Integer Programming

第 4 部分

整 数 规 划

IP

第4部分 整数规划

4.1 整数规划问题及其数学模型

4.1.1 问题的提出

例1 某厂在一计划期内拟生产甲、乙两种大型设备。该厂有充分的生产能力来加工制造这两种设备的全部零部件，所需原材料和能源也可满足供应，不过有A、B两种紧缺物资的供量受到严格控制，与此有关的数据如下表所示。问该厂在计划期内应安排生产甲、乙设备各多少台，才能使利润达到最大？

设备 原料	单台所需原料数量 甲 x_1	 乙 x_2	可供量
A （吨）	2	1	9
B (千克)	5	7	35
单台利润（万元）	6	5	z

4.1 整数规划问题及其数学模型

$$\max z = 6x_1 + 5x_2$$

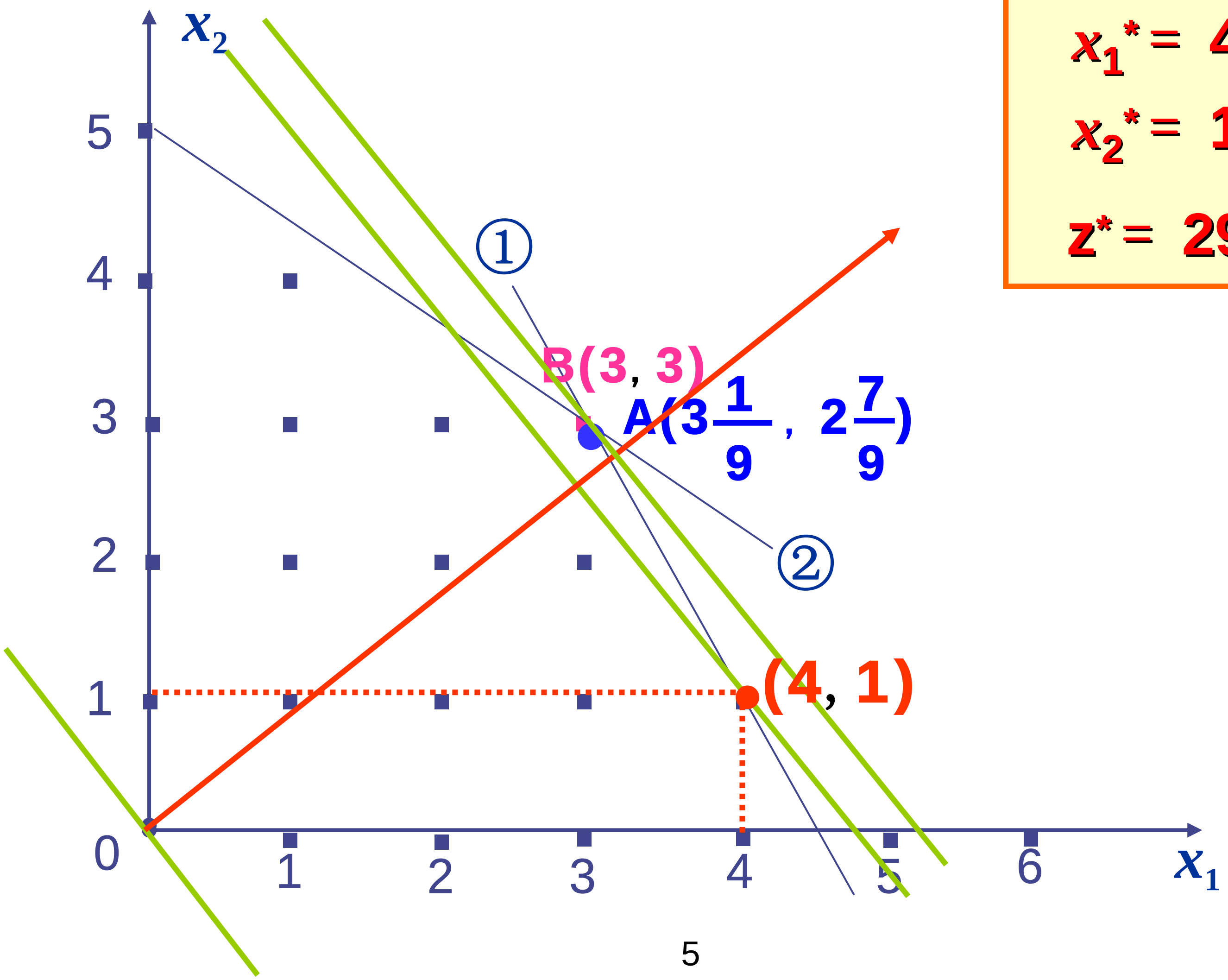
$$\text{s.t.}\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leqslant 9 & ① \\ 5x_1 + 7x_2 \leqslant 35 & ② \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0 & ③ \\ x_1,\ x_2 \text{ 为整数} \end{cases}$$

①②③ —— 伴随LP问题

x_1，x_2 为整数 —— 整数性约束

		x_1	x_2	z	可行？	最优？
LP解		$3\frac{1}{9}$	$2\frac{7}{9}$	$32\frac{5}{9}$		
圆整	四舍五入	3	3		否	
	只舍不入	3	2	28	是	否
IP解		4	1	29	是	是

4.1.2 整数规划的图解法



$x_1^* = 4$

$x_2^* = 1$

$z^* = 29$

例2：某厂拟用火车装运甲乙两种货物集装箱，每箱的体积、重量、可获利润及装运所受的限制如下：

货物集装箱	体积（立方米）	重量（百斤）	利润（百元）
甲	5	2	20
乙	4	5	10
托运限制	24	13	

4.1.3 整数规划的几个典型问题及其模型

一、投资决策问题

设有n个投资项目，其中第j个项目需要资金a_j万元，将来可获利润c_j万元。若现有资金总额为b万元，则应选择哪些投资项目，才能获利最大？

设 $x_j = \begin{cases} 1, & \text{若对第}j\text{个项目投资,} \\ 0, & \text{不然;} \end{cases}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$

设z为可获得的总利润(万元)，则数学模型为

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leqslant b \\ x_j = 0 \text{ 或 } 1, \quad j=1, 2, \cdots, n \end{cases}$$

0-1背包问题

4.1 整数规划问题及其数学模型

二、设备购置问题

某厂拟用M元资金购买m种设备A_1，A_2，…，A_m，其中设备A_i单价为p_i（i＝1，2，…，m）。现有n个地点B_1，B_2，…，B_n可装置这些设备，其中B_j处最多b_j台（j＝1，2，…，n）。预计将一台设备A_i装备于B_j处可获纯利c_{ij}元，则应如何购置这些设备，才能使预计总利润为最大？

设 y_i ＝购买设备A_i的台数

x_{ij}＝将设备A_i装置于B_j处的台数

z ＝预计总利润

数学模型为

$$\max z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} - y_i \leqslant 0, & i=1,2,\cdots,m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leqslant b_j, & j=1,2,\cdots,n \\ \sum_{i=1}^{m} p_i y_i \leqslant M \\ x_{ij} \geqslant 0,\quad y_i \geqslant 0 \\ x_{ij},\ y_i \text{均为整数} \end{cases}$$

