- **Dominios:**

Llamamos dominio de una función al conjunto de valores de x para los que existe una función

→ **Polinomios:**

La función existe para cualquier valor de x → $\boxed{\text{Dom } f(x) = \mathbb{R}}$

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 2x - 4 \rightarrow \text{Dom } f(x) = \mathbb{R}$

→ **Racionales:**

$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \rightarrow \boxed{\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{Q(x) = 0\}}$

$f(x) = \frac{x}{x-1}$ $\quad x - 1 = 0$ $\quad x = 1$ $\quad \text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{1\}$

$g(x) = \frac{x+3}{x^2+2x}$ $\quad x^2 + 2x = 0$ $\quad x(x+2) = 0$ $\quad x = 0$, $x = -2$ $\quad \text{Dom } g(x) = \mathbb{R} - \{0, -2\}$

→ **Irracionales:**

- **Raíces pares:**

$f(x) = \sqrt[\text{par}]{u} \rightarrow \boxed{\text{Dom } f(x) \rightarrow u \geq 0}$

$f(x) = \sqrt{x+4}$ $\quad x + 4 \geq 0$ $\quad x \geq -4$ $\quad \text{Dom } f(x) = [-4, +\infty)$ $\quad -4 \quad +\infty$

$g(x) = \sqrt[4]{-x+5}$ $\quad -x + 5 \geq 0$ $\quad -x \geq -5$ $\quad x \leq 5$ $\quad \text{Dom } g(x) = (-\infty, 5]$ $\quad -\infty \quad 5$

- **Raíces impares:**

$f(x) = \sqrt[\text{impar}]{u} \rightarrow \boxed{\text{Dom } f(x) = \text{Dom } u}$

$f(x) = \sqrt{x^2 + 6x - 9}$ $\quad \text{Dom } f(x) = \mathbb{R}$

$g(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x-3}}$ $\quad x - 3 = 0$ $\quad x = 3$ $\quad \text{Dom } g(x) = \mathbb{R} - \{3\}$

→ **Logarítmicas:**

$f(x) = \log_a u \rightarrow \boxed{\text{Dom } f(x) \rightarrow u > 0}$

$f(x) = \log(x+3)$ $\quad x + 3 > 0$ $\quad x > -3$ $\quad \text{Dom } f(x) = (-3, +\infty)$

$g(x) = \ln(-x+4)$ $\quad -x + 4 > 0$ $\quad -x > -4$ $\quad x < 4$ $\quad \text{Dom } g(x) = (-\infty, 4)$

→ **Exponenciales:**

$f(x) = a^u \rightarrow \boxed{\text{Dom } f(x) = \text{Dom } u}$

$f(x) = 2^{x+3}$ $\quad \text{Dom } f(x) = \mathbb{R}$

$g(x) = e^{x^2}$ $\quad \text{Dom } g(x) = \mathbb{R}$

$h(x) = 2^{\frac{x-1}{x+3}}$ $\quad x + 3 = 0 \rightarrow x = -3$ $\quad \text{Dom } h(x) = \mathbb{R} - \{-3\}$

→ **Trigonométricas:**

$f(x) = \text{sen}(x)$

$f(x) = \cos(x)$

$\boxed{\text{Dom } f(x) = \text{Dom } u}$

$f(x) = \text{sen}(x-3)$ $\quad \text{Dom } f(x) = \mathbb{R}$

$g(x) = \cos(x^2 - 1)$ $\quad \text{Dom } g(x) = \mathbb{R}$

$h(x) = \text{sen}\left(\frac{x+4}{x-2}\right)$ $\quad x - 2 = 0$ $\quad x = 2$ $\quad \text{Dom } h(x) = \mathbb{R} - \{2\}$

Función	**Forma**	**Dominio**
Polinómica	f(x)=P(x)	Dom f(x)= $\mathbb{R}$
Racional	$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$	Dom f(x)= $\mathbb{R} - \{ Q(x) = 0\}$
Irracional con raíces pares	$f(x) = \sqrt[n]{u}$ siendo n un número par	Dom f(x)={ x ϵ R / u ≥ 0 }
Irracional con raíces impares	$f(x) = \sqrt[n]{u}$ siendo n un número impar	Dom f(x)=Dom u
Logarítmica	$f(x) = \log_a u$	Dom f(x)={ x ϵ R / u> 0 }
Exponencial	$f(x) = a^u$	Dom f(x)=Dom u
Trigonométrica: Seno y Coseno	f(x)= sen(u) f(x)= cos(u)	Dom f(x)=Dom u

- **Composición de funciones:** $f \circ g$

→ $f \circ g = f(g(x))$

1.- Copiar $f(x)$ tal cual el enunciado

2.- Donde aparezca una "x" en $f(x)$, sustituir por $g(x)$

Ej: $\begin{cases} f(x) = 5x + 3 \\ g(x) = x^2 \end{cases}$

1.- $f(x) = 5x + 3$

2.- $f \circ g = 5(x^2) + 3$

$\underline{f \circ g = 5x^2 + 3}$

1.- $g(x) = x^2$

2.- $g \circ f = (5x + 3)^2$

$\underline{g \circ f = 25x^2 + 9}$

Ej: $\begin{cases} f(x) = 3x - 4 \\ g(x) = x^2 - 2x \end{cases}$

1.- $f(x) = 3x - 4$

2.- $f \circ g = 3(x^2 - 2x) - 4$

$\underline{f \circ g = 3x^2 - 6x - 4}$

1.- $g(x) = x^2 - 2x$

2.- $g \circ f = (3x - 4)^2 - 2(3x - 4)$

$g \circ f = 9x^2 + 16 - 24x - 6x - 8$

$\underline{g \circ f = 9x^2 - 30x + 8}$

Identidad notable

$(ax + b)^2 = (ax)^2 + b^2 + 2ab$

$(ax - b)^2 = (ax)^2 + b^2 - 2ab$

- **Inversa de una función:**

1.- Cambiar x por y

2.- Despejar y

Ej: $f(x) = 3x + 1 \longrightarrow y = 3x + 1$

$x = 3y + 1$

$y = \frac{x - 1}{3}$

Ej: $y = 6x - 3$

$x = 6y - 3$

$y = \frac{x + 3}{6}$

Ej: $y = x^2 + 3$

$x = y^2 + 3$

$y = \sqrt{x - 3}$

Ej: $y = x^2 - 5$

$x = y^2 - 5$

$y = \sqrt{x + 5}$

Ej: $y = \sqrt{x + 1}$

$x = \sqrt{y + 1}$

$x^2 = y + 1$

$y = x^2 - 1$

Ej: $y = \sqrt{x - 2}$

$x = \sqrt{y - 2}$

$x^2 = (\sqrt{y - 2})^2$

$x^2 = y - 2$

$y = x^2 + 2$

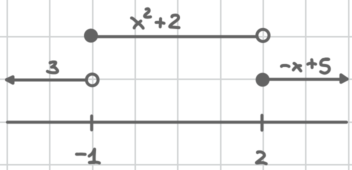
- **Cardinal:**

Es el nº de elementos que posee un conjunto

Ej: $A = \{1, 2, a, b\} \longrightarrow$ A tiene 4 elementos $\longrightarrow$ Card (A) = 4

- **Representación de función definida a trozos:**

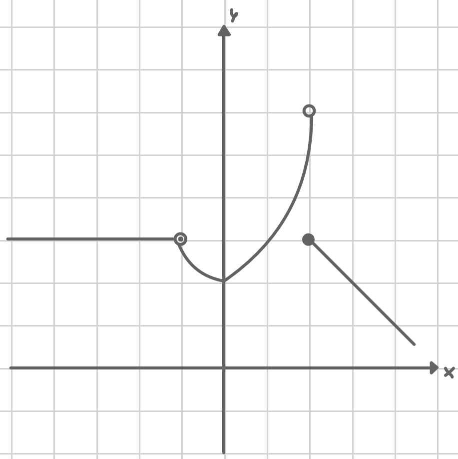
Ej: $f(x) \begin{cases} 3 & \text{si } x < -1 \\ x^2 + 2 & \text{si } -1 \leq x < 2 \\ -x + 5 & x \geq 2 \end{cases}$



x	y
-2	3
-3	3
-4	3

x	y
-1	3
0	2
1	3

x	y
2	3
3	2
4	1



- **Límites:**

Cuando un límite tiende a un número, tenemos que sustituir las "x" por ese número.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x+3}{x-5} = \frac{2+3}{2-5} = \frac{-5}{3}$$

★ Cambiar el signo al factorizar:

Resultado: x = 3 Solución (x − 3)

→ $\frac{0}{0}$:

1.- Factorizar numerador y denominador

2.- Simplificar (tachar lo de arriba con lo que se va de abajo)

3.- Sustituir el nº en las x.

$x^2 = 4$

$x = \sqrt{4}$

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^2-4}{x^3+2x^2+5x+10} = \frac{(-2)^2-4}{(-2)^3+2(-2)^2+5\cdot(-2)+10} = \frac{0}{0}$$

Ruffini

$$\lim_{x\to -2} \frac{\cancel{(x+2)}\cdot(x-2)}{\cancel{(x+2)}\cdot(x^2+5)} = \frac{x-2}{x^2+5} = \frac{-2-2}{(-2)^2+5} = \frac{-4}{9}$$

→ $\frac{k}{0}$:

1.- Calcular los límites laterales → dan ± ∞

- → coger un nº próximo por la izquierda (1^-)
- → coger un nº próximo por la derecha (1^+)

$$\lim_{x\to 1} \frac{x+3}{x-1} = \frac{1+3}{1-1} = \frac{4}{0}$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x+3}{x-1} = \frac{1{,}1+3}{1{,}1-1} = \frac{+}{+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x+3}{x-1} = \frac{0{,}9+3}{0{,}9-1} = \frac{+}{-} = -\infty$$

∄ límite

→ $\frac{\infty}{\infty}$:

- **Sin raíces:**

1.- Nos fijamos en la x de mayor grado del numerador / denominador

- → Si el grado n > d → ± ∞
- → Si el grado n = d → $\frac{n}{d}$
- → Si el grado n < d → 0

- $\lim_{x\to\infty} \frac{\boxed{3x^4}-2x}{2x^3-2x^2+x} = +\infty$
- $\lim_{x\to\infty} \frac{\boxed{3x^2}-2x+5}{\boxed{4x^2}+3x-2} = \frac{3}{4}$
- $\lim_{x\to\infty} \frac{-3x+8}{\boxed{x^2}+2x-2} = 0$

- **Con raíces:**

1.- Nos fijamos en la x de mayor grado del numerador / denominador

- Tener en cuenta la influencia de la raíz

- $\lim_{x\to\infty} \frac{\boxed{6x}+3}{\sqrt{x^2-3x+2}+\boxed{2x}} = \frac{6x}{x+2x} = \frac{6}{3} = 2$

$\sqrt{x^2} = x$

- $\lim_{x\to\infty} \frac{\boxed{5x}+3}{\sqrt{x^2-3x+2}} = \frac{5}{1} = 5$

$\sqrt{x^2} = x$

→ $\infty - \infty$:

- **Sin raíces:**

1.- Operar (mcm)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x-3} - x = \infty - x = \infty - \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x-3} - \frac{x}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x-3} - \frac{x(x-3)}{x-3} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x^2+3x}{x-3} = \frac{3}{1} = 3$$

- **Con raíces:**

1.- Multiplicar / dividir por el conjugado de la raíz

- Conjugado: lo mismo pero cambiado de signo

2.- Mirar la fórmula original y aplicar identidad notable

- $a^2 - b^2$

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2-2x} - x = \infty - \infty$$

conjugado

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x^2-2x}-x)\cdot(\sqrt{x^2-2x}+x)}{(\sqrt{x^2-2x}+x)} =$$

Id. notable

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x^2-2x})^2 - x^2}{\sqrt{x^2-2x}+x} =$$

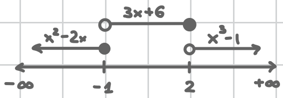
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-2x-x^2}{\sqrt{x^2-2x}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-2x}{\sqrt{x^2-2x}+x} = \frac{-2x}{x+x} = -1$$

$\sqrt{x^2} = x$

- **Límites laterales:**

$$f(x) = \begin{cases} x^2-2x & \text{si } x \leq -1 \\ 3x+6 & \text{si } -1 < x \leq 2 \\ x^3-1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

1.- Representar gráficamente:



2.- Calcular límites laterales:

- En $x=-1$:

$$\lim_{x\to -1^+} 3x+6 = 3\cdot(-1)+6 = 3$$

$$\lim_{x\to -1^-} x^2-2x = (-1)^2-2(-1) = 1+2 = 3$$

$\exists$ límite $\lim_{x\to -1} f(x) = 3$

- En $x=2$:

$$\lim_{x\to 2^+} x^3-1 = 2^3-1 = 7$$

$$\lim_{x\to 2^-} 3x+6 = 3\cdot 2+6 = 12$$

$\nexists$ límite en $\lim_{x\to 2} f(x)$

- **Límites con valor absoluto:**

1.- Igualamos a 0 el valor absoluto y estudiamos el signo

2.- Definimos la función a trozos

- Zona +: valor abs.
- Zona −: $(-1)\cdot$ valor abs.

$$\lim_{x\to 1} \frac{|x-1|}{x-1}$$

1.- $|x-1| = 0 \longrightarrow x=1$

2.- Poner el "−" en uno de ellos

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x-1} & x \geq 1 \\ \dfrac{-x+1}{x-1} & x < 1 \end{cases}$$

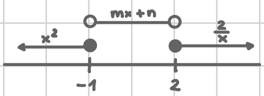
$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{x-1} = 1 \longleftarrow \nexists \lim$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{-x+1}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(-1)\cdot(x-1)}{(x-1)} = -1$$

- **Continuidad con parámetros/incógnitas:**

$$f(x) \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq -1 \\ mx+n & \text{si } -1 < x < 2 \\ \dfrac{2}{x} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

1.- Representar gráficamente:



2.- Continuidad en $x=-1$:

$f(-1) = (-1)^2 = 1$

$\lim_{x\to -1^+} mx+n = -m+n$

$\lim_{x\to -1^-} x^2 = 1$

Igualar los límites:

$1 = -m+n$

3.- Continuidad en $x=2$:

$f(2) = \frac{2}{2} = 1$

$\lim_{x\to 2^+} \frac{2}{x} = 1$

$\lim_{x\to 2^-} mx+n = 2m+n$

Igualar los límites:

$1 = 2m+n$

4.- Resolver el sistema:

$$\begin{cases} -m+n=1 \longrightarrow n=1+m \longrightarrow \text{Como } m=0 \\ 2m+n=1 \qquad\qquad n=1+0=1 \end{cases}$$

$2m+(1+m)=1$

$3m=0 \longrightarrow m=0$

- **Ruffini:**

Dividir $5x^4-3x^3-4x^2-1$ entre $x-2$

$\downarrow$

$x=2$

	x^4	x^3	x^2	x	
	5	-3	-4	0	-1
2	↓	10	14	20	40
	5	7	10	20	39

$\underbrace{5 \quad 7 \quad 10 \quad 20}_{\text{Cociente } C(x)}$ $\quad$ 39 = Resto $R(x)$

Cociente $C(x)$: $5x^3+7x^2+10x+20$

Resto $R(x)$: 39

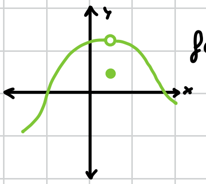
$5(2)^3+7(2)^2+10(2)+20 = 39$ ✓

- **Continuidad:**

  - Una función es continua si "podemos dibujarla sin levantar el lápiz del papel" o si cumple alguna de estas condiciones:

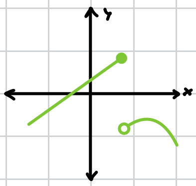
$$f(a) = \lim_{x \to a} f(x) \qquad f(a) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x)$$

→ **Discontinuidad evitable:**



$f(a) \neq \lim_{x \to a} f(x)$

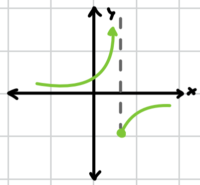
→ **Discontinuidad de salto finito:**



$\lim_{x \to a^-} f(x) \neq \lim_{x \to a^+} f(x)$

y no son $\pm\infty$

→ **Discontinuidad de salto infinito:**

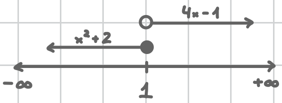


$\lim_{x \to a^-} f(x)$ ó $\lim_{x \to a^+} f(x)$ es $\pm\infty$

- **Continuidad en funciones a trozos:**

$$f(x) \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si } x \leq 1 \\ 4x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

1.- Representar gráficamente:



2.- Calcular límites laterales y $f(1)$:

$f(1) = (1)^2 + 2 = \underline{3}$

$\lim_{x \to 1^+} 4x - 1 = 4 - 1 = \underline{3}$

$\lim_{x \to 1^-} x^2 + 2 = 1 + 2 = \underline{3}$

$f(x)$ es continua en $x = 1$ $(3 = 3 = 3)$

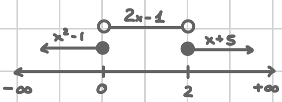
Como $x = 1$ era el único sitio donde $f(x)$ podía ser discontinua → $f(x)$ continua en $\mathbb{R}$

- **Discontinuidad de salto finito:**

$$f(x) \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq 0 \\ 2x - 1 & \text{si } 0 < x < 2 \\ x + 5 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Dom $f(x) = \mathbb{R}$

1.- Representar gráficamente:



2.- Calcular límites laterales y $f(x)$:

- En $x = 0$:

$\lim_{x \to 0^+} 2x - 1 = \underline{-1}$

$\lim_{x \to 0^-} x^2 - 1 = \underline{-1}$

$f(0) = 0^2 - 1 = \underline{-1}$

$-1 = -1 = -1$ $f(x)$ es continuo en $x = 0$

- En $x = 2$:

$\lim_{x \to 2^+} x + 5 = \underline{7}$

$\lim_{x \to 2^-} 2x - 1 = \underline{3}$

$f(2) = 2 + 5 = \underline{7}$

$7 \neq 3 \neq 7$ $f(x)$ No es continuo en $x = 2$

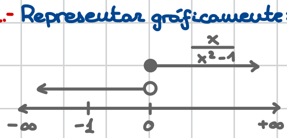
Discont. de salto finito

- **Discontinuidad de salto infinito:**

$$f(x) \begin{cases} \dfrac{x}{x^2 - 1} & \text{si } x < 0 \\ 3x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Dom $f(x) = \mathbb{R} - \{-1\}$

1.- Representar gráficamente:



$f(x)$ continua en $\mathbb{R} - \{-1, 0\}$

2.- Calcular límites laterales y $f(x)$:

- En $x = 0$:

$\lim_{x \to 0^+} 3x + 1 = \underline{1}$

$\lim_{x \to 0^-} \frac{x}{x^2 - 1} = \frac{0}{-1} = \underline{0}$

$f(0) = 3 \cdot 0 + 1 = \underline{1}$

$f(x)$ No es continuo en $x = 0$

Discont. de salto finito

- En $x = -1$:

$\lim_{x \to -1^+} x + 5 = \underline{4}$

$\lim_{x \to -1^-} 2x - 1 = \underline{-3}$

$f(-1) =$ No existe

$4 \neq 3 \neq \cancel{\exists}$ $f(x)$ No es continuo en $x = -1$

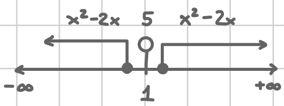
Discont. de salto infinito

- **Discontinuidad evitable:**

$$f(x) \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si } x \neq 1 \\ 5 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Dom $f(x) = \mathbb{R}$

1.- Representar gráficamente:



2.- Calcular límites laterales y $f(1)$:

$f(1) = \underline{5}$

$\lim_{x \to 1^+} x^2 - 2x = \underline{-1}$

$\lim_{x \to 1^-} x^2 - 2x = \underline{-1}$

$f(x)$ es discontinua evitable en $x = 1$

- **Sucesiones:**

Conjunto de números reales ordenados

- **Términos de una sucesión:** cada uno de los números que forman la sucesión
- **Término general:** fórmula para calcular cualquier término de la sucesión

Ej: Calcular el 5º término:

$a_n = 3n+1 \longrightarrow a_5 = 3\cdot 5+1 = 16$

$a_n = 5\cdot 2^n \longrightarrow a_5 = 5\cdot 2^5 = 160$

$a_n = (-2)^n \longrightarrow a_5 = (-2)^5 = -32$

→ Progresión aritmética:

Sucesión en la que cada término se obtiene sumando al término anterior un nº constante llamado diferencia (d)

$a_n = a_1 + (n-1)d$

d: $1 + \boxed{2} = 3$; $3 + \boxed{2} = 5$; $5 + \boxed{2} = 7$

Ej: Escribe el término general y los 4 primeros términos siendo $a_1 = 5$ y $d = 4$

$a_n = 5 + 4(n-1)$

- $a_1 = 5 + 4(1-1) = 5$
- $a_2 = 5 + 4(2-1) = 9$
- $a_3 = 5 + 4(3-1) = 13$
- $a_4 = 5 + 4(4-1) = 17$

Ej: encuentra el término general

- $\overset{a_1}{3}, 7, 11, 15\ldots$ $\quad a_n = \overset{a_1}{3} + (n-1)\cdot \overset{d}{4}$

  $d = 7-3 = 4$ $\quad \hookrightarrow a_n = 3 + 4n - 4 = \underline{4n-1}$

- $\overset{a_1}{\frac{1}{2}}, 1, \frac{3}{2}, 2, \ldots$ $\quad a_n = \frac{1}{2} + (n-1)\cdot\frac{1}{2}$

  $d = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ $\quad \hookrightarrow a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}n - \frac{1}{2} = \underline{\frac{1}{2}n}$

Ej: En la progresión $a_n = 3n+5$, ¿qué término vale 23?

$$\left.\begin{array}{l} a_n = 3n+5 \longrightarrow 23 = 3n+5 \\ 3n = 18 \\ n = \frac{18}{3} = 6 \end{array}\right\} a_6 = 23$$

→ Suma de los n primeros números:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}\, n$$

Ej: suma los 10 primeros términos de $a_n = 3n+5$

$S_{10} = \frac{8+35}{2}\cdot 10 = \underline{215}$

$\left(\begin{array}{l} a_1 = 3\cdot 1 + 5 = 8 \\ a_{10} = 3\cdot 10 + 5 = 35 \end{array} \right)$

→ Progresión geométrica:

Sucesión en la que cada término se obtiene multiplicando al término anterior un nº constante llamado razón (r)

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

d: $1 + \boxed{2} = 3$; $3 + \boxed{2} = 5$; $5 + \boxed{2} = 7$

Ej: Escribe el término general y los 4 primeros términos siendo $a_1 = 3$, $r = 4$

$a_n = 3\cdot 4^{n-1}$

- $a_1 = 3\cdot 4^{1-1} = 3$
- $a_2 = 3\cdot 4^{2-1} = 12$
- $a_3 = 3\cdot 4^{3-1} = 48$
- $a_4 = 3\cdot 4^{4-1} = 192$

Ej: encuentra el término general

- $\overset{a_1}{3}, 15, 75, 375, \ldots$ $\quad a_n = 3\cdot 5^{n-1}$

  $r = 15:3 = 5$

- $\overset{a_1}{2}, -4, 8, -16, \ldots$ $\quad a_n = 2\cdot(-2)^{n-1}$

  $r = -4:2 = -2$

Ej: En la progresión $3, 6, 12, 24\ldots$, ¿qué término vale 192?

$a_n = 3\cdot 2^{n-1} \longrightarrow 192 = 3\cdot 2^{n-1}$

$2^{n-1} = \frac{192}{3} = 64$

$2^6 = 64 \longrightarrow 2^{n-1} = 2^6$

$n - 1 = 6 \longrightarrow \underline{n = 7}$

→ Suma de los n primeros números:

$$S_n = \frac{a_n\cdot r - a_1}{r-1}$$

Ej: suma los 5 primeros términos de $r = 2$ y $a_1 = 6$ $\quad (a_5 = 6\cdot 2^{5-1} = 96)$

$S_5 = \frac{a_n\cdot 2 - 6}{2-1} \longrightarrow 2a_n - 6 \rightarrow S_5 = 2\cdot 96 - 6 = \underline{186}$

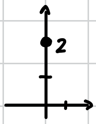
→ Suma de los infinitos números:

$$S = \frac{a_1}{1-r}$$

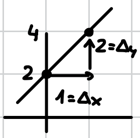
Ej: suma los infinitos términos de $r = \frac{1}{3}$ y $a_1 = \frac{2}{3}$ $\longrightarrow S = \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \underline{1}$

- **Recta:**
  - Ecuación lineal: $y = ax + b$ $\quad a, b \in \mathbb{R}$ parámetros
  - Función lineal: $y = f(x) = ax + b$
    - a = pendiente
    - b = ordenada en el origen

- Si $x=0 \longrightarrow a \cdot 0 + b = b$
- cuando $y = ax + 2$ sabemos que pasa por el 2



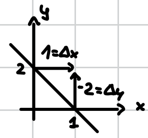
- $a>0 \rightarrow$ y crece cuando x crece
  f creciente $\quad$ dirección + del eje y
- Si $a=2 \rightarrow \Delta y$ = incremento de y
  Δx = incremento de x
  ↳ La y aumenta 2 unidades por cada ud. de x



$y_1 = 2(x+1)+2$

$y = 2x+2$

- Si $a=-2<0 \rightarrow$ y disminuye 2 por cada unidad de x $\longrightarrow$



$y = -2x+2$

$y = -2(x+1)+2$

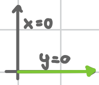
- Dados dos puntos distintos se determina una única recta

Recta que pasa por $\overset{x\ y}{(0,0)}$ y $\overset{x\ y}{(2,0)}$:

Si $x=0 \rightarrow y=0,\ f(x) = 0a+b \longrightarrow 0=b$

Si $x=2 \rightarrow y=0,\ f(x) = \underbrace{2a+b=0}_{2a=-b\ \rightarrow\ =0}$

La recta buscada es $y=0$



$y = 0 = 0x + 0$ ← pasa por el origen

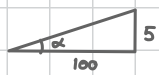
↑ pendiente nula es horizontal

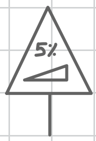
- **Pendiente:**
  - Indica el incremento de y en función de x
  - Es adimensional

$$\text{Pendiente} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{Incremento vertical}}{\text{Incremento horizontal}}$$

$$\begin{cases} \text{Pendiente} > 0 \rightarrow f \text{ crece} \\ \text{Pendiente} < 0 \rightarrow f \text{ decrece} \end{cases}$$

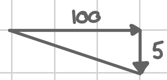
Ej:
- pendiente del 5%

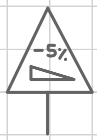




$tg\,\alpha = \frac{5}{100} = a$

- pendiente del $-5\% = \frac{-5}{100} = \frac{-1}{20}$



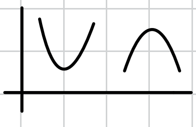


De cada 100 m recorridos (x) bajo 5 (y)

- **Polinomio de grado 2:**

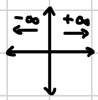
$y = ax^2 + bx + c$ siendo $a \neq 0$

parábola



→

$x \rightarrow +\infty$



{ si crece indefinidamente
o bien $\forall K \in \mathbb{R}$, a partir de un cierto momento $x > K$

→ Si $x \rightarrow \infty, \rightarrow y \begin{cases} +\infty & \text{si } a>0 \\ -\infty & \text{si } a<0 \end{cases}$ $\qquad \infty = \pm\infty$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \longrightarrow D = \text{discriminante} = b^2 - 4ac$$

- **Asíntotas:**

Los polinomios no tienen asíntotas. Estudiaremos las asíntotas con racionales

→ **Verticales:**

- Se calculan en los puntos de no dominio
- $x = a$

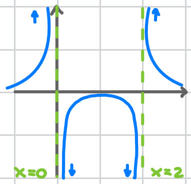
1.- Calcular el dominio

2.- Calcular el límite en esos puntos

3.- Representar

$f(x) = \frac{x+3}{x^2-2x} \to x^2-2x=0 \to x(x-2)=0 \to x=0,\ x=2$

$Dom\ f(x) = \mathbb{R} - \{0,2\}$



A.V. en $x=0$:

$\lim_{x\to 0} \frac{x+3}{x^2-2x} = \frac{3}{0}$ $\begin{cases} \lim_{x\to 0^+} \frac{x+3}{x^2-2x} = \frac{+}{-} = -\infty \\ \lim_{x\to 0^-} \frac{x+3}{x^2-2x} = \frac{+}{+} = +\infty \end{cases}$

A.V. en $x=2$:

$\lim_{x\to 2} \frac{x+3}{x^2-2x} = \frac{5}{0}$ $\begin{cases} \lim_{x\to 2^+} \frac{x+3}{x^2-2x} = \frac{+}{+} = +\infty \\ \lim_{x\to 2^-} \frac{x+3}{x^2-2x} = \frac{+}{-} = -\infty \end{cases}$

→ **Horizontales:**

- se calcula: $y = \lim_{x\to\pm\infty} f(x)$
- $y = b$
- A.H si $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = b \Rightarrow y = b$

$f(x) = \frac{x+3}{x^2-3}$ $\begin{cases} \lim_{x\to\infty} \frac{x+3}{x^2-3} = \frac{\infty}{\infty^2} = 0 \\ \lim_{x\to-\infty} \frac{x+3}{x^2-3} = \frac{\infty}{\infty^2} = 0 \end{cases}$

$y = 0 \to AH = 0$

$f(x) = \frac{2x+5}{x+4}$ $\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+5}{x+4} = 2 \\ \lim_{x\to-\infty} \frac{2x+5}{x+4} = 2 \end{cases}$

$y = 2 \to AH = 2$

→ **Oblicuas:**

★ Si una función tiene A. horizontales → NO tiene oblicuas

- $y = mx + n$ $\begin{cases} m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \\ n = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx) \end{cases}$

$f(x) = \frac{x^2}{x+3}$

$\begin{cases} \bullet\ m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^2}{x+3}}{x} = \frac{x^2}{x(x+3)} = \frac{x^2}{x^2+3x} = 1 \\ \bullet\ n = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x+3} - 1x = \frac{x^2}{x+3} - \frac{x(x+3)}{x+3} = \frac{x^2-x^2-3x}{x+3} = \frac{-3x}{x+3} = -3 \end{cases}$

AO → $y = mx + n$ → $y = 1x - 3$

- **Puntos de corte con los ejes:**

→ Eje X: sustituimos $y=0$, y calculamos las x → $P(x,0)$

→ Eje Y: sustituimos $x=0$, y calculamos las y → $P(0,y)$

Ej: $f(x) = x^2 - 3x$

- Eje x: $0 = x^2 - 3x$

  $0 = x(x-3) \to x=0,\ x=3$

- Eje y:

  $0^2 - 3\cdot 0 = y$

  $y = 0$

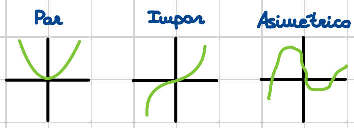
$P(0,0)$

$P(3,0)$

$P(0,0)$

- **Simetría:**

- $f(x) = f(-x)$ → simetría par
- $f(-x) = -f(x)$ → simetría impar
- si no, no tiene simetría



Ej: $f(x) = x^2 + 4$

$f(-x) = (-x)^2 + 4 \to x^2 + 4$

Función par

Ej: $f(x) = x^3 + 6x$

$f(-x) = (-x)^3 + 6(-x) \to -x^3 - 6x$

Función impar

Definición de derivada:

En un punto por la definición:

La derivada en un punto $x=a$ se denota por $f'(a)$

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f'(a+h)-f(a)}{h}$$

$f(x)=4x-5$ en $x=2$

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{4h+3-3}{h}=\underline{4}$$

$f(2+h)$ = sustituir las x por $2+h$

$f(x)=4x-5 \rightarrow f(2+h)=4(2+h)-5=8+4h-5=\underline{4h+3}$

Recta tangente en un punto por la definición:

Siendo x_0 el punto que me da el enunciado

$$y-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(x-x_0)$$

$f(x)=x^2-x+2$ en $x=-1$

$y-f(-1)=f'(-1)\cdot(x+1)$

$y-4=-3\cdot(x+1)$

$y=-3x-3+4$

$\underline{y=-3x+1}$

$f(-1)=(-1)^2-(-1)+2=\underline{4}$

$$f'(-1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\frac{h^2-3h+4-4}{h}=\underline{-3}$$

$f(-1+h)=(-1+h)^2-(-1+h)+2=$

$=1+h^2-2h+1-h+2=\underline{h^2-3h+4}$

Función derivada por la definición:

Siendo $f(x)$ la función a derivar

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$f(x)=2x+1$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{2(x+h)+1-(2x+1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2x+2h+1-2x-1}{h}=\frac{2h}{h}=\underline{2}$$

$f(x)=x^2-6x+2$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-6(x+h)+2-(x^2-6x+2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x^2}+h^2+2xh-\cancel{6x}-6h+\cancel{2}-\cancel{x^2}+\cancel{6x}-\cancel{2}}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{h^2+2xh-6h}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(h+2x-6)}{h}=\lim_{h\to 0}h+2x-6=\underline{2x-6}$$

Derivadas:

- **Polinomios**
  - $y=n \rightarrow y'=0$
  - $y=nx \rightarrow y'=n$
  - $y=x^n \rightarrow y'=n\cdot x^{n-1}$
- **Producto** — $y=u\cdot v \rightarrow y'=u'\cdot v+u\cdot v'$
- **División** — $y=\frac{u}{v} \rightarrow y'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$
- **Potencia** — $y=(u)^n \rightarrow y'=n(u)^{n-1}\cdot u'$
- **Logaritmo neperiano** — $y=\ln(u)$
- **Logaritmo en cualquier base** — $y=\log_a(u)$
- **Exponencial base e** — $y=e^u \rightarrow y'=e^u\cdot u'$
- **Exponencial en cualquier base** — $y=n^u \rightarrow y'=n^u\cdot u'\cdot \ln(n)$ (base)
- **Raíz cuadrada** — $y=\sqrt[2]{u} \rightarrow y'=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'$
- **Raíz cualquier índice** — $y=\sqrt[n]{u} \rightarrow y'=\frac{1}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}\cdot u'$
  - Pasado a potencia $\sqrt[5]{\ } = (\ )^{1/5}$

- $\text{sen}\,x \rightarrow \cos(u)\cdot u'$
- $\cos x \rightarrow -\text{sen}(u)\cdot u'$
- $\text{tg}\,x$: $\frac{1}{\cos^2(u)}\cdot u'$; $[1+\text{tg}^2 u]\cdot u'$
- $\text{arcsen}\,x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$
- $\text{arccos}\,x \rightarrow \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$
- $\text{arctg}\,x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\cdot u'$

Regla de la cadena:

Trabajaremos desde la capa exterior hacia el interior

1° 2° 3°

- $y=e^{\sqrt{x^2+1}}$

$$y'=e^{\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x=\frac{2x\cdot e^{\sqrt{x^2+1}}}{2\sqrt{x^2+1}}=\frac{x\cdot e^{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}}$$

Derivada implícita:

Derivar la expresión tal cual la tengamos:

→ En los términos con "y" multiplicarlos por "y'"

$3y^2 \rightarrow 6y\cdot y'$

$3x^2 \rightarrow 6x$

$3x^2+y^3=0$

$6x+3y^2\cdot y'=0$

$y'=\frac{-6x}{3y^2}=\underline{\frac{-x}{y^2}}$

$4x\cdot y^2=0$

$4\cdot y^2+4x\cdot 2y\cdot y'=0$

$y'=\frac{-4y^2}{8yx}=\underline{\frac{-y}{2x}}$

- **Regla de L'Hôpital:** $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

$e^0 = 1$ $\quad \ln \infty = \infty$
$e^1 = e$ $\quad \ln e = 1$
$e^{\infty} = \infty$ $\quad \ln 1 = 0$
$e^{-\infty} = 0$ $\quad \ln 0 = -\infty$
$\quad \ln -\infty = \nexists$

- ¿Cuándo usar la regla de L'Hôpital?

Siempre excepto $\begin{cases} \frac{K}{0} \\ \infty - \infty \text{ con raíces} \end{cases}$

→ $\frac{0}{0}$: $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2} = \frac{0}{0} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 1}\frac{2x}{2x-3} = \frac{2}{-1} = -2$

→ $\frac{\infty}{\infty}$: $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x-1}{x^2-2x} = \frac{\infty}{\infty} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2x-2} = \frac{\infty}{\infty} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2} = \frac{\infty}{2} = \infty$

→ $\infty - \infty$: $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1} = \infty - \infty \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x(e^x-1)} - \frac{x}{x(e^x-1)} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)} = \frac{0}{0} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{1\cdot(e^x-1)+x\cdot e^x} = \frac{0}{0} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x+1e^x+x\cdot e^x} = \frac{1}{2}$

→ $0\cdot\infty$: $\lim_{x\to 0} x\cdot\ln x = 0\cdot(-\infty)$ $\begin{cases} \lim_{x\to 0}\frac{x}{\frac{1}{\ln x}} \\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \end{cases}$ Elegir el que resulte más fácil → $\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \frac{-\infty}{\frac{1}{0}} = \frac{-\infty}{\infty} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \frac{x^2}{-x} = -x = 0$

→ $1^{\infty}, \infty^0, 0^0$: $\lim_{x\to\infty}(1+x^2)^{\frac{1}{x}} = \infty^0$ → Bajar el exponente mediante los logaritmos

$A = \lim_{x\to\infty}(1+x^2)^{\frac{1}{x}}$

$\ln A = \lim_{x\to\infty}\ln(1+x^2)^{\frac{1}{x}}$

$\ln A = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\frac{\ln(1+x^2)}{1} = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{x} = \frac{\infty}{\infty} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to}\frac{\frac{1}{1+x^2}\cdot 2x}{1} = \frac{\frac{2x}{1+x^2}}{\frac{1}{1}} = \frac{2x}{1+x^2} = \frac{\infty'}{\infty^2} = 0$ → $\ln A = 0$

$A = e^0 = 1$

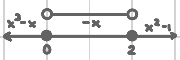
- **Derivabilidad de una función:**

  - Si una función es derivable → es continua
  - Si una función es continua → puede ser o no derivable

1.- Estudiar la continuidad
2.- Estudiar la derivabilidad

$f(x)\begin{cases} x^3-x & \text{si } x\leq 0 \\ -x & \text{si } 0<x<2 \\ x^2-1 & \text{si } x\geq 2 \end{cases}$

1.- Continuidad:



En $x=0$:

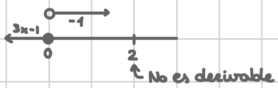
$f(0) = 0^3 - 0 = 0$
$\lim_{x\to 0^-} x^3 - x = 0$
$\lim_{x\to 0^+} -x = 0$
} Continua

En $x=2$:

$f(2) = 2^2 - 1 = 3$
$\lim_{x\to 2^-} -x = -2$
$\lim_{x\to 2^+} x^2 - 1 = -2$
} Discontinua → $f(x)$ No es derivable en $x=2$

$f'(x)\begin{cases} 3x-1 & \text{si } x\leq 0 \\ -1 & \text{si } 0<x<2 \\ 2x & \text{si } x\geq 2 \end{cases}$

2.- Derivabilidad:

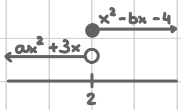


$\lim_{x\to 0^+} -1 = -1$
$\lim_{x\to 0^-} 3x - 1 = -1$
} Es derivable en $x=0$

- **Derivabilidad de una función con parámetros:**

$f(x)\begin{cases} ax^2+3x & \text{si } x<2 \\ x^2-bx-4 & \text{si } x\geq 2 \end{cases}$

1.- Continuidad:

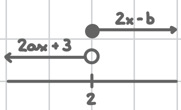


En $x=2$:

$f(2) = 2^2 - 2b - 4 = -2b$
$\lim_{x\to 2^-} ax^2+3x = 4a+6$
$\lim_{x\to 2^+} x^2-bx-4 = 4-2b-4$
} $4a+6 = -2b$

$f'(x)\begin{cases} 2ax+3 & \text{si } x<2 \\ 2x-b & \text{si } x\geq 2 \end{cases}$

2.- Derivabilidad:



$\lim_{x\to 2^-} 2ax+3 = 4a+3$
$\lim_{x\to 2^+} 2x-b = 4-b$
} $4a+3 = 4-b$ → $4a+b=1$
↓
$4a = 1-b$

$4a+6 = -2b$
$(1-b)+6 = -2b$
$b+7=0$ → $b=-7$

$a = \frac{1-b}{4} = \frac{8}{4} = 2$

- **Máximo y mínimo relativos:**

x_0 es un extremo relativo si $f'(x_0) = 0$

$$\begin{cases} f''(x_0) > 0 \longrightarrow \text{mínimo relativo} \\ f''(x_0) < 0 \longrightarrow \text{máximo relativo} \end{cases}$$

$f(x) = x^2 - 4x + 1$ Dom $f(x)$: $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow f'(x) = 2x - 4$

$2x - 4 = 0 \longrightarrow x = 2$

f': $-$ | 2 | $+$

Mínimo relativo en $(2, f(2)) \rightarrow (2,3)$

$f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-9}$ Dom $f(x)$: $\mathbb{R} - \{-3, 3\}$

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (x^2-9) - x^2 \cdot 2x}{(x^2-9)^2} = \frac{2x\,(x^2-9-x^2)}{(x^2-9)^2} = \frac{-18x}{(x^2-9)^2} \longrightarrow -18x = 0 \longrightarrow x = \frac{0}{-18} = 0$$

$+$ | -3 | $+$ | 0 | $-$ | 3 | $-$

Máx. rel en $(0, f(0)) = (0,0)$

- **Creciente y decreciente:**

Lo sacaremos junto a los máx. y mín.

