



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES  
FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE COMPUTACIÓN

75.12 ANÁLISIS NUMÉRICO

TRABAJO PRÁCTICO N°1

**SOLUCION APROXIMADA DE UN NÚMERO FINITOS DE PUNTOS DE LA ECUACION DE  
LAPLACE**

GRUPO 10

HERMOSILLA; Irene.	(N.º P.: 102894)	ireneshr.1994@gmail.com
LIMARDO; Sergio Gabriel.	(N.º P.: 84492)	sergio_limardo@hotmail.com
CERBINO; Emilio.	(N.º P.: 99304)	emiliocerbino56@gmail.com
GARCIA CANO; Gonzalo.	(N.º P.: 101224)	gonzalogarciacano97@gmail.com

Corrector: Navarro, Fabián

2do. Cuatrimestre de 2018

## TP 1

Los métodos numéricos son de gran utilidad para resolver problemas de transferencia de calor, dinámica de fluidos, y otras ecuaciones diferenciales en derivadas parciales que modelan problemas físicos; sobre todo cuando los mencionados problemas no pueden ser resueltos por medio de técnicas de análisis exacto ya que presentan complejas geometrías, complicadas condiciones de contorno o iniciales, o bien, involucran ecuaciones diferenciales no lineales.

En el presente se tiene como objetivo obtener la solución aproximada de una función de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales definida en un recinto finito que cumple con la ecuación de Laplace. El proceso por medio del cual se obtiene dicha solución está constituido por dos etapas. La primera, llamada **discretización**, que consiste en transformar el dominio continuo en una malla de nodos, para luego convertir la ecuación diferencial parcial continua y a las condiciones auxiliares (de frontera) en un sistema de ecuaciones algebraicas.

La segunda etapa, o **proceso de aproximación**, requiere un método adecuado para obtener la solución del sistema de ecuaciones algebraicas planteado. Esto se realiza mediante el uso del método de diferencias finitas, que consiste en la construcción de una malla de manera estructurada, donde los nodos de la misma, en un espacio  $n$  dimensional, están localizados en las intersecciones de  $n$  familias de líneas rectas, se reemplazan las derivadas continuas de la ecuación diferencial por las expresiones equivalentes en diferencias finitas y la resolución del sistema de ecuaciones, quedando así planteado el S.E.L. como consecuencia de la anterior sustitución. Dicho método constituye un procedimiento muy adecuado para la resolución de una ecuación bidimensional sobre mallas con una geometría uniforme.

Se plantea la posterior implementación de dicha solución mediante la herramienta OCTAVE utilizando el método directo de Gauss y los métodos iterativos de Jacobi, y Gauss-Seidel.

De esta forma se establece una función  $u(x,y)$  cuyo dominio se encuentra definido por  $R = [0,1] \times [0,1]$  al igual que sus valores de frontera, tal que,  $u(x,0) = u(x,1) = 0$ , y  $u(y,0) = u(1,y) = Y(1-y)$ . A partir de estos datos se plantea el correspondiente sistema de ecuaciones lineales, y se procede a su cálculo aproximado y evaluación de los errores generados.

Expresiones equivalentes en diferencias finitas:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{\Delta x^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{\Delta y^2}$$

$$\frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{\Delta y^2} = 0$$

Siendo  $\Delta x = \Delta y$

Se obtendría así finalmente la relación que se debe cumplir para todos los puntos del campo.

$$\Rightarrow u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} - 4u_{i,j} = 0$$

Posterior a la obtención de la matriz que cumple con la condición de frontera (matriz U), se procede a evaluar sobre los puntos interiores de la grilla para obtener el S.E.L. Dando lugar a un sistema de 81 ecuaciones con 81 incógnitas pertenecientes a cada punto en consideración, obteniendo así una expresión del tipo  $Ax = b$ .

Se adjuntan algunos cálculos de puntos representativos hechos sobre la matriz U para obtener las ecuaciones asociadas (véase Figura 1).

