



**FACULTAD
DE INGENIERIA**

Universidad de Buenos Aires

FACULTAD DE INGENIERÍA

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

DEPARTAMENTO DE ELECTRÓNICA

86.09 - PROCESOS ESTOCÁSTICOS

2° CUATRIMESTRE 2023

Trabajo Práctico N° 3

Filtro adaptativo

Autores:

Bruno Berlatzky (99489) Maximiliano Torre (93679) Alexis Joel
Romero Espinoza (103942) Erik Schatz (96470)

Índice

1. Problema 1	1
1.1. (a) Solución utilizando LMS	1
1.2. (b) -Generación de los procesos	2
1.3. (c) -Curvas de error y de aprendizaje	3
1.4. Variación del orden de la estimación - (d)	6
1.5. (e) -Variación del paso de la estimación	7
1.6. (f) Realizaciones con audios reales	8
2. Problema 2	11
2.1. (a) Solución utilizando LMS	11
2.2. (b) -Generación de los procesos	12
2.3. (c) -Curvas de error y de aprendizaje	13
2.4. (d) - Variación del paso de la estimación	16
2.5. (e) Realizaciones con audios reales	17
3. Problema 3	18
3.1. (a) Selección disposición de los filtros	19
3.2. (b) Resultados	20
4. Conclusiones	21

1. Problema 1

1.1. (a) Solución utilizando LMS

El primer problema a resolver es el filtrado de una señal conocida y de interés $S(n)$ contaminada por un ruido blanco $V(n)$ mediante el uso de un filtro adaptativo con el algoritmo LMS. Para ello se considera que se cuenta con una señal de referencia $U(n)$ correlacionada únicamente con $V(n)$. Por lo tanto la señal de entrada será:

$$X(n) = S(n) + V(n) \quad (1)$$

La estrategia del filtro será estimar $V(n)$ para sustraerla de $X(n)$ y así recuperar la señal deseada $S(n)$.

El siguiente diagrama indica la estructura del sistema en cuestión:

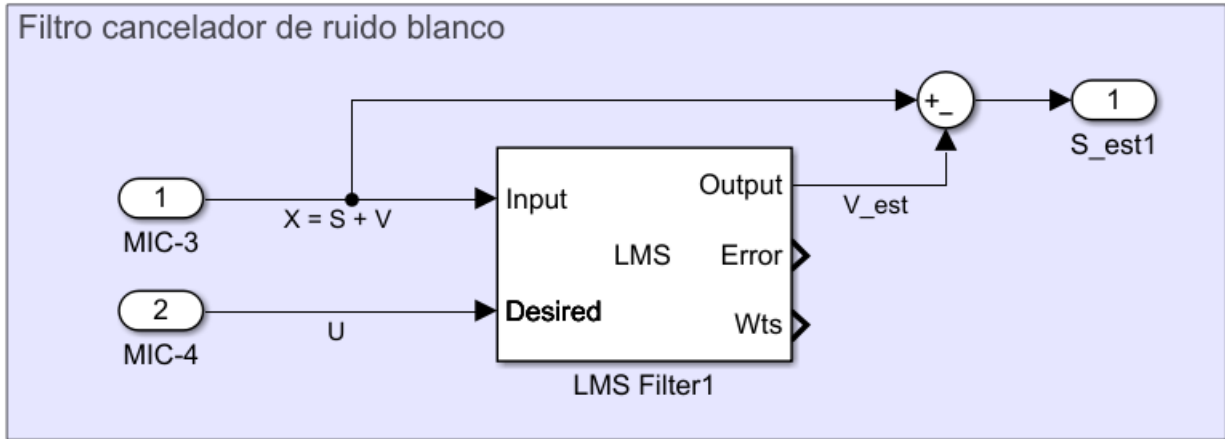


Figura 1: Diagrama en bloques del filtro cancelador de ruido blanco

Internamente, el filtro adaptativo en cuestión irá ajustando sus coeficientes temporalmente hasta minimizar el error cuadrático medio entre \hat{V} y V .

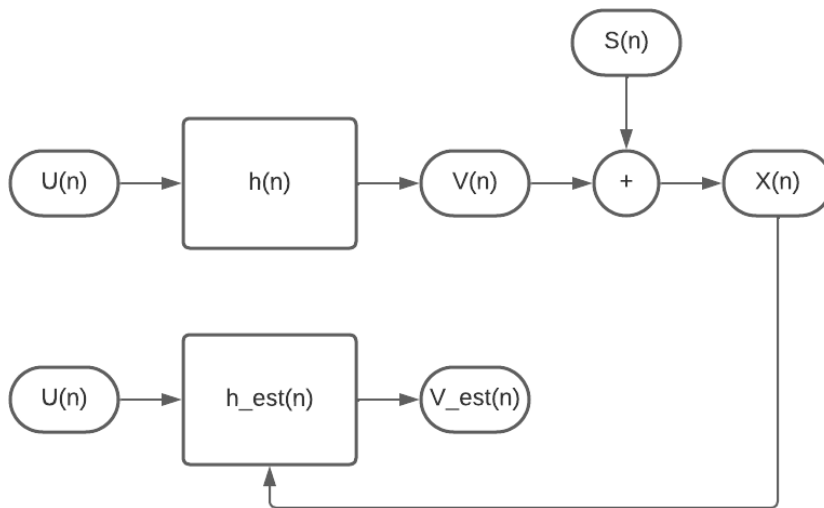


Figura 2: Diagrama en bloques del filtro cancelador de ruido blanco

Entonces, teniendo el vector $\vec{W}(n)$ que representa los constantes de un filtro de orden M y $\vec{U}(n)$ representa el vector de M componentes de $U(n)$, tenemos:

$$\vec{U}(n) = [U(n-M+1) \quad U(n-M+2) \quad \dots \quad U(n)] \quad (2)$$

$$\vec{W}(n) = [w_1 \quad w_2 \quad \dots \quad w_M]^T \quad (3)$$

Tal que:

$$Y(n) = w_1 Z(n) + w_2 Z(n-1) + \dots + w_M Z(n-M+1) \quad (4)$$

Donde se tiene que $Y(n)$ es la salida del sistema y $Z(n)$ es la entrada del sistema. Teniendo estos vectores, nosotros calculamos la estimación de nuestro filtro adaptativo como:

$$\vec{W}(n+1) = \vec{W}(n) + \mu \vec{U}(n) \left(X(n) - \vec{U}(n)^T \vec{W}(n) \right) \quad (5)$$

1.2. (b) -Generación de los procesos

En esta sección mostramos una realización de las señales artificiales generadas para realizar las experiencia.

