Istituto Rota, Liceo Scientifico opzione scienze applicate

Risoluzione approssimata di equazioni

Elaborato sperimentale

Erba Irene, 5ELSA

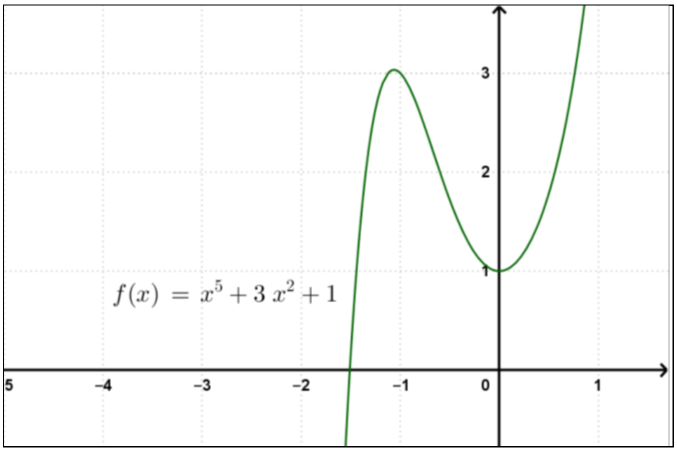
Esami di Stato 2021

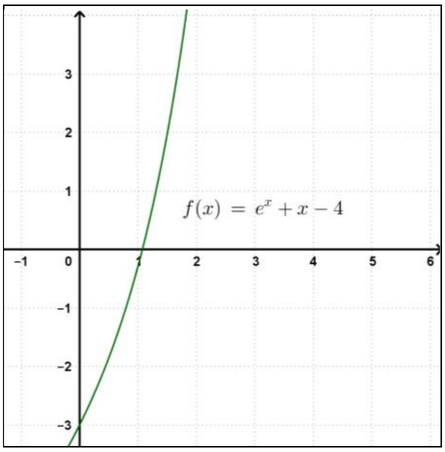
Sommario

“La candidata, dopo aver inquadrato matematicamente il problema della ricerca delle soluzioni approssimate di un’equazione, presenti alcuni algoritmi di calcolo (bisezione, tangenti, punto fisso) chiarendone le condizioni di applicabilità e discutendo la questione della velocità di convergenza”

Soluzioni esatte e approssimate di un'equazione definita in R

Nell'ambito dello studio di problemi matematici o in genere scientifici si affronta spesso il problema della risoluzione di equazioni algebriche o trascendenti. Sono stati messi a punto, fin dall'antichità e nel corso di secoli, procedimenti che, nella maggior parte dei casi, permettono di determinarne le **soluzioni esatte in R**.
Talvolta ci si è trovati di fronte a equazioni per cui, con i metodi tradizionali, non si era in grado di determinare gli zeri, di cui opportuni teoremi o considerazioni analitiche o grafiche ci garantivano l'esistenza.
Ad esempio non siamo in grado di determinare le soluzioni esatte di equazioni del tipo di:
$x^5+3x^2+1=0$ oppure $e^x+x-4=0$





In questi casi l'analisi matematica dispone di procedimenti alternativi, che permettono di ottenere risultati rigorosi e con margine di errore accettabile nel contesto in cui ci si trova.
L'obiettivo del mio elaborato è quello di presentare alcuni dei **metodi per la risoluzione approssimata di un'equazione in una incognita** che si presenti nella forma $f(x) = 0$, oppure $f(x)=g(x)$ o $x=g(x)$.
Il più semplice e intuitivo si basa sulla rappresentazione grafica delle funzioni che compongono l'equazione in esame, ed è applicabile quando tale rappresentazione non presenta particolari difficoltà.

Interpretazione grafica di un'equazione

Risolvere una equazione del tipo $f(x)=0$ equivale a determinare le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} y=f(x) \\ y=0 \end{cases}$$

Graficamente, equivale a individuare, nel piano cartesiano, le intersezioni del grafico della funzione di equazione $y = f(x)$ con l'asse delle *x*, di equazione $y=0$, cioè le ascisse dei punti di intersezione del grafico di $f(x)$ con l'asse delle ascisse: gli **zeri** della funzione di equazione $y = f(x)$. (figura 1)

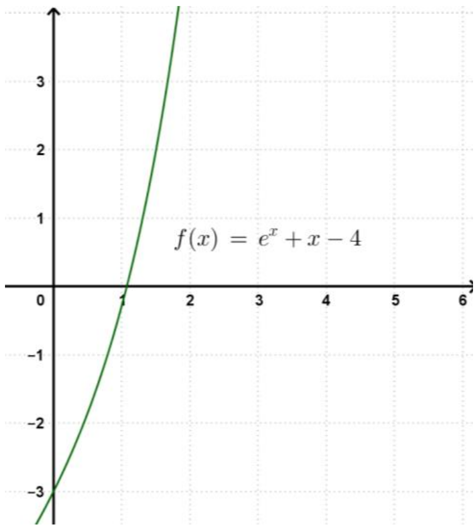


Figura 1

Tale interpretazione grafica non è però l'unica possibile. Infatti come mostra la figura2 la risoluzione di un'equazione si può anche interpretare come la ricerca dei punti di intersezione tra due curve nel piano cartesiano.

I metodi che presenterò possono essere applicati quando è possibile determinare un intervallo $[a;b]$ in cui esiste una e una sola radice dell'equazione $f(x)=0$; in altre parole, se si riesce a determinare un intervallo $[a;b]$ in cui esiste uno e un solo zero della funzione di equazione $y=f(x)$.

