Series de Fourier:

Una función periódica se puede definir como una función para la cual.

$$f(t) = f(t+T) \quad \text{para todo } t \quad (1)$$

la constante que satisface la condición (1) se denomina periodo, en general:

$$f(t) = f(t+nT), \quad n = 0, \pm 1, \ldots$$

⇒ En general si f es periodica, es posible encontrar m y n tales que

$$w_1 T = 2\pi m \quad (3)$$

$$w_2 T = 2\pi n \quad (4)$$

Cos $f(t) = \cos w_1 t + \cos w_2 t$

Dividiendo (3) y (4)

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{m}{n}$$ ⇒ debe ser un número racional

Problema:

Encontrar el periodo de $f(t) = \cos t/3 + \cos t/4$

Se debe cumplir

$$\cos\left(\frac{1}{3}(t+T)\right)+\cos\left(\frac{1}{4}(t+T)\right)=\cos t/_3+\cos t/_4$$

Como $\cos(\theta+2\pi m)=\cos\theta$ para todo m

$\Rightarrow \quad \frac{1}{3}T=2\pi m \quad$ y $\quad \frac{1}{4}T=2\pi n$

$\Rightarrow \quad T=6\pi m=8\pi n$

notar que para $m=4$ y $n=3$ por ensayo y error

$\Rightarrow \quad T=24\pi$

Serie de Fourier

Sea $f(t)$ una función periódica de periodo T, $f(t)$ se puede representar por la serie trigonométrica

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos n\omega_0 t+b_n\sin n\omega_0 t$$

donde $n\omega_0=\omega_n$ es la enésima armónica y la primera armónica se conoce como componente fundamental.

Para entender este resultado volvamos al concepto de funciones ortogonales

Sea $\phi_k(t)$ un conjunto de funciones ortogonales en un interval $a<t<b$ que cumplen

$$\int_a^b \phi_m(t)\,\phi_n(t)\,dt = \begin{cases} 0 & m\neq n \\ r_n & m=n \end{cases}$$

Para funciones senosoidales:

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(m w_0 t)\cos(n w_0 t)\,dt = \begin{cases} 0 & m\neq n \\ T/2 & m=n\neq 0 \end{cases} \qquad (5)$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \operatorname{Sen}(m w_0 t)\operatorname{Sen}(n w_0 t)\,dt = \begin{cases} 0 & m\neq n \\ T/2 & m=n\neq 0 \end{cases} \qquad (6)$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \operatorname{Sen}(m w_0 t)\cos(n w_0 t)\,dt = 0 \quad \text{para todo } m \text{ y } n \qquad (7)$$

$\Rightarrow$ Estas funciones forman un conjunto ortogonal en $-T/2 < t < T/2$

Ejercicio comprobar la ecuación (5)

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2}\left(\cos(A+B) + \cos(A-B)\right)$$

$$w_0 t\Big|_{t=\pm T/2} = \frac{2\pi}{T}\left(\pm T/2\right) = \pm\pi$$

$$\Rightarrow \int_{-T/2}^{T/2} \cos(m w_0 t)\cos(n w_0 t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-T/2}^{T/2} \cos((m+n) w_0 t) + \cos((m-n) w_0 t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(m+n)w_0} \operatorname{Sen}((m+n)w_0 t)\Big|_{-T/2}^{T/2} + \frac{1}{(m-n)w_0} \operatorname{Sen}((m-n)w_0 t)\Big|_{-T/2}^{T/2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{(m+n)w_0}\left(\operatorname{Sen}(m+n)\pi + \operatorname{Sen}((m+n)\pi)\right) +$$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{(m-n)w_0} \operatorname{Sen}((m-n)\pi) + \operatorname{Sen}((m-n)\pi) = 0 \quad \text{si } m \neq n$$

Ahora si $m = n$

$$\Rightarrow \int_{-T/2}^{T/2} \cos^2(m w_0 t)\,dt = \frac{1}{2}\int_{-T/2}^{T/2} (1 + \cos 2 m w_0 t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2}t\Big|_{-T/2}^{T/2} + \frac{1}{4 m w_0} \cancelto{0}{\operatorname{Sen} 2 m w_0 t}\Big|_{-T/2}^{T/2}$$

$$= \frac{T}{2} \blacksquare$$

Evaluar los Coeficientes de la expansión

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,\mathrm{Sen}(m w_0 t)\,dt = \frac{1}{2}a_0 \int_{-T/2}^{T/2} \mathrm{sen}(w_0 m t)\,dt$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-T/2}^{T/2} \mathrm{Cos}(n w_0 t)\,\mathrm{Sen}(m w_0 t)\,dt$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} b_n \int_{-T/2}^{T/2} \mathrm{Sen}(n w_0 t)\,\mathrm{Sen}(m w_0 t)\,dt$$

El uso de la Ortogonalidad

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,\mathrm{Sen}(m w_0 t)\,dt = \frac{T}{2} b_m$$

$$\Rightarrow b_m = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,\mathrm{Sen}(m w_0 t)\,dt$$ Si f par $b_m = 0$

del mismo modo

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,\mathrm{Cos}(n w_0 t)\,dt$$ Si f impar $a_n = 0$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt$$

Valor medio de la función