

УДК 522.2 : 523.164

## ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ГАЗОВОЙ ЯЧЕЙКИ РАДИОСПЕКТРОСКОПА С АКУСТИЧЕСКИМ ДЕТЕКТОРОМ

А. В. Буренин

На базе уравнений неравновесной термодинамики решена задача о процессах в газовой ячейке радиоспектроскопа с акустическим детектором. На основе полученного решения проведена оптимизация параметров газовой ячейки.

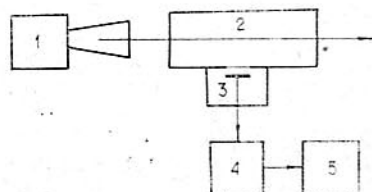
Для исследования молекулярных спектров поглощения в субмиллиметровом диапазоне длин волн построен радиоспектроскоп с акустическим детектором [1, 2]. Данный прибор позволил получить наивысшую в этом диапазоне чувствительность по коэффициенту поглощения линий ( $\gamma_{\min} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ см}^{-1}$ ) и осуществить автоматическую запись спектров во всем интервале перестройки по частоте источника когерентного излучения (ЛОВ) без каких-либо СВЧ подстроек. В процессе создания прибора встала задача оптимизации его параметров и определения предельной чувствительности. Фактически, аналогичные вопросы последовательно разрабатывались рядом авторов [3-7], причем большинство результатов связано с созданием оптико-акустических приемников и газоанализаторов. Эти результаты, как правило, получены в достаточно грубом приближении без количественных оценок возникающих при этом ошибок, в связи с чем их применение затруднительно. Поэтому была предпринята попытка строго решить задачу о процессах в газовой ячейке радиоспектроскопа на базе уравнений неравновесной термодинамики с использованием на определенном этапе ЭВМ.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В радиоспектроскопе с акустическим детектором (блок-схема приведена на рис. 1) когерентное излучение источника пропускается через ячейку с исследуемым газом. При совпадении частоты излучения с частотой спектральной линии газ поглощает мощность, нагре-

Рис. 1. Блок-схема радиоспектроскопа с акустическим детектором:

1 — источник СВЧ излучения; 2 — ячейка с исследуемым газом; 3 — приемник изменения давления в ячейке; 4 — усилитель; 5 — индикаторное устройство.



вается и создает повышение давления в ячейке, которое и представляет собой сигнал о наличии линии поглощения. Сигнал регистрируется с помощью электронной схемы слежения за положением мембраны, прогибающейся под действием избыточного давления. Определение оптимальных параметров газовой ячейки и мембраны и определение предельной чувствительности, характеризуемой обычно минимально

обнаружимым коэффициентом поглощения газа на единицу длины, основывается на решении задачи нахождения максимума отношения сигнал/шум по этим параметрам. Решение проводится при заданной мощности проходящего через сечение ячейки излучения для случая слабых линий\*. Область параметров, для которой справедливо предлагаемое ниже решение задачи, по нашему мнению, наиболее интересна с точки зрения практического применения результатов.

## ДИНАМИКА ПРОЦЕССОВ В ГАЗОВОЙ ЯЧЕЙКЕ РАДИОСПЕКТРОСКОПА

Будем описывать процессы, происходящие в ячейке, с помощью уравнений неравновесной термодинамики. Тем самым мы ограничимся рассмотрением процессов с характерным временем изменения, много большим времени установления термодинамического равновесия в физически бесконечно малом объеме, которое по порядку величины совпадает со средним временем между столкновениями молекул\*\*.

### 1. Модель ячейки с жесткими стенками

Однокомпонентный изотропный разреженный газ занимает некоторый замкнутый объем, в котором равномерно распределены тепловые источники. Объем ограничен неподвижной поверхностью, находящейся при постоянной температуре.

Модель применима только в том случае, если мембрана слабо влияет на величину избыточного давления, что не выполняется при оптимальной передаче сигнала на мембрану. Однако предварительное рассмотрение данной модели позволяет упростить изложение в случае учета влияния мембраны.

Модель ячейки описывается системой уравнений

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\operatorname{div} \rho \mathbf{v}, \\ \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= -\operatorname{grad} p + \eta \Delta \mathbf{v} + \left( \zeta + \frac{\eta}{3} \right) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v}, \\ \rho \frac{du}{dt} &= \lambda \Delta T - p \operatorname{div} \mathbf{v} + \sigma'_{ik} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} + Q, \\ p &= p(\rho, T), \quad u = u(\rho, T), \\ T|_S &= T_0, \quad \mathbf{v}|_S = 0.\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь  $\rho$ ,  $p$ ,  $T$  — плотность, давление и температура газа,  $\mathbf{v}$  — массовая скорость,  $u$  — плотность внутренней энергии на единицу массы,  $\eta$ ,  $\zeta$  — коэффициенты вязкости,  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности\*\*\*,  $\sigma'_{ik} = \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_e}{\partial x_e} \right) + \zeta \delta_{ik} \frac{\partial v_e}{\partial x_e}$  — «вязкий» тензор напряжений,  $Q$  — плотность тепловых источников на единицу объема,  $T_0$  — температура поверхности, ограничивающей объем с газом.