4.1 整数规划问题及其数学模型

三、工厂选址问题

某种商品有n个销地，各销地的需求量分别为b_j吨/天，j=1，2，…，n。现拟在m个地点中选址建厂，来生产这种产品以满足供应，且规定一址最多只能建一个工厂。若选i址建厂，将来生产能力为a_i吨/天，固定费用为d_i元/天，i=1，2，…，m.已知i址至销地j的运价为c_{ij}元/吨。应如何选择厂址和安排调运，使总的费用最少？

设

$$y_i=\begin{cases}1, & \text{若在 } i \text{ 址建厂}\\ 0, & \text{否则}\end{cases}$$

x_{ij}=从厂址 i 到销地 j 的运量(吨/天)

z = 总费用(元/天)

该问题的数学模型为

$$\min z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}+\sum_{i=1}^{m}d_iy_i$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}\leqslant a_iy_i, & i=1,2,\cdots,m\\ \sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j, & j=1,2,\cdots,n\\ x_{ij}\geqslant 0,\\ y_i=0\text{或}1\end{cases}$$

4.2.1 分支定界法

一、解题步骤：

1、求解IP问题的松弛问题LP

LP有最优解，但不符合整数条件，设LP的最优解为 $X^{(0)}=(b_1',b_2'\cdots,b_m',0,\cdots,0)^T$ 最优值为$Z^{(0)}$，其中 b_i'不全为整数。

2、求解IP问题

记IP的目标函数最优值为 z^*，其上界为 $\bar{Z}=Z^{(0)}$ ，任选一个整数解为其下界。

3、分枝

在LP的最优解中任选一个不符合整数条件的变量 $x_r=b_r'$ ，构造两个约束条件

$x_r\le[b_r']$　　$x_r\ge[b_r']+1$ ，其中$[b_r']$为小于b_r'的最大整数，

将两个约束条件分别放入IP，形成两个问题IP1和IP2，并求解LP1和LP2。

4、定界

（1）在各分枝中找出目标函数值最大者作为新上界 $\bar{Z}$；

（2）从已符合整数条件的分枝中，找出目标函数值最大者作为新的下界 $\underline{Z}$ 。

5、比较与剪枝

各分枝中，若有小于 $\underline{Z}$ 者，则剪掉此枝，否则转3

4.2.1 分支定界法

例2 试用分支定界法求解例1中的IP问题

解 先求其松弛问题，其最优解为:

$$\max z = 6x_1 + 5x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leqslant 9 & ① \\ 5x_1 + 7x_2 \leqslant 35 & ② \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0 & ③ \\ x_1,\ x_2\ \text{为整数} \end{cases}$$

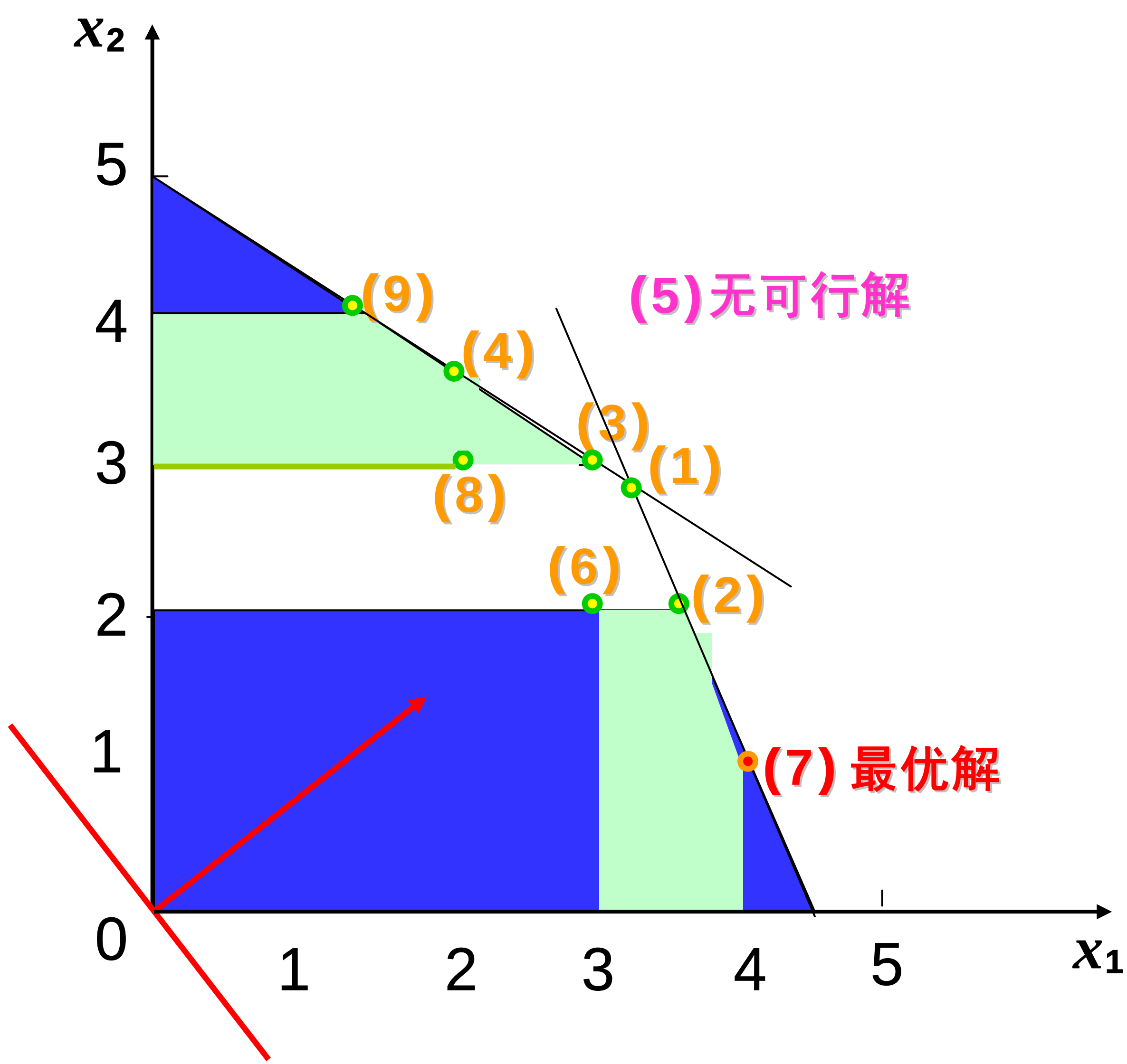
$$x_1 = 3\frac{1}{9},\quad x_2 = 2\frac{7}{9};\quad z = 32\frac{5}{9}$$

