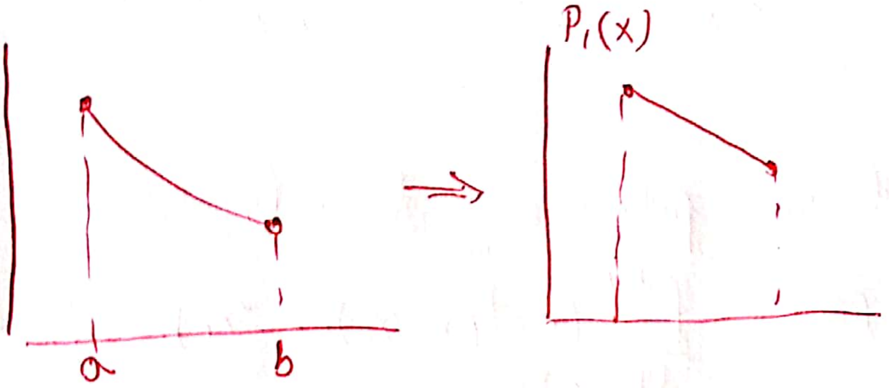
Trapecios {Simple}

Método basado en interpolación Lineal



$$f(x) \simeq P_1(x) = \frac{x-b}{a-b} f(a) + \frac{(x-a)}{b-a} f(b) \quad \forall x \in [a,b]$$

$$\Rightarrow I = \int_a^b f(x)\,dx \simeq \int_a^b P_1(x)\,dx = \int \frac{(x-b)}{a-b} f(a) + \frac{(x-a)}{b-a} f(b)\,dx$$

$$I \simeq \frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right) \Rightarrow \text{área del trapecio} \quad (HPI)$$

Método compuesto:

Tomar una partición $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a,b]$

$x_0 = a$, $x_n = b$, equiespaciado, $(x_{i+1} - x_i) = h$, $\forall i = 1, \ldots n$

$$\Rightarrow h = \frac{b-a}{n}$$

$$\int_a^b f(x) = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx$$

Aplicamos a cada integral el método "Simple"

$$= \frac{h}{2}\left(f(x_0) + 2\left(f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1})\right) + f(x_n)\right)$$

$\Rightarrow$ El Método de trapecios generalizado

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\left(f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right)$$

El Error de un polinomio de interpolación

$$E = f(x) - P(x) = \frac{f^{n+1}(\xi_x)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)$$

$\exists \xi_x$ que pertenece a los puntos $x, x_0, x_1 \ldots x_n$

Dem.: Tomemos una función auxiliar $F = F(t)$

$$F(t) = f(t) - P(t) - cL(t) \quad \text{donde } c = \frac{f(x)-P(x)}{L(x)}$$

$$L(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$$

Tenemos las siguientes propiedades

$F(x_k) = f(x_k) - P(x_k) - cL(x_k) = y_k - y_k = 0$

para todo k y también

$P(x) = f(x) - P(x) - cL(x) = 0$ por definición de c

La Función F tiene al menos $n+2$ ceros distintos

F' $n+1$ ceros

F'' n ceros

$(n+1)$-ésimma derivada debe tener al menos un cero

$\Rightarrow$ Derivando $n+1$ veces

2)

$$0 = F^{(n+1)}(\xi_n) = f^{(n+1)}(\xi_x) - c(n+1)!$$

la derivada $(n+1)$-ésima ecero $P(x)$ porque es de grado n

$$\Rightarrow \quad cL(x) = f(x) - P(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x) L(x)$$