\* Мы называем линию слабой, если относительное изменение мощности излучения в ячейке из-за поглощения газом мало.

\*\* Имеется в виду радиоспектроскопическое значение среднего времени между столкновениями. При давлении в 1 мм рт. ст. его типичная величина порядка  $10^{-7}$  сек.

\*\*\* Система (1) выписана в предположении, что в рассматриваемом интервале изменения термодинамических параметров, в процессе динамики коэффициенты вязкости и теплопроводности практически постоянны [8].

Для рассмотрения интересующих нас процессов систему (1) можно линеаризовать вблизи невозмущенного состояния ( $Q = 0$ ):

$$\begin{aligned}\rho &= \rho_0(1 + r), & T &= T_0(1 + \theta), \\ u &= u_0(1 + \varepsilon), & p &= p_0(1 + \delta).\end{aligned}$$

В результате

$$\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial t} &= -\operatorname{div} \mathbf{v}, \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= -c^2 \left[ \operatorname{grad} \delta - \frac{\eta}{p_0} \Delta \mathbf{v} - \frac{\zeta + \eta/3}{p_0} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} \right], \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} &= a^2 \Delta \theta + \frac{2}{f} \frac{\partial r}{\partial t} + \frac{2}{f} \frac{Q}{p_0}, \\ p_0 &= \frac{\rho_0}{m_0} k T_0 = c^2 \rho_0, & \delta &= r + \theta, \\ u_0 &= \frac{fk}{2m_0} T_0 = \frac{f}{2} c^2, & \varepsilon &= \theta, \\ \theta|_S &= 0, & \mathbf{v}|_S &= 0.\end{aligned}\tag{2}$$

Здесь  $c^2 = \frac{k}{m_0} T_0$ ,  $a^2 = \frac{2}{f} \frac{\lambda T_0}{p_0}$ ,  $m_0$  — масса молекулы газа,  $k$  — постоянная Больцмана,  $f$  — число степеней свободы, дающих вклад в теплоемкость при  $T = T_0$ .

Динамика существенно зависит от значений следующих четырех безразмерных параметров:

$$\begin{aligned}\pi_1 &= \left( \frac{l_0}{\tau} \frac{1}{c} \right)^2, & \pi_2 &= \frac{\lambda T_0}{p_0 l_0^2} \tau, \\ \pi_3 &= \frac{\eta}{p_0 \tau}, & \pi_4 &= \frac{\zeta}{p_0 \tau},\end{aligned}$$

где  $\tau$  — характерное время изменения амплитуды источников;  $l_0$  — характерный размер ячейки.

Мы рассмотрим решение задачи в области\*

$$\pi_1 \ll 1, \quad \pi_3 \ll 1, \quad \pi_4 \ll 1.$$

Это позволяет резко упростить первые два уравнения системы (2).

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &\sim \frac{l}{\tau} r, \\ \frac{v/\tau}{c^2(r/l)} &\sim \frac{l^2}{\tau^2} \frac{1}{c^2} \leq \frac{l_0^2}{\tau^2} \frac{1}{c^2} = \pi_1 \ll 1, \\ \frac{(\eta/p_0)(v/l^2)}{r/l} &\sim \frac{\eta}{p_0 \tau} = \pi_3 \ll 1, & \frac{(\zeta/p_0)(v/l^2)}{r/l} &\sim \frac{\zeta}{p_0 \tau} = \pi_4 \ll 1,\end{aligned}\tag{3}$$

\* При  $l_0 \sim 1$  см,  $p_0 \sim 1$  мм рт. ст.,  $\tau \sim 10^{-3}$  сек,  $T_0 \sim 300^\circ\text{K}$ ,  $c \sim 3 \cdot 10^4$  см/сек,  $\lambda \sim 5 \cdot 10^{-5}$  кал/см·сек·град,  $\eta, \zeta \sim 10^{-4}$  э/сек·см безразмерные параметры принимают следующие значения:  $\pi_1 \sim 10^{-3}$ ;  $\pi_2 \sim 0,5$ ;  $\pi_3, \pi_4 \sim 10^{-4}$ .

где  $l$  — характерное расстояние изменения величин  $v$  и  $r$ . Это расстояние по порядку величины не превосходит  $l_0$ , так как  $v|_S = 0$  и  $\int r dv = 0$ . В результате вместо первых двух уравнений получаем

$$\delta = r + \theta = \text{const}(t), \quad (4)$$

т. е. данное приближение соответствует квазистатическому изменению давления в ячейке. Определяя  $\text{const}(t)$  путем интегрирования выражения (4) по объему ячейки, имеем

$$\begin{aligned} \delta = r + \theta &= \bar{\theta}, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} - b^2 \Delta \theta &= s^2 \left( \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + \frac{Q}{p_0} \right), \\ \theta|_S &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

В принципе, из (5) можно получить некоторые интересные результаты. Однако здесь рациональнее перейти к обобщению на случай учета влияния мембраны.