由于它非整数解，所以要以它为试点对问题进行分支。为此，可从非整数值的 x_1，x_2 中任选一个，比如 $x_2 = 2\frac{7}{9}$，

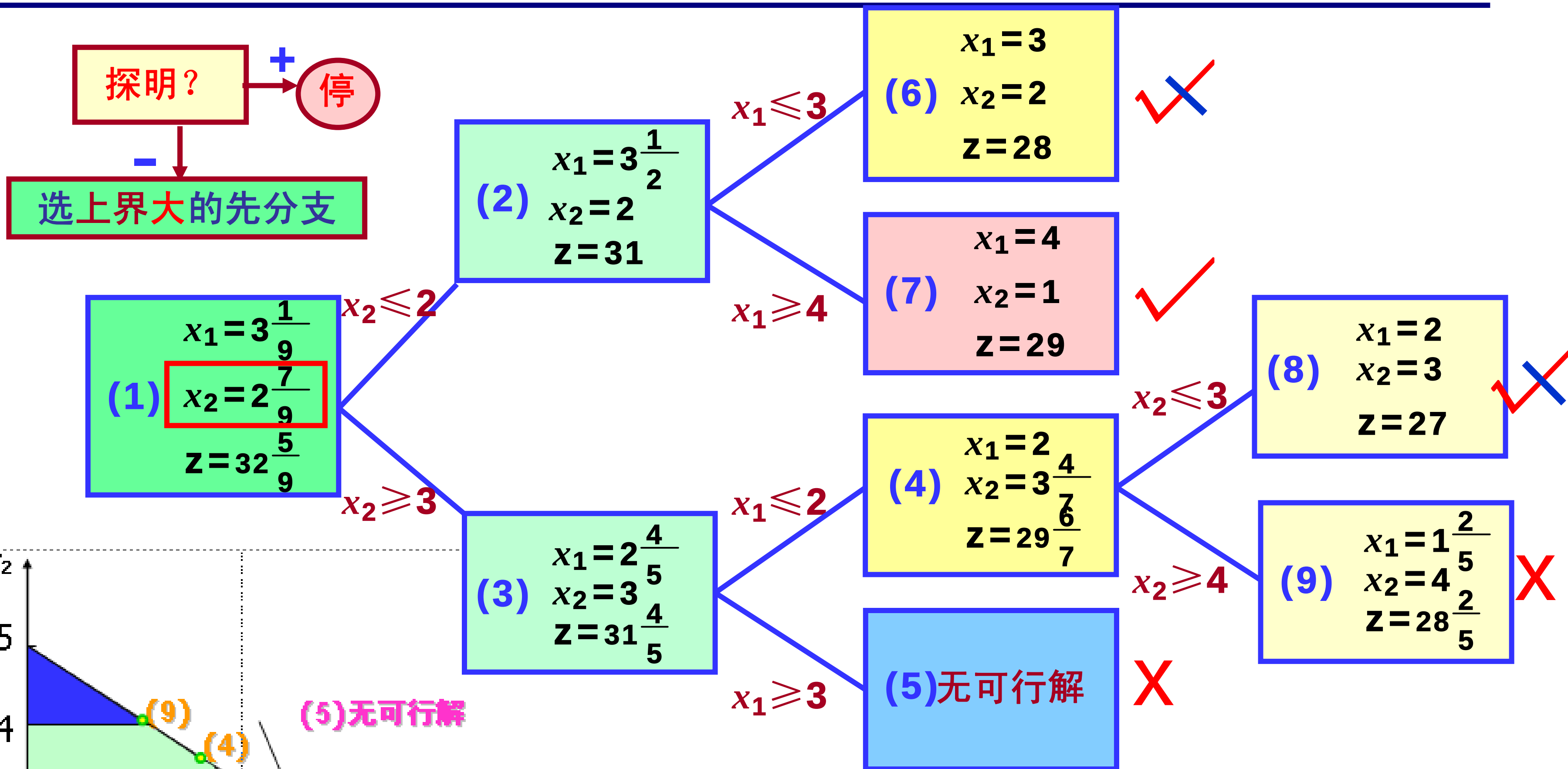
由此得到两个新约束：

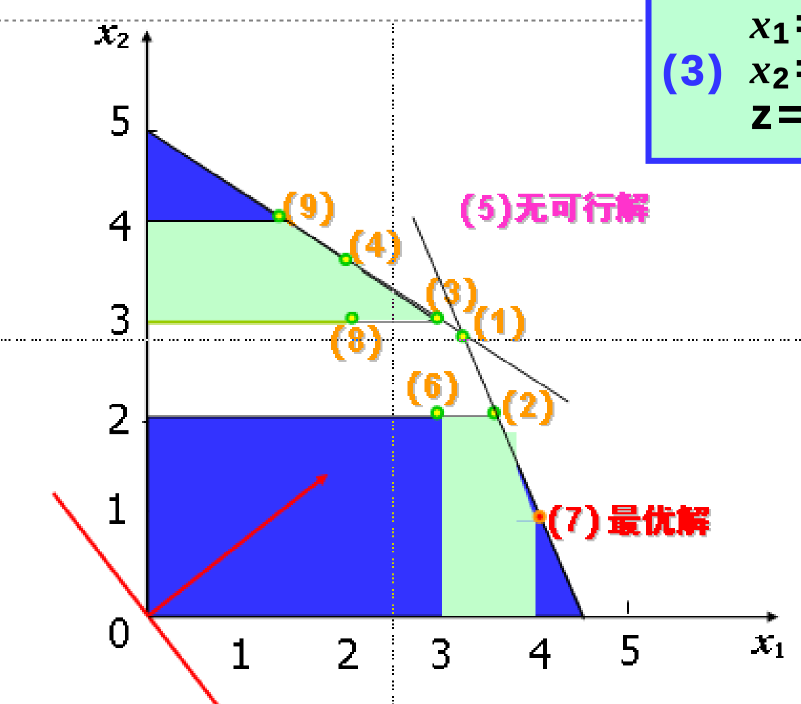
① $x_2 \leqslant 2$， ② $x_2 \geqslant 3$

4.2.1 分支定界法



4.2.1 分支定界法





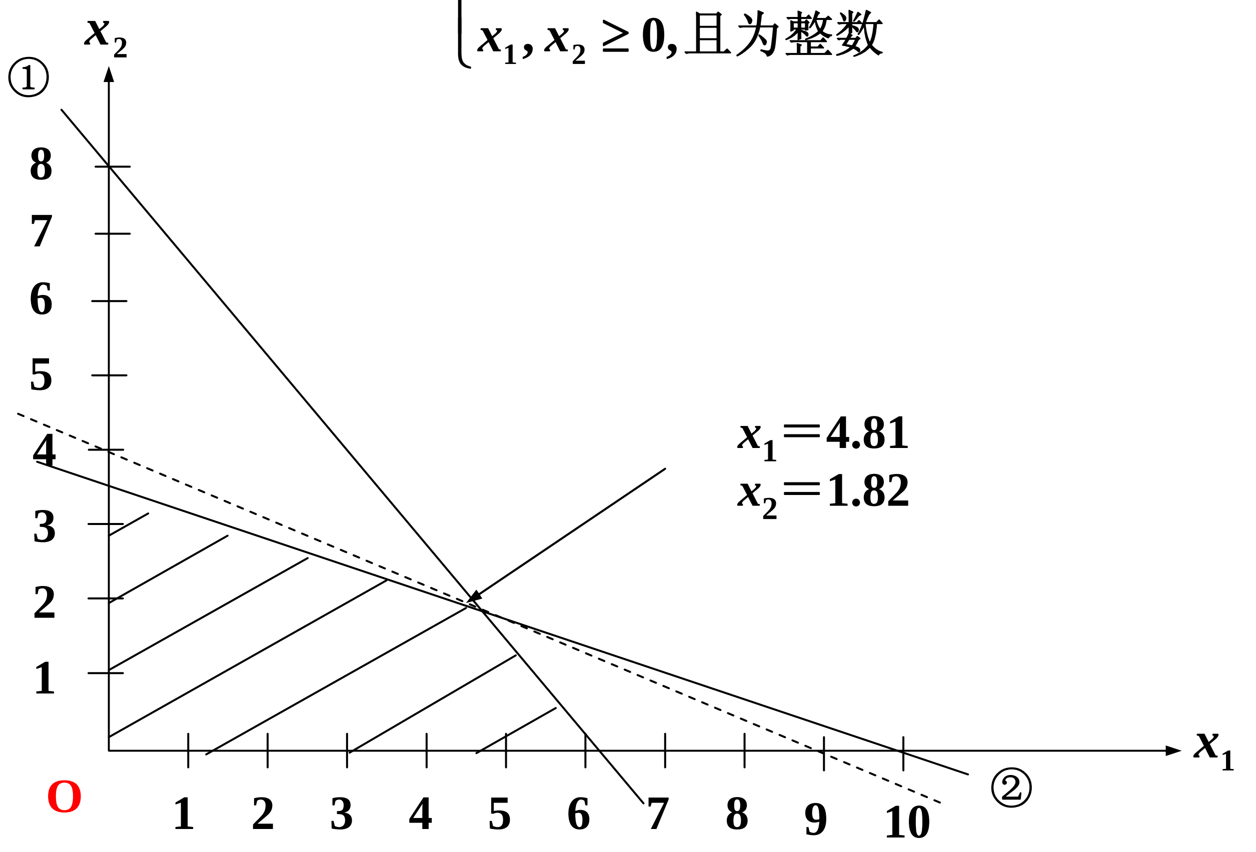
$x_1^* = 4 \quad x_2^* = 1 \quad z^* = 29$