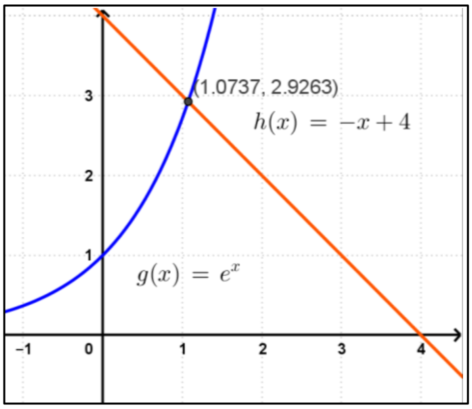


Figura 2

La ricerca della radice approssimata di un'equazione viene eseguita in due successive fasi:

a. determinazione del numero delle radici di un'equazione e degli intervalli che contengono una sola radice mediante il ***metodo della separazione delle radici***

b. determinazione della radice approssimata tenendo conto della precisione assegnata (stima dell'errore: la **tolleranza** ε).

Questa importante questione, che affronterò nella seconda parte dell'elaborato, si pone sia operando con considerazioni teoriche e matematiche sia operando con algoritmi iterativi mediante l'utilizzo di un computer. Infatti, quando la soluzione $x=\alpha$ ricercata è un numero reale (quindi un allineamento decimale ***illimitato*** non periodico) essa non può essere determinata con un numero finito di computazioni. Per permettere che l'iterazione dell'algoritmo possa terminare in modo da fornire un risultato soddisfacente, si deve definire una **tolleranza** ε, cioè stabilire con quale precisione ci interessa ottenere il risultato. Le procedure iterative si interromperanno quando si perverrà ad ottenere l'**errore assoluto** $|e_k|=|x_k-\alpha|<\varepsilon$ e questo valore x_k sarà il nostro risultato finale. Presenterò anche il modo di individuare il **numero di iterazioni necessarie** *primo n.intero* $(k_{\min})$ per giungere alla tolleranza richiesta nel metodo di bisezione e il valore $k_{\max}$ ("interruzione forzata") nel metodo di Newton e del punto fisso.

a. Metodo della separazione delle radici

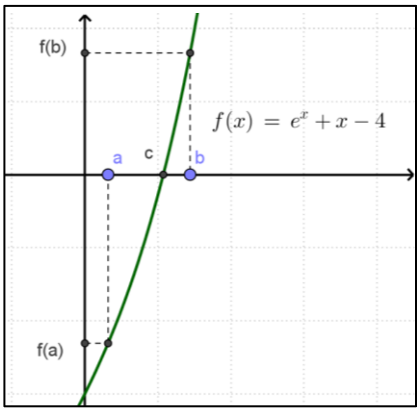
Per determinare il numero delle radici di un'equazione e gli intervalli che contengono una sola radice si usa il **metodo della separazione delle radici**.

Vale il seguente teorema:

TEOREMA DI ESISTENZA DELLA RADICE (in pratica, una riformulazione del **teorema di ESISTENZA DEGLI ZERI**)

Sia f(x) una funzione continua in un intervallo chiuso $[a;b]$ *tale che* $f(a)\cdot f(b)<0$; *allora* ***esiste almeno un punto*** $c\in(a;b)$ *tale che* $f(c)=0$.

(Cioè esiste almeno una radice dell'equazione $f(x)=0$).



Il teorema degli zeri assicura **l'esistenza di una radice** dell'equazione $f(x) = 0$, ma non **l'unicità della radice** che è invece garantita dal seguente teorema:

PRIMO TEOREMA DELL'UNICITÀ DELLO ZERO

Sia $f(x)$ una funzione definita e continua in un intervallo chiuso $[a; b]$ e derivabile nell'intervallo aperto $(a; b)$, con $f'(x) \neq 0$ in $(a; b)$. Se $f(a) \cdot f(b) < 0$ allora ***esiste un solo punto*** $c \in (a;b)$ tale che $f(c) = 0$

(cioè esiste una sola radice dell'equazione).

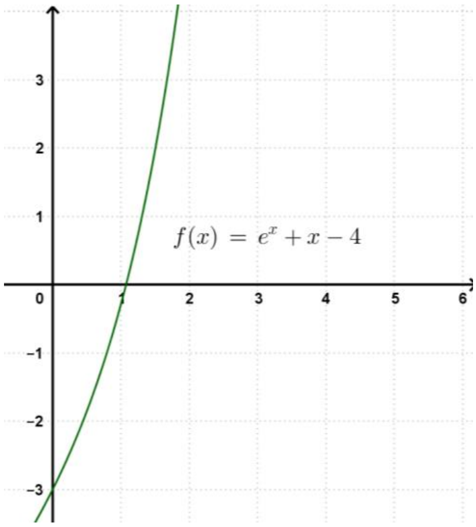
Gli algoritmi realizzati prevedono che vengano controllate le condizioni dei teoremi tramite la verifica dei seguenti casi:

```
if(xa>xb || xa==xb){  alert("Errore, estremi non validi"); errore=true;}
if(fxa*fxb>0){  alert("Errore, f(a)*f(b)>0 : il metodo non è applicabile"); errore=true;}
```

ESEMPIO

Determiniamo il numero delle radici dell'equazione $e^x + x - 4 = 0$ e gli intervalli in cui tali radici esistono.

Il dominio della funzione $f(x) = e^x + x - 4$ è $D: (-\infty; +\infty)$.



I limiti agli estremi del dominio sono $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x + x - 4 = -\infty$ e $\lim\limits_{x \to -+\infty} e^x + x - 4 = +\infty$.

Quindi per il teorema degli zeri possiamo dire che esiste almeno un valore $c \in (-\infty; +\infty)$ in cui la funzione si annulla. Esaminando la derivata prima $f'(x) = e^x + 1$, osserviamo che non esistono valori che annullano $f'(x)$ e $f'(x) > 0 \ \ \forall x \in R$.