## 2. Модель ячейки с мембраной

В неподвижной поверхности, ограничивающей объем с газом, имеется мембрана, прогибающаяся под действием избыточного давления  $p_0 \delta$ . Относительное изменение объема ячейки считается при этом малым, т. е.  $V = V_0(1 + \sigma)$ ,  $\sigma \ll 1$ . Мембрана, так же как и стенки, поддерживается при постоянной температуре.

Изменение термодинамических параметров в данной модели под действием тепловых источников определяется следующими двумя процессами: а) релаксацией тепла через поверхность ячейки; б) работой, совершаемой газом над мембраной. Оценки (3), позволяющие перейти к приближенному уравнению (4), для второго процесса несправедливы. Дело в том, что характерное расстояние изменения величины  $r$  в этом случае может намного превышать  $l_0$ . Однако нетрудно сделать оценки и для этого процесса.

При отклонении мембраны газ совершает работу. Изменение температуры за счет этого эффекта следующее:

$$\theta \left( \frac{1}{\tau} + \frac{a^2}{l^2} \right) \sim \frac{r}{\tau} \quad \text{или} \quad \theta \sim \frac{r}{1 + \pi_2}. \quad (6)$$

Если  $\pi_2 \gg 1$ , то изменение температуры мало. Это соответствует медленным процессам, при которых температура поддерживается за счет релаксации тепла через поверхность. В обратном случае релаксация тепла через поверхность происходит не успевает и меняется внутренняя энергия газа. Используя (6), получаем

$$\begin{aligned} \frac{v/\tau}{c^2(\theta/l)} &\sim \frac{\pi_1}{1 + \pi_2} < \pi_1 \ll 1, \\ \frac{(\eta/p_0)(v/l^2)}{\theta/l} &\sim \frac{\pi_3}{1 + \pi_2} < \pi_3 \ll 1, \quad \frac{(\zeta/p_0)(v/l^2)}{\theta/l} \sim \frac{\pi_4}{1 + \pi_2} < \pi_4 \ll 1, \end{aligned}$$

т. е. для второго процесса также справедливо приближенное уравнение (4). Интегрируя его по объему  $V_0$ , имеем

$$\delta = r + \theta = \bar{r} + \bar{\theta} = -\sigma + \bar{\theta}.$$

Для того, чтобы сделать задачу замкнутой, необходимо написать уравнение движения мембраны. Мы рассмотрим случай сильно натянутой круглой мембраны, работающей в линейном квазистатическом режиме\*:

$$x_m = \frac{p_0 \delta}{4T^*} (R^2 - r_m^2), \quad x = \frac{p_0 \delta}{4T^*} R^2.$$

Здесь [9]  $x_m$  — смещение от равновесного состояния точки круглой мембраны с текущим радиусом  $r_m$ ;  $T^*$  — растягивающая сила, приложенная к краю мембраны на единицу длины;  $x$  — смещение центра мембраны;  $R$  — радиус мембраны. В результате система (2) преобразуется к следующему виду:

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{1}{1+m} \bar{\theta}, \quad x = \frac{1}{h_1} \frac{1}{1+m} \bar{\theta}, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} - b^2 \Delta \theta &= s^2 \left( \frac{1}{1+m} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + \frac{Q}{p_0} \right), \\ \theta|_S &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $m = \frac{h_1}{h_2} = \frac{\pi R^4 p_0}{8 V_0 T^*}$  характеризует соотношение между упругостями газа и мембраны ( $\delta = h_1 x$ ,  $\sigma = h_2 x$ ). Система (5), описывающая процессы в ячейке с жесткими стенками, получается из (7) при  $m \ll 1$ .

Поскольку смещение мембраны связано только с интегральными термодинамическими характеристиками системы, имеем

$$x(t) = \int_{-\infty}^t \bar{G}(t-\tau) \frac{s^2}{1+m} \left( \frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{1}{h_1} \frac{Q(\tau)}{p_0} \right) d\tau, \quad (8)$$

т. е. задача свелась к одномерному линейному интегродифференциальному уравнению. Функция Грина  $\bar{G}(t)$  будет ниже рассчитана для двух частных случаев: а) прямоугольная ячейка; б) цилиндрическая ячейка.

### 3. Расчет функции Грина

#### 1) Прямоугольная ячейка

$$0 \leq x \leq l_1, \quad 0 \leq y \leq l_2, \quad 0 \leq z \leq l.$$

Формальное решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = b^2 \Delta \theta, \quad \theta|_{t=0} = \theta_0(x, y, z), \quad \theta|_S = 0$$

приведено в [10]. Функция Грина, используемая в этой работе, является откликом на возмущение типа

$$\theta_0(x, y, z) = 1, \quad x, y, z \in V_0.$$

Отсюда

\* Именно с такими мембранами приходится иметь дело на практике [2].