Donde haya un $\begin{cases} + \rightarrow \text{Creciente} \\ - \rightarrow \text{Decreciente} \end{cases}$

$f(x) = x^2 - 4x + 1$ Dom $f(x)$: $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow f'(x) = 2x - 4$

$2x - 4 = 0 \longrightarrow x = 2$

$f'(x)$: $-$ ↘ | 2 | $+$ ↗

$\begin{cases} \text{Creciente } (2, \infty) \\ \text{Decreciente } (-\infty, 2) \end{cases}$

$f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-9}$ Dom $f(x)$: $\mathbb{R} - \{-3, 3\}$ $f'(x) = 0$

$+$ ↗ | -3 | $+$ ↗ | 0 | $-$ ↘ | 3 | $-$ ↘

$\begin{cases} \text{Crece: } (-\infty, -3) \cup (-3, 0) \\ \text{Decrece: } (0,3) \cup (3, \infty) \end{cases}$

- **Concavidad y convexidad:**

Hacer $f''(x)$ e igualarla a 0

convexo $\cap$ cóncavo $\cup$

$f(x) = x^4 - 6x^2$

$f'(x) = 4x^3 - 12x$

$f''(x) = 12x^2 - 12 \rightarrow 12x^2 - 12 = 0$

$x = \sqrt{\frac{12}{12}} = \pm 1$

$f''(x)$: $-\infty$ $+$ $\cup$ | -1 | $-$ $\cap$ | 1 | $+$ $\cup$ ∞

$\cap$ Convexo: $(-1, 1)$

$\cup$ Cóncavo: $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

- **Puntos de inflexión:**

Puntos en los que cambiamos de curvatura

$\cap \rightarrow \cup$ ó $\cup \rightarrow \cap$

$f(x) = x^4 - 6x^2$

$f'(x) = 4x^3 - 12x$

$f''(x) = 12x^2 - 12 \rightarrow 12x^2 - 12 = 0$

$x = \sqrt{\frac{12}{12}} = \pm 1$

$f''(x)$: $-\infty$ $+$ $\cup$ | -1 | $-$ $\cap$ | 1 | $+$ $\cup$ ∞

Puntos de inflexión:

$(-1, f(-1)) \rightarrow (-1, -5)$

$(1, f(1)) \longrightarrow (1, -5)$

- **Representación de funciones:**
  - Dominio
  - Continuidad
  - Simetría
  - Puntos de corte con los ejes
  - Asíntotas/ramas parabólicas
  - Crecimiento y decrecimiento
  - Máximos y mínimos
  - Concavidad y convexidad
  - Puntos de inflexión

$f(x) = x^3 + 3x^2$

- Dominio: $\mathbb{R}$
- Continuidad: continua en $\mathbb{R}$
- Simetría: $\left.\begin{cases} \text{Par: } f(x) \neq f(-x) \\ \text{Impar: } f(x) \neq -f(-x) \end{cases}\right\}$ No simétrica
- Puntos de corte con los ejes:

  Eje X: $y = 0$ $x^3 + 3x^2 = 0 \longrightarrow x(x^2+3) = 0$ $\begin{cases} x = 0 & (0,0) \\ x = -3 & (-3,0) \end{cases}$

  Eje Y: $x = 0$ $y = 0^3 + 3 \cdot 0 \longrightarrow y = 0$ $(0,0)$
- Asíntotas:

  AV: no hay, es un polinomio

  AH:

  AO:
- Monotonía: $f'(x) = 3x^2 + 6x \longrightarrow 3x^2 + 6x = 0$

  $x(3x+6) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$

  $+$ ↗ | -2 | $-$ ↘ | 0 | $+$ ↗

  Crece: $(-\infty, -2)$

  Decrece: $(-2, \infty)$

  Máx. relativo: $(-2, 4)$

  Min relativo: $(0,0)$
- Curvatura: $f''(x) = 6x + 6 \longrightarrow 6x + 6 = 0 \rightarrow x = -1$

  $-$ $\cap$ | -1 | $+$ $\cup$

  $\hookrightarrow$ Pto inflexión $(-1, 2)$

  $\cap$ $(-\infty, -1)$

  $\cup$ $(-1, \infty)$

• Integrales:

* Se pueden sacar fuera de la integral nº constantes que están multiplicando

→ **Polinomios:**

$$\int \text{polinomio}\, dx = \frac{p^{\text{grado}+1}}{\text{grado}+1} + C$$

→ **Potencias:**

$$\int u^n \cdot u'\, dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$$

→ **Logarítmicas:**

$$\int \frac{u'}{u}\, dx = \ln|u| + C$$

→ **Exponenciales:**

$$\int e^u \cdot u'\, dx = e^u + C$$

$$\int a^u \cdot u'\, dx = \frac{a^u}{\ln a} + C$$

a → base

→ **Trigonométricas:**

$$\int u' \cdot \operatorname{sen}(u)\, dx = -\cos(u) + C$$

$$\int u' \cdot \cos(u)\, dx = \operatorname{sen}(u) + C$$

$$\int \frac{u'}{\cos^2 u}\, dx = \operatorname{tg}(u) + C$$

$$\int \frac{u'}{1+(u)^2}\, dx = \operatorname{arctg}(u) + C$$

$$\int \frac{u'}{\sqrt{1-(u)^2}}\, dx = \operatorname{arcsen}(u) + C$$

$$\int \frac{-u'}{\sqrt{1-(u)^2}}\, dx = \arccos(u) + C$$

→ Polinomios:

$$\int 2\, dx = \frac{2x}{1} + C \qquad \int 5x\, dx = \frac{5x^2}{2} + C \qquad \int 3x^2\, dx = \frac{3x^3}{3} + C$$

$$\int x^3 - 3x^2 + 2x - 1\, dx = \frac{x^4}{4} - \frac{3x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} - \frac{1x}{1} + C$$

→ Potencias:

Hago la derivada de lo de dentro

$$\int 7(3x-4)^3\, dx = \frac{7}{3}\int \underbrace{3\,(3x-4)^3}_{u' \cdot u^n} dx = \frac{7}{3} \cdot \frac{(3x-4)^4}{4} + C$$

$$\int 3x\,(x^2-2)^2\, dx = 3\int x\,(x^2-2)^2\, dx = \frac{3}{2}\int \underbrace{2x \cdot (x^2-2)^2}_{u' \cdot u^n} dx = \frac{3}{2} \cdot \frac{(x^2-2)^3}{3} + C$$

$$\int (2x-4)^4\, dx = \frac{1}{2}\int 2\,(2x-4)^4\, dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x-4)^5}{5} + C$$

$$\int x\,(x^2-3)^3\, dx = \frac{1}{2}\int 2x \cdot (x^2-3)^3\, dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2-3)^4}{4} + C$$

→ Logarítmicas:

$$\int \frac{3}{x+1}\, dx = 3\int \frac{1}{x+1}\ \left(\frac{u'}{u}\right) = 3\ln|x+1| + C$$

$$\int \frac{5x^3}{x^4-3}\, dx = 5\int \frac{x^3}{x^4-3}\, dx = \frac{5}{4}\int \frac{4x^3}{x^4-3}\, dx = \frac{5}{4}\ln|x^4-3| + C$$

$$\int \frac{5x}{x^2+1}\, dx = 5\int \frac{x}{x^2+1}\, dx = \frac{5}{2} \cdot \ln|x^2+1| + C$$

→ Exponenciales:

$$\int e^{2x}\, dx = \frac{1}{2}\int \underbrace{2}_{u'} \cdot e^{\overbrace{2x}^{u}}\, dx = \frac{1}{2} e^{2x} + C$$

$$\int x \cdot 2^{x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int 2x \cdot 2^{x^2}\, dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{2^{x^2}}{\ln 2} + C$$

$$\int e^{\frac{x}{5}}\, dx = \frac{5}{1}\int \frac{1}{5} e^{\frac{x}{5}}\, dx = 5e^{\frac{x}{5}} + C$$

$$\int 2x \cdot e^{3x^2}\, dx = 2\int x \cdot e^{3x^2}\, dx = \frac{2}{6}\int 6x \cdot e^{3x^2}\, dx = \frac{2}{6} \cdot e^{3x^2} + C$$

$$\int \frac{e^{3x}}{5}\, dx = \frac{1}{5}\int e^{3x}\, dx = \frac{1}{5 \cdot 3}\int 3 \cdot e^{3x}\, dx = \frac{1}{15} \cdot e^{3x} + C$$

→ Seno, coseno, tangente:

$$\int 3 \cdot \operatorname{sen}(2x)\, dx = 3\int \operatorname{sen}(2x)\, dx = \frac{3}{2}\int 2\operatorname{sen}(2x) = \frac{3}{2} \cdot -\cos(2x) + C$$

$$\int 5x^2 \cdot \cos(x^3)\, dx = \frac{5}{3}\int 3x^2 \cdot \cos(x^3)\, dx = \frac{5}{3} \cdot \operatorname{sen}(x^3) + C$$

$$\int x \cdot \operatorname{sen}(3x^2)\, dx = \frac{1}{6}\int 6x \cdot \operatorname{sen}(3x^2)\, dx = \frac{1}{6} \cdot -\cos(3x^2) + C$$

$$\int \cos(-x)\, dx = \frac{1}{-1}\int (-1) \cdot \cos(-x)\, dx = (-1) \cdot \operatorname{sen}(-x) + C$$

$$\int \frac{5}{\cos^2(x)}\, dx = 5\int \frac{1}{\cos^2(x)}\, dx = 5\operatorname{tg}(x) + C$$

$$\int \frac{3x}{\cos^2 x^2}\, dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x}{\cos^2 x^2}\, dx = \frac{3}{2}\operatorname{tg}(x^2) + C$$

• Integración por partes:

arctg, arcsen ...
↗
ALPES: Arco Logaritmo Polinomio e seno/coseno

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int x \cdot \operatorname{sen} x\, dx$$

$u = x \xrightarrow{\text{derivada}} du = 1\,dx$

$dv = \operatorname{sen} x\, dx \xrightarrow{\text{integ}} v = -\cos x$

$$\int x \cdot \operatorname{sen} x\, dx = x \cdot (-\cos x) - \int -\cos x \cdot 1\, dx = -x\cos x + \int \cos x\, dx = -x \cdot \cos x + \operatorname{sen} x + C$$

$$\int (x^2+1) \cdot e^x\, dx$$

$u = x^2+1 \longrightarrow du = 2x\, dx$

$dv = e^x\, dx \longrightarrow v = e^x$

$$\int (x^2+1) \cdot e^x\, dx = (x^2+1) \cdot e^x - \int e^x \cdot 2x\, dx = (x^2+1) \cdot e^x - (2xe^x - 2e^x) = (x^2+1) \cdot e^x - 2xe^x - 2e^x + C$$

$$\int e^x\, 2x\, dx = 2x \cdot e^x - \int e^x \cdot 2\, dx = 2xe^x - 2\int e^x\, dx = 2xe^x - 2e^x + C$$

$u = 2x \longrightarrow du = 2\, dx$

$dv = e^x\, dx \longrightarrow v = e^x$

Integración por partes:

Grado N ≥ D:

Lo primero es hacer la división de polinomios.

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int C(x)\,dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}\,dx$$

$$\int \frac{x+1}{x-1}\,dx \overset{*}{=} \int 1\,dx + \int \frac{2}{x-1}\,dx = x + 2\ln|x-1| + C$$

$$\int \frac{2}{x-1}\,dx = 2\int \frac{1}{x-1}\,dx = 2\ln|x-1| + C$$

$*$ $(x+1) : (x-1)$: $x+1 \;-\; (x-1) = 0\;2$; $1 \longrightarrow C(x) = 1$; $0\;2 \longrightarrow R(x) = 2$

$$\int \frac{x^2}{x+1}\,dx \overset{*}{=} \int x-1\,dx + \int \frac{1}{x+1}\,dx = \frac{x^2}{2} + x + \ln|x+1| + C$$

$*$ $x^2\;0\;0 : (x+1)$: $-\;x^2\;x$ → $0\;-x$; $-\;-x\;-1$ → $0+1$; $x-1 \longrightarrow C(x) = x-1$; $0+1 \longrightarrow R(x) = 1$

D solo tiene raíces reales simples:

~~$\sqrt{x-1}$~~ no hay exponentes

Quedan $\ln|\sim|$ como solución

$$\int \frac{5x+3}{x(x-1)(x+2)(x-5)} = \int \frac{A}{x} + \int \frac{B}{x-1} + \int \frac{C}{x+2} + \int \frac{D}{x-5}$$
$$= A\ln|x| + B\ln|x-1| + C\ln|x+2| + D\ln|x-5|$$

$$\int \frac{x-2}{x^2+x}\,dx = \int \frac{x-2}{x\cdot(x+1)}\,dx = \int \frac{A}{x}\,dx + \int \frac{B}{x+1}\,dx$$
$$= \int \frac{-2}{x}\,dx + \int \frac{3}{x+1}\,dx$$
$$= -2\ln|x| + 3\ln|x+1| + C$$

1°
$x^2 - x = 0$
$x(x+1) = 0$
$x = 0 \quad x = -1$

Calcular A y B:

$$\frac{x-2}{x(x+1)} = \frac{A(x+1)}{x(x+1)} + \frac{B\cdot x}{(x-1)\cdot x}$$

$$x - 2 = A(x+1) + Bx$$

$$\begin{cases} \text{Si } x=0 \longrightarrow 0-2 = A(0-1) + B\cdot 0 \rightarrow \underline{A=-2} \\ \text{Si } x=-2 \longrightarrow -2-2 = A(-2-1) + B\cdot(-2) \rightarrow \underline{B=3} \end{cases}$$

D tiene raíces reales múltiples:

Quedan $\ln|m|$ y potencias como solución

$$\int \frac{3x+2}{x^2\,(x-1)^3\,(x+2)}\,dx = \int \frac{A}{x}\,dx + \int \frac{B}{x^2}\,dx + \int \frac{C}{x-1}\,dx + \int \frac{D}{(x-1)^2}\,dx + \int \frac{E}{(x-1)^3}\,dx + \int \frac{F}{x+2}\,dx$$

Ln, Pot, Ln, Pot, Pot, Ln

$= 0$: $x = 0 \quad x = 1 \quad x = -2$

$$\int \frac{2x-4}{(x-1)^2(x+3)}\,dx = \int \frac{A\,dx}{x-1} + \int \frac{B\,dx}{(x-1)^2} + \int \frac{C\,dx}{x+3}$$