Poiché la funzione è sempre crescente e i limiti agli estremi del dominio hanno segni opposti, l'equazione $e^x + x - 4 = 0$ ammette una sola radice $x = a \ \ con \ \ a \in (-\infty; +\infty)$

Quindi è inconfutabile che la funzione in esame ammetta uno zero, individuabile in modo relativamente adeguato anche dalla rappresentazione grafica. Ci proponiamo di ottenere il suo valore scegliendo il livello dell'approssimazione.

b. Determinazione della radice approssimata tenendo conto della precisione assegnata

Per restringere mediante procedimenti iterativi l'intervallo entro cui esiste la radice α dell'equazione $f(x) = 0$ e pervenire quindi a una sua determinazione che rispetti la tolleranza prefissata, sono stati, nel corso dei secoli, messi a punto i seguenti metodi:

1. Metodo di bisezione
2. Metodo delle tangenti o di Newton
3. Metodo del punto unito

1. Metodo di bisezione

Sia $f(x)$ una funzione continua in un intervallo chiuso $[a;b]$, tale che $f(a)\cdot f(b)<0$.
Stabilito che nell'intervallo $[a;b]$ esiste una sola radice dell'equazione $f(x)=0$, ci proponiamo di determinare tale radice con un'approssimazione assegnata .
Il procedimento per la ricerca della radice approssimata dell'equazione termina quando si verifica uno dei seguenti casi:

- si giunge a una radice esatta dell'equazione;
- si determina un intervallo di ampiezza minore di un numero η sufficientemente piccolo assegnato ;
- $|f(x)|<\varepsilon$ con ε opportunamente piccolo assegnato .

Si assume come soluzione approssimata dell'equazione il valore medio degli estremi dell'ultimo intervallo.

Determiniamo $m=\dfrac{a+b}{2}$, dove $m\in(a;b)$.

Si individuano così due intervalli $[a;m]$ e $[m;b]$ con $|b-m|=|m-a|=\dfrac{1}{2}|b-a|$.

Si calcola $f(m)$.

Può essere:

1. $f(m)=0$
2. $f(a)\cdot f(m)<0$
3. $f(m)\cdot f(b)<0$

Nel caso 1 lo zero della funzione è $x=m$ e il procedimento termina perché $x=m$ è la soluzione cercata.
Altrimenti può valere uno solo dei casi 2 o 3.

Supponiamo che valga il caso 2. Questo vuol dire che la radice e interna ad $[a;m]$.

Se siamo arrivati alla condizione di arresto assumiamo come radice approssimata dell'equazione il valore $m_1=\dfrac{a+m}{2}$.

Altrimenti determiniamo $m_1=\dfrac{a+m}{2}$, dove $m_1\in(a;m)$.

Si individuano così due intervalli $[a;m_1]$ e $[m_1;m]$ con $|m_1-a|=|m-m_1|=\dfrac{1}{2}|a-m|=\dfrac{1}{4}|b-a|$.

Si calcola $f(m_1)$.

Può essere:

1. $f(m_1)=0$
2. $f(a)\cdot f(m_1)<0$
3. $f(m_1)\cdot f(m)<0$

Nel caso 1 lo zero della funzione è $x=m_1$ e il procedimento termina perché $x=m_1$ è la soluzione cercata.

Altrimenti può valere uno solo dei casi 2 o 3.

Supponiamo che venga il caso 3. Questo vuol dire che la radice è interna a $[m_1;m]$.

Se siamo arrivati alla condizione di arresto assumiamo come radice approssimata dell'equazione il valore $m_2=\dfrac{m_1+m}{2}$.

Altrimenti determiniamo $m_2=\dfrac{m_1+m}{2}$, dove $m_2\in(m_1;m)$.

Si individuano così due intervalli $[m_1;m_2]$ e $[m_2;m]$ con $|m_2-m_1|=|m-m_2|=\dfrac{1}{8}|b-a|$

Il procedimento può essere ripetuto.

Troveremo via via intervalli sempre più piccoli che sono rispettivamente $\frac{1}{2}|b-a|$, $\frac{1}{4}|b-a|$, $\frac{1}{8}|b-a|$, ..., $\frac{1}{2^n}|b-a|$.

Arriveremo o a una radice esatta o a un intervallo che soddisfa la nostra condizione di arresto. Affronterò questo specifico aspetto nel paragrafo riguardante la valutazione dell'errore.

2. Metodo delle tangenti o di Newton

Un diverso algoritmo per trovare lo zero α di una funzione $f(x)$ (o soluzione dell'equazione $f(x)=0$) è stato messo a punto da **Newton**, fisico e matematico, vissuto nella seconda metà del XVII secolo, per ovviare alla laboriosità dei calcoli insiti nell'applicazione del metodo di bisezione precedentemente illustrato.

Il metodo di bisezione si basa unicamente sulla determinazione del segno della funzione agli estremi degli intervalli che l'algoritmo via via identifica.

Il **metodo di Newton** invece sfrutta due informazioni specifiche sulla funzione: i suoi valori agli estremi dell'intervallo e, poiché queste ipotesi non sarebbero sufficienti, quelli della sua derivata prima nell'ipotesi che esista e sia non nulla.

Vale infatti il seguente teorema:

SECONDO TEOREMA DELL'UNICITA' DELLO ZERO

*Sia $f(x)$ una funzione due volte derivabile nell'intervallo chiuso $[a;b]$ e tale che $f(a)\cdot f(b)<0$. Se in tale intervallo $f''(x)$ è sempre positiva (o sempre negativa) l'equazione $f(x)=0$ ammette in $(a;b)$ una e una sola radice (cioè **esiste un solo punto** $\alpha\in(a;b)$ tale che $f(\alpha)=0$)*

Stabilito che nell'intervallo $[a;b]$ esiste una sola radice c dell'equazione $f(x)=0$, ci proponiamo di determinare tale radice con un'approssimazione assegnata .