$$\bar{G}(t) = \left(\frac{8}{\pi^2}\right)^3 \sum_{p_1 p_2 p_3=0}^{\infty} \frac{1}{(2p_1+1)^2} \frac{1}{(2p_2+1)^2} \frac{1}{(2p_3+1)^2} \times$$

$$\times \exp \left\{ -\pi^2 b^2 \left[ \frac{(2p_1+1)^2}{l_1^2} + \frac{(2p_2+1)^2}{l_2^2} + \frac{(2p_3+1)^2}{l^2} \right] t \right\}, \quad (9)$$

$$\bar{G}(0) = 1.$$

## 2) Цилиндрическая ячейка

$$0 \leq \rho \leq \rho_0, \quad 0 \leq z \leq l.$$

Применяя тот же метод, получаем

$$\bar{G}(t) = \frac{32}{\pi^2} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} \frac{1}{\mu_{0j}^2} \exp \left\{ -b^2 \left[ \frac{\mu_{0j}^2}{\rho_0^2} + \frac{\pi^2 (2p+1)^2}{l^2} \right] t \right\}, \quad (10)$$

$$\bar{G}(0) = 1.$$

## 4. Приближенное решение уравнения для колебаний мембраны

Работать с функциями Грина в виде бесконечных рядов (9), (10) неудобно. Поэтому в первом приближении положим

$$\bar{G}(t) = \exp(-\beta b^2 t),$$

где

$$\beta = \begin{cases} \pi^2 (1/l_1^2 + 1/l_2^2 + 1/l^2) & \text{— прямоугольная ячейка} \\ \mu_{01}^2/\rho_0^2 + \pi^2/l^2 & \text{— цилиндрическая ячейка} \end{cases}.$$

В этом случае уравнение (8) можно преобразовать к виду

$$\frac{dx}{dt} + \frac{x}{\tau} = \frac{s^2}{1-s^2+m} \frac{1}{h_1} \frac{Q}{\rho_0},$$

где

$$\tau = \frac{1-s^2+m}{1+m} \frac{1}{\beta b^2}.$$

Для плотности тепловых источников нетрудно получить выражение\*

$$Q(t) = \frac{W\gamma l}{V_0} \eta(t).$$

Здесь  $W$  — мощность источника электромагнитного излучения,  $l$  — длина ячейки вдоль оси распространения электромагнитного поля,  $\gamma$  — коэффициент поглощения газа на единицу длины,  $\eta(t)$  — функция модуляции тепловых источников (так  $\eta(t) = 1$ ). Вполне достаточно рассмотреть гармоническую зависимость источников от времени, т. е.

$$\eta(t) \rightarrow x(t) e^{i\omega t},$$

где  $x$  — коэффициент разложения периодической модуляционной функции в ряд Фурье. В итоге получаем

\* Считается, что сечение пучка электромагнитного поля совпадает с сечением ячейки.



$$x(t) = \frac{z}{4} \frac{W}{T^*} \frac{R^2}{V_0} \gamma l \frac{s^2}{1-s^2+m} \frac{1}{\tau^{-1}+i\omega} (e^{i\omega t} - e^{-t/\tau}). \quad (11)$$

Степень обоснованности данного приближения будет определена путем сравнения полученных результатов с результатами точного расчета для случая цилиндрической ячейки.

### 5. Строгое решение уравнения для колебаний мембраны

Используя фурье-преобразование, из (8) можно получить

$$x(\omega) = \frac{1}{h_1} \frac{Q(\omega)}{p_0} \frac{s^2}{1+m} \left\{ \frac{\bar{G}'(\omega)}{|\bar{G}(\omega)|^2} + i \left[ \frac{\bar{G}''(\omega)}{|\bar{G}(\omega)|^2} - \frac{\omega s^2}{1+m} \right] \right\}^{-1}, \quad (12)$$

где

$$\bar{G}(\omega) = \bar{G}'(\omega) - i\bar{G}''(\omega) = \int_0^\infty \bar{G}(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Введем два корректирующих множителя  $\mathcal{E}_1$  и  $\mathcal{E}_2$ , определенных следующими равенствами:

$$\beta b^2 \mathcal{E}_1 = \frac{\bar{G}'(\omega)}{|\bar{G}(\omega)|^2}, \quad \omega \mathcal{E}_2 = \frac{\bar{G}''(\omega)}{|\bar{G}(\omega)|^2}. \quad (13)$$

С учетом (13) из выражения (12) можно получить

$$|x(\omega)| = \frac{|z|}{4} \frac{W}{T^*} \frac{R^2}{V_0} \gamma l \frac{s^2}{\mathcal{E}_2 - s^2 + \mathcal{E}_2 m} \frac{\tau^*}{[1 + (\omega \tau^*)^2]^{1/2}}, \quad (14)$$

где

$$\tau^* = \frac{\mathcal{E}_2 - s^2 + \mathcal{E}_2 m}{1+m} \frac{1}{\mathcal{E}_1 \beta b^2}.$$

Приближенному расчету соответствует  $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = 1$ . Таким образом, отличие корректирующих множителей от единицы будет характеризовать степень отклонения приближенного расчета от точного.