Ln, Pot, Ln

$$= \int \frac{5/8}{x-1}\,dx + \int \frac{-1/2}{(x-1)^2}\,dx + \int \frac{-5/8}{x+3}\,dx$$

$$= \frac{5}{8}\ln|x-1| \; \frac{-1}{2}\,\frac{(x-1)^{-1}}{-1} - \frac{5}{8}\ln|x+3| + C$$

$$\int \frac{-1/2}{(x-1)^2}\,dx = \frac{-1}{2}\int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \frac{-1}{2}\int (x-1)^{-2}\cdot 1\,dx = \frac{-1}{2}\,\frac{(x-1)^{-2+1}}{-2+1} + C$$

Calcular A y B:

$$\frac{2x-4}{(x-1)^2(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+3}$$

$$\frac{2x-4}{(x-1)^2(x+3)} = \frac{A(x-1)^2(x+3) + B(x+3) + C(x-1)^2}{(x-1)^2(x+3)}$$

$$\begin{cases} \text{Si } x=1 \rightarrow 2(1)-4 = A\cancel{(\ldots)}^{0} + B(1+3) + C\cancel{(\ldots)}^{0} \\ \text{Si } x=-3 \rightarrow 2(-3)-4 = A\cancel{(\ldots)}^{0} + B\cancel{(\ldots)}^{0} + C(-3-1)^2 \\ \text{Si } x=0 \rightarrow 2(0)-4 = A(0-1)(0+3)\;\frac{-1}{2}\cdot 3\;\frac{-5}{8}\cdot 1 \end{cases}$$

$B = \frac{-1}{2} \qquad C = \frac{-10}{16} = \frac{-5}{8} \qquad A = \frac{5}{8}$

D de 2° grado incompleta con raíces complejas:

$$\int \frac{u'}{1+(u)^2}\,dx = \operatorname{arctg}(u) + c$$

Tiene forma de arcotangente

$$\int \frac{-3}{x^2+4}\,dx = -3\int \frac{1}{4+x^2} = \frac{-3}{4}\int \frac{1}{\frac{4}{4}\;\frac{x^2}{4}}\,dx = \frac{-3}{4}\int \frac{1\,dx}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{-3\cdot 2}{4\cdot 1}\int \frac{1/2}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\,dx = \frac{-6}{4}\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

$= 0$:
$x^2 + 4 = 0$
$x^2 = -4$
$x = \sqrt{-4}$

D de 2° grado completa con raíces complejas:

$$\int \frac{u'}{1+(u)^2}\,dx = \operatorname{arctg}(u) + c$$

Tiene forma de arcotangente

$$\int \frac{5}{x^2+2x+5}\,dx = \int \frac{5}{(x+1)^2+4}\,dx = 5\int \frac{1\,dx}{4+(x+1)^2} = \frac{5}{4}\int \frac{1\,dx}{\frac{4}{4} + \frac{(x+1)^2}{4}} = \frac{5}{4}\int \frac{1\,dx}{1+\left(\frac{x+1}{2}\right)^2} = \frac{5\cdot 2}{4}\int \frac{\frac{1}{2}\,dx}{1+\left(\frac{x+1}{2}\right)^2} = \frac{5\cdot 2}{4}\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C$$

p^2 a binomio^2

$\sqrt{x^2} = x \quad 2x \rightarrow \frac{2}{2} = 1 \;\}\; (x+1)^2 = x^2 + 1 + 2x + 4$

$\hookrightarrow \underline{(x+1)^2 + 4}$

$\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \xrightarrow{f'} \frac{1}{2}$

De (polinomio)^2 a (binomio)^2:

$$\begin{cases} \text{Al término con } x^2 \longrightarrow \text{hacerle } \sqrt[2]{\;} \\ \text{Al término con } x \longrightarrow \frac{\sim}{2} \text{ sin la } x \end{cases}$$

$x^2 + 8x + 20 = 0$

$\sqrt{x^2} = x \quad \frac{8}{2} = 4 \;\}\; (x+4)^2 \rightarrow x^2 + 8x + 16 + 4$

$\hookrightarrow \underline{(x+4)^2 + 4}$

$x^2 + x + 1 = 0$

$\sqrt{x^2} = x \quad \frac{1}{2} \;\}\; \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{4} + \frac{2x}{2} \rightarrow x^2 + x + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$

$\hookrightarrow \underline{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}}$

- **Integrar sen/cos de ángulos distintos:**

$$\int \operatorname{sen}(u)\cdot\operatorname{sen}(v) = \frac{\cos(u-v) - \cos(u+v)}{2}$$

$$\int \cos(u)\cdot\cos(v) = \frac{\cos(u-v) + \cos(u+v)}{2}$$

$$\int \operatorname{sen}(u)\cdot\cos(v) = \frac{\operatorname{sen}(u+v) + \operatorname{sen}(u-v)}{2}$$

- **Ángulo mitad:**

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2} \qquad \operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$

- **Otras integrales:** Sabemos que $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

→ **$\text{Seno}^{\text{impar}} \cdot \text{Coseno}^{m}$:**

1.- Analizamos el exponente impar
2.- Descomponerlo hasta tener $\operatorname{sen}^2 x$
3.- Sustituir $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$
4.- Cambio de variable

$$\int \operatorname{sen}^3 x \cdot \cos^4 x\, dx = \int \operatorname{sen}^2 x \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos^4 x\, dx$$
$$= \int (1-\cos^2 x)\cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos^4 x\, dx$$
$$= \int (1-\underbrace{\cos^2 x}_{u^2})\cdot \underbrace{\cos^4 x}_{u^4} \cdot \underbrace{\operatorname{sen} x\, dx}_{-du}$$

Cambio de variable:

$u = \cos x$

$\frac{du}{dx} = -\operatorname{sen} x \rightarrow du = -\operatorname{sen} x\, dx \cdot (-1)$

$$= \int (1-u^2)\cdot u^4 \cdot (-du)$$
$$= \int (u^4 - u^6)\cdot(-du)$$
$$= \int -u^4\, du - \int -u^6\, du = \int -u^4\, du + \int u^6\, du = \frac{-u^5}{5} + \frac{u^7}{7} + C$$

Como $u = \cos x \rightarrow \int \operatorname{sen}^3 x \cdot \cos^4 x\, dx = \frac{-\cos^5 x}{5} + \frac{\cos^7 x}{7} + C$

→ **$\text{Seno}^{m} \cdot \text{Coseno}^{\text{impar}}$:**

1.- Analizamos el exponente impar
2.- Descomponerlo hasta tener $\cos^2 x$
3.- Sustituir $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$
4.- Cambio de variable

$$\int \cos^3 x \cdot \operatorname{sen}^2 x\, dx = \int \cos^2 x \cdot \cos x \cdot \operatorname{sen}^2 x\, dx$$
$$= \int (1-\operatorname{sen}^2 x)\cdot \cos x \cdot \operatorname{sen}^2 x\, dx$$
$$= \int (1-\underbrace{\operatorname{sen}^2 x}_{u^2})\cdot \underbrace{\operatorname{sen}^2 x}_{u^2} \cdot \underbrace{\cos x\, dx}_{du}$$

Cambio de variable:

$u = \operatorname{sen} x$

$\frac{du}{dx} = \cos x \rightarrow du = \cos x\, dx$

$$= \int (1-u^2)\cdot u^2 \cdot du$$
$$= \int (u^2 - u^4)\, du$$
$$= \int u^2\, du - \int -u^4\, du = \int u^2\, du + \int u^4\, du = \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + C$$

Como $u = \operatorname{sen} x \longrightarrow \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x + \frac{1}{5}\operatorname{sen}^5 x + C$

→ **$\text{Seno}^{\text{par}} \cdot \text{Coseno}^{\text{par}}$:**

1.- Descomponerlo hasta tener $\cos^2 x$ y $\operatorname{sen}^2 x$
2.- Sustituir $\cos^2 x$ y $\operatorname{sen}^2 x$ por su ángulo mitad
3.- Operar
4.- Aplicar fórmula ángulo mitad

$$\int \cos^4 x \cdot \operatorname{sen}^2 x\, dx$$
$$= \int \cos^2 x \cdot \cos^2 x \cdot \operatorname{sen}^2 x\, dx$$
$$= \int \frac{1+\cos(2x)}{2}\cdot\frac{1+\cos(2x)}{2}\cdot\frac{1-\cos(2x)}{2}\, dx$$

$$= \frac{1}{8}\int (1+\cos(2x))\cdot(1+\cos(2x))\cdot(1-\cos(2x))\, dx$$
$$= \frac{1}{8}\int (1+\cos(2x)+\cos(2x)+\cos^2(2x))\cdot(1-\cos(2x))\, dx$$
$$= \frac{1}{8}\int 1 + 2\cos(2x) + \cos^2(2x) - \cos(2x) - \cos^3(2x) - 2\cos^2(2x)\, dx$$
$$= \frac{1}{8}\int 1 + \cos(2x) - \cos^2(2x) - \cos^3(2x)\, dx$$
$$= \frac{1}{8}\int 1\, dx + \frac{1}{8}\int \cos(2x)\, dx - \frac{1}{8}\int \cos^2(2x) - \frac{1}{8}\int \cos^3(2x)\, dx$$

$$= \frac{1}{8}\int 1\, dx + \frac{1}{8}\int \cos(2x)\, dx - \frac{1}{8}\int \frac{1+\cos(4x)}{2} - \frac{1}{8}\int \underbrace{\cos(2x)}_{u'}\cdot(1-\underbrace{\operatorname{sen}^2(2x)}_{u^2})\, dx$$

$$= \frac{x}{8} - \frac{1}{16}\int 1+\cos(4x)\, dx + \frac{1}{8}\int \operatorname{sen}^2 2x \cdot \cos(2x)\, dx = \frac{1}{8}x - \frac{1}{16}x - \frac{1}{16}\cdot\frac{\operatorname{sen}(4x)}{4} + \frac{1}{8}\cdot\frac{\operatorname{sen}^3 2x}{3\cdot 2} + C$$

- **Cambio de variable:**

t^n = lo de dentro de la raíz

↳ n: mcm de los exponentes de las raíces

$t = e^{nx}$ siendo n el <u>menor</u> exponente

→ **Para funciones circulares:**

$$t = tg\left(\frac{x}{2}\right) \begin{cases} \cos(x) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ \operatorname{sen}(x) = \dfrac{2t}{1+t^2} \end{cases}$$

$$\frac{x}{2} = arctg(t)$$

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$\int x \cdot \sqrt[2]{x+1}\, dx = \int (t^2-1) \cdot t \cdot 2t\, dt = \int (t^2-1) \cdot 2t^2\, dt = \int 2t^4 + 2t^2\, dt = \frac{2t^5}{5} + \frac{2t^3}{3} + C$$

$$t^2 = x+1 \longrightarrow x = t^2-1$$

$$t = \sqrt[2]{x+1} \qquad dx = 2t\, dt$$

$$= \frac{2(\sqrt[2]{x-1})^5}{5} + \frac{2(\sqrt[2]{x-1})^3}{3} + C$$

$$\int \frac{x\, dx}{\sqrt[3]{2x+1}} = \int \frac{\frac{t^3-1}{2}}{t} \cdot \frac{3t^2}{2} dt = \int \frac{t^3-1}{2t} \cdot \frac{3}{2} t^2\, dt = \frac{3}{4} \int \frac{(t^3-1)\, t^2}{t} dt = \frac{3}{4} \int t \cdot (t^3-1)\, dt = \frac{3}{4} \int t^4 - t\, dt$$

$$= \frac{3}{4}\left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^2}{2}\right) + C$$

$$t^3 = 2x+1 \longrightarrow x = \frac{t^3-1}{2}$$

$$t = \sqrt[3]{2x+1} \qquad dx = \frac{1}{2}(3t^2)\, dt$$

$$= \frac{3}{4}\left[\frac{(\sqrt[3]{2x+1})^5}{5} - \frac{(\sqrt[3]{2x+1})^2}{2}\right]$$

$$\int \frac{e^x\, dx}{1+e^{2x}} = \int \frac{t}{1+t^2} \cdot \frac{dt}{t} = \int \frac{1}{1+t^2} dt = arctg(t) + C = arctg(e^x) + C$$

$$t = e^x \longrightarrow dt = e^x\, dx$$

$$dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t}$$

- **Integral definida → Regla de Barrow:**

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

$$\int_0^1 x+3\, dx = \left|\frac{x^2}{2} + 3x\right|_0^1 + C = \left(\frac{1}{2}+3\right) - 0 = \frac{7}{2}$$

$$\int_{-1}^{2} 3x^2 - 2x + 1\, dx = \left|\frac{3x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + x\right|_{-1}^{2} + C = \left|x^3 - x^2 + x\right|_{-1}^{2} + C = (2^3 - 2^2 + 2) - ((-1)^3 - (-1)^2 - 1) = 6 - (-3) = 9$$

- **Punto y vector:**

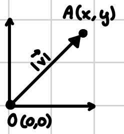
Un vector es un segmento orientado con:

- Módulo $|\vec{u}|$: longitud del vector
- Dirección: la recta que lo contiene
- Sentido: lo marca la flecha

- Punto: $P(\mathbb{R},\mathbb{R})$
- Vector: $\vec{v} = \overrightarrow{PQ} = (P_x - Q_x, P_y - Q_y)$

Puntos — Vector

$$\left.\begin{array}{l} P(x_1, y_1) \\ Q(x_2, y_2) \end{array}\right\} \vec{v} = \overrightarrow{PQ} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$$



→ **Módulo o norma:**

$|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$|\vec{u}| > 0$

$|\alpha \cdot \vec{u}| = |\alpha| \cdot |\vec{u}|$

Vector en R^n (n dimensiones) $\longrightarrow \overrightarrow{AB} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, \dots, a_n - b_n)$

Desigualdad triangular: $|\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|$

Desigualdad de Cauchy - Schwarz: $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$

→ **Propiedades de los vectores:**

- Suma: $\vec{u} + \vec{v}$
- Producto escalar · vector: $\alpha \cdot \vec{u}$
- Escalar (escalar · vector): $\alpha(\beta \cdot \vec{u}) = \beta(\alpha \cdot \vec{u})$
- (escalar + escalar) · vector: $(\alpha + \beta) \cdot \vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$
- Escalar (vector + vector): $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$
- Elemento neutro: $1\vec{u} = \vec{u}$