Il procedimento per la ricerca della radice approssimata dell'equazione mediante il metodo delle tangenti termina

- quando si determina un intervallo di ampiezza minore di un numero ε sufficientemente piccolo assegnato

oppure

- quando $|f(x)|<\varepsilon$ con ε opportunamente assegnato.

Si assume come soluzione approssimata dell'equazione il valore estremo dell'ultimo intervallo trovato.

Costruiamo l'iterazione.

Supponiamo che sia $f(a)<0,\ \ f(b)>0$ e $f''(x)>0,\ f'(x)>0\ \ \forall x\in[a;b]$.

Indichiamo con α l'ascissa del punto di intersezione con l'asse delle ascisse. Conduciamo per B la tangente al grafico di $f(x)$. Essa ha equazione

$y=f'(b)(x-b)+f(b)$.

La tangente interseca l'asse *x* nel punto di coordinate $(x_1;0)$ con $x_1=b-\frac{f(b)}{f'(b)}$.

Poiché $f'(b)>0$ *e* $f(b)>0$ si ha $x_1<b$.

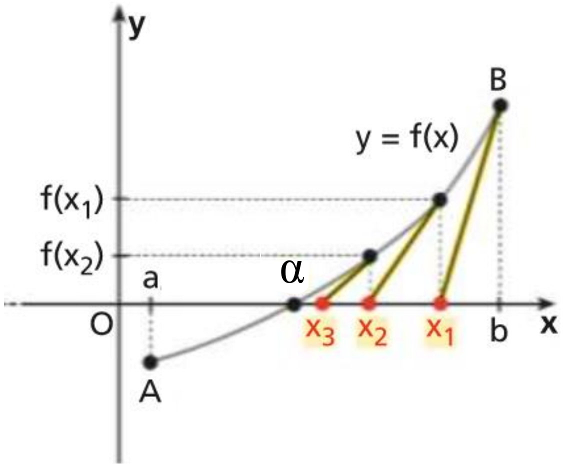
Poiché $f''(x)>0$ il grafico sta tutto sopra la retta tangente, pertanto $x_0<x_1$.

Concludiamo che $x_0<x_1<b$.

Se siamo arrivati alla condizione di arresto assumiamo x_1 come radice approssimata dell'equazione $f(x)=0$, altrimenti conduciamo dal punto $(x_1;0)$ la perpendicolare all'asse x che interseca la curva in B_1. Conduciamo per B_1 la tangente al grafico di $f(x)$. Essa ha equazione:

$y=f'(x_1)(x-x_1)+f(x_1)$

La tangente interseca l'asse delle x nel punto di coordinate $(x_2;0)$ con $x_2=x_1-\dfrac{f(x_1)}{f'(x_2)}$ dove $x_0<x_2<x_1$.



Se siamo arrivati alla condizione di arresto assumiamo x_2 come radice approssimata dell'equazione $f(x)=0$, altrimenti conduciamo dal punto $(x_2;0)$ la perpendicolare all'asse x che interseca la curva in B_2 e ripetiamo il ragionamento.

Troveremo via via intervalli $(a;x_i)$ contenenti c sempre più piccoli. La successione $b;\ x_1;\ x_2;\ ...;x_n$ è strettamente decrescente, limitata inferiormente e tale che $\lim_{n\to+\infty} x_n=c$.

Abbiamo esaminato il caso $f(a)<0,\ f(b)>0$ e $f''(x)>0,\ f'(x)>0\ \ \forall x\in[a;b]$ e abbiamo iniziato a condurre la tangente da B la tangente alla curva. Il procedimento può essere applicato anche a tutti i casi possibili.

Per esempio nell'ipotesi $f(a)<0,\ f(b)>0$ e $f''(x)<0,\ f'(x)>0\ \ \forall x\in[a;b]$ per usare il metodo delle tangenti iniziamo conducendo dal punto A di ascissa a la tangente alla curva.

In generale il metodo delle tangenti va applicato a partire dal punto la cui ordinata ha lo stesso segno della derivata seconda, cioè $f(a)\cdot f''(a)>0$. Se la derivata seconda è positiva va scelto il punto di ordinata positiva , se la derivata seconda è negativa va scelto il punto di ordinata negativa.

Con questo metodo lo zero di $f(x)$ si determina sostituendo localmente alla funzione la sua derivata $f'(x)=df(x)/dx$, cioè il coefficiente angolare della tangente al grafico di $f(x)$ nel punto considerato.

L'equazione della retta tangente a f nel punto x_k è:

$$y(x)=f(x_k)+(x-x_k)f'(x_k)$$

e a ogni iterazione k del metodo si impone la condizione $y(x_{k+1})=0$.

Si ottiene così la **formula del metodo di Newton (detta anche formula di ricorrenza)** $x_{k+1}=x_k-\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ con la quale si costruiscono i termini della successione $\{x_k\}$ che approssimano la soluzione.

È opportuno osservare che:

Il metodo di Newton è molto efficiente se $f'(x_k)$ è grande (in valore assoluto); lo è poco se $f'(x_k)$ è piccola, cioè se f interseca l'asse delle ascisse con una pendenza piccola. In ogni caso la convergenza è più rapida con il metodo delle tangenti che con il metodo di bisezione.

Uno svantaggio del metodo di Newton è quello di dover calcolare la derivata della funzione f, che non è un problema solo se f è definita da una espressione semplice.

