

091M4041H - Assignment 6

Algorithm Design and Analysis

Song Qige 2017E8018661044

2018 年 1 月 17 日

1 Interger Programming(1)

首先说明Interger Programming问题属于NP问题: x 是 n 维整数向量, 给定矩阵 A 、向量 b 和向量 x , 可以在多项式时间内验证 $Ax \geq b$ 。因此问题属于NP问题。

下面通过证明 $3SAT \leq_P \text{Interger Programming}$ 说明问题是NP完全的。此证明需要指出对于3SAT的一个输入实例, 对应的输出只有在Interger Programming问题中满足结果时才可满足3-SAT问题。可按如下过程构造问题:

对于一个3-SAT对应的和取范式: $(x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_3) \wedge (x_2 \vee \neg x_3)$, 每一个子句可分别对应一个不等式约束:

$$x_1 + x_2 \geq 1$$

$$(1 - x_1) + (1 - x_3) \geq 1, \text{ 即 } -x_1 - x_3 \geq -1$$

$$x_2 + (1 - x_3) \geq 1, \text{ 即 } x_2 - x_3 \geq 0$$

当 i 为true时 x_i 为1, 当 i 为false时 x_i 为0。每个不等式约束右侧的常量值可组成向量 b 。所有的不等式约束可组成矩阵相乘形式。

当3-SAT问题对应于一个true assignment时, 表示每个子句对应的不等式约束均得到满足。即可表示为形式 $Ax \geq b$ 得到满足, 即对应的Interger Programming问题满足。而当Interger Programming问题满足时, 说明每行的不等式约束满足, 即3-SAT问题的全部子句满足, 对应为true assign-

ment。因此 $3SAT \leq_P Integer Programming$ ，即 integer programming 问题是NP完全的。

2 Half-3SAT(3)

首先说明Half-3SAT问题属于NP问题：给定n个变量的true或false的设定，即可得到m个子句的真假，如果全部子句为真，则是该和取范式的true assignment。这个判断过程可以在多项式时间内完成，因此问题属于NP问题。

下面通过证明 $3-SAT \leq_P Half-3SAT$ 证明问题是NP完全的。此证明需要指出对于3-SAT的一个输入实例，将其变换为一个Half-3SAT实例。此实例只有在Half-3SAT问题满足时才可满足3-SAT问题。

可按如下过程构造问题：

设一个3-SAT问题有3个变量 x_1, x_2, x_3 ，有n个子句，构造一个对应的Half-3SAT问题，其中有n个子句与SAT问题中的n个子句相同，有n个子句构造为 $x_1 \vee \neg x_1 \vee x_2$ ，即构造为恒为true的子句。另有2n个子句构造为同真同假的子句 $p \vee q \vee r$ 。

如果3-SAT问题满足，HALF-3SAT问题中与其相同的n个子句均为真，并且有n个恒为真的子句，因此其剩余2n个子句应赋值为全为假（ $p=q=r=false$ ），则HALF-3SAT问题满足有一般子句为真。

如果这个HALF-3SAT问题可满足，那么其中的2n个同真同假的子句一定全为假，否则HALF-3SAT问题中会有至少3n个子句为真，不是true assignment。这样与对应3-SAT问题相同的n个子句必须均为真才可满足有一半子句为真的条件，因此此时对应的3-SAT问题是可满足的。

由以上过程， $3-SAT \leq_P half-3SAT$ 。因此Half-3SAT问题是NP完全的。