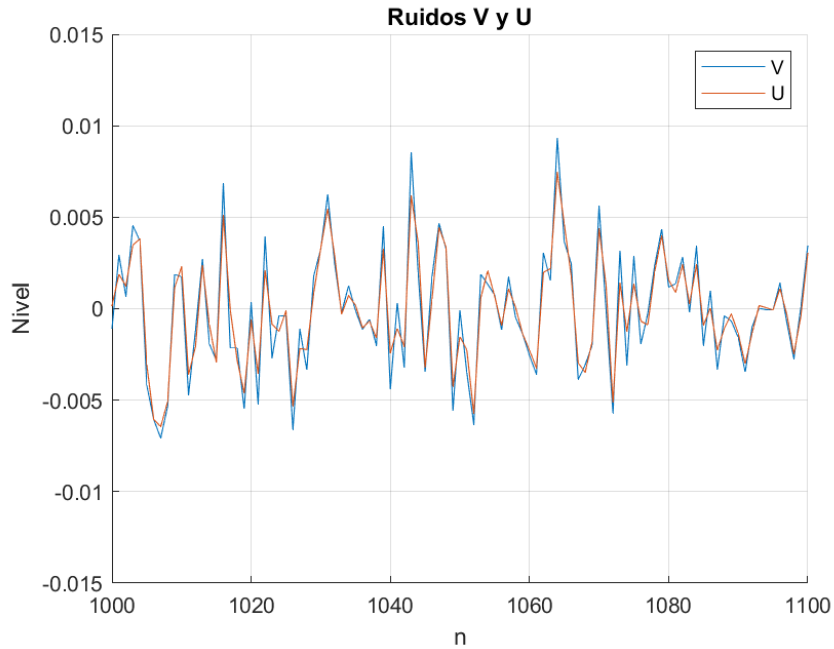


Figura 3: Segmento de las señales U y V superpuestas

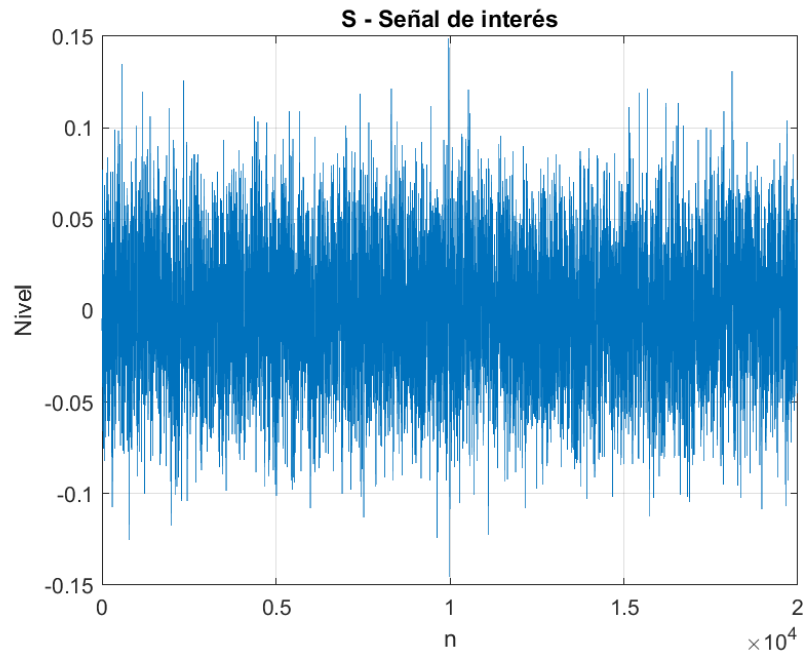


Figura 4: Señal de interés S

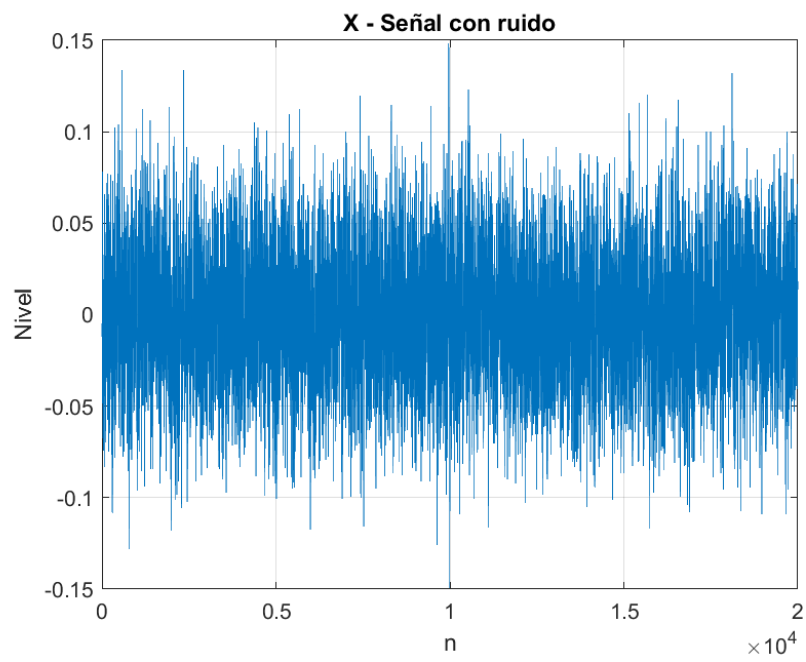


Figura 5: Señal $X = S + V$

1.3. (c) -Curvas de error y de aprendizaje

A continuación se presentan los resultados de este filtro, junto con sus curvas de error y aprendizaje.

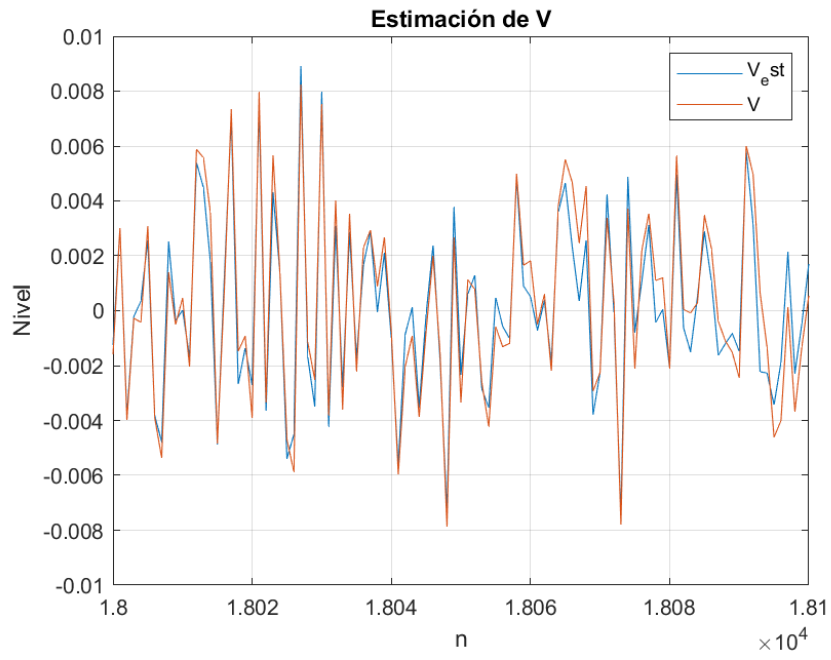


Figura 6: Segmento con las señales V y \hat{V} superpuestas.

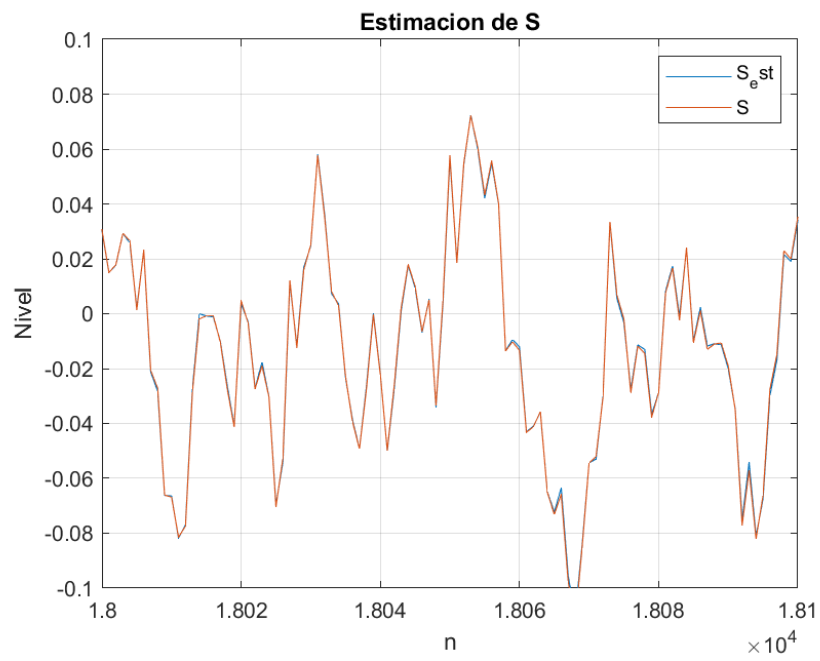


Figura 7: Segmento con las señales S y \hat{S} superpuestas.

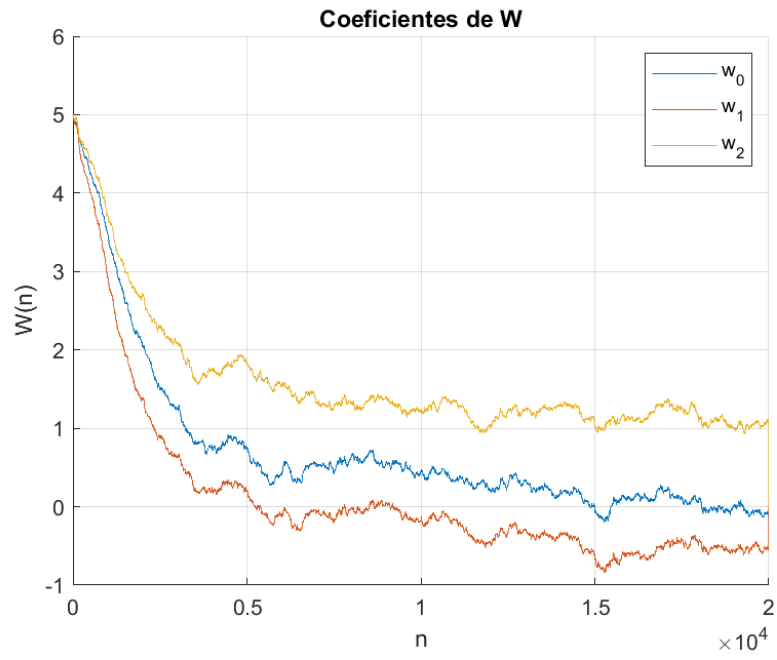


Figura 8: Gráfico de los valores de los coeficientes w_n del filtro.

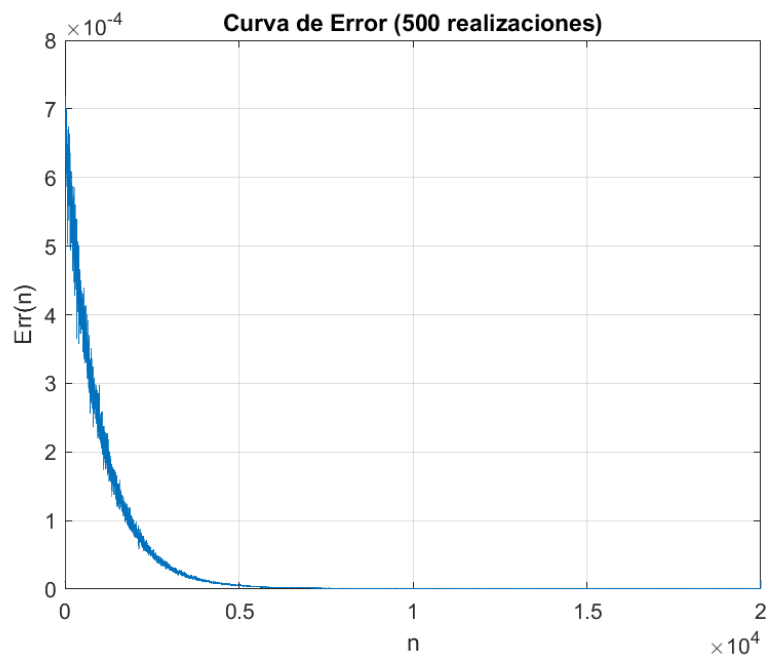


Figura 9: Gráfico de la curva de error para 500 realizaciones.