Soluzione:

1.3

n	a_n	b_n	$f(a_n)$
0	1	1.75	-1
1	1	1.375	-1
2	1.1875	1.375	-0.512939453125
3	1.28125	1.375	-0.177947998046875
4	1.28125	1.328125	-0.177947998046875

Soluzione:

1.3

n	x_n
0	1
1	1.499999958629818
2	1.3478260877946127

E importante notare che il metodo di Newton *non converge necessariamente* per qualsiasi valore dell'ascissa x_0, scelta come posizione iniziale. Il vantaggio però è che, quando converge, lo fa molto più rapidamente rispetto al metodo di bisezione (vedi la figura accanto).

In figura il confronto tra i due metodi citati: a sinistra il metodo di bisezione (5 iterazioni), a destra il metodo di Newton (3 iterazioni)

Per una funzione generica, la convergenza del metodo di Newton è garantita soltanto se x_0 è *«sufficientemente vicino»* ad α. (derivata prima grande in valore assoluto), condizione tuttavia di poca utilità concreta, giacché non conosciamo α, che è anzi proprio la soluzione cercata...

In pratica, per trovare il valore opportuno di x_0, è ancora importante fare riferimento alla rappresentazione grafica della funzione, da cui si può dedurre l'intervallo in cui ragionevolmente cercare il suo zero.

Quando il metodo delle tangenti converge, per trovare il valore esatto di α servirebbero infinite iterazioni. Poiché ogni algoritmo deve invece essere finito, anche in questo caso bisogna specificare a priori la tolleranza entro la quale il risultato approssimato ottenuto sarà accettabile. Questa questione verrà affrontata in modo più approfondito in un paragrafo successivo.

3. Metodo del punto fisso o metodo del punto unito

Si dice **punto unito** della funzione di equazione $y = g(x)$ di dominio D l'ascissa del punto di intersezione tra il grafico della funzione e la retta di equazione $y = x$ cioè il valore di x tale che $g(x) = x$.

Il metodo si applica all'equazione $f(x) = 0$ trasformata nella forma $x = g(x)$.

Col *metodo iterativo di ricerca del punto unito* si costruisce sull'asse delle ascisse una successione di punti $x_{i+1} = g(x_i)$ così definita: scelto un opportuno valore x_0, soluzione approssimata di una soluzione di $x = g(x)$ sia $x_1 = g(x_0),\ x_2 = g(x_1),\ x_3 = g(x_2),\ \ldots..,\ x_{i+1} = g(x_i)$

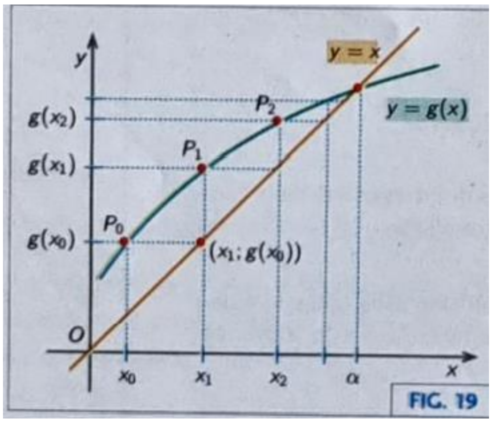


FIG. 19

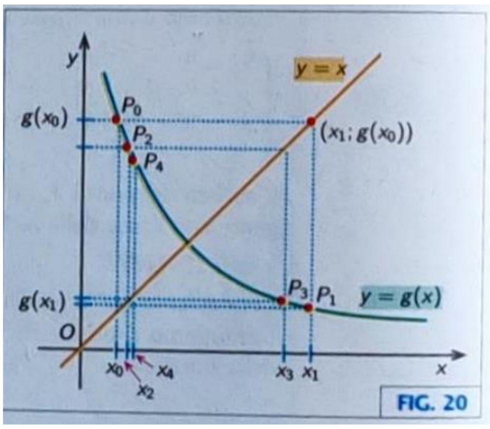


FIG. 20

Nella figura 19 e nella figura 20 sono rappresentate due funzioni, una strettamente crescente, l'altra decrescente. Descriviamo le costruzione in entrambi i casi.

- La retta $x = x_0$, parallela all'asse delle ordinate, interseca il grafico della funzione di equazione in $y = g(x)$ in un punto $P_0(x_0; g(x_0))$.
- La retta $y = g(x_0)$, parallela all'asse delle ascisse, interseca la bisettrice del primo e dl terzo quadrante $y = x$ nel punto $(x_1; g(x_0))$ con $x_1 = g(x_0)$.
- La retta $x = x_1$ passante per $(x_1; g(x_0))$ interseca il grafico della funzione di equazione $y = g(x)$ nel punto $P_1(x_1; g(x_1))$.
- La retta $y = g(x_1)$ interseca la bisettrice $y = x$ nel punto $(x_2; g(x_1))$ con $x_2 = g(x_1)$
- La retta $x = x_2$ passante per $(x_2; g(x_1))$ interseca il grafico della funzione di equazione $y = g(x)$ nel punto $P_2(x_2; g(x_2))$.

E così via.

In questo modo ci si avvicina sempre più al punto unito α della funzione di equazione $y = g(x)$.

Questo metodo è detto anche **metodo delle approssimazioni successive.**

Consideriamo in entrambi i casi la successione di punti $\{x_i\}\ con\ i \in N$ con valori crescenti a partire da $i = 0$

Nella figura 19 troviamo una successione monotona crescente, nel secondo caso (figura 20) una successione non monotona.