Выражения (13), рассматриваемые как уравнения относительно  $\mathcal{E}_1$  и  $\mathcal{E}_2$ , зависят от четырех параметров  $\rho_0$ ,  $l$ ,  $\omega^2$ ,  $b^2$ . Однако число параметров можно сократить до двух:

$$\begin{aligned} \bar{G}'(\omega) &= \frac{32}{\pi^2} \frac{\rho_0^2}{b^2} S(E, D) = \frac{32}{\pi^2} \frac{\rho_0^2}{b^2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} S[k, n], \\ \bar{G}''(\omega) &= \frac{32}{\pi^2} \frac{\rho_0^2}{b^2} EJ(E, D) = \frac{32}{\pi^2} \frac{\rho_0^2}{b^2} E \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J[k, n], \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} S[k, n] &= \frac{1}{(2k+1)^2} \frac{1}{\mu_{0n}^2} \frac{\mu_{0n}^2 + D(2k+1)^2}{[\mu_{0n}^2 + D(2k+1)^2]^2 + E^2}, \\ J[k, n] &= \frac{1}{(2k+1)^2} \frac{1}{\mu_{0n}^2} \frac{1}{[\mu_{0n}^2 + D(2k+1)^2]^2 + E^2}. \end{aligned}$$

При этом были введены два следующих безразмерных параметра:

$$D = \pi^2 \rho_0^2 / l^2, \quad E = \omega \rho_0^2 / b^2.$$

С учетом (15) уравнения (13) для  $\mathcal{E}_1$  и  $\mathcal{E}_2$  можно записать следующим образом:

$$\mathcal{E}_1 = \frac{\pi^2}{32} \frac{S(E, D)}{S^2(E, D) + E^2 J^2(E, D)} \frac{1}{\mu_{01}^2 + D},$$

$$\mathcal{E}_2 = \frac{\pi^2}{32} \frac{J(E, D)}{S^2(E, D) + E^2 J^2(E, D)}.$$

Расчет корректирующих множителей проводился на ЭВМ для следующих интервалов изменения параметров\*:

$$2 \cdot 10^{-3} \leq E \leq 10^4, \quad 2 \cdot 10^{-2} \leq D \leq 10^2.$$

Результаты расчета представлены на рис. 2 и 3. Так как корректирующие множители являются очень медленными функциями параметров

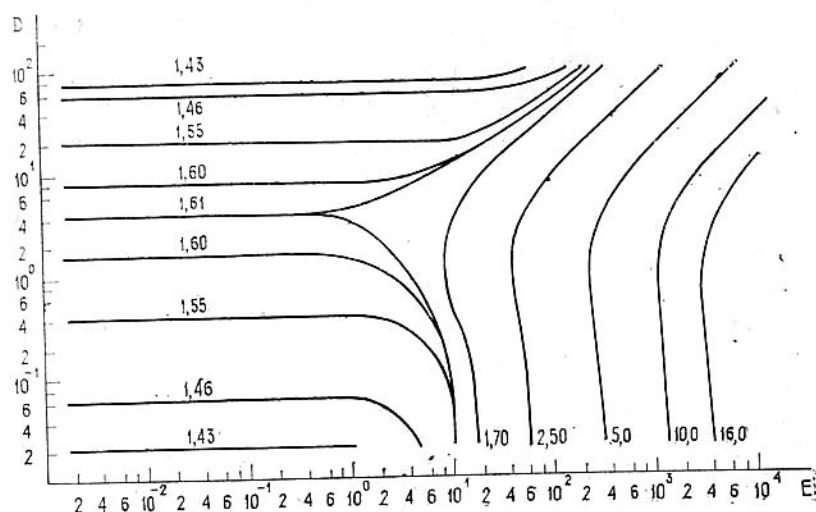


Рис. 2. Поле значений корректирующего множителя  $\mathcal{E}_1$  от безразмерных параметров  $E$  и  $D$ . Сплошные линии являются линиями уровня. Цифры обозначают численное значение величины  $\mathcal{E}_1$ .

акустической системы, то приближенная теория качественно верно передает характер зависимости от этих параметров. Точный расчет приводит лишь к некоторым количественным поправкам. Благодаря этому удается придать простой физический смысл величине  $\tau^*(\omega)$ , которая будет являться временем релаксации при воздействии тепловых источников типа  $Q(t) = 1(t)e^{i\omega t}$ . В области  $\omega\tau^* \sim 1$  меняется характер зависимости корректирующих множителей от частоты, причем, начиная с этой области, роль количественных поправок растет с повышением частоты. Это связано с тем, что начинает возрастать роль быстрых релаксационных членов в разложении функции Грина (10), которыми приближенная теория пренебрегает.

\* При  $\lambda \sim 5 \cdot 10^{-5}$  кал/см·сек·град,  $T_0 \sim 300^\circ\text{K}$ ,  $\rho_0 \sim 1$  мм рт. ст.,  $f = 6$ ,  $\rho_0 \sim 1$  см,  $l \sim 5$  см,  $\omega \sim 1000$  рад/сек (160 гц) безразмерные параметры принимают следующие значения:  $D \sim 0,5$ ;  $E \sim 10$ .