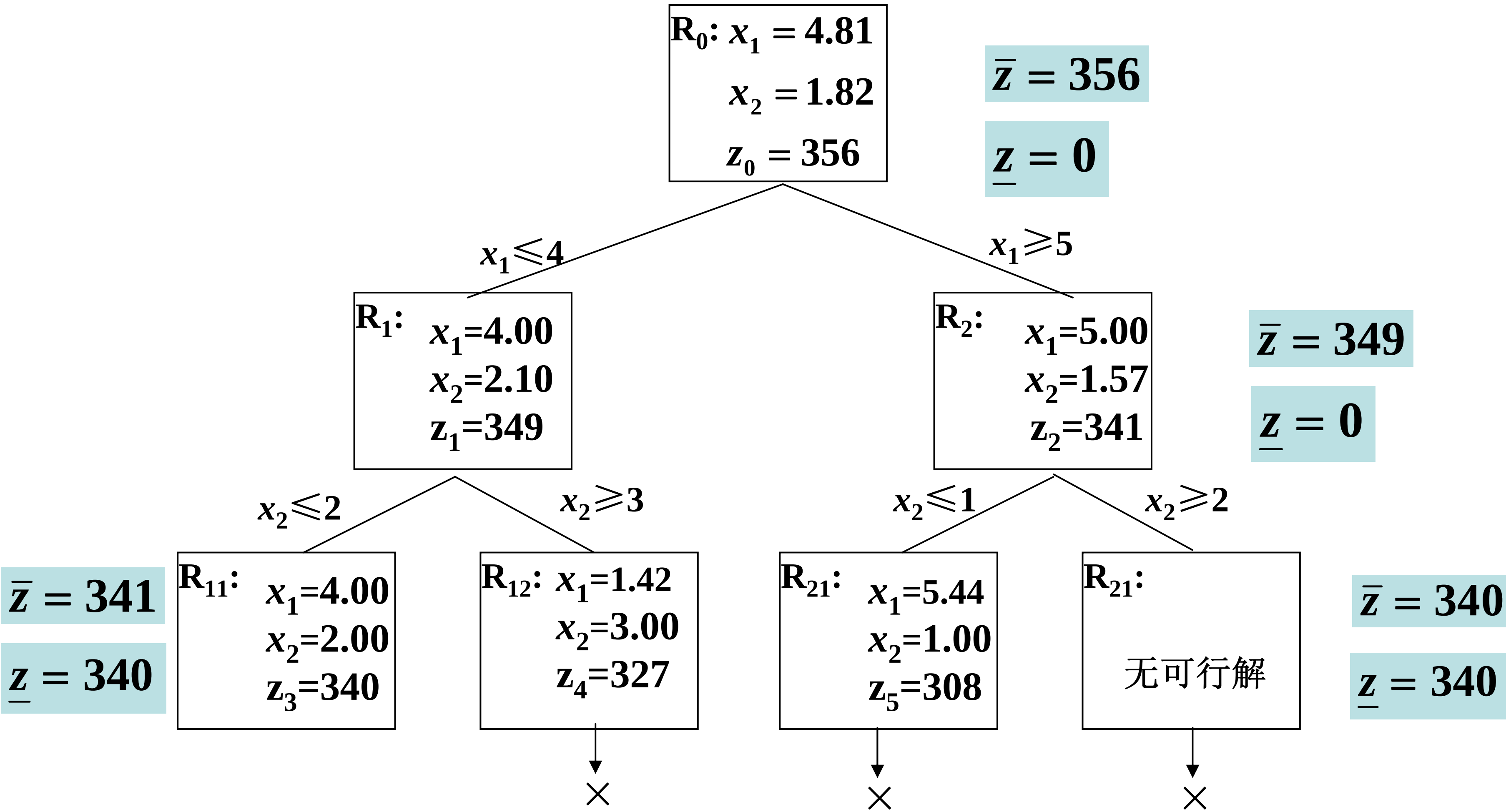
4.2.1 分支定界法

例　IP问题为

$$\max z = 40x_1 + 90x_2$$

$$\begin{cases} 9x_1 + 7x_2 \le 56 \\ 7x_1 + 20x_2 \le 70 \\ x_1, x_2 \ge 0, \text{且为整数} \end{cases}$$





$z^* = \underline{z} = 340$

$X^* = (4,2)^T$

两点说明

- 有若干个待求解的分枝时，一般选取目标函数值最大的分枝作为新的上界，并对它继续分枝求解。
- 从已符合整数条件的分枝中，找出目标函数值最大者作为新的下界。

4.2 整数规划的一般解法

4.2.2 割平面法

一、基本思想

设 $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$

是IP问题关于基B的LP解；若x_j非整，不妨假设它位于最优单纯形表的第i行，则其所在方程为

$$x_{Bi}+\sum_{j\in J} a_{ij}^{\prime} x_j = b_i^{\prime} \qquad (4\text{-}1)$$

其中 $J=\{\, j \mid x_j$是关于基B的非基变量$\}$

以N表示整数，以 f 表示正的真分数，令

$$a_{ij}^{\prime} = N_{ij} + f_{ij} \qquad (0 \leqslant f_{ij} < 1)$$

$$b_i^{\prime} = N_i + f_i \qquad (0 < f_i < 1)$$

将上面两式代入(4-1)中，得

4.2 整数规划的一般解法

改写成

$$x_{Bi} + \sum_{j\in J} N_{ij} x_j + \sum_{j\in J} f_{ij} x_j = N_i + f_i$$

$$x_{Bi} + \sum_{j\in J} N_{ij} x_j - N_i = f_i - \sum_{j\in J} f_{ij} x_j \qquad (\#)$$

上式右端显然小于1，即有 $f_i - \sum_{j\in J} f_{ij} x_j < 1$

但(#)式左端显然须整，故右端也须整，则上式可改写成

$$f_i - \sum_{j\in J} f_{ij} x_j \leqslant 0 \qquad (4\text{-}2)$$

这就是源行为 i 的<u>割平面</u>。

(1) **它切割掉了非整的LP解X；**

(2) **它未切割掉任何一个整数解。**

下面来证明上述两个命题。

4.2 整数规划的一般解法

证明 (1) 用反证法。假设X未被(4-2)切割掉，则X应满足(4-2)，即有

$$f_i - \sum_{j \in J} f_{ij} x_j \leqslant 0$$

因x_j是关于基B的非基变量, 即有 $x_j = 0$ (对一切 $j \in J$)，故上式即为

$$f_i \leqslant 0$$

而这与 $f_i > 0$相矛盾，故假设X未被(4-2)切割掉是错误的。

(2) 设$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$是该IP问题的任一整数可行解；则X必满足该IP问题的所有约束，当然也满足(4-1)及其等价方程(#)，故X必满足(4-2)式(这是因为(4-2)式恰是在X须整的条件下而由(#)导出的)，即任一整数可行解X都未被(4-2)切割掉.