Si deve tenere presente che:

1. La costruzione dei termini della successione $x_{i+1} = g(x_i)$ dipende sia dal punto iniziale x_0 sia dalla funzione $g(x)$ che compare nella equazione $x = g(x)$.
2. Trasformazioni differenti dell'equazione $f(x) = 0$ nell'equazione $x = g(x)$ possono dare origine a successioni con comportamenti diversi. Può infatti accadere che la successione generata da $x = g(x)$ non converga mentre la successione $x = l(x)$ con $l(x) \neq g(x)$

Un esempio a questo proposito è il seguente:

se $f(x) = 0$ è $e^x + x - 4 = 0$ e $x = g(x)$ è $x = 4 - e^x$ allora la successione non converge, come si vede dai valori riportati nella tabella del programma in questione.

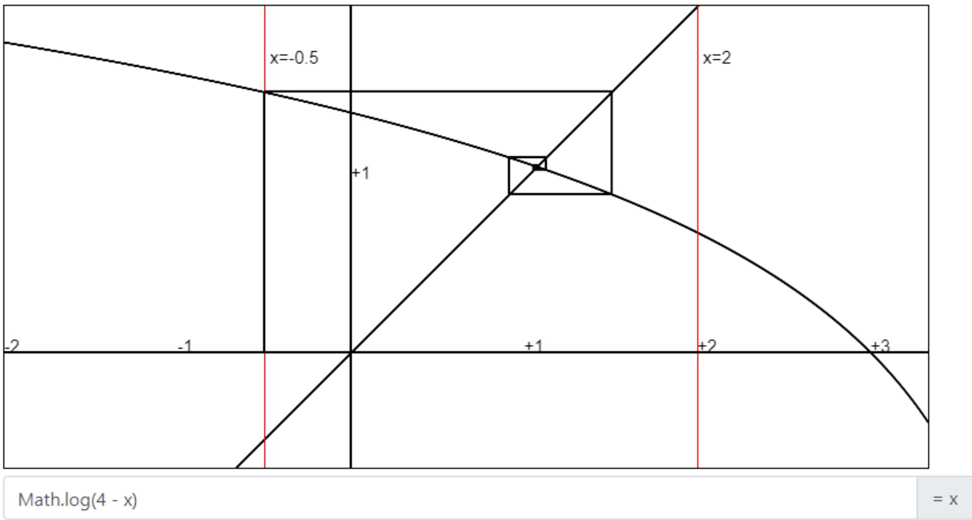
Soluzione:

successione divergente

Valore della funzione in x_n:

n	x_n
0	-0.5
1	3.393469340287367
2	-25.76905229486578
3	3.999999999993564
4	-50.59815003279284
5	4
6	-50.598150033144236
7	4
8	-50.598150033144236
9	4

Se $x = l(x)$ con $x = \ln(4 - x)$ allora la successione converge.



Vale il seguente:

Teorema

Date una funzione $g(x)$*, continua in* $[a;b]$*, e una successione* $\{x_i\}$ *con* $i \in N$ *ottenuta dalla relazione* $x_{i+1} = g(x_i)$ *che ha come valore iniziale* $x_0 \in [a;b]$*, sia* $x_i \in [a;b]\ \forall i \in N$*. Se la successione è convergente allora* $\lim_{i\to+\infty} x_i = \alpha$ *è un punto unito della funzione di equazione* $y = g(x)$ *ed è perciò soluzione di* $x = g(x)$*.*

Possiamo allora osservare che è sufficiente che la funzione $g(x)$ *sia continua in* $[a;b]$ e che sia tale che trasformi l'intervallo $[a;b]$ in se stesso, perché si possa trovare il valore della soluzione di $x = g(x)$, nel caso in cui la successione converga.

La difficoltà dell'applicazione del teorema risiede però nel fatto che non è facilmente controllabile che la funzione $g(x)$ trasformi l'intervallo $[a;b]$ in se stesso. Per tale motivo è più facile servirci dal punto di vista operativo del seguente **criterio sufficiente di convergenza.** Il teorema pone le condizioni su un intervallo, sottoinsieme proprio del dominio della funzione $y = x - g(x)$ che contiene come punto interno il punto unito della funzione di equazione $y = g(x)$.

CRITERIO SUFFICIENTE DI CONVERGENZA

Siano $g(x)$ *una funzione continua e derivabile in* $[\alpha - r; \alpha + r]$ *dove* α *è punto unito di* $g(x)$ *e* $r \in R^+$

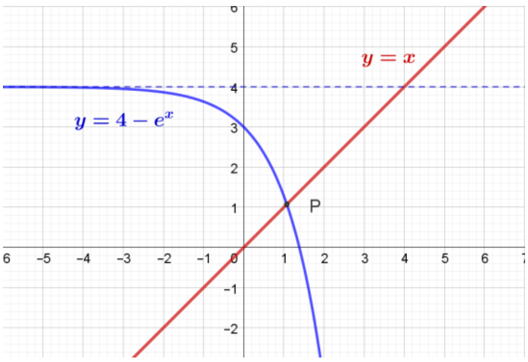
Per ogni $x \in [\alpha - r; \alpha + r]$ *consideriamo la successione* $x_{i+1} = g(x_i)$.

Se $|g'(x)| < 1\ \forall x \in [\alpha - r; \alpha + r]$ *allora la successione dei valori* $\{x_i\}$ *converge ad* α *cioè* $\lim_{i\to+\infty} x_i = \alpha$.

E' quello che si verifica nel caso dell'equazione $e^x + x - 4 = 0$ con $x = g(x)$ con $g(x) = 4 - e^x$.

Infatti $g'(x) = -e^x$; $|-e^x| < 1$ *cioè* $|e^x| < 1$ per $x < 0$;

nell'intervallo $1 < x < 2$ la successione $\{x_i\}$ definita da $x_{i+1} = -e^{x_i} + 4$, *con* $x_i \in [1;2]$, non è convergente.