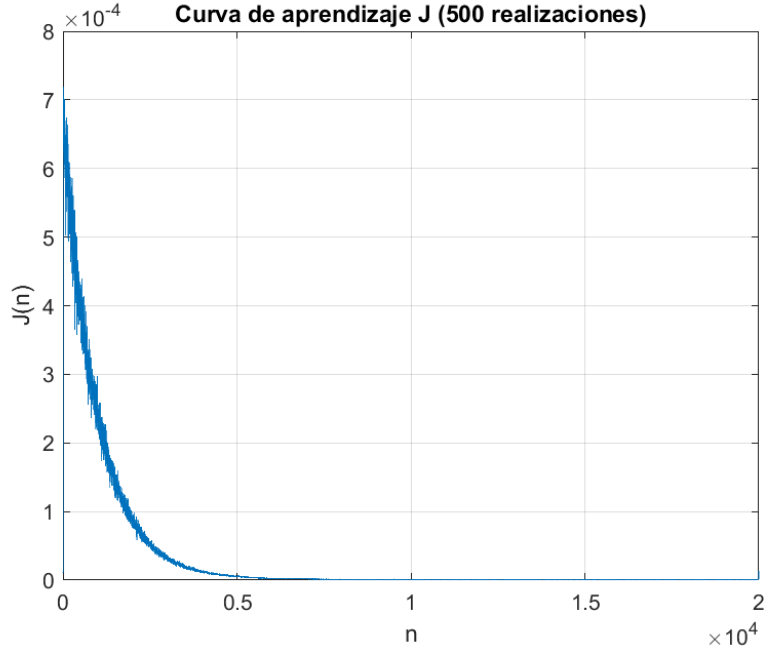


Figura 10: Gráfico de la curva de aprendizaje para 500 realizaciones.

Calculando la varianza de la señal $S = 0.0012$, se ve que el error se estabiliza en el orden de 10^{-7} , lo cual habla de un error relativo menor al 0.1 %.

1.4. Variación del orden de la estimación - (d)

Lo que se hizo en este inciso se varió el orden del filtro que se estimó para ver el impacto que tenía en el error cuadrático medio de la estimación. En la figura 11 se puede ver cómo varía $\hat{E}(\infty)$ a medida que se varía el orden del sistema.

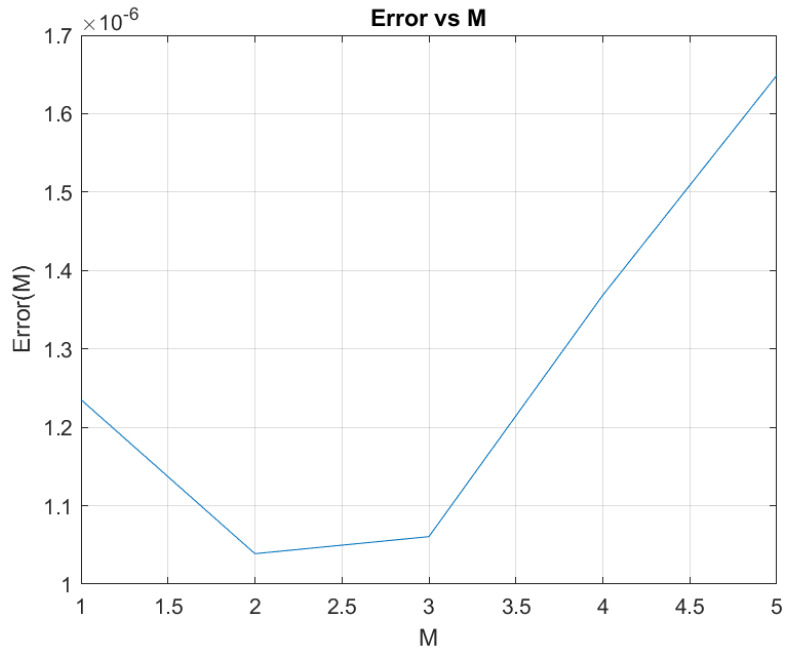


Figura 11: Gráfico de $Error(\infty)$ vs M .

Analizando el gráfico podemos ver que tenemos un mínimo en $M = 2$. Ahora analicemos por qué hay un mínimo en esta función comenzando con la relación que existe entre $V(n)$ y $U(n)$. Para obtener el proceso $U(N)$ pasamos al proceso $V(n)$ por un sistema MA de orden 2 que lo correlaciona,

entonces, para obtener el proceso $V(n)$ a partir del proceso $U(n)$ tenemos que pasar a este por un sistema AR de orden 2. Esto conlleva a que haya un error inherente entre el sistema real que queremos y la estimación que estamos obteniendo debido a que nuestro modelo de estimación es un proceso MA de orden M. Ahora que sabemos la diferencia entre nuestro estimador y el sistema que queremos estimar, analizaremos el ECM mediante la ecuación:

$$ECM(\hat{\Theta}) = Var(\hat{\Theta}) + sesgo(\hat{\Theta}, \Theta)^2 \quad (6)$$

Viendo esta relación entre el ECM, la varianza del estimador, el sesgo del estimador y sabiendo que el proceso teórico es una suma infinita de términos porque es un proceso AR uno querría crear un estimador con infinitos términos para reducir a 0 el sesgo del estimador, pero esto lo que genera es que la varianza del estimador aumente, por lo que aumenta el ECM tal y como vemos en el gráfico. Por otro lado, si queremos reducir la varianza del estimador reduciendo el orden del sistema, lo que aumenta ahora es el sesgo del sistema como vemos que pasa nuevamente en el gráfico. Es por esto que queremos buscar una relación de compromiso donde hay un balance y se minimiza el ECM, que en este caso es en $M = 2$.

1.5. (e) -Variación del paso de la estimación

Se puede destacar que para valores de μ bajos, el algoritmo es lento y por lo tanto la respuesta temporal del sistema también lo es (definiendo velocidad por cantidad de muestras hasta alcanzar el mínimo del error). Sin embargo, para sistemas mas rápidos, el valor de convergencia de error aumenta, por lo que existe una relación de compromiso. Esto se evidencia en la Figura11, donde las curvas son decrecientes a medida que aumenta μ , y en la Figura12 se observa que los valores de convergencia son menores para valores de μ menor.

Por último se observa que el error mínimo se consigue con un μ de 40.

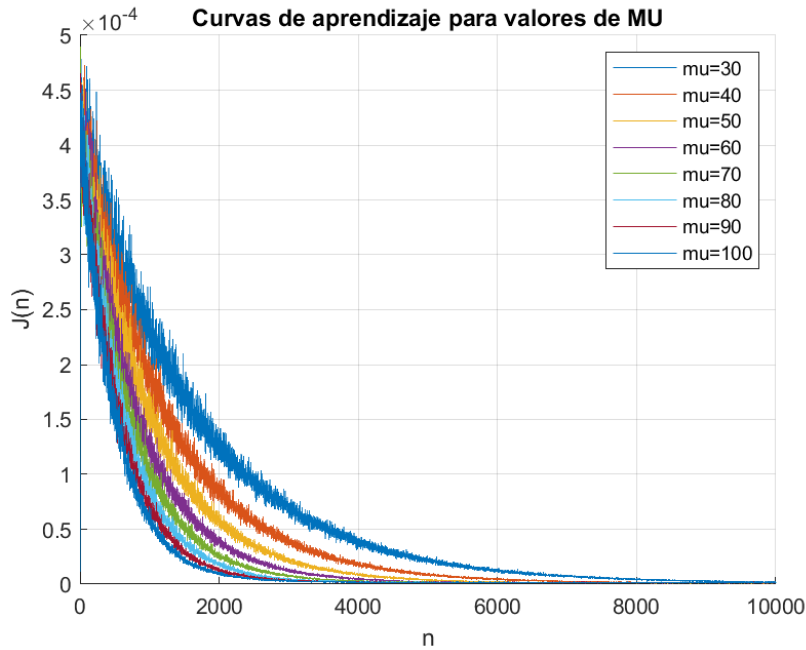


Figura 12: Primeros valores de las curvas de aprendizaje para distintos valores de μ .

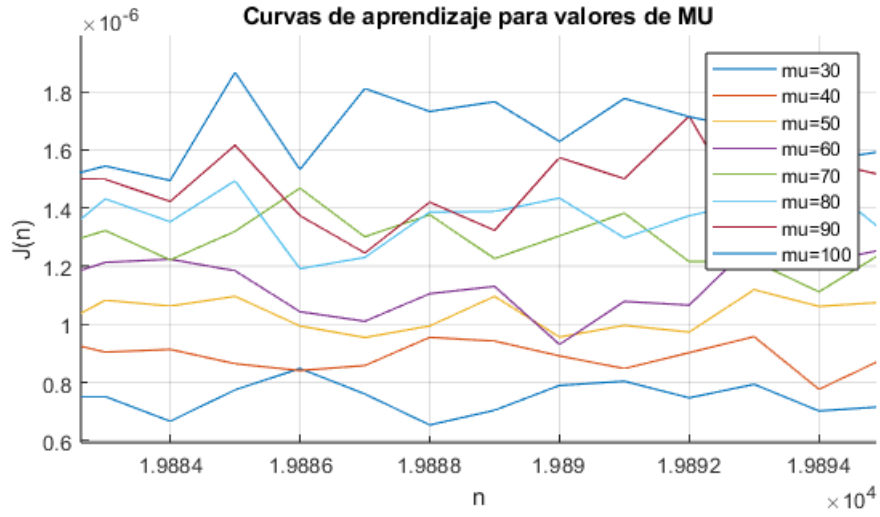


Figura 13: Ultimos valores de las curvas de aprendizaje para distintos valores de μ .