→ **Producto escalar:** $\vec{u} \cdot \vec{v} = P$ $\quad \vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot \cos(\alpha)$

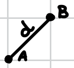
$$\left.\begin{array}{l} \vec{u}\,(1,2,3) \\ \vec{v}\,(-1,0,4) \end{array}\right\} \vec{u} \cdot \vec{v} = (1,2,3) \cdot (-1,0,4) = -1 + 0 + 12 = 11$$

→ **Ángulo entre 2 vectores:**

Valor de α entre $[0, \pi]$

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

→ **Distancia entre puntos:**



$$d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

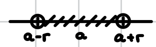
$d(\vec{u}, \vec{v}) > 0$ si $\vec{u} \neq \vec{v}$ $\quad d(\vec{u}, \vec{v}) = d(\vec{v}, \vec{u})$ simétrico

$d(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ si $\vec{u} = \vec{v}$ $\quad d(\vec{u}, \vec{w}) \leq d(\vec{u}, \vec{v}) + d(\vec{v}, \vec{w})$ desigualdad triangular

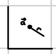
→ **Bola abierta:**

- a: punto centro de la bola
- r: radio de la bola
- Conjunto: $B_r(\vec{a}) = \{\vec{v} \in R^n \mid d(\vec{v}, \vec{a}) < r\}$

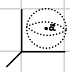
R^1 → La bola es un intervalo abierto $(a-r, a+r)$



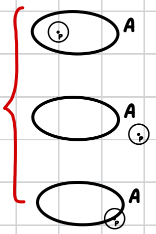
R^2 → La bola es la circunferencia sin el borde



R^3 → La bola es la esfera sin su superficie



→ **Conjuntos:**



El interior de A tiene a toda la bola abierta

El exterior de A tiene a toda la bola abierta

Mitad y mitad

→ Conjunto abierto: Hay uno si para cualquier punto de A existe una bola abierta con todos sus puntos dentro de A. Ej: naranja sin piel

→ Conjunto cerrado: Hay uno si su complementario A^c es abierto. Contiene a todos los puntos y a su borde. Ej: naranja con piel

→ Ni abierto ni cerrado: No contiene a todos los puntos

- **Campos escalares y dominios:**

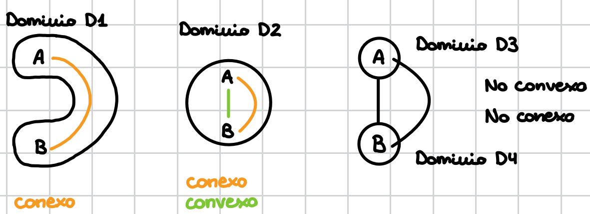
- Campo escalar: función donde la entrada es n-dimensional y la salida un nº real $\quad f: R^n \to \mathbb{R}$
- Dominio: conjunto de puntos para los que está definida la función $\quad Df = \{x \in R^n \mid f(x) \in \mathbb{R}\}$

$f(x,y) = 3x^2\sqrt{y} - 1 \qquad Df = \{(x,y) \in R^2 \mid y \geq 0\}$

$f(x,y) = \dfrac{3x^2 - 1}{\sqrt{y-1}} \qquad Df = \{(x,y) \in R^2 \mid y > 1\}$

$f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y - x^2}} \qquad Df = \{(x,y) \in R^2 \mid x \geq 0,\ y > x^2\}$

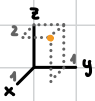
- Dominio conexo: se pueden unir en una curva regular a trozos de cualquier par de puntos
  - Aunque sea a trozos ⟶ continua
- Dominio convexo: se pueden unir en un segmento recto de cualquier par de puntos



- **Gráficas 3D de campos escalares dependientes de 2 variables independientes:**

→ Campo escalar:

$\{(x, y, \underset{z}{f(x,y)}) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in D_f\}$



$(\overset{x}{1}, \overset{y}{1}, \overset{z}{f(1,1)})$

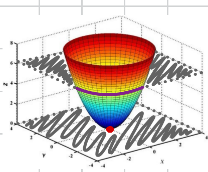
Para representar:

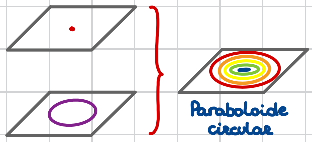
1.- Buscar el punto (x,y)

2.- Hacer segmento vertical en (x,y) de longitud $f(x,y)$ $\begin{cases} \uparrow z \text{ si } f(x,y) > 0 \\ \downarrow -z \text{ si } f(x,y) < 0 \end{cases}$

→ Líneas de contorno o trazo:

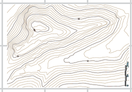
Secciones que producen ejes ⊥ a los ejes cartesianos al cortar con la gráfica correspondiente.





→ Curvas de nivel:

Suelen aparecer en planos topográficos para representar relieve



- **Límite:**

$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$

NO sirve L'Hôpital
↓
si tenemos +2 variables

- **Continuidad:**

$f(x)$ es continua en "a" si:

- a pertenece al dominio de $f(x)$
- $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

- **Discontinuidad:**

- Evitable
- De salto finito
- De salto infinito

→ **Proposición:** si alguna vez no se puede simplificar

Si una función la puedo dividir en 2 cosas que se multiplican $\left\{ \begin{array}{l} \text{uno es menor que un nº} > 0 \\ \text{uno tiende a } 0 \end{array} \right\}$ $\lim_{x\to a} f(x) g(x) = 0$

Ej: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = \frac{0}{0}$ IND $\longrightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} x \cdot \frac{y^2}{x^2+y^2} = \left\{ \begin{array}{l} g(x) = x \longrightarrow \lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} x = 0 \\ f(x,y) = \frac{y^2}{x^2+y^2} \longrightarrow \left(\frac{y^2}{x^2+y^2}\right) \leq 1 \end{array} \right\}$ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x) \cdot f(x,y) = 0$

→ **Límites laterales:**

→ 1 variable: límite por la izq. y dcha. ($\lim_{x\to a^-} f(x)$, $\lim_{x\to a^+} f(x)$)

→ 2 variables: hay muchas formas de acercarse a un punto (a,b) → Se calculan los lím y si alguno ya no es igual → no es continua

- Límites direccionales o radiales: Rectas que pasan por dicho punto y son de la forma $y = b + m(x-a)$

- Ej: $f(x,y) = \frac{\text{sen}(x,y)}{x\cdot y}$

- Dominio:

$\text{Dom} f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0, y \neq 0\}$

- Si hacemos el cambio de variable $t = xy$:

$f(t) = \frac{\text{sen}(t)}{t} \longrightarrow \lim_{t\to 0} \frac{\text{sen}(t)}{t} = \frac{0}{0} \xrightarrow{L'H} \lim_{t\to 0} \frac{\cos(t)}{1} = 1$

- Ej: $f(x,y) = 2x + \frac{y^2}{x+y}$ $\quad \lim_{(x,y)\to(2,1)} f(x,y) = 2\cdot 2 + \frac{1^2}{2+1} = 4 + \frac{1}{3} = \frac{13}{3}$

- Ej: Para que sea continua $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$

$f(x,y) \begin{cases} 4{,}5 & (x,y) = (0,0) \\ \frac{x^4-y^4}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$

- $f(0,0) = 4{,}5$
- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-y^4}{x^2+y^2} = \frac{0}{0} \longrightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2-y^2)\cdot(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)} = x^2-y^2 = 0-0 = 0$

Id not: $(a-b)\cdot(a+b) = a^2-b^2$

Como $4{,}5 \neq 0$ → No es continua en el $(0,0)$

- Ej: Para que sea continua $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$

$f(x,y) \begin{cases} 3 - \frac{xy^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0{,}5 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

- $f(0,0) = 0{,}5$
- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} 3 - \underbrace{\frac{xy^2}{x^2+y^2}}_{\text{tiende a } 0} = 3 - 0 = 3$

Como $0{,}5 \neq 3$ → No es continua en el $(0,0)$

- Ej: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy - x + y}{x+y}$

→ Usando el acercamiento $y = \overset{0}{b} + m(x - \overset{0}{a}) \longrightarrow y = mx$

$\lim_{x\to 0} f(x, mx) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\cdot mx}{x^4+m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3\cdot m}{x^2(x^2+m^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{xm}{x^2+m^2} = \frac{0}{m} = 0$

→ Usando el acercamiento la parábola $y = x^2$:

$\lim_{x\to 0} f(x, x^2) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2y^2}{x^4+(x^2)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2}$

- Ej: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4}{x^4+y^2}$

→ Usando el acercamiento $y = x^2$

$\lim_{x\to 0} f(x, x^2) = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4+x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2}$

→ Usando el acercamiento $x = 0$

$\lim_{x\to 0} f(0, y) = \lim_{x\to 0} \frac{0}{0+y^2} = 0$

Como $\frac{1}{2} \neq 0$ → No es continua en el $(0,0)$

- Ej: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^3}$

→ Usando el acercamiento $y = mx$

$\lim_{x\to 0} f(x, mx) = \lim_{x\to 0} \frac{x\,mx}{x^2+m^3x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2m}{x^2(1+mx)} = \lim_{x\to 0} \frac{m}{1+mx} = \frac{m}{1} = m$

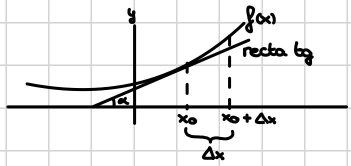
El lím tendrá un valor diferente para cada valor de m → ∄ lím

Derivadas parciales: de 1er orden

- **Cociente incremental:**
  - pendiente media $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$
  - intervalo $[x_0, x_0+\Delta x]$
  - sentido + del eje
    ↪ si está en sentido − → cambiar signo

- **Rapidez o razón de cambio:**

Pendiente de la recta tg a la gráfica de $f(x)$



$f'(x) = tg(\alpha)$

$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

Derivadas parciales: de 2º o mayor orden

- **Considerando la variable x:** $\frac{\partial f}{\partial x}$ ó $D_1 f(x_0, y_0)$

$g(x) = f(x, y_0)$ en $x = x_0$

$$g'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x_0+\Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

- **Considerando la variable y:** $\frac{\partial f}{\partial y}$ ó $D_2 f(x_0, y_0)$

$h(x) = f(x_0, y)$ en $y = y_0$

$$h'(x_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{h(y_0+\Delta y) - h(y_0)}{\Delta y} = \frac{f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

Ej: $f(x,y) = 4 - 2x + y$

Derivamos respecto a la variable y consideramos el resto como cte.

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = D_1 f(x,y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} = \frac{4 - 2(x+\Delta x) + y - (4 - 2x + y)}{\Delta x} = \frac{\cancel{4} - \cancel{2x} - 2\cancel{\Delta x} + \cancel{y} - \cancel{4} + \cancel{2x} - \cancel{y}}{\cancel{\Delta x}} = \underline{-2}$

- $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = D_2 f(x,y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} = \frac{4 - 2x + y + \Delta y - (4 - 2x + y)}{\Delta y} = \frac{\cancel{4} - \cancel{2x} + \cancel{y} + \cancel{\Delta y} - \cancel{4} + \cancel{2x} - \cancel{y}}{\cancel{\Delta y}} = \underline{1}$

Gradiente:

Vector formado por las derivadas parciales en el punto (x_0, y_0)

- $f(x,y)$ es un campo escalar

$$\vec{\nabla} f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)$$

Ej: el campo escalar $T = x^2 + 3xy + zx$. Sacamos el gradiente en el $(1,0,2)$

- $\frac{\partial T}{\partial x}(x,y,z) = 2x + 3y + z \longrightarrow \frac{\partial T}{\partial x}(1,0,2) = 2\cdot 1 + 3\cdot 0 + 2 = \underline{4}$
- $\frac{\partial T}{\partial y}(x,y,z) = 3x \longrightarrow \frac{\partial T}{\partial y}(1,0,2) = 3 \cdot 1 = \underline{3}$
- $\frac{\partial T}{\partial z}(x,y,z) = x \longrightarrow \frac{\partial T}{\partial z}(1,0,2) = \underline{1}$

$\vec{\nabla}(1,0,2) = (4,3,1)$

Ej: calculamos el gradiente de $f(x,y) = ln\left(tg\left(\frac{x}{y}\right)\right)$ en el punto $(\pi, 4)$

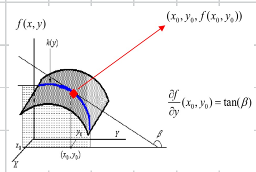
- $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{tg\left(\frac{x}{y}\right)} \cdot \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{y}\right)} \cdot \overset{cte}{\frac{1}{y}} \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(\pi, 4) = \frac{1}{2}$
- $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{tg\left(\frac{x}{y}\right)} \cdot \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{y}\right)} \cdot \frac{-x}{y^2} \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(\pi, 4) = \frac{-\pi}{8}$

$\vec{\nabla} f(x,y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{-\pi}{8}\right)$

Interpretación:

Trayectoria que sigue un móvil al desplazarse por los puntos $(x_0, y_0+\Delta y)$: $h(y) = f(x_0, y)$

están en la recta paralela al eje "y" que pasa por (x_0, y_0)



$$\begin{cases} h(y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) > 0 \\ h(y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) < 0 \end{cases}$$

$h(y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) > 0$ → ↑ veloc. eleva el móvil para $\Delta y > 0$ en la dirección + del eje y

$h(y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) < 0$ → ↓ veloc. eleva el móvil para $\Delta y > 0$ en la dirección + del eje y

- **Derivadas de segundo orden:**

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = D_{11} f$ (1ª derivada) $\qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = D_{22} f \qquad \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = D_{12} f \qquad \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = D_{21} f$

$a^2 - b^2 = (a+b)\cdot(a-b)$

$(y^2-1)^2 = (y-1)^2 \cdot (y+1)^2$

- **Derivada cruzada:**

Derivadas con variables en distinto orden:

2° orden: D_{12} y D_{21} $\qquad$ 3^{er} orden: $D_{112}, D_{121}, D_{211}$

- **Teorema Euler:**

Si $f(x,y)$, D_1, D_2, D_{12}, D_2 son continuas $\longrightarrow D_{12} = D_{21}$