Osservazione

Come abbiamo visto nell'esempio dell'equazione $e^x + x - 4 = 0$ il successo del metodo del punto unito può dipendere dalla forma in cui si presenta l'equazione da risolvere. Perciò, se al primo tentativo non risultano verificate le condizioni di convergenza del criterio sufficiente di convergenza, è opportuno trasformare l'equazione da risolvere e applicare nuovamente il metodo.

Valutazione dell'errore e velocità di convergenza: i diversi metodi a confronto

Valutazione dell'errore: la tolleranza ε

Una volta determinata la successione per l'individuazione della soluzione approssimata dell'equazione da risolvere, è importante valutarne il grado di precisione rispetto al valore α.

Per assicurare che, qualsiasi sia l'algoritmo utilizzato per il calcolo, questo abbia un termine, è necessario definire una **tolleranza** ε, cioè stabilire con quale precisione ci interessa ottenere il risultato: quando arriveremo ad avere $|e_k| = |x_k - \alpha| < \varepsilon$, interromperemo le iterazioni e x_k, sarà il nostro risultato finale.

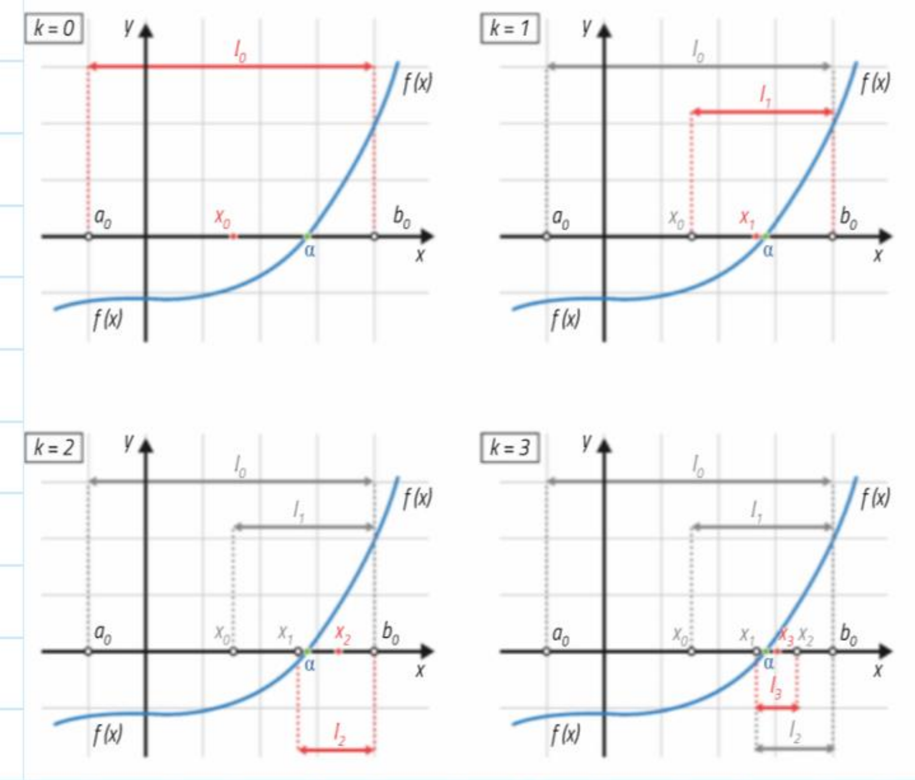
Poiché non siamo in grado di calcolare l'**errore teorico** $|e_k| = |x_k - \alpha|$ dato che, come già ricordato, α è il valore da determinare, si può procedere in due modi:

- possiamo stimare l'errore come differenza tra le ascisse trovate in due iterazioni consecutive; in tal caso arresteremo il programma in corrispondenza del primo k per cui si trova:

$$|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$$

- in alternativa possiamo imporre la tolleranza sul residuo della funzione, cioè sul valore di $f(x_k)$, che sarebbe nullo se x_k fosse uno zero esatto; in tal caso fermeremo il programma in corrispondenza del primo *k* per cui:

$$|f(x_k)| < \varepsilon$$



Entrando nello specifico dei metodi sappiamo che **la convergenza dell'algoritmo di bisezione è assicurata**: infatti la successione dei valori $\{x_k\}$ converge sicuramente verso il valore α, giacché gli intervalli I_k della successione contengono lo zero α cercato e ad ogni iterazione l'ampiezza dell'intervallo I_k, cioè $|I_k| = |b_k - a_k|$ si dimezza.

A ogni iterazione si trova dunque una soluzione approssimata che dista da α meno di metà dell'ampiezza dell'intervallo considerato.

L'**errore assoluto** e_k al passo *k* della procedura iterativa è quindi tale che:

$$|e_k| = |x_k - \alpha| < |I_k| = \frac{1}{2}|I_k| = \frac{1}{2^{k+1}}(b-a)$$

In generale però la soluzione α è un numero reale che non è rappresentabile con la precisione finita del computer. La condizione $x_k = \alpha$ dunque non potrà mai essere soddisfatta esattamente, perché si dovrebbero far proseguire le iterazioni all'infinito.

Tuttavia, in base alla definizione dell'errore data sopra, il **numero delle iterazioni necessarie con il metodo di bisezione** è dato dal primo intero $k_{\min}$ che soddisfa la disuguaglianza:

$$k_{\min} > \log_2\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right) - 1$$

Bisogna notare che questa disuguaglianza non dipende dalla particolare funzione *f(x)* considerata: è invece caratteristica dell'algoritmo di bisezione.

Diversamente da quanto avviene con metodo di bisezione, con il **metodo di Newton** e il **metodo del punto unito** non si possono prevedere quante iterazioni saranno necessarie per raggiungere l'accuratezza prescritta.