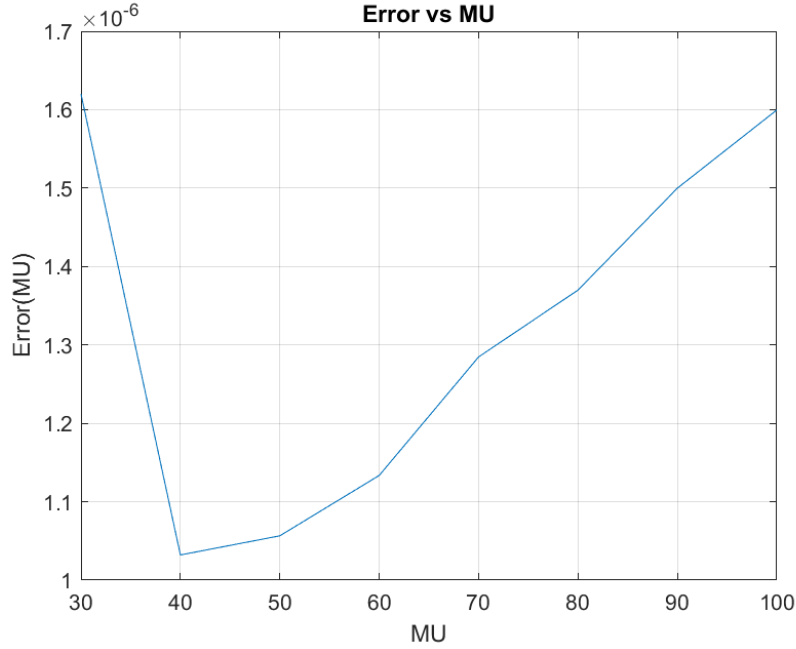


Figura 14: Gráfico de $Error(\infty)$ vs μ .

1.6. (f) Realizaciones con audios reales

El criterio de elección para este ejercicio consistió en elegir la combinación de valores que minimizan el error en función de las características vistas previamente para el ruido generado S. Para esta señal la frecuencia de sampleo fue de 44100Hz, lo cual son 44100 muestras por segundo. Para el valor de $\mu=40$ vemos que tarda aproximadamente 6000 muestras hasta estabilizarse, lo cual es mas que óptimo para estas señales de audio.

$M = 2$; $Mu = 40$; Realizaciones = 50;

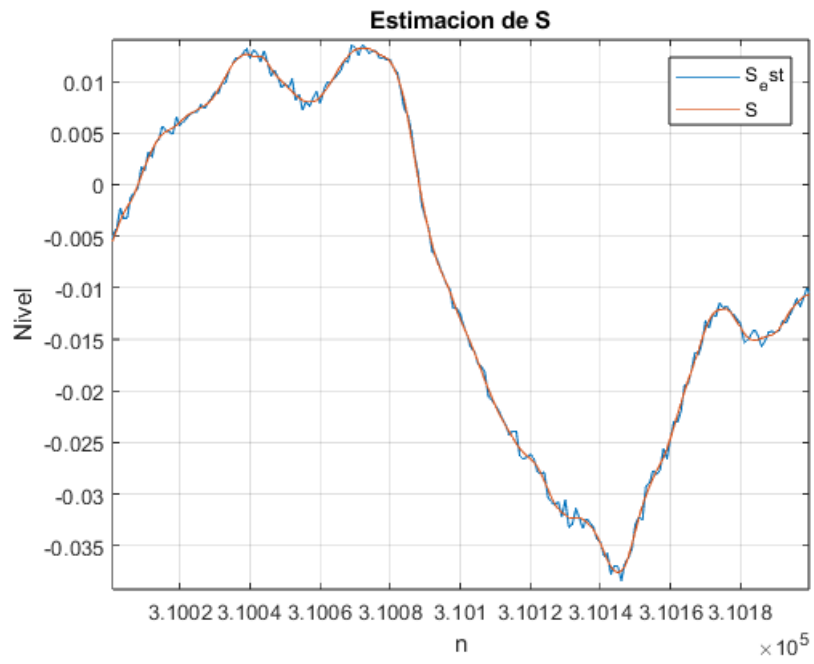


Figura 15: Segmento.



Figura 16: Gráfico de los valores de los coeficientes w_n del filtro.

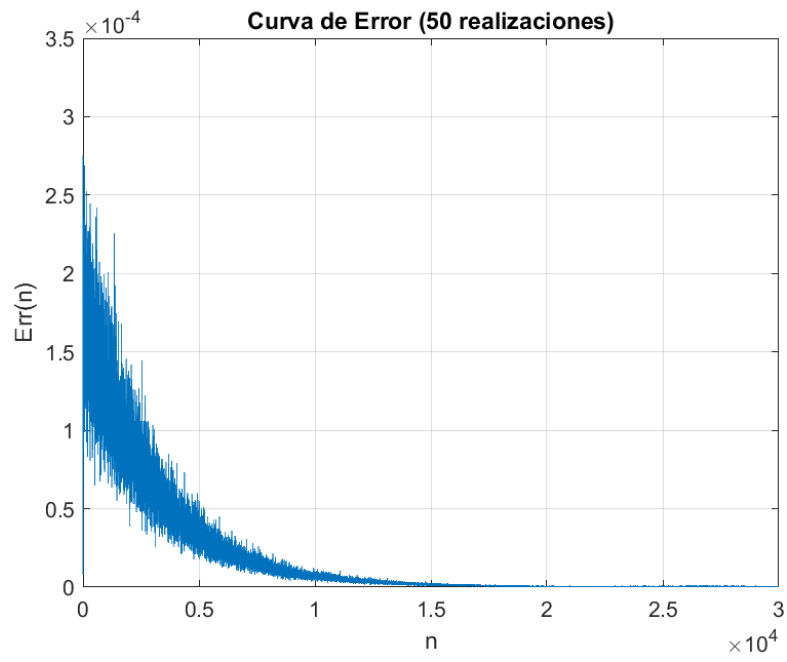


Figura 17: Gráfico de la curva de error para 500 realizaciones.

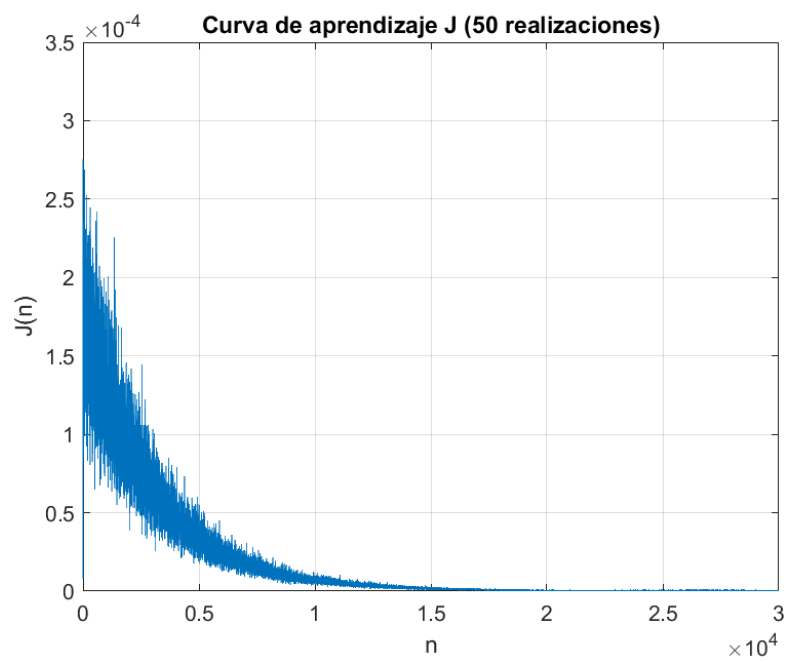


Figura 18: Gráfico de la curva de aprendizaje para 500 realizaciones.

2. Problema 2

2.1. (a) Solución utilizando LMS

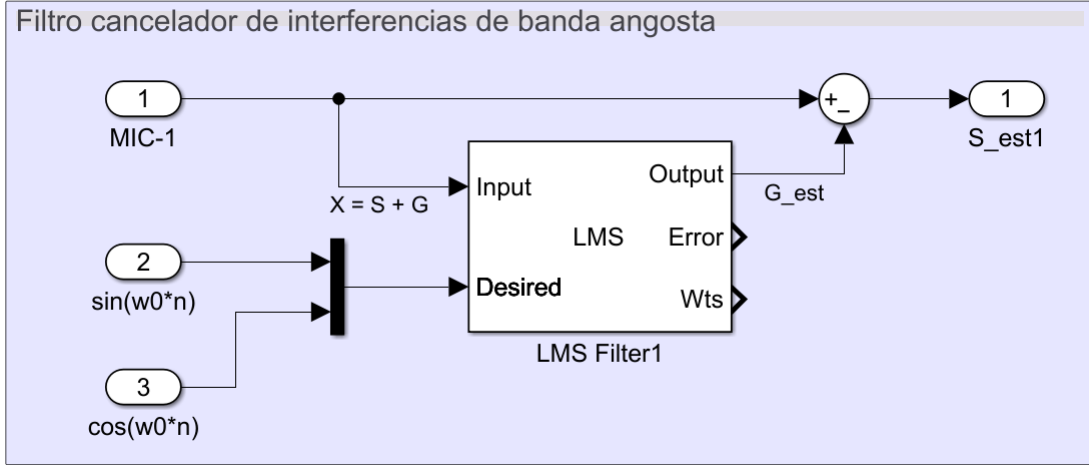


Figura 19: Diagrama en bloques del filtro cancelador de ruido blanco

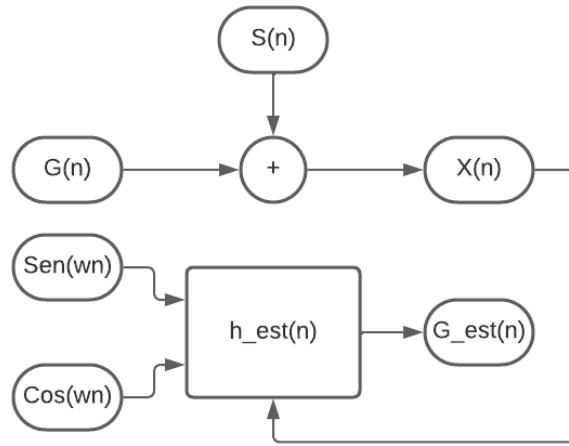


Figura 20: Diagrama en bloques del filtro cancelador de ruido blanco

Entonces, teniendo el vector $\vec{W}(n)$ que representa los constantes de un filtro de orden 2 y $Entrada(n)$ respresenta el vector de 2 componentes donde una componente es un coseno y la otra es un seno:

$$Entrada(n) = \begin{bmatrix} \cos(w_0 n) \\ \sin(w_0 n) \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\vec{W}(n) = [w_1 \quad w_2]^T \quad (8)$$

