}=0元，x_{2C}=30000元，x_{2D}=0
  - 第三年： x_{3A}=42453元，x_{3B}=40000元，x_{3D}=0
  - 第四年： x_{4A}=0元，x_{4D}=0
  - 第五年： x_{5D}=48820元。
- 还可以有其他的方案。

例题——填空

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_4	6	(b)	(c)	(d)	1	0
x_5	1	-1	3	(e)	0	1
c_j-z_j		(a)	-1	2	0	0
x_1	(f)	(g)	2	-1	1/2	0
x_5	4	(h)	(i)	1	1/2	1
c_j-z_j		0	-7	(j)	(k)	(t)