MÁSTER EN INTELIGENCIA ARTIFICIAL

MÉTODOS DE SIMULACIÓN

Práctica Grupo 3

Autores
LUIS COUTO SELLER
IRENE MARBÁN ÁLVAREZ
AÍDA MUÑOZ MONJAS

October 24, 2022

Contenidos

1 Generación de números y variables aleatorias

1.1 Enunciado

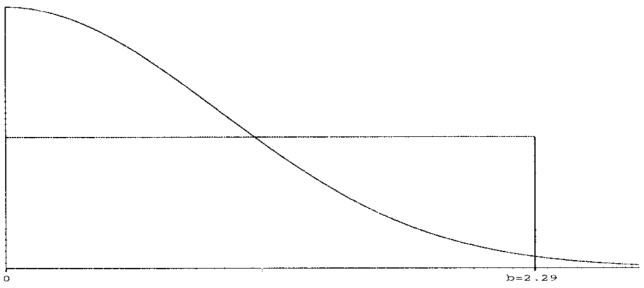
Describir el método *Monty Phyton* para la distribución normal y compararlo con otros métodos para la generación de valores de la normal.

1.2 El método Monty Python

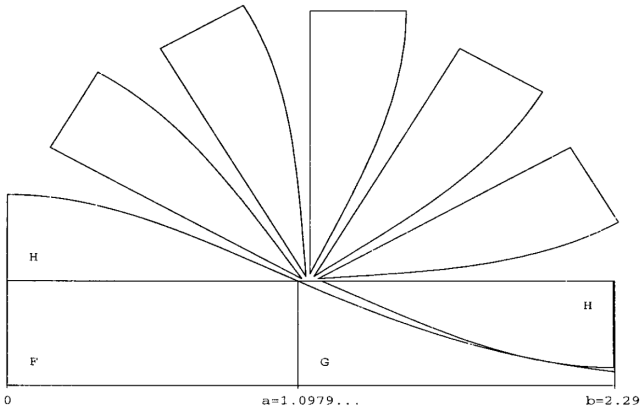
El objetivo del método Monty Python es lograr generar números aleatorios cuya frecuencia se aproxime a aquella de una distribución normal. Para ello, emplea la similitud entre la expresión de la función de densidad de la distribución normal y una sigmoide decreciente, así como se aprovecha del bajo coste computacional de la generación de números aleatorios en un rectángulo.

$$N(0,1) \sim f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2}$$

Tomando $x > 0$, se traza un rectángulo de base b y altura $1/b$ sobre la sigmoide. Con un giro de π radianes y un desplazamiento sobre la región exterior al rectángulo se pretende representar la mayor superficie posible de la sigmoide en el interior del rectángulo de área 1. En las imágenes siguientes, podemos observar el procedimiento descrito tomando un $b = 2.29$.



(a) Sigmoide con el rectángulo de base b. [1]



(b) Giro y desplazamiento gráficamente. [1]

Una vez descrito el área bajo la función de densidad en el interior del rectángulo, todo número aleatorio generado en ese rectángulo pertenecerá a las regiones F, G, H o a la región comprendida entre G y H correspondiente a la cola de la sigmoide. La probabilidad de obtener un número en la cola es de un 0.022 [1].

Siendo (x, y) el valor aleatorio generado y (x', y') su valor correspondiente en la sigmoide,

$$(x', y') = \begin{cases} (x, y) & \text{si} \quad x \in F \text{ ó } G \\ (b - x, 2/b - y) & \text{si} \quad x \in H \end{cases}$$

Si el valor aleatorio generado no pertenece a F, G ó H, pertenecerá a la cola de la distribución, por lo que basta con devolver una variante de la cola normal mediante el método de Marsaglia o el método de la cola general de Marsaglia y Tsang.

La elección del valor de b no es crítica, pero elegir un valor de b demasiado grande implica que habrá solapamiento al realizar el giro y desplazamiento descrito, mientras que si el valor de b es demasiado pequeño, será necesario realizar frecuentemente el método para hallar los valores de la cola. En caso de utilizar el método anterior para "ajustar" la sigmoide al rectángulo, la elección de $b = 2.29$ es prácticamente la máxima posible [1].

En lugar de una rotación y un desplazamiento de la región exterior al rectángulo, "estirar" la región H permite un ajuste mejor, manteniendo constante el área de la sigmoide, y por tanto siendo este un método más complejo pero más eficiente para realizar dicha aproximación.

Definiendo el factor de estiramiento s y la función de densidad de la región H, $f_H(x)$,

$$s = \frac{a}{b-a} \qquad f_H(x) = f(x) - \frac{1}{b} \text{ con } 0 < x < a$$

se tiene que la región H girada y estirada tiene una función de densidad $f_{H'}(x)$.

$$f_{H'}(x) = \frac{1}{b} - s\left[f(s(b-x)) - \frac{1}{b}\right]$$

La siguiente figura representa gráficamente las transformaciones matemáticas descritas compuestas con la rotación aplicada a la sección H.