- **Matriz Hessiana:**

$\hat{H}f(x,y) = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix}$

Ej: 2° orden $\longrightarrow f(x,y) = 4xy^2 + \frac{e^y}{y^2+1}$

1• $\frac{\partial f}{\partial x} = 4y^2$

1• $\frac{\partial f}{\partial y} = 4x + 2y + \frac{e^y\cdot(y^2+1) - e^y(2y)}{(y^2+1)^2} = 8xy + \frac{e^y(y^2-2y+1)}{(y^2+1)^2} = 8xy + \frac{e^y(y-1)^2}{(y^2+1)^2}$

2• $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(4y^2) = 0$

2• $\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(4y^2) = 8y$

2• $\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\underset{\text{cte}}{8xy} + \underbrace{\frac{e^y(y-1)^2}{(y^2+1)^2}}_{\text{cero}}\right)$

Ej: 3° orden $\rightarrow f(x,y) = 3x^2y + \cos x$

1• $\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2$

1• $\frac{\partial f}{\partial x} = 3y2x - \operatorname{sen} x$

2• $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(6yx - \operatorname{sen} x) = 6y - \cos x$

2• $\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2) = 0$

2• $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2) = 6x$

2• $\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(6yx - \operatorname{sen} x) = 6x$

3• $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(6y - \cos x) = \operatorname{sen} x$

3• $\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(0) = 0$

3• $\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y}(6y - \cos x) = 6$

3• $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(0) = 0$

3• $\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(6x) = 6$

3• $\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y}(6x) = 0$

- **Derivada direccional y diferencial:**

Para ver el (de)crecimiento de una función en (x_0, y_0):

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0, y_0) + \Delta x\,(1,0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0) + \Delta y\,(0,1) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

Derivada direccional:

$$D\vec{u} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0) + h(u_1, u_2) - f(x_0, y_0)}{h}$$

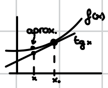
$\vec{u}(u_1, u_2) \longrightarrow |\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = 1$

↳ dirección y sentido derivada

- **Recta tangente:**

$y = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)$

Aprox. valores de $f(x)$ en ptos cercanos a x_0



Si $f(x)$ es deriv. en el pto $x_0 \longrightarrow \exists$ recta tg en el (x_0, y_0)

- **Plano tangente:**

Plano que contiene todas las rectas tg de las deriv. direccionales

Plano tg $= z = f(x,y)$

$$z = f(x_0, y_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right)\cdot(x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)\cdot(y - y_0)$$

Punto $(x_0, y_0, z_0) \rightarrow z_0 = f(x_0, y_0)$

$\updownarrow$

En forma de producto escalar:

$$0 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0),\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0),\ -1\right)\cdot\left(x - x_0,\ y - y_0,\ f(x_0, y_0)\right)$$

- **Vector normal a la superficie:** ($\perp$)

Cualquier vector perpendicular al plano tg si su multiplicación da 0

↓

$(x - x_0,\ y - y_0,\ z - f(x_0, y_0))$

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0),\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0),\ -1\right)$$

$$\vec{n} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\,\vec{i},\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\,\vec{j},\ -\vec{k})$$

- **Diferencial:**

$f(x,y)$ es diferenciable en (x_0, y_0) si admite plano tg en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$

- Linealizar la función:

$f(x,y)$ se puede aproximar usando plano tg alrededor del pto (x_0, y_0)

$$f(x,y) \approx f(x_0, y_0) = f(x_0, y_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right)\cdot(x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)\cdot(y - y_0)$$

- Si $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right)\cdot \Delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)\cdot \Delta y}_{\text{diferencial}}$$

$$df((x_0, y_0), (\Delta x, \Delta y)) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right)\cdot \Delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)\cdot \Delta y$$

$$\begin{cases} \text{Si } F(x,y) = x \longrightarrow dF = dx \longrightarrow \underbrace{\frac{\partial F}{\partial x}}_{1}\Delta x + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial y}}_{0}\Delta y \longrightarrow dF = dx = \Delta x \\ \text{Si } G(x,y) = y \longrightarrow dG = dy \longrightarrow \underbrace{\frac{\partial G}{\partial x}}_{0}\Delta x + \underbrace{\frac{\partial G}{\partial y}}_{1}\Delta y \longrightarrow dG = dy = \Delta y \end{cases}$$

- Si $f(x,y)$ y sus deriv. parciales son continuas $\rightarrow f(x,y)$ diferenciable en todos los ptos

- **Cálculo de la derivada direccional:**

Si $\left\{\begin{array}{l} f(x,y) \text{ es diferencial en } x_0, y_0 \\ \exists \text{ vector unitario } \vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} \end{array}\right\}$ $D_{\vec{u}} f(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot u_2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)\cdot(u_1,u_2) = \underbrace{\vec{\nabla} f(x_0,y_0)}_{\text{gradiente}} \cdot \overbrace{\vec{u}}^{\text{unitario}}$

★ Si $\vec{v}$ no es unitario: $\vec{\nabla} f(x_0,y_0) \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

Si $\vec{u} = \vec{i} = (1,0) \longrightarrow D_{\vec{u}} f(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot 0 \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$

Si $\vec{u} = \vec{j} = (0,1) \longrightarrow D_{\vec{u}} f(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot 0 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot 1 \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$

Si $\vec{u} = -\vec{i} = (-1,0) \longrightarrow D_{\vec{u}} f(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot 0 \longrightarrow -\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$

Si $\vec{u} = -\vec{j} = (0,-1) \longrightarrow D_{\vec{u}} f(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot 0 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(-1) \longrightarrow -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$

- **Direcciones de máximo ascenso y descenso:**

Si $\left\{\begin{array}{l} \vec{\nabla} f(x_0,y_0) \neq (0,0) \\ \text{Diferenciable en } x_0, y_0 \end{array}\right\}$ $D_{\vec{u}} f(x_0,y_0) = \vec{\nabla} f(x_0,y_0)\cdot\vec{u} = |\vec{\nabla} f(x_0,y_0)|\cdot|\vec{u}|\cdot\cos(\vec{\nabla} f(x_0,y_0),\vec{u}) = |\vec{\nabla} f(x_0,y_0)|\cdot\cos(\vec{\nabla} f(x_0,y_0),\vec{u})$

$\left\{\begin{array}{l} \underline{\text{Mayor crecimiento:}}\ \cos = 1 \longrightarrow \cos(0°) = 1 \longrightarrow \underset{1}{\vec{u}} = \frac{\vec{\nabla} f(x_0,y_0)}{|\vec{\nabla} f(x_0,y_0)|} \longrightarrow D_{\vec{u}} f(x_0,y_0) = |\vec{\nabla} f(x_0,y_0)| \\ \underline{\text{Mayor descenso:}}\ \vec{u} = \frac{-\vec{\nabla} f(x_0,y_0)}{|\vec{\nabla} f(x_0,y_0)|} \end{array}\right.$

- **Gradientes y tg a curvas de nivel:**

Usando la regla de la cadena vemos que el gradiente es ⊥ a las curvas de nivel

- **Campos vectoriales:**

Función cuya variable de entrada $\vec{x}$ es un vector n-dimensional y el valor de salida de la función es otro m-dimensional

$f(\vec{x}) = (x_1, x_2 \ldots x_n)$ $\quad \vec{\nabla} f_i(\vec{x}) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}, \frac{\partial f_i}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f_i}{\partial x_n}\right)$

Ej: $\frac{\partial f}{\partial t}(t) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial t}(t), \frac{\partial f_2}{\partial t}(t), \frac{\partial f_3}{\partial t}(t)\right)$

★ Matriz jacobiana:

$$\hat{J}(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m(\vec{x})}{\partial x_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial f_m(\vec{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Al determinante se le llama jacobiano

- **Optimización:** extremos absolutos

→ Máx absoluto: $f(x,y) \leq f(x_0,y_0)$

→ Mín absoluto: $f(x,y) \geq f(x_0,y_0)$

→ Máx absoluto estricto: $f(x,y) < f(x_0,y_0)$

→ Mín absoluto estricto: $f(x,y) > f(x_0,y_0)$

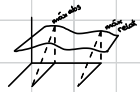
extremos relativos

→ Máx relativo: $f(x,y) \leq f(x_0,y_0), \quad \forall (x,y) \in B_r(x_0,y_0)$

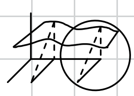
→ Mín relativo: $f(x,y) \geq f(x_0,y_0), \quad \forall (x,y) \in B_r(x_0,y_0)$

→ Máx relativo estricto: $f(x,y) < f(x_0,y_0), \quad \forall (x,y) \in B_r(x_0,y_0)$

→ Mín relativo estricto: $f(x,y) > f(x_0,y_0), \quad \forall (x,y) \in B_r(x_0,y_0)$



Si solo veo en esa bola, entonces es el máx abs. de la bola

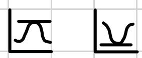


- **Condición necesaria:** condición para que existan extremos relativos

Si $\left\{\begin{array}{l} f(x,y) \text{ es diferenciable en } (x_0,y_0) \\ \text{extremo relativo en } (x_0,y_0) \end{array}\right\}$ $\vec{\nabla} f(x_0,y_0) = \underset{\text{vector de ceros}}{\vec{0}}$ $\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0 \end{array}\right.$

→ El gradiente es nulo en el extremo relativo

→ La recta tg es plana



- **Punto crítico:**

· Hacer las derivadas parciales e igualarlo a 0 $(\vec{\nabla} f(x,y) = \vec{0})$ $\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0 \end{array}\right.$

· Se hallan con las soluciones de $\vec{\nabla} f = \vec{0}$ $\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \end{array}\right.$

· Puede ser un máx, mín o punto de inflexión (de silla o de ensilladura)

Ej: $f(x,y) = 3x^2 - 2xy + y^2 - 8y$ Sacamos los puntos críticos:

- $\frac{\partial f}{\partial x} = 6x - 2y$
- $\frac{\partial f}{\partial y} = -2x + 2y - 8$

$\left\{\begin{array}{l} 6x - 2y = 0 \\ -2x + 2y - 8 = 0 \end{array}\right.$ $\longrightarrow 6\cdot 2 - 2y = 0 \to y = 6$

$4x = 8 \longrightarrow x = 2$

Punto crítico en el (2,6)

Ej: $f(x,y) = y^2 - x^2$ Sacamos los puntos críticos

$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$

$\left\{\begin{array}{l} -2x = 0 \to x = 0 \\ 2y = 0 \to y = 0 \end{array}\right.$

El pto crítico es el (0,0)

La imagen en el $f(0,0) = 0$

En ptos $(t,0)$ con $t > 0 \longrightarrow f(t,0) = -t^2 < \underset{f(0,0)}{0}$

En ptos $(0,t)$ con $t < 0 \longrightarrow f(0,t) = t^2 > \underset{f(0,0)}{0}$

El pto. (0,0) no es ni un mín. ni un máx.

↳ pto de inflexión, de silla o ensilladura

- **Condición suficiente:**

Campo escalar con derivadas cruzadas (xy, yx) de 2° orden iguales

- Hessiano: determinante de la matriz Hessiana

$$H_f = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}}_{\text{iguales}} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2$$

- D_1: determinante de la submatriz del Hessiano en la esquina superior izquierda
- D_2: determinante 2x2 de H_f

$$D_1 = \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right| = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \qquad D_2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2$$

$$H_f = \begin{vmatrix} \boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}_{D_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix}_{D_2}$$

Con estos valores se puede comprobar si un punto crítico es un extremo relativo

→ Si $D_2 \neq 0$ usamos el teorema de la condición suficiente para la existencia de extremos relativos

Si $(x_0, y_0) \in$ a un abierto D y es un punto crítico:

$$\begin{cases} D_2 = H_f(x_0, y_0) < 0 \longrightarrow (x_0, y_0) \text{ es un punto silla} \\ D_2 = H_f(x_0, y_0) > 0 \text{ y } D_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0 \rightarrow (x_0, y_0) \text{ es un máximo relativo} \\ D_2 = H_f(x_0, y_0) > 0 \text{ y } D_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0 \rightarrow (x_0, y_0) \text{ es un mínimo relativo} \end{cases}$$

Ej: $f(x,y) = 3x^2 - 2xy + y^2 - 8y$ punto crítico $(2,6)$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = 6x - 2y \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -2x + 2y - 8 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -2 \end{array}\right\}$$

$D_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6 \quad > 0$

$D_2 = H_f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2$

$D_2 = 6 \cdot 2 - (-2)^2 = 8 \quad > 0$

En $(2,6)$ el campo escalar → mín. relativo ($D_1 > 0$, $D_2 > 0$)

Ej: $f(x,y) = y^2 - x^2$ punto crítico $(0,0)$

$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x \longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2$ $\qquad D_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = -2 < 0$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y \longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$ $\qquad D_2 = H_f = -2 \cdot 2 - 0^2 = -4 < 0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0$ $\qquad$ En $(0,0)$ hay un punto silla

Ej: $f(x,y) = x \cdot e^y - e^x$

a) Sacamos los puntos críticos:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} e^y - e^x = 0 \xrightarrow{x=0} e^y - e^x = 0 \rightarrow e^y - \underbrace{e^0}_{1} = e^y - 1 \longrightarrow \ln(1) \rightarrow y = 0 \\ xe^y = 0 \rightarrow x = 0;\ y=0\ e^y \text{ nunca puede ser } 0 \end{cases} \Bigg\} \text{ Punto crítico en el } (0,0)$$

b) Analizamos el punto crítico:

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -e^x$ $\qquad D_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = -e^0 = -1 \quad < 0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x \cdot e^y$ $\qquad D_2 = H_f = -e^x \cdot xe^y - (e^y)^2 = -xe^x e^y - e^{2y} \xrightarrow{(0,0)} 0 - 1 = -1 \quad < 0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = e^y$ $\qquad$ En $(0,0)$ hay un punto silla

→ Si $D_2 = 0$ el teorema no nos dice nada → estudiar la gráfica

a) Campo escalar $= 0$

b) Representar las rectas resultantes en el plano y analizar cada zona:

- Si en todas las zonas + → mínimo
- Si en todas las zonas − → máximo
- Si cambia → punto silla

Ej: $f(x,y) = x^4 - y^4$ Punto crítico $(0,0)$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -4y^3 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -12y^2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0 \end{array}\right\}$$