4.2 整数规划的一般解法

二、基本步骤

1° 用单纯形法求解IP的伴随LP问题，得到其解X_0，令$k=0$；

2° 若X_k的分量全为整数，则X_k即为原问题的最优解，停止计算；

否则根据X_k的一个非整分量所在单纯形表的那一行，譬如第 i 行，

构造**源行为 i 的割平面(4-2)**，并给它引入一个弛变量 x_{n+k+1}，

得

$$-\sum_{j\in J} f_{ij}x_j + x_{n+k+1} = -f_i$$

3° 把这个新约束添到最优单纯形表的倒第2行，并增加一列(即

x_{n+k+1}列)，用对偶单纯形法继续迭代，求得一个新解X_{k+1}，

令$k:=k+1$，返2°。

4.2 整数规划的一般解法

例 试用割平面法求解：

$$\max z = x_1 + x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leqslant 5 \\ 4x_1 - x_2 \geqslant 2 \\ x_1,\ x_2 \geqslant 0 \\ x_1,\ x_2 \ \text{为整数} \end{cases}$$

解 标准化并获取排列阵：

$$\max z = x_1 + x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ -4x_1 + x_2 + x_4 = -2 \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geqslant 0 \end{cases}$$

4.2 整数规划的一般解法

序号	c_j			1	1	0	0
		基	解	x_1	x_2	x_3	x_4
(a)	0	x_3	5	2	1	1	0
	0	x_4	−2	−4	1	0	1
			0	−1	−1	0	0
(b)	0	x_3	4	0	3/2	1	1/2
	1	x_1	1/2	1	−1/4	0	−1/4
			1/2	0	−5/4	0	−1/4
(c)	1	x_2	8/3	0	1	2/3	1/3
	1	x_1	7/6	1	0	1/6	−1/6
			23/6	0	0	5/6	1/6

4.2 整数规划的一般解法

源于**第一行**构造割平面：

$$\frac{2}{3}-\left(\frac{2}{3}x_3+\frac{1}{3}x_4\right)\leqslant 0$$ ① 等价于 $x_2 \leqslant 2$

$$-\frac{2}{3}x_3-\frac{1}{3}x_4+x_5=-\frac{2}{3}$$

序号	c_j			1	1	0	0	0
		基	解	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
(a)	1	x_2	8/3	0	1	2/3	1/3	0
	1	x_1	7/6	1	0	1/6	−1/6	0
	0	x_5	−2/3	0	0	−2/3	-1/3	1
			23/6	0	0	5/6	1/6	0
(b)	1	x_2	2	0	1	0	0	1
	1	x_1	3/2	1	0	1/2	0	-1/2
	0	x_4	2	0	0	2	1	−3
			7/2	0	0	1/2	0	1/2

4.2 整数规划的一般解法

源于**第二行**构造割平面：

② $\frac{1}{2}-(\frac{1}{2}x_3+\frac{1}{2}x_5)\leqslant 0$

等价于 $x_1+x_2\leqslant 3$

$$-\frac{1}{2}x_3-\frac{1}{2}x_5+x_6=-\frac{1}{2}$$

c_j			3	5	0	0	0	0
	基	解	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
1	x_2	2	0	1	0	0	1	0
1	x_1	3/2	1	0	1/2	0	−1/2	0
0	x_4	2	0	0	2	1	−3	0
0	x_6	-1/2	0	0	-1/2	0	−1/2	1
		7/2	0	0	1/2	0	1/2	0
1	x_2	2	0	1	0	0	1	0
1	x_1	1	1	0	0	0	−1	1
0	x_4	0	0	0	0	1	−5	4
0	x_3	1	0	0	1	0	1	−2
		3	0	0	0	0	0	1

