Sistemas Lineales.

Método de Jacobi:

Usado para resolver sistemas lineales del tipo $\mathbb{A}x = b$

Construir una sucesión descomponiendo la matriz

$$\mathbb{A} = \mathbb{D} + \mathbb{R}$$

$\mathbb{D}$ La matriz diagonal

$\mathbb{R}$ Suma de la matriz triangular inferior $\mathbb{L}$ y matriz triangular superior $\mathbb{U}$

$$\Rightarrow \quad DX + RX = b$$

$$DX = b - RX$$

$$X = D^{-1}(b - RX)$$

En cada iteracion $a_{ii} \neq 0$

$$x^{(k+1)} = \mathbb{D}^{-1}(b - \mathbb{R}x^{(k)})$$

$$\Rightarrow \quad x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{i \neq j} a_{ij} x_j^{(k)}\right)$$

A nivel iterativo se necesitan todos los $x^{(k)}$ para calcular el $x^{(k+1)}$

Ejemplo:

$$\begin{aligned} 3x - y - z &= 1 \\ -x + 3y + z &= 3 \\ 2x + y + 4z &= 7 \end{aligned} \qquad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad D^{-1}b = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1 \\ 7/4 \end{pmatrix}$$

$$D^{-1}(L+U) = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & +1 \\ +2 & +1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 0 & +1/3 \\ +1/2 & +1/4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \\ z_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1 \\ 7/4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 0 & +1/3 \\ +1/2 & +1/4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix}$$

$$X^{k+1} = C + T X^k$$

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \\ z_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 + 1/3\, y_k + 1/3\, z_k \\ 1 + 1/3\, x_k - 1/3\, z_k \\ 7/4 - 1/2\, y_k - 1/4\, y_k \end{pmatrix}$$

$\vec{X}_0 = (0, 0, 0)$

$\vec{X}_1 = (1/3, 1, 7/4)$

$\vec{X}_2 = (1.25, 0.5277, 1,333)$

Error en Cada iteración

Residuo $= \| x - y \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$ debemos ver la Cercanía componente a componente

Para nuestro Problema

$\| \vec{b} - \vec{A}X \| < \delta$ para detener la iteración

---

Si es diagonal Dominante convergerá a la Solución Para cualquier valor inicial.

Método de Gauss-Seidel:

Similar al método Jacobi, pero los Valores de cada Variable se actualizan con cada iteración interna.

Ejemplo:

$$X = \frac{1 + y + z}{3}$$

$$y = \frac{3 + X - z}{3}$$

$$z = \frac{7 - 2X - y}{4}$$

Primera iteración

$$X = \frac{1+0+0}{3} = 1/3$$

$$y = \frac{3+1/3+0}{3} \simeq 1.11$$

$$Z = \frac{7-2(1/3)-(1.11)}{4} \simeq 1.3055$$

$\vec{X}_0 = (0,0,0)$

$\vec{X}_1 = (1/3,\ 1.11,\ 1{,}3055)$

$\vec{X}_2 = (0.9629,\ 1{,}0061,\ 1{,}01697)$

Convergencia más rápida, en general.

$$X^{k+1} = \frac{1+y^k+z^k}{3}$$

$$y^{k+1} = \frac{3+x^{k+1}-z^k}{3}$$

$$z^{k+1} = \frac{7-2x^{k+1}-y^{k+1}}{4}$$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)} + b_i}{a_{ii}}, \quad i=1,\dots n$$