$D_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 12 \cdot 0^3 = 0$

$D_2 = H_f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2$

$D_2 = -12x^2(-12y^2) - 0^2 = -12^2 x^2 y^2 = 0$

Usando el teorema no podemos concluir nada

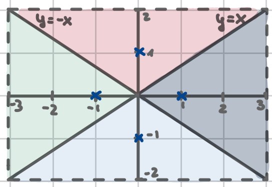
a) $f(x,y) = 0 \rightarrow x^4 - y^4 = 0 \rightarrow \overset{\text{Id. not.}}{(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)} = 0$

→ $x^2 + y^2 = 0 \rightarrow x^2 = y^2 \rightarrow x = \pm\sqrt{y^2} \longrightarrow x = \pm y$

→ $x^2 + y^2 = 0 \rightarrow x^2 = -y^2 \rightarrow x = \pm\sqrt{-y^2}\ \nexists$

Obtenemos las rectas $y = x$ $\quad y = -x$

b)



$f(0,1) = x^4 - y^4 \rightarrow 0^4 - 1^4 = -1 \ < f(0,0) = 0$

$f(1,0) = x^4 - y^4 \rightarrow 1^4 - 0^4 = 1 \ > f(0,0) = 0$

Como cambia, es un punto silla

- **Repaso:**

→ Para encontrar posibles puntos críticos o extremos relativos $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$

→ Siendo $D_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ $\qquad D_2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2$

$$\text{Si} \begin{cases} D_2 < 0 \longrightarrow \text{Punto silla} \\ D_2 > 0 \text{ y } D_1 < 0 \longrightarrow \text{Máximo} \\ D_2 > 0 \text{ y } D_1 > 0 \longrightarrow \text{Mínimo} \end{cases}$$

• Ej: $f(x,y) = \frac{x+y^3}{1+x^2}$ Sacamos el plano tg en el pto. (0,2)

a) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1\cdot(1+x^2)-(x+y^3)\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2-2x^2-2xy^3}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2-2xy^3}{(1+x^2)^2} \xrightarrow{(0,2)} \frac{1-0^2-2\cdot 0\cdot 2^3}{(1+0^2)^2} = 1$

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{3y^2}{1+x^2} \xrightarrow{(0,2)} \frac{3\cdot 2^2}{1+0^2} = 12$

$f(0,2) = \frac{0+2^3}{1+0^2} = 8$ (imagen)

El plano tangente es: $z = f(0,2) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,2)\right)\cdot(x-0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(0,2)\right)\cdot(y-2) \longrightarrow z = 8 + 1x + 12(y-2)$

b) Vector normal al plano tg: $\vec{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,2), \frac{\partial f}{\partial y}(0,2), -1\right) = (1, 12, -1) = 1\vec{i} + 12\vec{j} - \vec{k}$

c) Usamos el plano tg para aproximar cerca del punto $(x_0, y_0, z_0) = (0, 2, 8)$

→ Vamos a obtener aprox. de (-0'1, 2'2):

$f(-0'1, 2'2) \approx 8 - 0{,}1 + 12(2'2-2) = 10{,}3$ (Valor aprox.)

$f(-0'1, 2'2) = \frac{-0{,}1+2{,}2^3}{1+(-0{,}1)^2} = 10{,}4$ (Valor real)

→ Vamos a obtener aprox. de (0'25, 1'9):

$f(0'25, 1'9) \approx 8 + 0{,}25 + 12(1{,}9-2) = 7{,}05$ (Valor aprox.)

$f(0'25, 1'9) = \frac{0{,}25+(1{,}9)^3}{1+(1{,}9)^2} = 6{,}69$ (Valor real)

Aprox. no es tan buena por estar pto + alejado

• Ej: un rectángulo de lados $x=10$ y $y=24$

Se desea saber el valor de l (diagonal) si el lado x se alarga 4mm y el lado y se acorta 1mm

Pitágoras $= \sqrt{x^2+y^2}$

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \xrightarrow{(10,24)} \frac{\partial l}{\partial x}(10,24) = \frac{10}{26}$

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \xrightarrow{(10,24)} \frac{\partial l}{\partial y}(10,24) = \frac{24}{26}$

El valor exacto $l(10+0{,}4, 24-0{,}1) = \underline{26{,}0647}$

El valor aprox: $l(10+0{,}4, 24-0{,}1) \approx l(10,24) + \frac{\partial l}{\partial x}(10,24)\Delta x + \frac{\partial l}{\partial y}(10,24)\Delta y$

$\approx 26 + \frac{10}{26}\cdot 0{,}4 + \frac{24}{26}(-0{,}1) = \underline{26{,}06154}$

• Ej: $f(x,y) = 3x^2y$ en el punto P(1,2) utilizando las direcciones:

a) Dirección positiva del eje X:

$\frac{\partial f}{\partial x} = 3y2x = 6yx \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 6\cdot 2\cdot 1 = 12$

Pendiente de la recta tangente $tg(\alpha) = 12 \longrightarrow \alpha = arctg(12) = 85{,}2°$

b) Dirección negativa del eje Y:

$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = 3\cdot 1^2 = 3$

Pendiente de la recta tangente $tg(-\alpha) = 3 \longrightarrow \alpha = arctg(-3)$

c) Dirección del vector $\vec{u} = \frac{3}{5}\vec{i} + \frac{4}{5}\vec{j} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$:

Comprobamos si es unitario: $|\vec{u}| = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{1} = 1$ ✓

$D_{\vec{u}} f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\cdot\frac{3}{5} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\cdot\frac{4}{5}$

$= 12\cdot\frac{3}{5} + 3\cdot\frac{4}{5} = 9{,}6$

↳ Pendiente: $\alpha = arctg(9{,}6)$

• Ej: $f(x,y) = ln(y^2-x)$ en el punto P(1,0)

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y^2-x}(-1) = \frac{-1}{y^2-x} \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = \frac{-1}{-1} = 1$

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{y^2-x}(2y) = \frac{2y}{y^2-x} \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = \frac{2\cdot 0}{0^2-1} = 0$

No hacer esto sin antes ver si pertenece al dominio ✗

• Ej: $f(x,y) = 2ye^{yx^2} + x^2$ en el punto P(2,0)

a) Ángulos de ascenso en el eje X, Y:

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2ye^{yx^2}\cdot 2x + 2y \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(2,0) = 4$ Eje X: $\alpha = arctg(4)$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 2ye^{yx^2}\cdot x^2 + 2e^{yx^2} \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(2,0) = 2$ Eje Y: $\alpha = arctg(2)$

b) Vector máximo crecimiento:

$\vec{u} = \frac{\vec{\nabla} f(x_0,y_0)}{|\vec{\nabla} f(x_0,y_0)|} = \frac{(4,2)}{\sqrt{4^2+2^2}} = \frac{(4,2)}{\sqrt{20}} = \left(\frac{4}{\sqrt{20}}, \frac{2}{\sqrt{20}}\right)$

$D_{\vec{u}} f(x_0,y_0) = \vec{\nabla} f(x_0,y_0) \cdot \frac{\vec{\nabla} f(x_0,y_0)}{|\vec{\nabla} f(x_0,y_0)|} = \frac{(4,2)(4,2)}{\sqrt{4^2+2^2}} = \sqrt{20}$ $\alpha = arctg(\sqrt{20})$

c) Aproximar el punto (2.1, -3.0) al (2,0):

Sacamos el plano tangente:

$z = f(x_0,y_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right)\cdot(x-x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)\cdot(y-y_0)$

$z = 4 + 4(x-2) + 2(y-0)$

$f(2,0) = 2\cdot 0\cdot e^{0\cdot 2^2} + 2^2 = 4$

$f(2.1, -0.3) \approx 4 + 4(2.1-2) + 2(-0.3-0) = 3{,}8$

$f(1.8, 0.1) \approx 4 + 4(1.8-2) + 2(0.1-0) = 3{,}4$

Producto escalar:

$\vec{u}\cdot\vec{v} = P \quad \vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(\alpha)$

Ángulo entre 2 vectores:

$\cos(\alpha) = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$

Módulo o norma: $|\vec{v}| = \sqrt{x^2+y^2}$

$|\vec{u}| > 0 \qquad |\alpha\cdot\vec{u}| = |\alpha|\cdot|\vec{u}|$

Desigualdad triangular: $|\vec{u}+\vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|$

Desigualdad de Cauchy-Schwarz: $|\vec{u}\cdot\vec{v}| \leq |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|$

$a^2-b^2 = (a+b)\cdot(a-b)$

$(y^2-1)^2 = (y-1)^2\cdot(y+1)^2$

Dominio:

$Df = \{(x,y) / \quad \}$

Continuo:

$f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x)$

Límites laterales:

- Parábola
- Lím. direccionales: $y = mx$

Derivadas parciales:

$\dfrac{\partial f}{\partial x} \quad \dfrac{\partial f}{\partial y}$

Gradiente:

$\vec{\nabla} f(x_0, y_0) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)$

Límites:

NO usar L'Hôpital con 2 o + variables

Si no se puede simplificar para tener 1 variable $\longrightarrow$ Dividir la función en 2 cosas que se multiplican

$\left\{\begin{array}{l} g(x) \text{ tiende a } 0 \quad \lim_{x\to 0} g(x) \\ f(x) < \text{n° positivo} \quad f(x) \leq 1 \end{array}\right\} \quad \lim_{x\to a} g(x)\cdot f(x)$

Derivadas de 2° orden:

$\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} \qquad \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \qquad \dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \qquad \dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

1ª derivada

Derivadas cruzadas:

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ (= variables en ≠ orden)

- Si $f(x,y)$ es continua

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

Plano tangente: Plano que contiene todas las rectas tg^x de las deriv. direccionales

$z = f(x_0,y_0) + \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right)\cdot(x-x_0) + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)\cdot(y-y_0)$

Recta tangente:

$y = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0)$

Derivada direccional: Ver el (de)crecimiento de la función

unitario

Si $\vec{v}$ no es unitario:

$D_{\vec{u}} f(x_0,y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot u_1 + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot u_2 = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)\cdot(u_1,u_2) = \vec{\nabla} f(x_0,y_0)\cdot\vec{u} = \vec{\nabla} f(x_0,y_0)\cdot\dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

gradiente

Derivada diferencial: $f(x_0,y_0)$ se puede aproximar a $f(x,y)$

Sustituir los valores de (x_0,y_0) en el plano tangente

Si $f(x,y), \dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ son continuas $\longrightarrow$ diferenciable

Optimización: Para encontrar posibles puntos críticos o extremos relativos

1.- $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0 \end{array}\right.$ $\longrightarrow$ 2.- Calcular D_1 y D_2

$D_1 = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

$D_2 = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2$

$D_2 \neq 0$: Si $\left\{\begin{array}{l} D_2 < 0 \longrightarrow \text{Punto silla} \\ D_2 > 0 \text{ y } D_1 < 0 \longrightarrow \text{Máximo} \\ D_2 > 0 \text{ y } D_1 > 0 \longrightarrow \text{Mínimo} \end{array}\right.$

$D_2 = 0$:

1.- $f(x,y) = 0$

2.- Dibujar las rectas que salen al $f(x,y) = 0$

3.- Coger n° de cada zona y ver si es + o -

- Si en todas las zonas + → mínimo
- Si en todas las zonas − → máximo
- Si cambia → punto silla

Ej: $f(x,y) = x^4 - y^4$ Punto crítico (0,0)

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = 4x^3$

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = -4y^3$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -12y^2$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0$

$D_1 = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 12\cdot 0^3 = \underline{0}$

$D_2 = Hf = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2$

$D_2 = -12x^2(-12y^2) - 0^2 = -12^2x^2y^2 = \underline{0}$

Usando el teorema no podemos concluir nada

Ej:

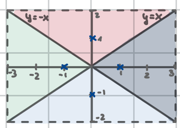
a) $f(x,y) = 0 \to x^4 - y^4 = 0 \to (x^2-y^2)(x^2+y^2) = 0$ (Id not.)

→ $x^2+y^2 = 0 \to x^2 = y^2 \to x = \pm\sqrt{y^2} \longrightarrow x = \pm y$

→ $x^2+y^2 = 0 \to x^2 = -y^2 \to x = \pm\sqrt{-y^2}\ \cancel{\exists}$

Obtenemos las rectas $y = x \quad y = -x$

b)



$f(0,1) = x^4 - y^4 \to 0^4 - 1^4 = -1 < f(0,0) = 0$

$f(1,0) = x^4 - y^4 \to 1^4 - 0^4 = 1 > f(0,0) = 0$

Como cambia, es un punto silla

Direcciones de máximo ascenso y descenso:

Si $\left\{\begin{array}{l} \vec{\nabla} f(x_0,y_0) \neq (0,0) \\ \text{Diferenciable en } x_0, y_0 \end{array}\right\}$ $D_{\vec{u}} f(x_0,y_0) = \vec{\nabla} f(x_0,y_0)\cdot\vec{u} = |\vec{\nabla} f(x_0,y_0)|\cdot|\vec{u}|\cdot\cos(\vec{\nabla} f(x_0,y_0), \vec{u}) = |\vec{\nabla} f(x_0,y_0)|\cdot\cos(\vec{\nabla} f(x_0,y_0), \vec{u})$

- Mayor crecimiento: $\cos = 1 \longrightarrow \cos(0°) = 1 \longrightarrow \vec{u} = \dfrac{\vec{\nabla} f(x_0,y_0)}{|\vec{\nabla} f(x_0,y_0)|} \longrightarrow D_{\vec{u}} f(x_0,y_0) = |\vec{\nabla} f(x_0,y_0)|$ ($|\vec{u}| = 1$)
- Mayor descenso: $\vec{u} = \dfrac{-\vec{\nabla} f(x_0,y_0)}{|\vec{\nabla} f(x_0,y_0)|}$

- **Descomposición:**

$ax^2 + bx + c \rightarrow \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$3x^2 + 2x - 4$

Id. notable:

$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \longrightarrow (x+2)^2 = x^2 + 4 + 4x$

$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \longrightarrow (x-3)^2 = x^2 + 9 - 6x$

$(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2 \longrightarrow (x+1) \cdot (x-1) = x^2 - \underbrace{1^2}_{1}$

Factor común:

$x^2 + 2x \longrightarrow x(x+2)$

$x^2 - x \longrightarrow x(x-1)$