Tal que:

$$Y(n) = w_1 \cos(w_0 n) + w_2 \sin(w_0 n) \quad (9)$$

Donde se tiene que $Y(n)$ es la salida del sistema y $Z(n)$ es la entrada del sistema. Teniendo estos vectores, nosotros calculamos la estimación de nuestro filtro adaptativo como:

$$\vec{W}(n+1) = \vec{W}(n) + \mu Entrada(n) (X(n) - Entrada(n)^T \vec{W}(n)) \quad (10)$$

2.2. (b) -Generación de los procesos

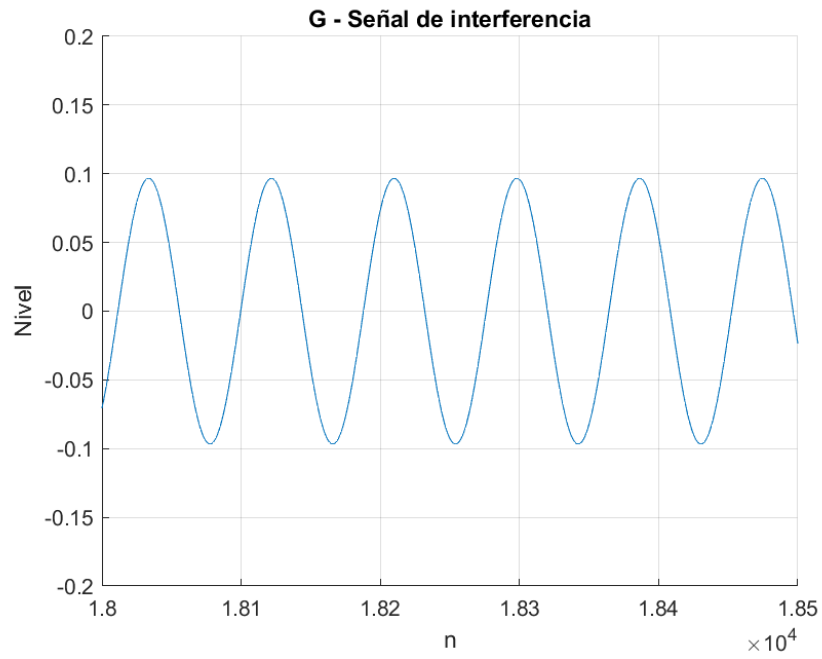


Figura 21: Segmento de la señal de interferencia G.

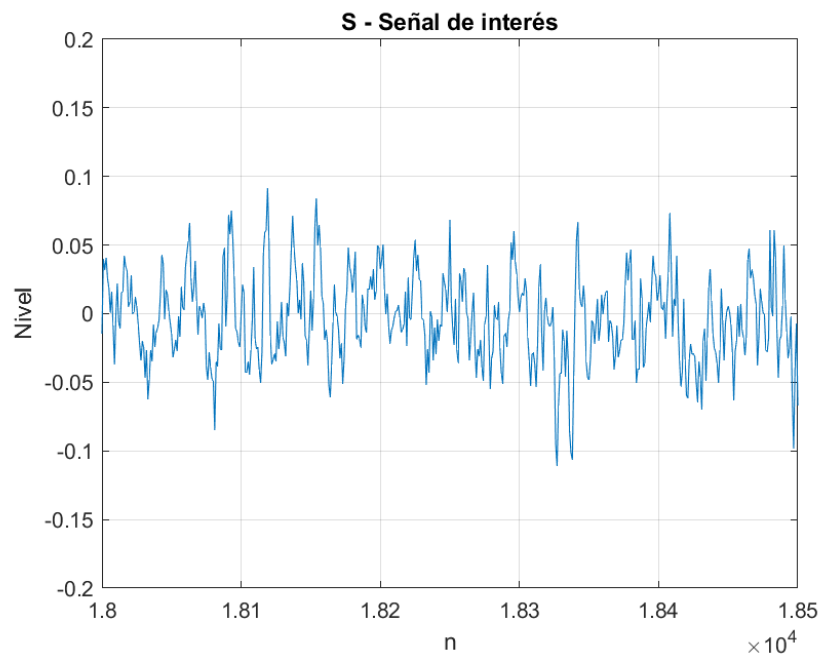


Figura 22: Segmento de la señal de interés S.

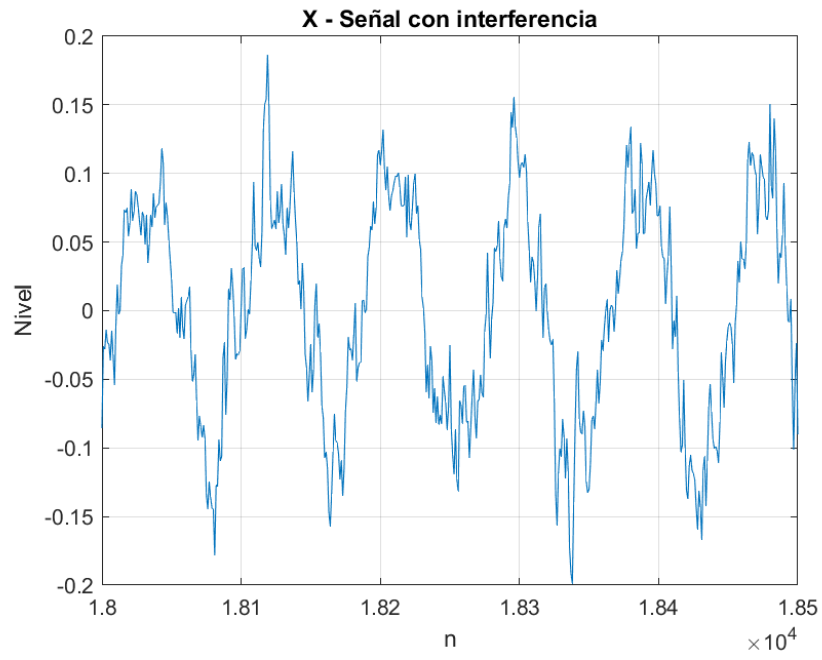


Figura 23: Segmento de la señal $X = S + G$.

2.3. (c) -Curvas de error y de aprendizaje

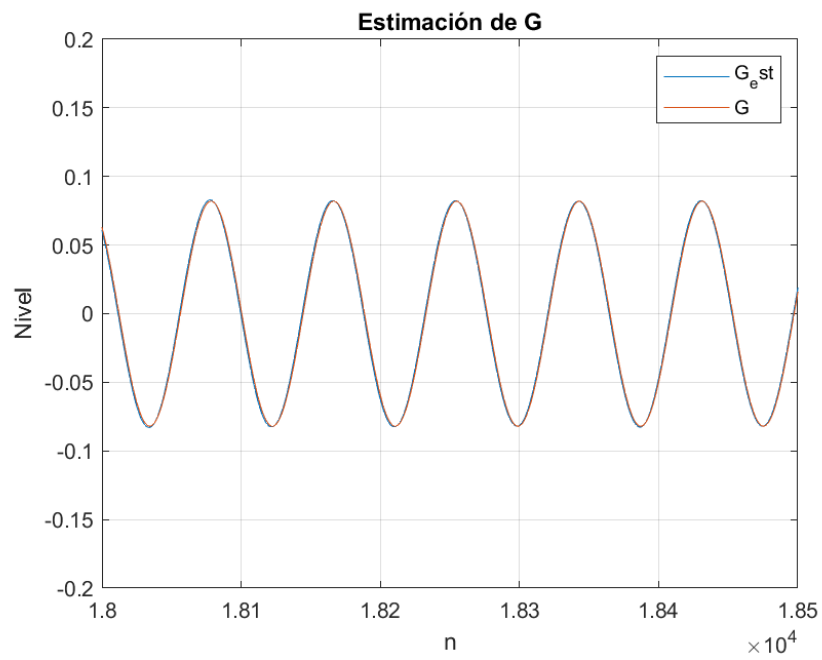


Figura 24: Segmento con las señales G y \hat{G} superpuestas.

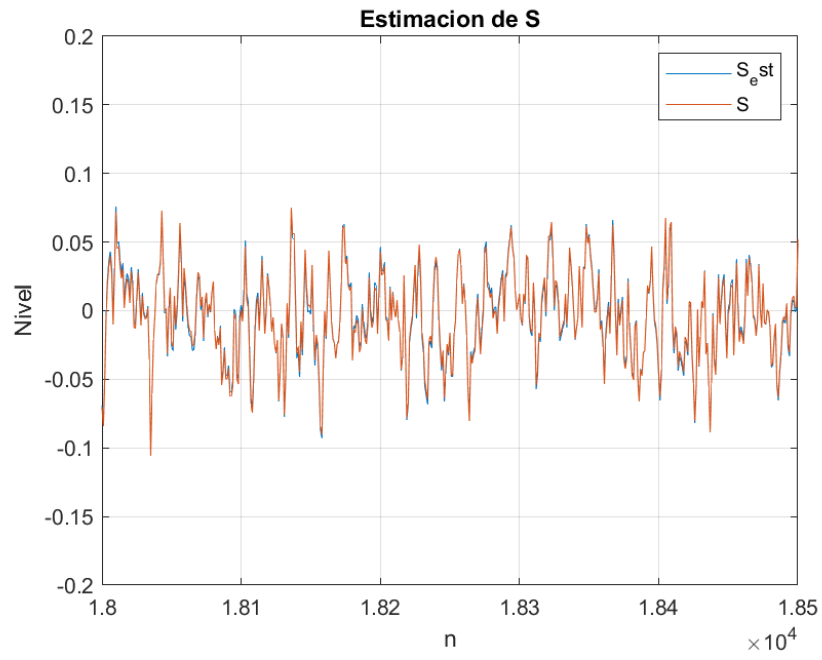


Figura 25: Segmento con las señales S y \hat{S} superpuestas.