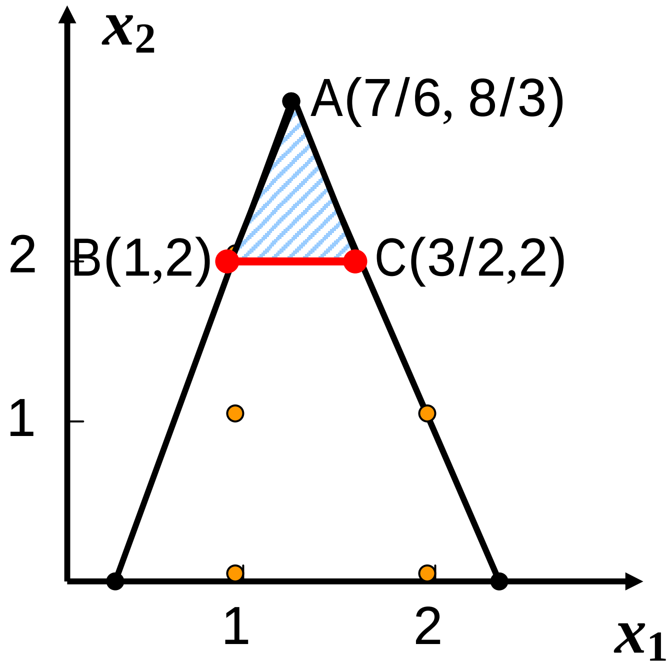
$X_1^* = (1,\ 2)^T$

$X_2^* = (2,\ 1)^T$

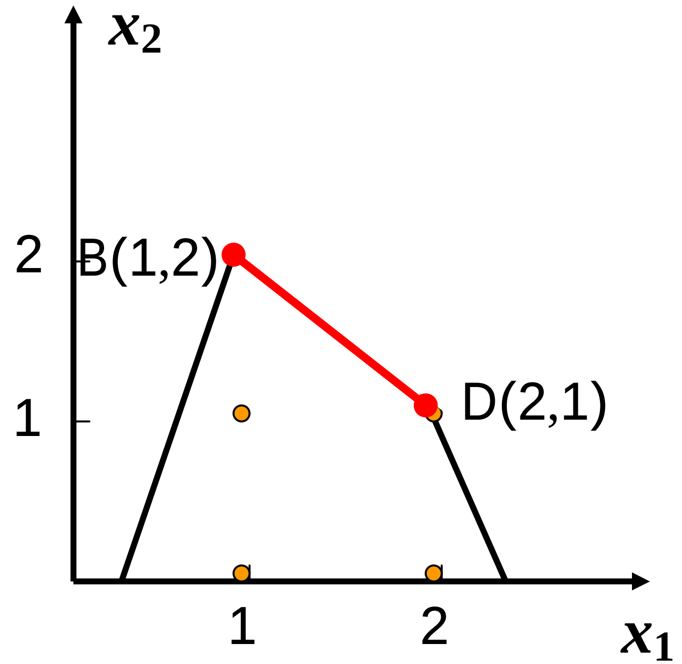
$z^* = 3$

4.2 整数规划的一般解法

① $x_2 \leqslant 2$



② $x_1 + x_2 \leqslant 3$



4.3　0-1整数规划

一、0－1变量的引入

二、0－1整数规划的解法：隐枚举法

一、0－1变量的引入

例1 某公司在东西南三个区建门市，7个位置 A_i 可供选择，规定：

（1）东区 A_1, A_2, A_3 中至多选两个 （2）西区 A_4, A_5 中至少一个

（3）南区 A_6, A_7 中至少一个

如果选 A_i 点，设备投资为 b_i，每年获利 c_i 元，但总额不能超过B元，问应选择哪几点，使利润最大？

解：每个位置有两种状态，被选中，未被选中， 被选中投资 b_i，获利 c_i，

此时可用0－1变量，设 $x_i = \begin{cases} 1, & \text{当 } A_i \text{被选中} \\ 0, & \text{当 } A_i \text{未被选中} \end{cases} \quad i = 1, 2, \cdots, 7$

目标函数 $\max z = \sum_{i=1}^{7} c_i x_i$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 \le 2 \\ x_4 + x_5 \ge 1 \end{array}\right\} \text{位置选择约束}$$

$$x_6 + x_7 \ge 1$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{7} b_i x_i \le B & \qquad \text{资源约束} \\ x_i = 0 \text{或} x_i = 1 \quad (i = 1, \cdots, 7) \end{cases}$$

例2 某油田 开发公司打算在**10**个有油气构造处选若干个钻井 采油，若在开采时还需满足下述条件，

（**a**）若开采**8**号，则必须同时开采**6**号；但开采**6**号，不一定开采**8**号

当$x_8=1$ $\Rightarrow$ $x_6=1$，$x_6\neq 0$

当$x_8=0$ $\Rightarrow$ $x_6=1$，$x_6=0$

$\therefore \quad x_8 \leq x_6$

（**b**）若开采**5**号，则不许开采**3**号；反过来也一样

当$x_5=1$ $\Rightarrow$ $x_3=0$，$x_3 \neq 1$

当$x_5=0$ $\Rightarrow$ $x_3=0$，$x_3=1$

$\therefore \quad x_5 + x_3 \leq 1$

（**c**） **2** 号和**4**号至少开采一个；

$$x_2 + x_4 \geq 1$$

（**d**） **8** 号与**7**号必须同时开采；

$$x_8 = x_7$$

（**e**）**1**号、**4**号、**6**号、**9**号开采时不能超过两个，

试表示上述约束条件。

$$x_1 + x_4 + x_6 + x_9 \leq 2$$

例3 表示选择性约束

（1）m个约束条件只有k个起作用

设m个约束条件为

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad (i=1,\cdots,m)$$

引入逻辑变量 $y_i = \begin{cases} 1, & \text{表示第 } i \text{个约约束条件起作} \\ 0, & \text{表示第 } i \text{个约约束条件不起作} \end{cases}$

则模型为 $\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i + (1-y_i)M \\ y_1 + y_2 + \cdots + y_m = k \\ y_i = 0\text{或}1 \end{cases}$ 其中M是一个很大的数

（2）约束条件右端项可能是m个值中的某一个即

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_1 或 b_2, \cdots, 或 b_m$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \\ y_1 + y_2 + \cdots + y_m = 1 \\ y_i = 0 或 1 \end{cases}$$

例4 设目标函数

$$F(x)=\begin{cases} k+cx & \text{当} x>0 \\ 0 & \text{当} x=0 \end{cases}$$

试表示目标函数。

引入逻辑变量 $y_i=\begin{cases} 1 & x>0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$

该目标函数为

$$F(x)=ky+cx$$

$$\begin{cases} x \le yM \\ xM \ge y \\ x \ge 0, y=0\text{或}1 \end{cases}$$

例　求解0-1整数规划问题

$$\max \quad z=8x_1+2x_2-4x_3-7x_4-5x_5$$

$$\begin{cases} 3x_1+3x_2+x_3+2x_4+3x_5\le 4 \\ 5x_1+3x_2-2x_3-x_4+x_5\le 4 \\ x_j=0\text{或}1,\ j=1,2,\cdots,5 \end{cases}$$