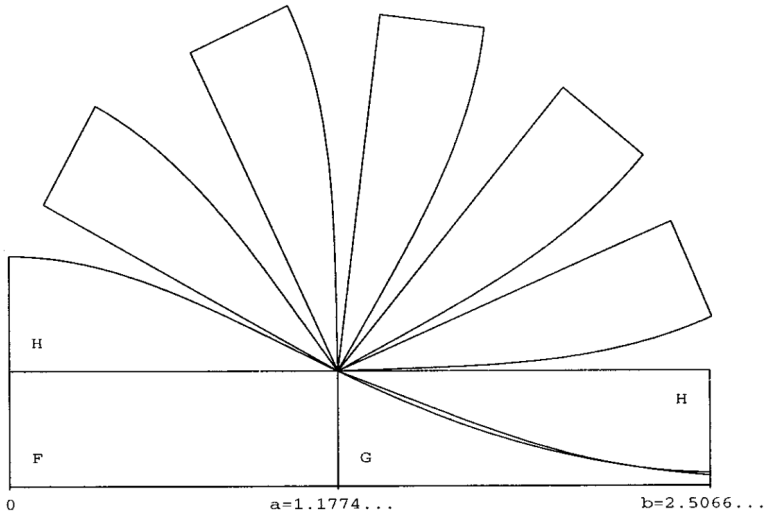


Figure 2: Descripción gráfica del estiramiento descrito. [1]

Para este segundo caso, la elección habitual para el valor de b es $b = \sqrt{2\pi}$. Esta elección no es crítica, cualquier valor entre 2.506 y 2.5074 es válido [1], pero el par $b = \sqrt{2\pi}$, $a = \sqrt{\ln 4}$ son opciones fácilmente identificables con una precisión ilimitada.

1.3 Comparación de métodos

A continuación, se compararán diferentes métodos para la generación de valores de la normal con el método Monty Python. Para ello, nos basaremos en la publicación citada [2]. Esta misma, divide la evaluación en:

- **Test de bondad del ajuste**: Para evaluar los algoritmos utilizados, se utiliza el test $\chi 2$. El número de k subintervalos, se utiliza la siguiente formula $k = [n^{\frac{3}{5}}]$, siendo n el número de muestras.
- **Test para valores altos de sigma** (como se comportan los generadores en las colas): El gran reto de realizar este test es la baja probabilidad de obtener muestras que se encuentren en las colas. Se utiliza por tanto un algoritmo para "forzar" generación de muestras que sean grandes múltiplos de sigma.
- **Test de aleatoriedad**: Para este test, se uso la batería Crush, que forma parte del TestU01.
- **Test de correlación interbloque**: Este test mide como afecta la distribución de cada una de las muestras a la muestra siguiente, siendo un buen resultado si la distribución de cada una de las muestras es independiente de las anteriores.

También se evalua el **número de operaciones realziadas** y **la velocidad de ejecución**.

1.3.1 Resultados en velocidad y número de operaciones realizadas.

Los resultados del test de velocidad son relativos a la velicidad del método de Rechazo Polar. El método de Monty Python es el cuarto más rápido en comparación con los 16 otros métodos de generación de variables aleatorias, siendo 1,61 veces más rápido que el método de Rechazo Polar. Destaca a demás que el número de operaciones realizadas es bajo en comparación con el método Wallace, que esta por encima del Monty Python en rapidez. El método Monty Python tiene también muchas menos constantes que el método Ziggurat, que está también por encima del Monty Python en cuestión de velocidad.

1.3.2 Resultados en el test de bondad de ajuste.

En el test de $\chi 2$, se obtiene como resultado que el método Monty Python no pasa el test al utilzar muestras de valores mayores a 2^{34}. De nuevo, los métodos Wallace y Ziggurat obtienen mejores resultados, ya que no fallan al utilizar muestras de valor igual o mayor a 2^{36}. El algoritmo PPND7 falla en la misma prueba que el método Monty Python, pero este algorimto a demás es 3 veces más lento.

1.3.3 Resultados en el test de valores altos de sigma.

Los resultados de este test muestran el múltiplo más alto de sigma donde el test se realiza con éxito. El método Monty Python obtiene un valor de 8.27, siendo en este caso mejor que los métodos Ziggurat y Wallace. En comparación con el resto de generadores, el Monty Python obtiene muy buenos resultados, situandose el 4 mejor de todos los generadores comparados.

1.3.4 Resultados del test de aleatoriedad

El generador Monty Python no tuvo fallos al realizarse el test Crush.

1.3.5 Resultados del test de correlación interbloque.

Este test solo se realizó en los generadores Ziggurat, Wallace y Monty Pythhon, dado que fueron los más rápidos y en este test se necesitan realizar pruebas con muestras muy grandes. Los generadores de Ziggurat y Monty Python pasaron todos los tests con éxito, mientras que el generador Wallace (tanto el de baja calidad como el de alta), falla cuando las iteraciones están por debajo de 8. Esto se debe a que el método Wallace es recursivo.