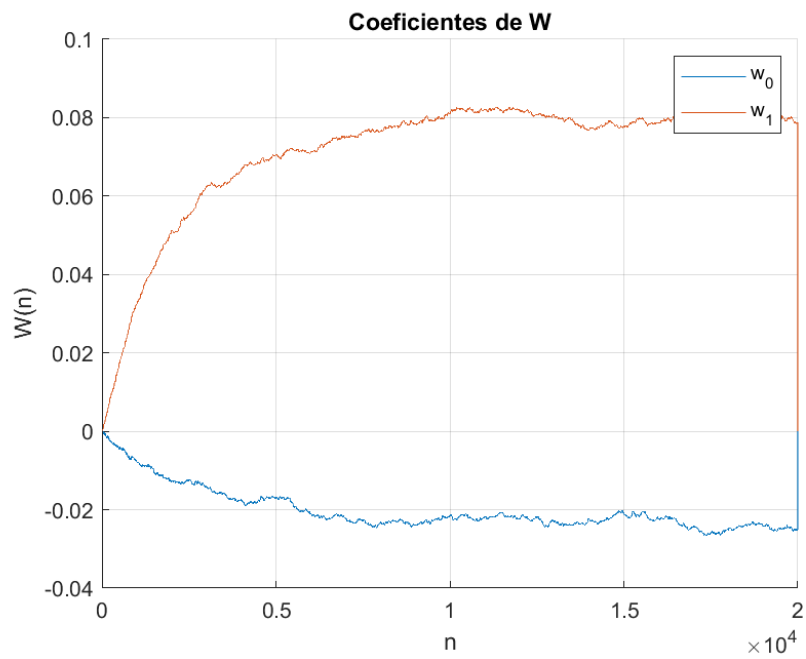


Figura 26: Gráfico de los valores de los coeficientes w_n del filtro.

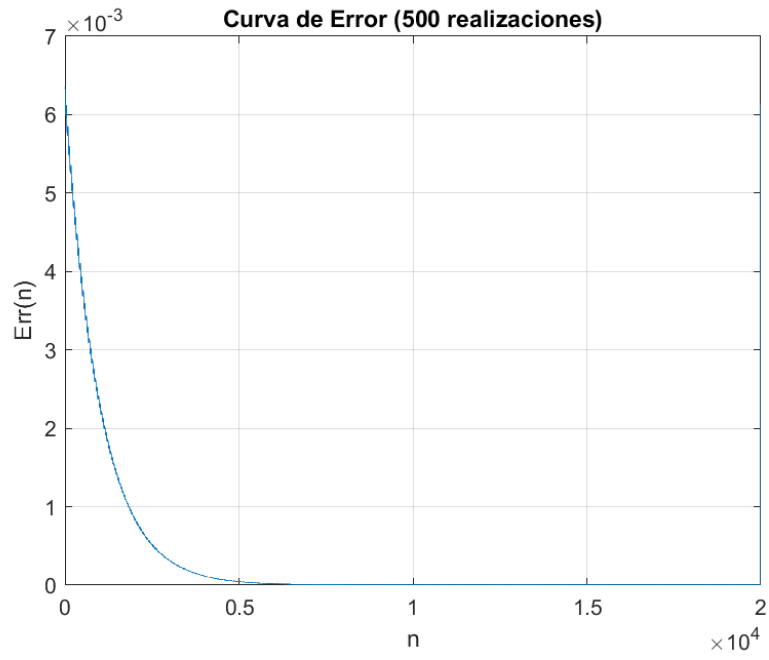


Figura 27: Gráfico de la curva de error para 500 realizaciones.

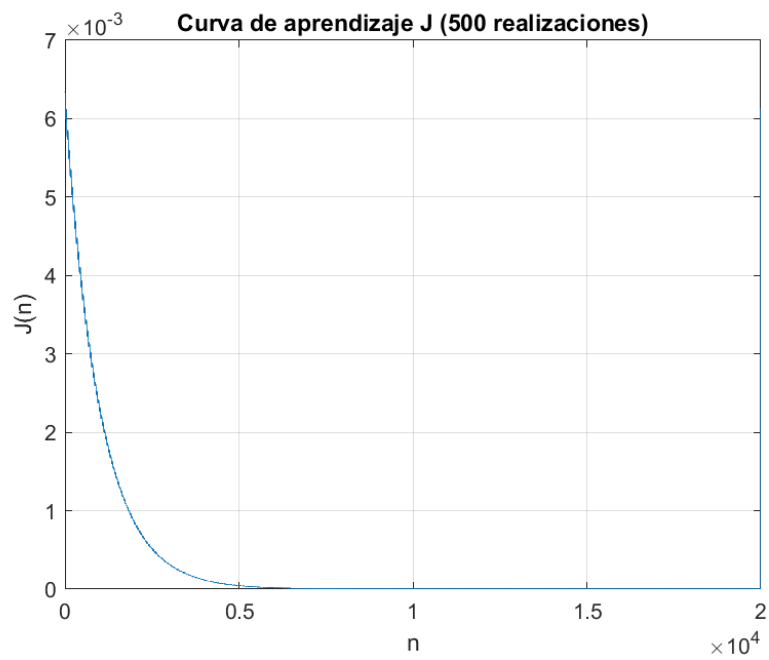


Figura 28: Gráfico de la curva de aprendizaje para 500 realizaciones.

Calculando la varianza de la señal para una realización, $S = 7.4130e-04$, se ve que el error se estabiliza en el orden de $3E7$, lo cual habla de un error relativo menor al 0.05 %.

2.4. (d) - Variación del paso de la estimación

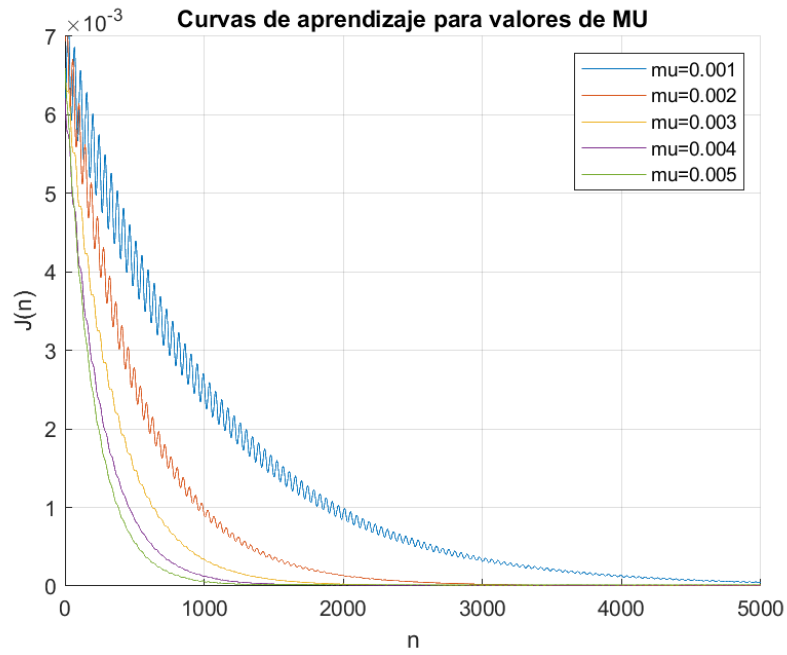


Figura 29: Curvas de aprendizaje para distintos valores de μ .

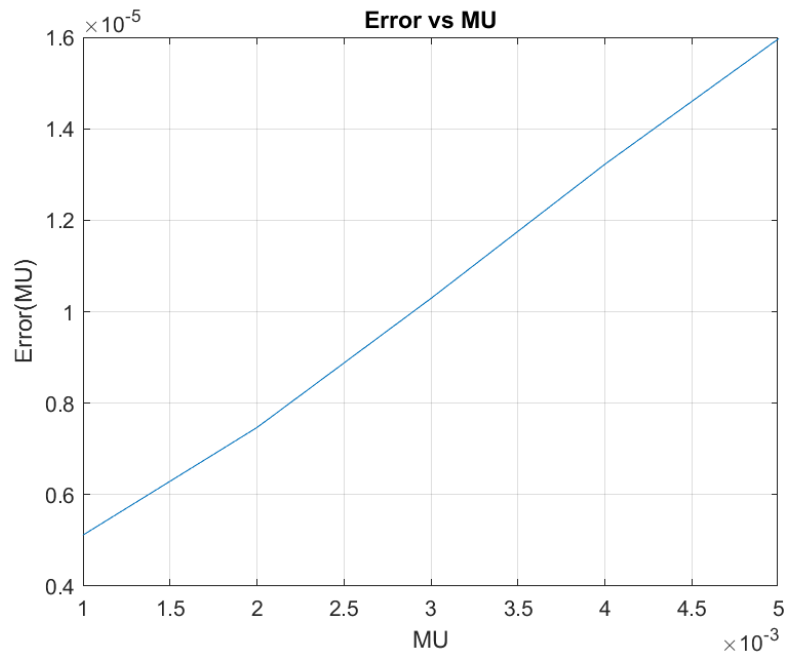


Figura 30: Gráfico de $Error(\infty)$ vs μ .

