Algoritma Çalışma Zamanı Büyüme Hızlarının Karşılaştırılması

$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$	$f(n) \prec g(n)$ g(n) daha hızlı büyür
$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = L$ limit var ve sabit bir sayı	Büyüme hızları eşittir. $f(n) \approx g(n)$
$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$	$f(n) \succ g(n)$ f(n) daha hızlı büyür

1.Aşağıdaki büyüme hızlarını karşılaştırınız.

n^n , a^n , $n!$ $a > 1$

Çözüm:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n.(n-1).(n-2)\ldots 2.1}{\underbrace{a\,.\,a\,.\,a\,\ldots\,a\,.\,a}_{n \text{ times}}} \right) = \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n.(n-1).(n-2)\ldots 2.1}{\underbrace{n\,.\,n\,.\,n\,\ldots\,n\,.\,n}_{n \text{ times}}} \right) = 0$$

Sonuç: $a^n \prec n! \prec n^n$

2. $k > 0,\ a > 1,$ **ve** $\epsilon > 0$ **olmak üzere**

$(\log_a n)^k$ **ile** n^ϵ **büyüme hızlarını karşılaştırınız**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^\epsilon}{(\log_a n)^k} = \qquad b \leftarrow \frac{\epsilon}{k}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n^b)^k}{(\log_a n)^k} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^b}{\log_a n} \right)^k = \qquad k \quad \text{positive}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^b}{\log_a n} = \qquad \text{l'Hôpital's rule}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{bn^{b-1}}{\left(\frac{1}{\ln a}\right)\left(\frac{1}{n}\right)} =$$

$$\lim_{n\to\infty} (\ln a) b\, n^b = \infty$$

Sonuç: $(\log_a n)^k \prec n^\epsilon$

3. Aşağıdaki karşılaştırmalar için Doğru/Yanlış yorumlarını yapınız.

$2^{2^{n+1}} \succ 2^{2^n}$	D	$2^{2^{n+1}} = 2^{2.2^n} = 2^{2^n} \times 2^{2^n}$.
$2^{2^n} \succ (n+1)!$	D	Her iki tarafın logaritması alınırsa 2^n **?** $\lg((n+1)!) \approx (n+1)\lg(n+1) \approx n\lg n.$ $2^n \succ n\lg n,$ Dolayısıyla $2^{2^n} \succ (n+1)!$
$(n+1)! \succ n!$	D	$(n+1)! = (n+1) \times n!$ $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \infty$
$n! \succ e^n$	D	$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n.(n-1).(n-2)\ldots 2.1}{\underbrace{a\,.\,a\,.\,a\,\ldots\,a\,.\,a}_{n \text{ times}}} \right) = \infty$
$e^n \succ n.2^n$	D	$\lim_{n\to\infty} \frac{n.2^n}{e^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{e^n}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\left(\frac{e}{2}\right)^n} = 0$
$n.2^n \succ 2^n$	D	$\lim_{n\to\infty} \frac{n.2^n}{2^n} = \lim_{n\to\infty} n = \infty$
$2^n \succ \left(\frac{3}{2}\right)^n$.	D	$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$
$\left(\frac{3}{2}\right)^n \succ n^{\lg(\lg n)}$.	D	$n.\lg\left(\frac{3}{2}\right)$ **?** $\lg n.\lg(\lg n)$. $\lg^2 n \succ \lg n.\lg(\lg n)$ $n \succ \lg^2 n$ Her iki tarafın logaritması alındı $n \succ \lg n.\lg(\lg n)$
$(\lg n)^{\lg n} = n^{\lg(\lg n)}$	D	Her iki tarafın logaritması alındı
$(\lg n)^{\lg n} \succ (\lg n)!$	D	Logx=n olsun. n^n ile n! karşılaştırması gibi düşünebiliriz. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n.(n-1).(n-2)\ldots 2.1}{\underbrace{n\,.\,n\,.\,n\,\ldots\,n\,.\,n}_{n \text{ times}}} \right) = 0$
$(\lg n)! \succ n^3$.	D	Her iki tarafın logaritması alınırsa $\lg((\lg n)!)$ ile $3.\lg n$'e bakılır. $\lg n! \approx n\lg n$ $\lg((\lg n)!) \approx (\lg n).(\lg(\lg n))$. Bu durumda $\lim_{n\to\infty} \frac{3.\lg n}{(\lg n).(\lg(\lg n))} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{\lg(\lg n)} = 0$
$(\sqrt{2})^{\lg n} \succ 2^{\sqrt{2\lg n}}$.	D	$\lg n \succ \sqrt{\lg n}$ $\frac{1}{2}.\lg n \succ \sqrt{2}.\sqrt{\lg n} = \sqrt{2\lg n}$. $(\sqrt{2})^{\lg n} \succ 2^{\sqrt{2\lg n}}$.

$n \succ (\sqrt{2})^{\lg n}$		$\sqrt{2})^{\lg n} = 2^{\frac{1}{2}\lg n} = 2^{\lg \sqrt{n}} = \sqrt{n}$ $n \succ \sqrt{n}.$
$\lg^2 n \succ \ln n.$		$\ln n = \frac{\lg n}{\lg e}.$
$n \approx 2^{\lg n}$		$n = 2^{\lg n}$
$\frac{1}{n} \prec 1 - \frac{1}{n}$	D	$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\frac{1}{n}}{1 - \frac{1}{n}} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\frac{1}{\cancel{n}}}{\frac{n-1}{\cancel{n}}} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n-1} = 0$
$2^{\frac{1}{n}} \prec 2^{1-\frac{1}{n}}$	Y	$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2^{\frac{1}{n}}}{2^{1-\frac{1}{n}}} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2^{\frac{2}{n}}}{2^{1}} \right) = \text{const}$
$\frac{1}{n^2} \prec \frac{1}{n}$	D	$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}} \right) = 0$
$2^{\frac{1}{n^2}} \prec 2^{\frac{1}{n}}$	Y	$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2^{\frac{1}{n^2}}}{2^{\frac{1}{n}}} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(2^{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n}} \right) = 1$ **Çünkü** $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1-n}{n^2} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\frac{1}{n} - 1}{n} \right) = 0$
a ve ϵ sabit ve $a > 1$ ve $\epsilon > 0.$ $n^{\epsilon} \prec a^{n}$	D	Her iki tarafın logaritmasını alırsak $\epsilon.\log_a n$ **?** $n \log_a n$ $\epsilon.\log_a n \prec n \log_a n$