单纯形法求解线性规划的思路

一般线性规划问题具有线性方程组的变量数大于方程个数，这时有不定的解。但可以从线性方程组中找出一个个的单纯形，每一个单纯形可以求得一组解，然后再判断该解使目标函数值是增大还是变小，决定下一步选择的单纯形。这就是迭代，直到目标函数实现最大值或最小值为止。这样，问题就得到了最优解，先举一例来说明。

举例

例1 试以例1来讨论如何用单纯形法求解。

解：已知本例的标准型为：

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \qquad (1)$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 4x_1 + x_4 = 16 \\ 4x_2 + x_5 = 12 \\ x_j \geq 0 \quad j = 1,2,\cdots,5 \end{cases} \qquad (2)$$

约束条件(1)式的系数矩阵为

$$A=\left(P_1,P_2,P_3,P_4,P_5\right)=\begin{pmatrix}1&2&1&0&0\\4&0&0&1&0\\0&4&0&0&1\end{pmatrix}$$

从(2)式可看到$x3$, $x4$, $x5$的系数构成的列向量

$$P_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, P_4=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, P_5=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

P_3, P_4, P_5是线性独立的，这些向量构成一个基B。
对应于B的变量x_3, x_4, x_5为基变量。

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 & = 8 \\ 4x_1 \quad + x_4 & = 16 \\ \quad 4x_2 \quad + x_5 & = 12 \\ x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \cdots, 5 \end{cases} \qquad (2)$$

从(2)式中可以得到（3）

$$\begin{cases} x_3 = 8 - x_1 - 2x_2 \\ x_4 = 16 - 4x_1 \\ x_5 = 12 \quad - 4x_2 \end{cases} \qquad (3)$$

将(3)式代入目标函数(1)：

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \qquad (1)$$

得到 $z = 0 + 2x_1 + 3x_2 \qquad (4)$

当令非基变量$x_1 = x_2 = 0$，使得$z = 0$,这时得到一个基可行解$X^{(0)}, X^{(0)} = (0,0,8,16,12)$

本基可行解的经济含义是：工厂没有安排生产产品Ⅰ、Ⅱ，资源都没有被利用，所以工厂的利润为Z=0。非基变量x_1, x_2(即没有安排生产产品Ⅰ，Ⅱ)的系数都是正数，因此将非基变量变换为基变量，目标函数的值就可能增大。从经济意义上讲，安排生产产品Ⅰ或Ⅱ，就可以使工厂的利润指标增加。所以只要在目标函数(4)的表达式中还存在有正系数的非基变量，这表示目标函数值还有增加的可能，就需要将非基变量与基变量进行对换。

线性规划求解方法——单纯形法

要找到线性规划问题的最优解，只要在基本可行解中寻找就可以了。虽然基本可行解得数目是有限个，但是当m, n较大时，若用“穷举法”求出所有基本可行解也是行不通的，因此，必须寻求一种更有效的方法。

单纯形法的基本思路是：从线性规划问题的一个基本可行解开始，转换到另一个是目标函数值增大的基本可行解。反复迭代，直到目标函数值达到最大时，就得到了最优解。

单纯形法求解线性规划

- 按照单纯形法的思路求解线性规划问题，要解决三个技术问题：1.给出第一个基本可行解；2.检验一个基本可行解是否是最优解；3.转换到另一个基本可行解。

具体如下：

- 1.把线性规划问题变成标准型后，观察是否每个约束方程中都有独有的、系数为1的变量。如果是，则取这些变量作为基变量，便得到一个基本可行解；否则，就给没有这种变量的约束条件添加一个人工变量，同时修改目标函数。
- 2.如果单纯形表最后以行中的检验数都满足小于等于0，则对应的基本可行解是最优解，否则就不是最优解。
- 3.确定新的基本可行解

- 3.确定新的基本可行解

(1）确定换入变量，在大于0的检验数中找到最大的为σ_k，对应的变量x_k为换入变量

（2）确定换出变量，取$\theta = \min\left\{ \frac{b_i}{a_{ik}} \middle| a_{ik} > 0 \right\} = \frac{b_l}{a_{lk}}$

(3)旋转运算，换入变量所在的行换出变量所在的列交叉的元素称为中心元素，用高斯消去法把中心元素换成1，同列的其他元素化为0，得到一个新的单纯形表，也就得到了一个新的基本可行解。

1.确定初始基本可行解

已知线性规划问题

$$\max z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\le b_i & (i=1,2,\cdots,m)\\ x_j\ge 0 & (j=1,2,\cdots,n)\end{cases}$$