2.5. (e) Realizaciones con audios reales

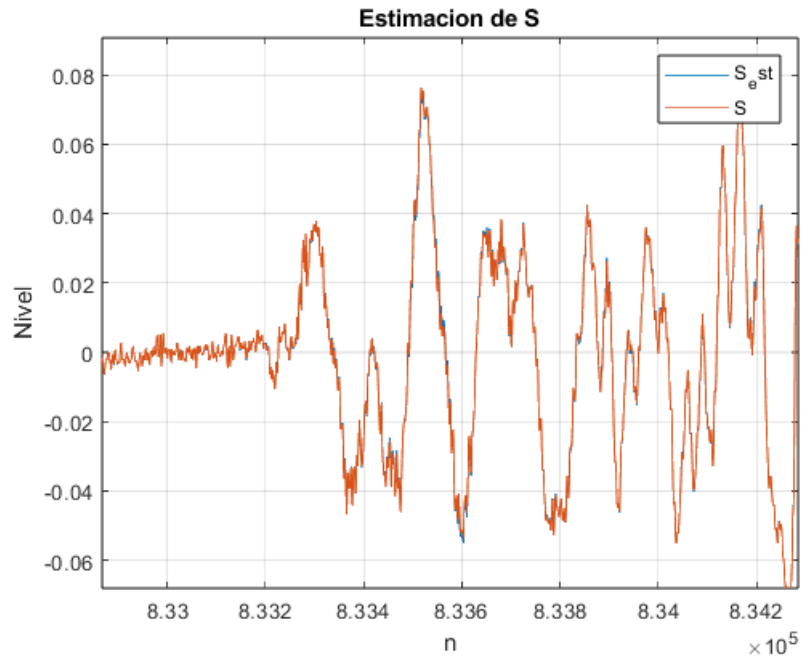


Figura 31: Segmento de de S superpuesto con \hat{S} .

En este gráfico se ve cómo el sistema responde con la suficiente velocidad para pasar de silencio a sonido (el segmento fue elegido específicamente en esa transición).

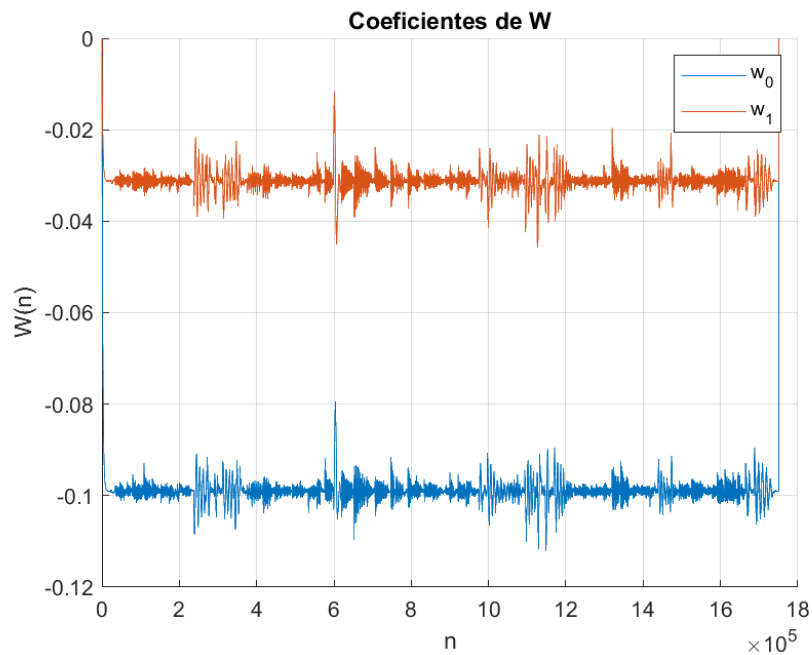


Figura 32: Gráfico de los valores de los coeficientes w_n del filtro.

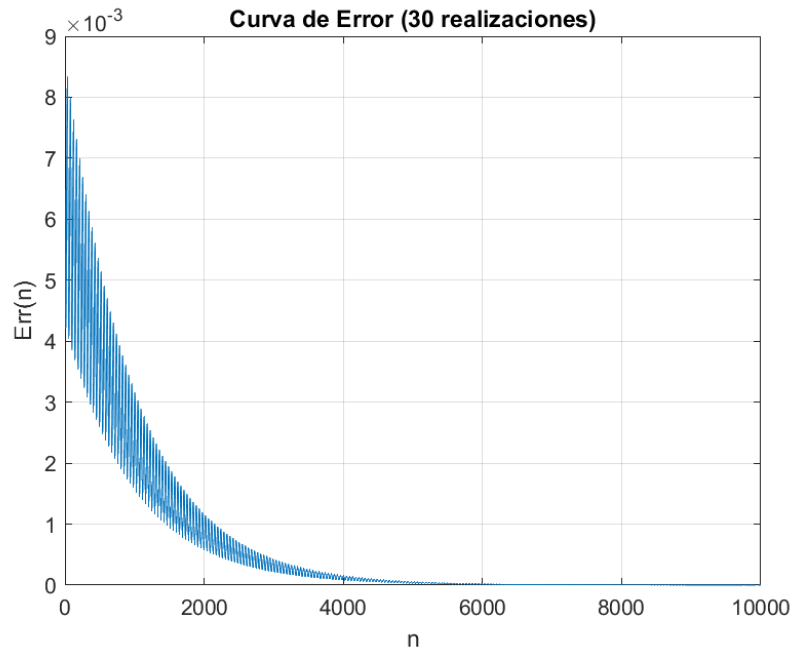


Figura 33: Gráfico de la curva de error para 500 realizaciones.

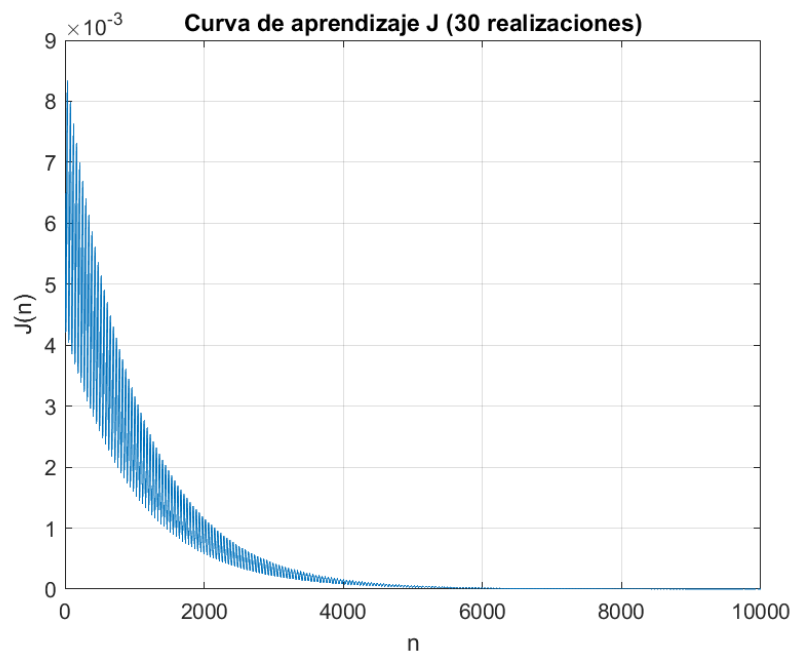


Figura 34: Gráfico de la curva de aprendizaje para 500 realizaciones.

3. Problema 3

3.1. (a) Selección disposición de los filtros

En el tercer problema tenemos a la señal original contaminada por dos los errores diferentes, el ruido blanco y la interferencia de banda angosta. Planteando la señal de salida obtenemos la siguiente ecuación:

$$X(n) = S(n) + V(n) + G(n) \quad (11)$$

Para estimar estas dos señales utilizando filtros adaptativos con LMS hay que decidir como va a estar estructurado nuestro sistema de estimación. En principio se nos ocurrieron dos formas de estructurar los filtros adaptativos.

La primera estructura es generar las estimaciones de las señales no deseadas por se ´parado, es decir, estimar $V(n)$ teniendo como entrada a $U(n)$ y salida $X(n)$ y estimar $G(N)$ teniendo como entrada un coseno y un seno de la misma frecuencia que la interferencia y en la salida $X(n)$. El esquema de este método se puede ver en la figura 35.

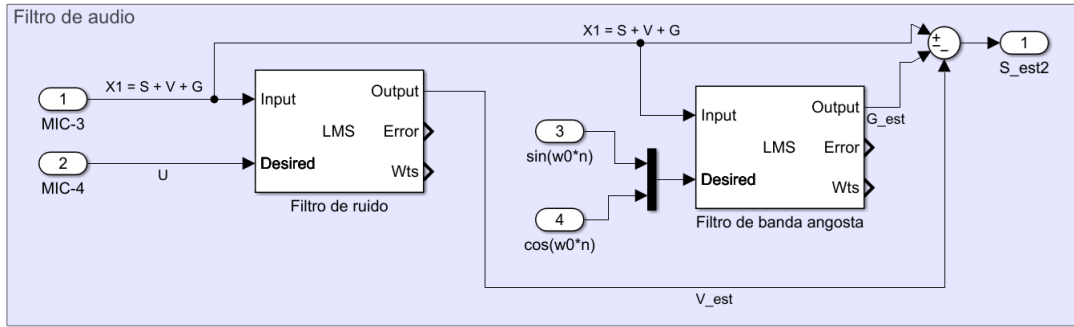


Figura 35: Diagrama en bloques del filtro de audio, configuración 1

La segunda estructura es primero generar la estimación de uno de las dos señales indeseables y generar $X_2(n) = X(n) - ErrorEstimado1(n)$ y estimar la segunda señal no deseada utilizando como salida $X_2(n)$. Un esquema para implementar este método se puede ver en la figura 36.