$\Rightarrow$ Volviendo al error en la Integral

$$f(x) = P_1(x) + \epsilon(x)$$

$$\epsilon(x) = \frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b) \qquad a < \xi < b$$

$$\Rightarrow \quad I = \int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\left(f(a) + f(b)\right) + E$$

donde $$E = \int_a^b \epsilon(x)\,dx = \frac{f''(\xi)}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)\,dx$$

$$E = \frac{f''(\xi)}{2}\left[\frac{(x-a)(x-b)^2}{2}\Bigg|_a^b - \int_a^b \frac{\cancel{(x-a)}(x-b)^2}{2}\right]$$

$$- \frac{f''(\xi)}{2}\frac{(x-b)^3}{6}\Bigg|_a^b = -\frac{\cancel{f(\xi)}}{12} f''(\xi)(b-a)^3$$

$$(b-a) = h$$

$$\Rightarrow E = -\frac{h^3}{12} f''(\xi) \leq \left| \frac{h^3}{12} \max_{a \leq \xi \leq b} f''(\xi) \right|$$

Escaneado con CamScanner

Para la regla del Trapecio Compuesta.

$$E = E_1 + E_2 + E_3 + \dots + E_n = -\frac{h^3}{12}f''(\xi_1) - \frac{h^3}{12}f''(\xi_2) - \frac{h^2}{12}f''(\xi_n)$$

$$\Rightarrow \quad E \leq \left| \frac{h^3}{12} n \max_{a\leq\xi\leq b} f''(\xi) \right|$$

$$h = \frac{(b-a)}{n}$$

$$\Rightarrow \quad E \leq \left| \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max_{a\leq\xi\leq b} f''(\xi) \right|$$

En otras referencias

$$\overline{f''} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f''(x)\,dx \simeq \frac{f''(\xi_1) + \dots f''(\xi_n)}{n}$$

$$n\overline{f''(\xi)} \simeq f''(\xi_1) + \dots f''(\xi_n)$$

los puntos $x_1, x_3, \dots x_{n-1}$ son los puntos medios de cada subintervalo

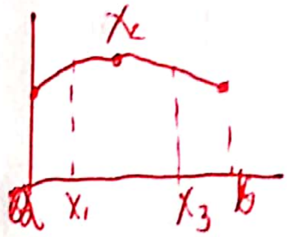
$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left(f(a) + 4I + 2P + f(b)\right)$$

$$I = \sum_{i=1\ \text{impares}}^{n-1} f(x_i) = f(x_1) + f(x_3) + \dots + f(x_{n-1})$$

$$P = \sum_{i=2,\ \text{pares}}^{n-2} f(x_i) = f(x_2) + f(x_4) + \dots + f(x_{n-2})$$

Por claridad:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^b f(x)\,dx$$



$$\frac{h}{3}\left\{f(a) + 4f(x_1) + f(x_2)\right\} + \frac{h}{3}\left\{f(x_2) + 4f(x_3) + f(b)\right\}$$

$$= \frac{h}{3}\left\{f(a) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + f(b)\right\}$$

Primer Teorema de Valor medio para integrales

$G : [a,b) \to \mathbb{R}$ continua
φ que no cambia de signo en el intervalo (a,b) es integrable
entonces existe $x \in [a,b]$ tal que

$$\int_a^b G(t)\varphi(t)\,dt = G(x)\int_a^b \varphi(t)\,dt$$

Como $g(x)$ es continua, existe x_1 y x_2 tales que
$G(x_1)$ y $G(x_2)$ son los máximos y mínimos

$$\Rightarrow \quad G(x_1) \geq G(x) \geq G(x_2) \qquad \text{Suponga } \varphi \geq 0$$

$$G(x_2)\varphi(x) \leq G(x)\varphi(x) \leq G(x_1)\varphi(x)$$

$$\Rightarrow \quad G(x_2)\int_a^b \varphi(x)\,dx \leq \int_a^b G(x)\varphi(x)\,dx \leq G(x_1)\int_a^b \varphi(x)\,dx$$

Ahora $I = \int_a^b \varphi(x)\,dx \geq 0$

Como es vara muda

$$G(x_2)I \leq \int_a^b G(t)\varphi(t)\,dt \leq G(x_1)I$$

la Integral la suponemos > 0

$$G(x_2) \leq \frac{1}{I}\int_a^b G(t)\varphi(t)\,dt \leq G(x_1)$$

por el teorema de Valor intermedio
Existe $x \in [a,b)$ tal que $G(x) = \frac{1}{I}\int_a^b G(t)\varphi(t)$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_a^b G(t)\varphi(t)\,dt = G(x)\int_a^b \varphi(t)\,dt$$