化为标准形式

$$\max\ z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j+0\sum_{i=1}^{m}x_{si}$$

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j+x_{si}=b_i & (i=1,2,\cdots,m)\\ x_j\ge 0 & (j=1,2,\cdots,n)\end{cases}$$

约束方程系数矩阵

$$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}$$

$X=(0,\cdots,0,\ b_1,\cdots b_m)^T$ 是一个基本可行解。

1.确定初始基本可行解

$c_j \rightarrow$			$c_1 \cdots c_m \cdots c_j \cdots \quad c_n$
c_i	基	b_i	$x_1 \cdots x_m \cdots x_j \cdots \quad x_n$
c_1	x_1	b_1	$1 \cdots 0 \cdots a_{1j} \cdots \quad a_{1n}$
c_2	x_2	b_2	$0 \cdots 0 \cdots a_{2j} \cdots \quad a_{2n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$
c_m	x_m	b_m	$0 \cdots 1 \cdots a_{mj} \cdots \quad a_{mn}$
$c_j - z_j$			$0 \cdots 0 \cdots c_i - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} \cdots \quad c_n - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{in}$

2.最优性检验和解的判别

将基本可行解 $X^{(0)}$ 和 $X^{(1)}$ 分别代入目标函数得

$$Z^{(0)}=\sum_{i=1}^{m}c_i x_i^{(0)}$$

$$Z^{(1)}=\sum_{i=1}^{m}c_i(x_i^0-\theta a_{ij})+\theta c_j$$

$$=\sum_{i=1}^{m}c_i x_i^{(0)}+\theta(c_j-\sum_{i=1}^{m}c_i a_{ij})$$

$$=Z^{(0)}+\theta(c_j-\sum_{i=1}^{m}c_i a_{ij})$$

已知$\theta>0$，所以只要（$c_j-\sum_{i=1}^{m}c_i a_{ij})>0$就有$Z^{(1)}>Z^{(0)}$,

通常令$\sigma_j=c_j-z_j=c_j-\sum_{i=1}^{m}c_i a_{ij}$,称$\sigma_j$为检验数

检验方法如下：

（1）当所有$\sigma_j \leq 0$时，该基本可行解是最优解

（2）当所有$\sigma_j \leq 0$时，又对某个非基变量x_j有$c_j - z_j = 0$,
该线性规划有可能有无穷多最优解

（3）如果存在某个$\sigma_j > 0$时，而且向量p_j的所有元素$a_{ij} \leq 0$,则有无界解。

（4）如果存在检验数$\sigma_j > 0$时，则由此基本可行解转为下一基本可行解。

3.从初始基本可行解转换另一个基本可行解

设初始基本可行解为

$x^{(0)}=(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_m^{(0)}, 0 \ \cdots 0)^T$

$x^{(0)} \in C$, 故有 $\sum_{i=1}^{m} p_i x_i^{(0)} = b$ (1)

约束方程系数增广矩阵为

$$\begin{array}{cccccccccc} p_1 & p_2 & \cdots & p_m & p_{m+1} & \cdots & p_j & \cdots & p_n & b \\ \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & a_{1,m+1} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a_{2,m+1} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{m,m+1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{bmatrix}$$

因p_1，p_2,…，p_m是一个基，其它向量可以用这个基的线性组合来表示

即$p_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i$

$p_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i = 0$

令$\theta > 0$, 得$\theta\left(p_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i\right) = 0$ （2）

(1)+（2）得 $\sum_{i=1}^{m}\left(\mathrm{x}_\mathrm{i}^{(0)} - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}\right) p_i + \theta p_j = \mathrm{b}$

由此得到另外一个点：$X^{(1)}=\left(x_1^0-\theta a_{1j},\cdots x_m^0-\theta a_{mj},0,\cdots,\theta,\cdots,0\right)$

要想使$X^{(1)}$是一个基本可行解，

因为$\theta>0,$故应对所有$i=1,\cdots,m$存在 $x_{\mathrm{i}}^0-\theta a_{ij}\geq 0$

令$\theta=\min\left\{\frac{x_i^0}{a_{ij}}\middle| a_{ij}\geq 0\right\}=\frac{x_l^0}{a_{lj}}$,则$x_i^0-\theta a_{ij}\begin{cases}=0, & (i=l)\\ \geq 0, & (i\neq l)\end{cases}$

这样$X^{(1)}$中的正分量最多有m个，容易证明m个分量

$p_1,\cdots p_{l-1},p_{l+1},\cdots p_m,p_j$,线性无关，故$X^{(1)}$是一个新的基本可行解。