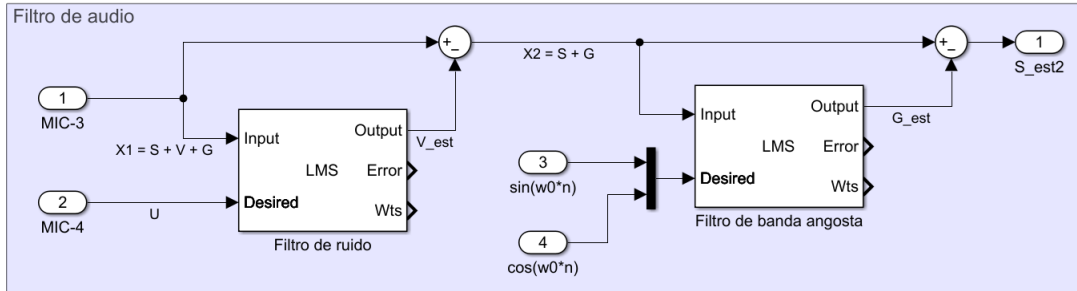


Figura 36: Diagrama en bloques del filtro de audio, configuración 2

La estructura que se selecciono para abordar este problema fue la primera que es donde estimamos las señales espurias por separado. Esta decisión se debe a que el segundo método tiene un gran problema y es que para calcular la estimación de la segunda señal hay que usar la estimación de la primera señal. Esto, sumado a que hay una curva de aprendizaje hasta obtener una estimación del filtro que reduce el error y no lo aumenta, nos produce que nos aumentaría el largo de la curva de aprendizaje de la segunda estimación y por lo tanto, utilizando el primer método se reduciría el tiempo de la curva de aprendizaje.

3.2. (b) Resultados

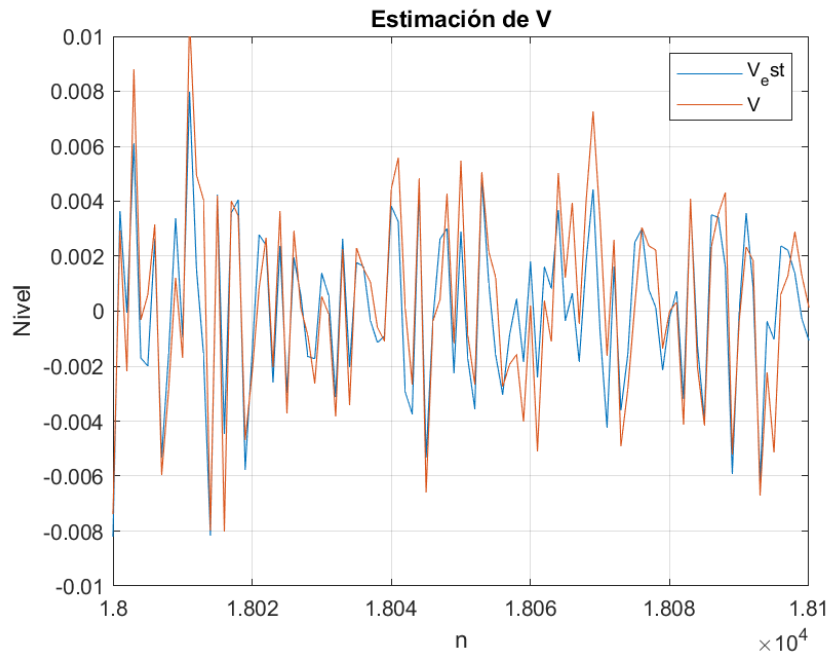


Figura 37: Segmento con las señales V y \hat{V} superpuestas.

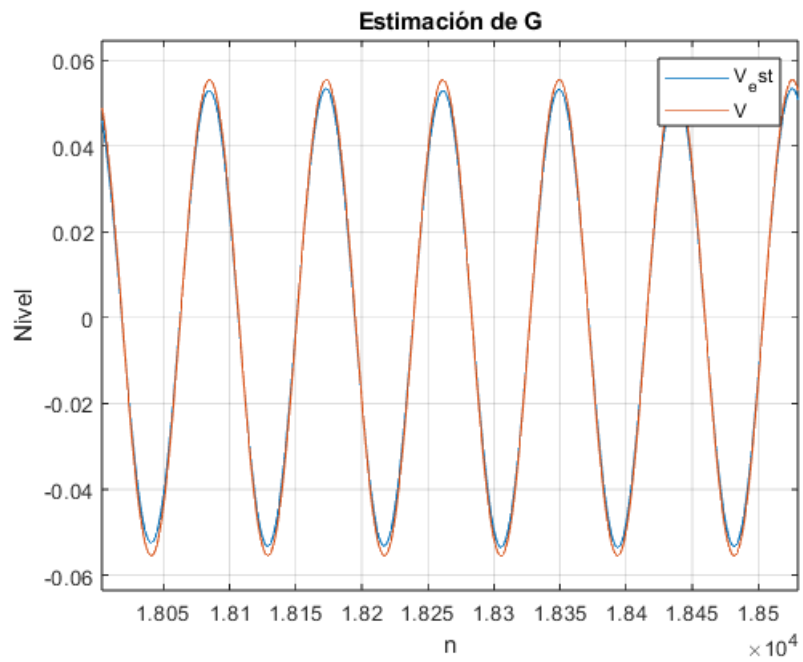


Figura 38: Segmento con las señales G y \hat{G} superpuestas.

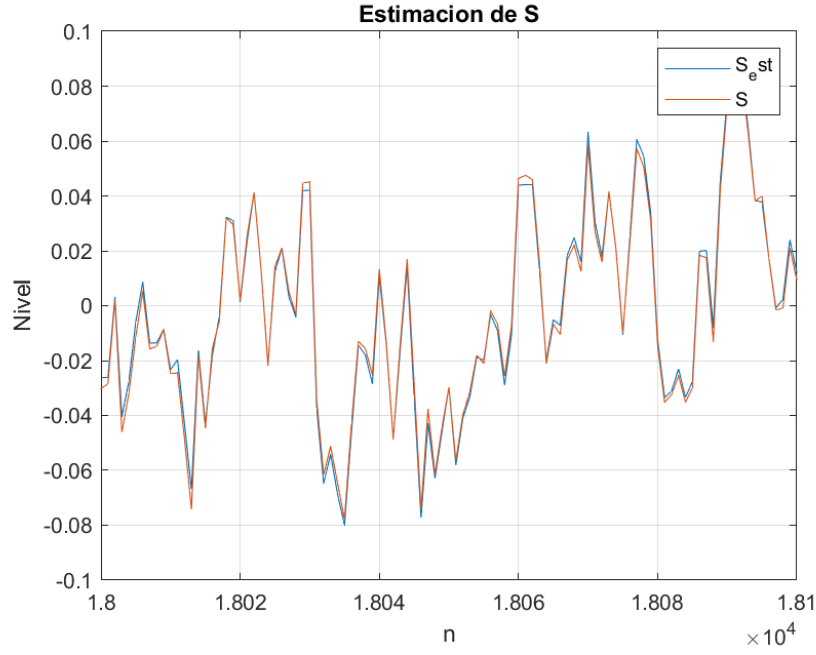


Figura 39: Segmento con las señales S y \hat{S} superpuestas.

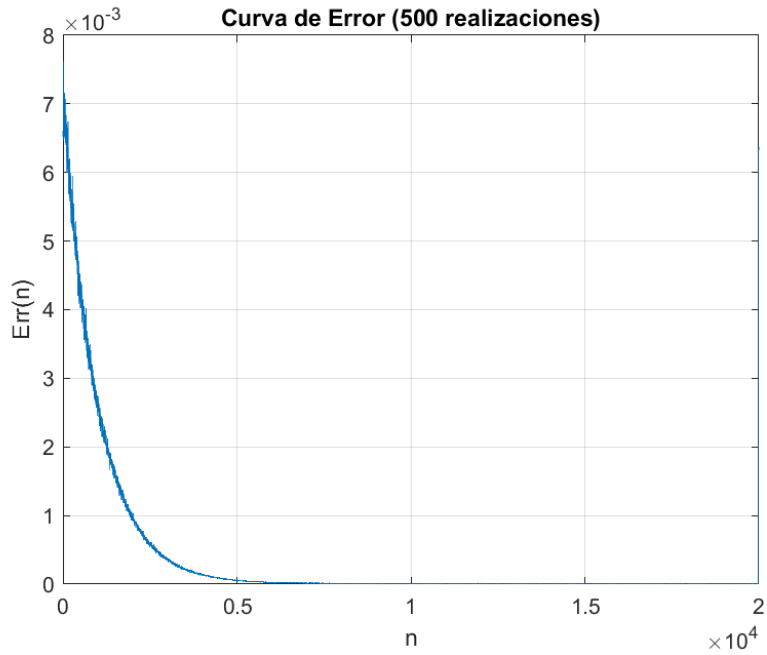


Figura 40: Gráfico de la curva de error para 500 realizaciones.

4. Conclusiones

En primer lugar se concluye que se pudieron implementar los filtros de ruido e interferencia con éxito, a partir de la apreciación subjetiva de escuchar los audios filtrados.

Cabe destacar por un lado el óptimo costo computacional tanto en memoria como CPU, ya que si bien en este trabajo práctico no se ventanea, el costo en memoria está acotado a tener la ventana con el valor de referencia, el de entrada, y la memoria para alojar las operaciones de convolución. Por otro lado, el hecho de que este algoritmo converge, hace que haya una única iteración sobre la ventana.

Desde el punto de vista de la convergencia del error, se comparó la varianza de S con los valores de estabilidad de error, y siempre se llegaron a errores relativos menores al 0.1 % tanto para el filtro de ruido como para el filtro de interferencias, lo que habla de una gran eficacia para estimar ambas

fuentes de señales espurias.

Se demostró cómo variando la cantidad de componentes de un filtro adaptativo se puede conocer el tamaño óptimo en base a la curva de error, y que luego de alcanzado dicho valor el error siempre aumenta.

Para concluir, esta introducción a filtros adaptativos demuestra la potencia de este tipo de herramientas de estimación de sistemas con parámetros desconocidos.