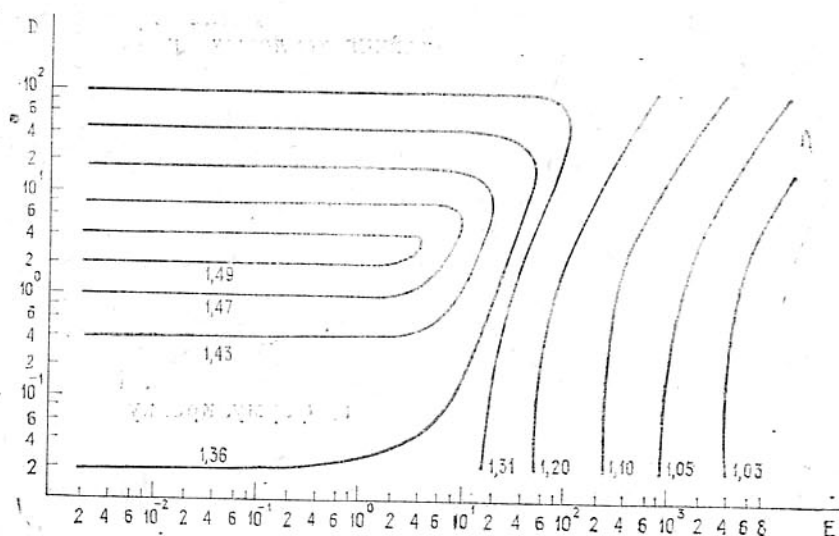


Рис. 3. Поле значений корректирующего множителя  $\mathcal{E}_2$  от безразмерных параметров  $E$  и  $D$ . Сплошные линии являются линиями уровня. Цифры обозначают численное значение величины  $\mathcal{E}_2$ .

### СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ФЛУКТУАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ В ГАЗОВОЙ ЯЧЕЙКЕ РАДИОСПЕКТРОСКОПА

Предельная чувствительность радиоспектроскопа с акустическим детектором ввиду малости относительного изменения термодинамических параметров исследуемого газа в процессе динамики определяется равновесными флуктуационными процессами в газовой ячейке. Для нахождения предельной чувствительности достаточно знать спектральную плотность мощности флуктуационных колебаний мембраны в частотном диапазоне приема сигнала. Расчет будет основываться на флуктуационно-диссипативной теореме (ФДТ) [11].

#### 6. Спектральная плотность мощности флуктуационных колебаний мембраны

В рабочем диапазоне частот приема мембрана является неинерционным линейным осциллятором, характеристики которого зависят от параметров газа. Необходимо найти связь между средним (по статистическому ансамблю) отклонением осциллятора и сопряженной этому отклонению по ФДТ силой, т. е. решить следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}\delta &= r + \theta = \bar{r} + \bar{\theta}, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} - b^2 \Delta \theta &= s^2 \left( \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} \right), \\ \theta|_S &= 0, \\ 4\pi T^* x &= f + p_0 \pi R^2 \delta, \\ r &= -\sigma = -\frac{1}{2} \frac{\pi R^2}{V_0} x,\end{aligned}$$

где  $f$  — сила, отклик на которую надо найти. После преобразований, во многом аналогичных случаю наличия тепловых источников, получаем

$$\left[ 4\pi T^* (1+m) \frac{1 + (\omega\tau^*)^2 P}{1 + (\omega\tau^*)^2 P^2} + i4\pi T^* m s^2 \frac{1+m}{\mathcal{Q}_2 - s^2 + \mathcal{Q}_2 m} \frac{\omega\tau^*}{1 + (\omega\tau^*)^2 P^2} \right] x = f,$$

где

$$P = \frac{1+m}{\mathcal{Q}_2 - s^2 + \mathcal{Q}_2 m} (\mathcal{Q}_2 - s^2).$$

Реальная часть определяет упругость осциллятора, а мнимая — его коэффициент затухания. Слабая зависимость упругости осциллятора от частоты связана с изменением режима работы газа (от изотермического до адиабатического). Используя формулировку ФДТ, имеем

$$\langle (x^2)_\omega \rangle = \frac{1}{\pi} \frac{1}{4\pi T^*} \frac{ms^2}{(1+m)(\mathcal{Q}_2 - s^2 + \mathcal{Q}_2 m)} \frac{\tau^*}{1 + (\omega\tau^*)^2} kT_0,$$

где  $\langle (x^2)_\omega \rangle$  — спектральная плотность мощности флуктуационных колебаний мембраны. Следовательно, среднеквадратичное отклонение мембраны в полосе частот  $\Delta\omega \ll 1/\tau^*$  определяется выражением\*

$$[\langle (x^2)_\omega \rangle 2\Delta\omega]^{1/2} = \frac{s}{\sqrt{2}\pi} \left[ \frac{1}{T^* (1+m)} \frac{m}{(\mathcal{Q}_2 - s^2 + \mathcal{Q}_2 m)} \frac{\tau^* \Delta\omega}{1 + (\omega\tau^*)^2} kT_0 \right]^{1/2}. \quad (16)$$

#### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ ГАЗОВОЙ ЯЧЕЙКИ И МЕМБРАНЫ. ПРЕДЕЛЬНАЯ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ

Определение оптимальных параметров газовой ячейки и мембраны и определение предельной чувствительности основывается на решении задачи нахождения максимума отношения сигнал/шум по этим параметрам при заданной мощности проходящего через сечение ячейки излучения. Шумы на выходе системы определяются как тепловыми колебаниями мембраны, так и собственными шумами электронной схемы. Будет рассмотрено два варианта: первый — доминирующую роль играют тепловые колебания мембраны; второй — доминируют шумы электронной схемы.