1.3.6 Conclusiones

Si bien es cierto que el método Wallace es el más rápido, presenta desventajas evidentes como la correlación. El método Ziggurat, que es más lento que el Wallace, no tiene problemas de correlación, pero si que falla en el test Crush con una colisión identificada en los tests de doble precisión. Además, utiliza un total de 388 constantes, lo que puede ser problemático en algunos entornos. El método Monty Python es el tercero más rápido después del Wallace y el Ziggurat, y presenta ventajas evidentes, como los buenos resultados en los tests de aleatoriedad y correlación, así como el bajo número de operaciones y constantes necesarias. La limitación del método Monty Python está en el uso de muestras cuya n sea mayor que 2^{36}.

2 Simulación de sucesos discretos y optimización

2.1 Enunciado

Consideremos un almacén de dos productos cuyos precios de venta al público son de 2.5 y 3.5 euros la unidad, respectivamente. La llegada de clientes al almacén se distribuye según un proceso de Poisson de parámetro $\lambda = 1.5$ clientes por hora y la cantidad de productos demandados por cada uno de ellos tiene la siguiente distribución:

Demanda	1 unidad	2 unidades	3 unidades	4 unidades
Producto 1	0.3	0.4	0.2	0.1
Producto 2	0.2	0.2	0.4	0.2

Para satisfacer la demanda de sus clientes el dueño del almacén mantiene un stock de productos. La política de pedidos al distribuidor es periódica, es decir todos los viernes a primera hora realiza un pedido en el que tomando como referencia el nivel de inventario de los productos en ese Para satisfacer la demanda de sus clientes el dueño del almacén mantiene un stock de productos. La política de pedidos al distribuidor es periódica, es decir todos los viernes a primera hora realiza un pedido en el que tomando como referencia el nivel de inventario de los productos en ese momento, se solicitan las unidades necesarias para que el nivel del inventario de cada producto llegue a 1000 y 1500 unidades, respectivamente en cada producto.

Asociado a cada pedido que realizamos al proveedor existe un coste fijo (coste de preparación) de 100 euros, independientemente de las unidades demandadas. Adicionalmente, el coste por unidad incluida en el pedido depende de la cantidad solicitada habiendo descuentos por cantidad. Si el número de unidades demandadas del primer producto es menor o igual a 600 el precio es de 1 euro la unidad, mientras que si se piden más de 600 el precio desciende a 75 céntimos. Para el segundo producto, si el número de unidades demandadas es menor que 800 el precio es de 1.5 euros la unidad, mientras que si se piden más de 800 el precio desciende a 1.25 euros.

El tiempo que tarda en ser servido el pedido por los proveedores (tiempo líder), sigue una distribución normal de media 48 horas y desviación típica 3.5, pagándose en ese momento.

Se ha llegado a un acuerdo con el proveedor de forma que, tomando como referencia las 48 horas que tarda en media un pedido en ser servido, si el pedido llega con 3 horas de retraso en la entrega del mismo se realiza un descuento del 0.03% del valor del pedido, encareciéndose en la misma cantidad en el caso de que el pedido llegue con al menos 3 horas de adelanto.

El dueño del almacén debe pagar 0.0002 euros por unidad del producto y unidad de tiempo, asociado al almacenamiento físico de los productos (alquiler del local, refrigeración...). En el caso de que al llegar un cliente éste solicite una cantidad mayor que la que hay en inventario, se le sirve lo que queda, perdiendo la venta restante.

a) Simular el comportamiento de almacén durante un periodo de tiempo de 5 meses para estimar el beneficio esperado, la proporción de clientes cuya demanda se satisface completamente y el porcentaje de tiempo que el nivel del inventario permanece a cero. Para ello, supondremos que el nivel del inventario inicial es de 70 unidades de ambos productos.

b) Representar gráficamente la evolución del nivel del inventario durante los 5 meses y durante los 5 primeros días.

c) Mediante el uso de la metaheurística recocido simulado identificar cuál será la política de pedidos óptima, es decir, identificar cada cuánto tiempo se deberían realizar los pedidos y el valor de referencia del inventario para identificar el número de unidades a solicitar en la política de pedidos periódica.

Nota. El almacén permanece abierto las 24 horas al día de lunes a domingo. El proveedor y la empresa transportista (que sirve los pedidos) también trabajan las 24 horas, no cerrando en ningún momento.

2.2 Modelización del problema

Bibliografía

References

[1] G. Marsaglia and W. W. Tsang, "The monty python method for generating random variables," vol. 24, no. 3, p. 341–350, sep 1998. [Online]. Available: https://dl.acm.org/doi/pdf/10.1145/292395.292453

[2] D. Thomas, W. Luk, P. Leong, and J. Villasenor, "Gaussian random number generators," *ACM Comput. Surv.*, vol. 39, 11 2007.