变成标准型，要求如下：

（1）目标函数求极大化，对于目标函数为 $\min z$的极小化问题，令 $z'=-z$使其变为目标函数为maxz’的极大化问题

（2）目标函数中所有变量 x_j 的系数都为正数，

如果目标函数中变量 x_j 的系数为负数，令$x_j'=1-x_j$

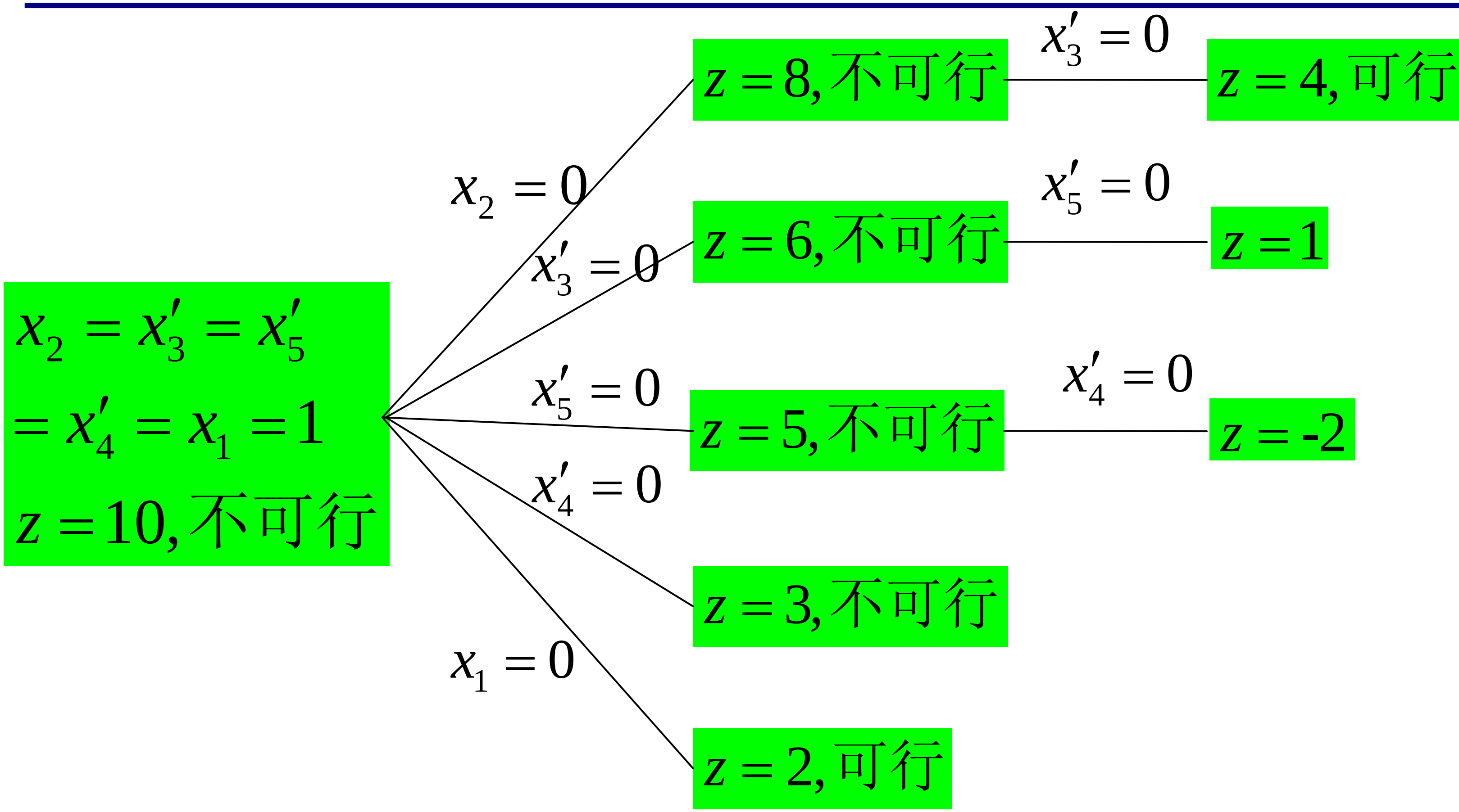
把模型中的 x_j用x_j'代替

（3）变量的排列顺序按变　量在目标函数中的系数　值从小到大排列

令$x_3' = 1 - x_3$， $x_4' = 1 - x_4$， $x_5' = 1 - x_5$得

$$\max \quad z = 2x_2 + 4x_3' + 3x_5' + 7x_4' + 8x_1 - 16$$

$$\begin{cases} 3x_2 - x_3' - 3x_5' - 2x_4' + 3x_1 \le -2 \\ 3x_2 + 2x_3' + x_4' - x' + 5x_1 \le 6 \\ x_2, \quad x_3', \quad x_5', \quad x_4', \quad x_1, = 0 \text{或} 1, \end{cases}$$



最优解是$x_2 = 0$，$x_3' = 0$，$x_5' = 1$，$x_1 = 1$

于是，原问题的最优解是$z^* = 4$,

$x_1^* = 1$，$x_2^* = 0$，$x_3^* = 1$，$x_4^* = 0$，$x_5^* = 0$

4.4　指派问题

1. 指派问题的提出
2. 指派问题的解法
3. 匈牙利法求解步骤
4. 非标准化指派模型的标准化
5. 极大化问题
6. 不平衡指派问题

1. 指派问题的提出

例1 说明书，译成英、日、德、俄文字，由甲乙丙丁四人译成不同文字所需时间，应如何指派所需时间最少？

人员 \ 任务	E	J	G	R
甲	2	15	13	4
乙	10	4	14	15
丙	9	14	16	13
丁	7	8	11	9

n项任务，n个人去完成，不同人完成不同任务的时间或费用不同，应如何指派才能使总效率最高？

类似的问题有n个零件，指派到n个机床上加工，n条航线指派n艘船去航行等。

一般地，有 n 项任务，n 个人完成，第 i 个人完成第 j 项任务的代价为 $c_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$，为了求得总代价最小的 指派方案，引入 0-1 型变量

$$x_{ij}=\begin{cases}1 & \text{指派第}\,i\,\text{个人完成第}\,j\,\text{项任务}\\ 0 & \text{不指派第}\,i\,\text{个人完成第}\,j\,\text{项任务}\end{cases}$$

数学模型

$$\min z=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$$

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}x_{ij}=1 & j=1,2,\cdots,n\\ \sum_{j=1}^{n}x_{ij}=1 & i=1,2,\cdots,n\\ x_{ij}=0\text{或}1\end{cases}$$

指派问题是0—1规划的特例，也是运输问题的特例，产地和销地数量都为n(n=1)

2. 指派问题的解法——匈牙利法

基本思想：

$$\begin{pmatrix} 4 & (0) & 5 & 6 \\ 5 & 4 & (0) & 5 \\ 7 & 6 & 3 & (0) \\ (0) & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

——对**效益阵**反复施行**同解变换**，使其每行每列都出现至少一个**0**元，即获**最优**

令解矩阵X中对应的这n个独立0元素的取值为1，其它元素为0，此时z_b=0，这就得到了以B为系数矩阵的指派问题的最优解，原问题也就得到了最优解。

$(c_{ij}) \rightarrow (b_{ij})$

$$b_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$$

同解变换

例如

$$(b_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & + & + & 0 \\ + & + & 0 & + \\ 0 & 0 & + & + \\ + & + & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{则} \quad (x_{ij}^*) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

即最优阵

问题(b_{ij}) 的目标函数值 $z_b = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_{ij} \geqslant 0$

而(x_{ij}^*) 能使 $z_b^* = 0$ b min z_b 故(x_{ij}^*)最优。

克尼格定理(konig)：如果从效率矩阵$[a_{ij}]$的每一行元素中分别减去(或加上)一个常数u_i,从每列中分别减去(或加上)一个常数v_j,得到一个新的效率矩阵$[b_{ij}]$,其中$b_{ij}=a_{ij}-u_i-v_j$,则以$[b_{ij}]$为效率矩阵的最优解等价于以$[a_{ij}]$为效率矩阵的最优解.

以$[a_{ij}]$为效率矩阵的目标函数值：$z^0=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_{ij}$

以$[b_{ij}]$为效率矩阵的目标函数值：$z'=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}x_{ij}$

$\because b_{ij}=a_{ij}-u_i-v_j$

$\therefore \min z'=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}-u_i-v_j\right)x_{ij}$

$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_{ij}-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}u_i x_{ij}-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}v_j x_{ij}$

$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_{ij}-\sum_{i=1}^{n}u_i\sum_{j=1}^{n}x_{ij}-\sum_{i=1}^{n}v_j\sum_{j=1}^{n}x_{ij}$ =1

$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_{ij}-\sum_{i=1}^{n}u_i-\sum_{i=1}^{n}v_j$

$=z^0-$常数

1. 使每行、每列都出现0元素

方法：每行减该行最小元素；　→每列减该列最小元素。

$$C=\begin{bmatrix}2&15&13&4\\10&4&14&15\\9&14&16&13\\7&8&11&9\end{bmatrix}\begin{array}{c}\text{min}\\2\\4\\9\\7\end{array}\Rightarrow\begin{array}{c}\begin{bmatrix}0&13&11&2\\6&0&10&11\\0&5&7&4\\0&1&4&2\end{bmatrix}\\\begin{array}{ccccc}&&4&2&\text{min}\end{array}\end{array}\Rightarrow\begin{bmatrix}0&13&7&0\\6&0&6&9\\0&5&3&2\\0&1&0&0\end{bmatrix}=B$$