#### 7. Первый вариант определения оптимальных параметров. Предельная чувствительность

Будем считать, что величина выходного сигнала линейно связана со смещением мембраны, т. е.  $y(\omega) = R(\omega) x(\omega)$ , где  $y(\omega)$  — амплитуда выходного сигнала. Тогда

$$\frac{S}{N} = \frac{2 |y(\omega)|}{[\langle (y^2)_\omega \rangle 2\Delta\omega]^{1/2}} = \frac{2 |x(\omega)|}{[\langle (x^2)_\omega \rangle 2\Delta\omega]^{1/2}}.$$

Используя формулы (14) и (16), получаем

$$\frac{S}{N} = 2 \sqrt{\pi} s |x| W_{\gamma l} \left( \frac{1+m}{\mathcal{Q}_2 - s^2 + \mathcal{Q}_2 m} \frac{\tau^*}{\Delta\omega} \frac{1}{N_0} \right)^{1/2} \frac{1}{kT_0}. \quad (17)$$

\* При  $m \sim 1$ ,  $\omega\tau^* \sim 1$ ,  $T^* \sim 10^4$  дин/см,  $\tau^* \sim 10^{-3}$  сек,  $T_0 \sim 300^\circ\text{K}$ ,  $\Delta\omega \sim 1$  рад/сек,  $s = 0,5$  получаем  $[\langle (x^2)_\omega 2\Delta\omega \rangle]^{1/2} \sim 2 \cdot 10^{-4}$  Å.

Здесь  $\Delta\omega$  — ширина частотной полосы выходного канала,  $N_0$  — полное число молекул в ячейке. Для анализа, который мы проведем для случая цилиндрической ячейки, формулу (17) удобно преобразовать:

$$\frac{S}{N} = \frac{2|z|}{V\mathcal{E}_1\mu_{01}} W \gamma \left( \frac{1}{\lambda T_0} \frac{1}{kT_0} \right)^{1/2} \left( \frac{l}{\Delta\omega} \right)^{1/2} \left[ \frac{1}{1 + (\pi^2/\mu_{01}^2) (\rho_0^2/l^2)} \right]^{1/2}.$$

Видно, что выгодно увеличивать длину ячейки. Причем, если уйти от эффектов, связанных с изменением времени релаксации ( $(\pi^2/\mu_{01}^2) \times (\rho_0^2/l^2) \ll 1$ ), рост отношения сигнал/шум пропорционален  $l^{1/2}$ . Это связано с тем, что эффективные тепловые источники шумовых колебаний в отличие от тепловых источников сигнала не коррелируют между собой.

Определим предельную чувствительность радиоспектроскопа по коэффициенту поглощения газа на единицу длины. Под этой величиной мы будем понимать такой коэффициент поглощения  $\gamma_{\min}$ , при котором  $S/N = 1$ :

$$\gamma_{\min} = \frac{V\mathcal{E}_1\mu_{01}}{2|z|} \frac{1}{W} (\lambda T_0 k T_0)^{1/2} \left( \frac{\Delta\omega}{l} \right)^{1/2} \left( 1 + \frac{\pi^2}{\mu_{01}^2} \frac{\rho_0^2}{l^2} \right)^{1/2}. \quad (18)$$

В случае, если модулирующая функция является меандром и  $\lambda \sim 5 \cdot 10^{-5}$  кал  $\cdot$  см $^{-1} \cdot$  сек $^{-1} \cdot$  град $^{-1}$ ,  $T_0 \sim 300^\circ\text{K}$ ,  $l \sim 10$  см,  $\omega\tau^* \sim 1$ ,  $(\pi^2/\mu_{01}^2) (\rho_0^2/l^2) \ll 1$ ,  $\Delta\omega \sim 1$  рад/сек, вместо (18) можно написать:

$$\gamma_{\min} (\text{см}^{-1}) \approx \frac{3 \cdot 10^{-11}}{W (\text{вт})}.$$

Отметим, что в данном типе радиоспектроскопа чувствительность растет прямо пропорционально мощности источника электромагнитного излучения; этот путь повышения чувствительности очень перспективен [2].

## 8. Второй вариант определения оптимальных параметров

В этом варианте задача сводится к отысканию максимума выходного сигнала. Использование результатов решения позволит облегчить исходные требования к электронной схеме. При этом результаты будут зависеть от того, за изменением какого параметра, характеризующего состояние мембраны, следит схема. Мы рассмотрим случай, когда таким параметром является смещение центра мембраны.