Perciò è necessario specificare un numero massimo di iterazioni (arbitrariamente stabilito in fase di realizzazione del programma) dopo cui far terminare l'algoritmo, che altrimenti potrebbe anch'esso finire per avvitarsi in un *loop* infinito.

Quando ciò avviene viene segnalato con dei messaggi di errore:

```
if(Math.abs(diff)>tol&&k==kmax){
    alert("raggiunto il numero di iterazioni massime");
}else{
```

Metodo di Newton

```
if(k>=kmax){
    soluzione="successione divergente";
```

Metodo del punto unito

Di fatto nella costruzione dei miei algoritmi mi sono basata, nel caso del **metodo di Newton**, sulla relazione

$|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$ dove $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

```
while (Math.abs(diff)>=tol&&k<kmax) {
fxn=calcFunzione(xn);
myArray.push(xn);
```

Per il **metodo di bisezione** ho utilizzato il valore del $k_{\min}$ per determinare il n. di iterazioni per fermare l'approssimazione in base alla condizione $|f(x_k)| < \varepsilon$.

```
var a = Number(document.getElementById("a").value);
var b = Number(document.getElementById("b").value);
var tol = document.getElementById("tol").value;
tol=Math.pow(10,-tol-1);
var kmin= (Math.log(Math.abs(b-a)/tol))/Math.log(2)-1;
myIterationDisplayer(Math.floor(kmin));
return kmin;
```

Anche con il **metodo del punto unito** la valutazione dell'errore può essere effettuata rigorosamente grazie alla condizione del criterio sufficiente di convergenza: $|g'(x)| < 1 \, \forall x \in [\alpha - r; \alpha + r]$

Tuttavia per applicare tale formula occorrerebbe prima calcolare una derivata e poi risolvere la disequazione, operazioni, specie la seconda, spesso non molto semplici.

Possiamo allora controllare l'accettabilità del risultato ottenuto secondo il livello di tolleranza predefinito mediante la seguente procedura, che ho utilizzato anch'io nel mio algoritmo.

Sia $f(x) = 0$ l'equazione da risolvere e ***c*** *l'approssimazione* di cui si vuole provare l'esattezza delle prime n cifre decimali. Detto $\bar{c}$ il valore di *c* abbreviato alla n-esima cifra decimale, determiniamo il valore $\bar{c} + 10^{-n}$, che in pratica si ottiene aumentando di una unità l'ultima cifra decimale di $\bar{c}$. Calcoliamo poi $f(\bar{c})$; $f(\bar{c} + 10^{-n})$,

supponendo che nessuna di queste quantità sia nulla (se si verificasse tale favorevole eventualità avremmo ottenuto la soluzione esatta dell'equazione).

Se risulta $f(\bar{c}) \cdot f(\bar{c} + 10^{-n}) < 0$ ossia se $f(\bar{c})$ e $f(\bar{c} + 10^{-n})$ sono discordi, per il teorema di esistenza della radice la soluzione cercata α è compresa nell'intervallo $(\bar{c};\ \bar{c} + 10^{-n})$:

$$\bar{c} < \alpha < \bar{c} + 10^{-n}.$$

Pertanto $\bar{c}$ è anche il valore abbreviato all'*n-ma* cifra decimale della soluzione α, ossia le prime n cifre decimali di α sono quelle di $\bar{c}$.

Nel caso in cui $f(\bar{c})$ e $f(\bar{c} + 10^{-n})$ risultassero concordi , si dovrà determinare una migliore approssimazione della soluzione.

```
//quando f(xp)*f(xp+10^(dec))<0 il ciclo si arresta
while (k<kmax&& calcFunzione(xp)*(calcFunzione(xp+tol))>0){
```

Riferimento alla condizione presente nell'algoritmo dl punto unito

Conclusione

Attualmente, grazie agli sviluppi nel campo dell'informatica, il problema della risoluzione approssimata di un'equazione può essere risolto con relativa facilità. Infatti, mediante un algoritmo piuttosto semplice, opportunamente trasposto in linguaggio di programmazione, si può riprendere in considerazione e sfruttare appieno la procedura proposta dal metodo di bisezione. Questo metodo permette una sicura valutazione dell'errore e contrappone alla laboriosità e ripetitività dei calcoli la semplicità della programmazione. Inoltre l'algoritmo non dipende dall'effettivo andamento della funzione. È sufficiente che nell'intervallo considerato $f(x)$ sia continua.

Nei miei programmi, per verificare questa ipotesi importante, poiché sarebbe stato complesso verificare la continuità della funzione con un algoritmo specifico, ho pensato di inserire all'inizio di ogni programma uno strumento di rappresentazione grafica della funzione considerata (sempre costruito utilizzando javascript) che permette all'utente di verificare graficamente tale condizione e, quindi, il successo dell'algoritmo di ricerca degli zeri utilizzato.

Allegati

È possibile utilizzare direttamente i programmi tramite al link seguente: http://thisspaceismine.altervista.org/analisi-numerica.html

In alternativa è necessario scaricare i file .html in allegato ed eseguirli tramite il visualizzatore del proprio computer.

Tra gli allegati, oltre ai file .html contenente il codice, è possibile trovare anche un file di istruzioni di utilizzo.

Bibliografia

1. Federico Tibone - Progettare e programmare vol 3 (Zanichelli)
2. Matematica.blu Vol.5 - Bergamini, Barozzi, Trifone (Zanichelli)
3. N. Dodero, P. Baroncini, R Manfredi- Elementi di matematica 4 (Ghisetti e Corvi Editori)
4. Il paesaggio matematico giallo - Approssimazione e Analisi Numerica, modulo Y – M. Fico, G. Cariani, S. Mattina (Loescher)