2.试最优解（寻找独立0元素的过程）

（1）从第一行开始，若只有一个0，则给它加圈，记作◎ ，同时作直线覆盖该列的元素。否则，转下行；

（2）从第一列开始，若只有一个0，则给它加圈，记作◎,同时作直线覆盖该行的元素。否则，转下列；

（3）重复（1）（2）两个步骤，可能出现三种情况：

① 效率矩阵每行都有一个画◎的0元素 ，很显然，这些零元素位于不同行不同列，得到最优解；

② 画◎的0元素小于m个，但未被划去的0元素之间存在闭回路，可顺着闭回路的走向，对每个间隔的零元素画◎，然后对所有画◎的零元素，或所在行、或所在列画一条直线；

③ 矩阵中所有0元素或被画◎，或被划去，但是画◎的0元素个数小于m。转3；

$$\begin{bmatrix} 0 & 13 & 7 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 9 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

m=n=4，得最优解

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

最优解的含义是：甲—R，乙—J，丙—E，丁—G

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 15 & 13 & 4 \\ 10 & 4 & 14 & 15 \\ 9 & 14 & 16 & 13 \\ 7 & 8 & 11 & 9 \end{bmatrix}$$

$$z^* = 9 + 4 + 11 + 4 = 28$$

任务 / 人员	E	J	G	R
甲	2	15	13	4
乙	10	4	14	15
丙	9	14	16	13
丁	7	8	11	9

3. 作最少直线覆盖所有0元素

① 从未被直线覆盖的元素中找出一个最小的元素 a_{min}；

② 对行，若无直线覆盖，则- a_{min} ；

③ 对列，若有直线覆盖，则+ a_{min} ；

4. 转2，反复进行，直到每行都有画◎的零元素，即找到最有份配方案。

例 求指派问题

人员 \ 任务	A	B	C	D	E
甲	12	7	9	7	9
乙	8	9	6	6	6
丙	7	17	12	14	9
丁	15	14	6	6	10
戊	4	10	7	10	9

指派模型的标准型

(1) 目标要求**min**;

(2) 效益矩阵(c_{ij})为n阶**方阵**;

(3) 阵中所有元素$c_{ij} \geqslant 0$, 且为**常数**

例 非标准化指派模型

利润	甲	乙	丙	丁
A	3	2	−2	1
B	2	−2	0	—
C	—	−1	1	0

(1) 由于目标函数为利润**max**，而标准形要求目标函数**min**，为化标准形可从效益阵中找出**最大元素3**，用它分别减去阵中每一元素，得：

(2) 将新阵空置处（对应原阵“—”处）填上充分大的正数**M**；

(3) 由于此新阵非方阵，行数比列数少**1**，因此添上一行**0**元素，得：

利润	甲	乙	丙	丁
A	3	2	−2	1
B	2	−2	0	—
C	—	−1	1	0

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 5 & 3 & M \\ M & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5. 极大化问题

对于极大化问题，$\max z=\sum_i\sum_j c_{ij}x_{ij}$ ，可令 $b_{ij}=M-c_{ij}$

M可以是 c_{ij} 中最大的元素。

变换后的效率矩阵为 (b_{ij}) 目标函数 $\min z'=\sum_i\sum_j b_{ij}x_{ij}$

最小解就是原问题的最大解，因为

$$\sum_i\sum_j b_{ij}x_{ij}=\sum_i\sum_j (M-c_{ij})x_{ij}=\sum_i\sum_j Mx_{ij}-\sum_i\sum_j c_{ij}x_{ij}=nM-\sum_i\sum_j c_{ij}x_{ij}$$

$$
C=\begin{pmatrix} 10 & 6 & 7 & 6 & 7 \\ 7 & 8 & 5 & 5 & 5 \\ 6 & 14 & 9 & 13 & 8 \\ 13 & 12 & 4 & 4 & 8 \\ 3 & 7 & 6 & 8 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 8 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 6 & 9 & 9 & 9 \\ 8 & 0 & 5 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 10 & 10 & 6 \\ 11 & 7 & 8 & 6 & 8 \end{pmatrix} = B
$$

$$
\begin{array}{cc} & \min \\ \begin{pmatrix} 4 & 8 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 6 & 9 & 9 & 9 \\ 8 & 0 & 5 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 10 & 10 & 6 \\ 11 & 7 & 8 & 6 & 8 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 4 \\ 6 \\ \\ 1 \\ 6 \end{array} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 8 & 0 & 5 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 9 & 9 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} \ \ & \ \ & 2 & \ \ & 2 \ \min \end{array} \end{array}
$$

$$
\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 8 & 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & 9 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} \circledcirc & 4 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & \phi & \phi & 2 & \circledcirc \\ 8 & \circledcirc & 3 & 1 & 4 \\ \phi & 1 & 7 & 9 & 1 \\ 5 & 1 & \phi & \circledcirc & \phi \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \overset{n}{\surd} \\ \\ \\ \surd \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} \surd & \ \ & \ \ & \ \ & \ \ \end{array} & \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} \phi & 3 & \phi & 3 & \circledcirc \\ 2 & \phi & \circledcirc & 2 & \phi \\ 9 & \circledcirc & 3 & 1 & 4 \\ \circledcirc & \phi & 6 & 8 & \phi \\ 6 & 1 & \phi & \circledcirc & \phi \end{pmatrix}
$$

6. 不平衡指派问题

（1）人数小于任务（m<n）

例分配甲乙丙丁四人去完成五项任务，每人完成各项任务时间如表，求解以下花费时间最少的指派方案： ① 每人只完成一项任务？ ②由于任务数多于人数，故规定其中有一个人可兼完成两项任务，其余三人每人完成一项？

① m<n，但每人只能完成一项任务

② m<n，且n项任务又必须完成时，此时必须由某个人完成一项以上的任务。

任务 人员	A	B	C	D	E
甲	**25**	**29**	**31**	**42**	**37**
乙	**39**	**38**	**26**	**20**	**33**
丙	**34**	**27**	**28**	**40**	**32**
丁	**24**	**42**	**36**	**23**	**45**
戊	**24** **0**	**27** **0**	**26** **0**	**20** **0**	**32** **0**

③ m<n，n项任务必须完成，每人最多可以完成两项任务时。

例　有五项任务需要完成，现有三个人去完成这些任务，每人最多可以完成两项任务，问如何安排能使完成所有任务的时间最短。

$$\begin{pmatrix} 10 & 6 & 7 & 6 & 7 \\ 7 & 8 & 5 & 5 & 5 \\ 6 & 14 & 9 & 13 & 8 \end{pmatrix}$$

解：由于每个人可以完成两项任务，因此可以把每个人化作相同的两个人，系数矩阵就变为

$$\begin{array}{c} 甲 \\ 甲' \\ 乙 \\ 乙' \\ 丙 \\ 丙' \end{array}\begin{pmatrix} 10 & 6 & 7 & 6 & 7 \\ 10 & 6 & 7 & 6 & 7 \\ 7 & 8 & 5 & 5 & 5 \\ 7 & 8 & 5 & 5 & 5 \\ 6 & 14 & 9 & 13 & 8 \\ 6 & 14 & 9 & 13 & 8 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c|cccccc} & A & B & C & D & E & F \\ \hline 甲 & 10 & 6 & 7 & 6 & 7 & 0 \\ 甲' & 10 & 6 & 7 & 6 & 7 & 0 \\ 乙 & 7 & 8 & 5 & 5 & 5 & 0 \\ 乙' & 7 & 8 & 5 & 5 & 5 & 0 \\ 丙 & 6 & 14 & 9 & 13 & 8 & 0 \\ 丙' & 6 & 14 & 9 & 13 & 8 & 0 \end{array}$$

为了人=任务，引入一个虚拟的任务F，使矩阵成为标准的指派问题效率矩阵

（2）人数大于任务：可参照m<n的情况处理，一般是增加虚拟工作

（3）何时用系数M：当某项工作不能由某人来做时。