Definimos el error como

$$E_T = \int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right)$$

Integrando por parte

$$u = f(x) \qquad dv = dx$$
$$du = f'(x)\,dx \qquad V = x + C$$

$$E_1 = \underbrace{(x+c)f(x)\Big|_a^b}_{(1)} - \int_a^b (x+c)f'(x)\,dx - \underbrace{\left(\frac{b-a}{2}\right)\left(f(a)+f(b)\right)}_{(2)}$$

Encontrar C para que $1 + 2 = 0$

$$(b+c)f(b) + (a+c)f(a) = \frac{1}{2}b\,f(a) + \frac{1}{2}b\,f(b) - \frac{1}{2}a f(a) - \frac{1}{2}a f(b)$$

Factorizamos

$$c\left(f(b) - f(a)\right) = -\frac{1}{2}b\,f(b) + \frac{1}{2}a f(a) + \frac{1}{2}b f(a) - \frac{1}{2}a f(b)$$

$$c\left(f(b) - f(a)\right) = -\frac{1}{2}f(b)(a+b) + \frac{1}{2}f(a)(a+b)$$

$$\therefore\ C = -\frac{1}{2}(a+b)$$

$$E_T = -\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)f'(x)\,dx \Rightarrow \quad u = f'(x) \quad dv = \left(x - \frac{a+b}{2}\right)dx$$
$$du = f''(x)\,dx \quad V = \frac{1}{2}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 + C$$

$$E_T = -\left[\frac{1}{2}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 + C\right]f'(x)\Big|_a^b + \int_a^b \left[\frac{1}{2}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 + C\right]f''(x)$$

$$\left(\frac{1}{2}\left(a-\frac{a+b}{2}\right)^2+c\right)f'(a)=\frac{1}{2}\left(\left(b-\frac{a+b}{2}\right)^2+c\right)f'(b)$$

$$c\left(f'(a)-f'(b)\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 f'(b)-f'(a)$$

$$\therefore c=-\frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

$$E_T=\int_a^b\left[\frac{1}{2}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2\right]f''(x)\,dx$$

Por el teorema de Valor medio

Existe $\xi\in[a,b]$ tal que

$$E_T=f''(\xi)\underbrace{\int_a^b\frac{1}{2}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2\Big]dx}$$

$$I=\frac{1}{6}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^3-\frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2x\Big|_a^b$$

$$\frac{1}{6}\left(\frac{b-a}{2}\right)^3-\frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2b-\frac{1}{6}\left(\frac{a-b}{2}\right)^3+\frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2a$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2\left[\frac{-2(b-a)}{3}\right]=-\frac{1}{12}(b-a)^3$$

$$\Rightarrow \boxed{E_T=-\frac{(b-a)^3}{12}f''(\xi)}\quad\boxed{\text{para } n=1}$$

Miguel Villalobos

Planos por n intervalos

$x_0 \quad x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_{n-1} \quad x_n$

$$E_1 = -\frac{(x_1-x_0)^3}{12} f''(\xi_1) - \frac{(x_2-x_1)^3}{12} f''(\xi_2) - \frac{(x_n-x_{n-1})^3}{12} f''(\xi_3) \Rightarrow$$

$$x_{i+1} - x_i = h = \frac{b-a}{n}$$

$$E_T = -\frac{(b-a)^3}{12n^3} \left\{ f''(\xi_1) + \dots + f''(\xi_n) \right)$$

$$\overline{f''} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f''(x)\,dx \simeq \frac{f''(\xi_1) + \dots f''(\xi_n)}{n}$$

$$\Rightarrow \quad E_T = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} \overline{f''(\xi)}$$

$$f(x) \simeq f(a) + f'(x)\Big|_a (x-a)$$

$$f(x) \simeq f(a) + \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)(x-a)$$

$$f(x)\,dx \simeq (b-a)\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)$$