Преобразуем выражение (14) к более удобному виду, а именно:

$$|x| = \frac{s|z|}{\pi\mu_{01}} \frac{1}{V2\mathcal{E}_1} \gamma W \left( \frac{1}{\lambda T_0} \frac{l}{\omega T^*} \right)^{1/2} \times \\ \times \left[ \frac{\omega\tau^*}{1 + (\omega\tau^*)^2} \right]^{1/2} \left[ \frac{m}{(1+m)(\mathcal{E}_2 - s^2 + \mathcal{E}_2 m)} \right]^{1/2} \left[ \frac{1}{1 + (\pi^2/\mu_{01}^2) (\rho_0^2/l^2)} \right]^{1/2}. \quad (19)$$

Потребуем выполнения условий

$$\omega\tau^* = 1, \quad m = \left( \frac{\mathcal{E}_2 - s^2}{\mathcal{E}_2} \right)^{1/2}, \quad \frac{\pi^2}{\mu_{01}^2} \frac{\rho_0^2}{l^2} \ll 1. \quad (20)$$

При этом три последних сомножителя в (19) достигают максимума и

$$|x| = \frac{s|x|}{2\pi\nu_{01}} \frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}_1}} \frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}_2 + \sqrt{\mathcal{E}_2 - s^2}}} \gamma W \left( \frac{1}{\lambda T_0} \frac{1}{\omega T^*} \right)^{1/2}.$$

Полный дальнейший анализ требует учета технических требований. Мы не будем этого делать\*, а сформулируем лишь некоторые достаточно общие выводы.

1) При выполнении условий согласования (20) сигнал с понижением частоты растет только как  $\omega^{-1/2}$ . Поэтому всегда найдется некоторая минимальная частота  $\omega_{\min}$ , ниже которой опускаться невыгодно из-за нарастания технических шумов.

2) Рабочее давление газа  $p_0$  достаточно жестко задано требованиями эксперимента. Следовательно, из условия  $\omega\tau^* = 1$  получается оптимальная величина радиуса газовой ячейки.

3) При заданных параметрах мембраны величина сигнала растет с увеличением длины ячейки лишь до длины, определяемой условием  $m \sim 1$ ; при дальнейшем увеличении длины величина сигнала насыщается.

4) Зависимость условий согласования от давления газа приводит к зависимости от давления выходного сигнала. В области столкновительной ширины поглощения нетрудно получить

$$\frac{|y(p_0)|}{|y_{\text{опт}}|} = \frac{2 \left( \frac{p_0}{p_0^*} \right)^{1/2} \left( 2 \frac{p_0}{p_0^*} \frac{p_0^*}{p_0^{**}} \right)^{1/2}}{1 + \frac{p_0}{p_0^*} \left[ 1 + \left( \frac{p_0}{p_0^*} \frac{p_0^*}{p_0^{**}} \right)^2 \right]^{1/2}}, \quad (21)$$

где  $p_0^*$ ,  $p_0^{**}$  — соответственно давления, при которых выполняются условия согласования  $\omega\tau^* = 1$  и  $m = 1$ ;  $|y_{\text{опт}}| = |y(p_0 = p_0^* = p_0^{**})|$ . Данное свойство является недостатком радиоспектроскопа с акустическим детектором. Сглаживания кривых (21) можно добиться разномом точек  $p_0^*$  и  $p_0^{**}$ .

В заключение автор благодарит А. Ф. Крупнова за руководство работой, Л. И. Герштейна и С. П. Белова за плодотворные обсуждения, в ходе которых были выяснены многие физические аспекты задачи.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. Ф. Крупнов, Л. И. Герштейн, В. Г. Шустров, С. П. Белов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 13, № 9, 1403 (1970); А. Ф. Крупнов, Л. И. Герштейн, С. П. Белов, А. В. Буренин, Тезисы докладов на XVII Всесоюзном съезде по спектроскопии, Минск, 1971.
2. С. П. Белов, А. В. Буренин, Л. И. Герштейн, В. В. Королихин, А. Ф. Крупнов, Оптика и спектроскопия, 35, № 2, 295 (1973).
3. М. Л. Вейнгероу, Докл. АН СССР, 19, 687 (1938);
4. Автоматические газоанализаторы, ЦИНТИ ЭПИП, М., 1961.
5. M. Golay, Rev. Sci. Instr., 18, № 5, 219 (1947); 20, № 11, 816 (1949).
6. В. А. Панкратов, Оптико-механическая промышленность, № 2, 16 (1957); № 3, 7 (1957); № 1, 37 (1960); Оптика и спектроскопия, 2, № 5, 662 (1957); 8, № 1, 109 (1960).
7. А. О. Салль, Оптика и спектроскопия, 6, № 2, 219 (1959); 6, № 4, 556 (1959); ЖТФ, 26, № 1, 157 (1956); 29, № 3, 334 (1959); 29, № 3, 330 (1959).
8. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред, Гостехиздат, М., 1954.

\* Интересующихся читателей отсылаем к работе [2], где на основе полученных здесь результатов такой анализ проведен.

9. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория упругости, изд. Наука, М., 1965.
10. В. С. Владимиров, Уравнения математической физики, изд. Наука, М., 1967.
11. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Физматгиз, М., 1959.

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию  
28 июня 1973 г.

## THEORETICAL ANALYSIS OF A GAS CELL OF RADIOSPECTROSCOPE WITH ACOUSTIC DETECTOR

*A. V. Burenin*

The problem of the processes in a gas cell of the radiospectroscope with acoustic detector is solved on the basis of non-equilibrium thermodynamic equations. Using the obtained solution, the optimization of the gas cell parameters is made.

---