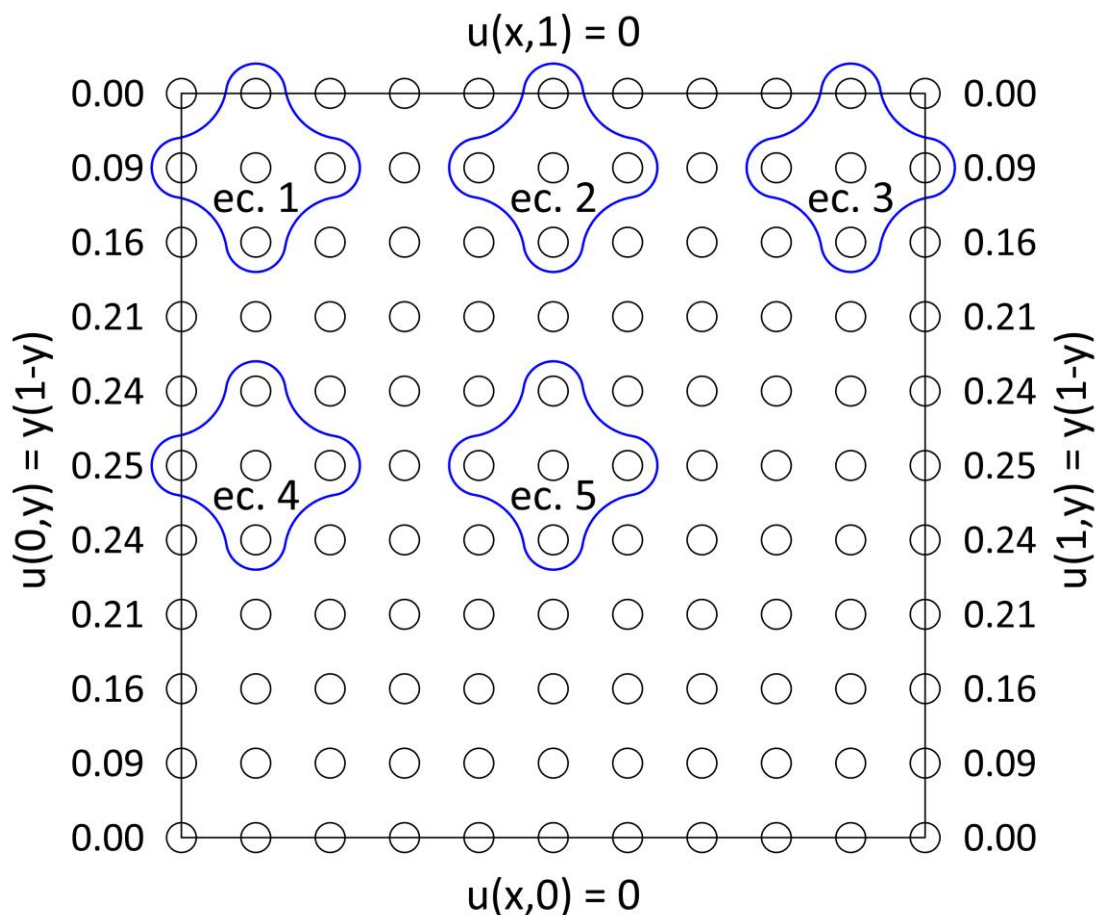


Figura 1. Discretización de la matriz que cumple con la condición de frontera (U)

Ec.1  $U_{2,2}$ 

$$\Rightarrow u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} - 4u_{i,j} = 0$$

$$0 + u_{3,2} + 0.09 + u_{2,3} - 4u_{2,2} = 0$$

$$[-4 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \dots] \times [\text{vect } x^t] = -0.09$$

Ec.2  $U_{2,6}$ 

$$\Rightarrow u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} - 4u_{i,j} = 0$$

$$0 + u_{3,6} + u_{2,5} + u_{2,7} - 4u_{2,6} = 0$$

$$[0 \ 0 \ 0 \ +1 \ -4 \ +1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \dots] \times [\text{vect } x^t] = 0$$

Ec.3  $U_{2,10}$ 

$$\Rightarrow u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} - 4u_{i,j} = 0$$

$$0 + u_{3,10} + u_{2,9} + 0.09 - 4u_{2,10} = 0$$

$$[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ +1 \ -4 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ +1 \ 0 \ 0 \dots] \times [\text{vect } x^t] = -0.09$$

Ec.4  $U_{6,2}$ 

$$\Rightarrow u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} - 4u_{i,j} = 0$$

$$u_{5,2} + u_{7,2} + 0.25 + u_{6,3} - 4u_{6,2} = 0$$

$$[(27 \text{ ceros}) + 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -4 \ +1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ +1 \ 0 \ 0 \dots] \times [\text{vect } U^t] = -0.25$$

Ec.5  $U_{6,6}$ 

$$\Rightarrow u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} - 4u_{i,j} = 0$$

$$u_{5,6} + u_{7,6} + u_{6,5} + u_{6,7} - 4u_{6,6} = 0$$

$$[(31 \text{ ceros}) + 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ +1 \ -4 \ +1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ +1 \ 0 \dots] \times [\text{vect } U^t] = 0$$

De los cálculos previos se infiere la matriz de coeficientes A de 81x81 y el vector b de 81 términos independientes (véase Figura 2).

-4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	...	0	0	0	u1	-0.09	
1	-4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	...	0	0	0	u2	0.00	
0	1	-4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	...	0	0	0	:	:	
0	0	1	-4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	:	:	:	:	:	:	
0	0	0	1	-4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	:	:	:	:	u8	0.00	
0	0	0	0	1	-4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	...	0	0	0	u9	-0.09	
0	0	0	0	0	1	-4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	...	0	0	0	u10	-0.16	
0	0	0	0	0	0	1	-4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	...	0	0	u11	0.00	
0	0	0	0	0	0	0	1	-4	0	0	0	0	0	0	0	0	...	0	0	0	:	:	
1	0	0	0	0	0	0	0	0	-4	1	0	0	0	0	0	0	...	0	0	0	:	:	
0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	-4	1	0	0	0	0	0	...		0	0	u17	0.00	
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	-4	1	0	0	0	0	...	0		0	u18	-0.16	
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	-4	1	0	0	0	...	0	0		u19	-0.21	
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	-4	1	0	0	...	0	0	0	u20	0.00	
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	-4	1	0	...	0	0	0	:	:	
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	-4	1	...	0	0	0	:	:	
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	-4	...	0	0	0	u26	0.00	
:	:	:			:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	0	0	0	u27	-0.21
:	:	:			:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	1	0	0	u28	-0.24
0	0	0	...	0	0	0	0	0		0	0	0	0	0	0	0	0	1	-4	1	0	:	:
0	0	0	...	0	0	0	0	0	0		0	0	0	0	0	0	0	0	1	-4	1	:	:
0	0	0	...	0	0	0	0	0	0	0		0	0	0	0	0	0	0	1	-4	1	:	:

Figura 2. Sistema de ecuaciones lineales ( $Ax=b$ )

Ya teniendo el sistema de ecuaciones lineales planteado en forma matricial se procede a obtener las soluciones aproximadas mediante los métodos mencionados inicialmente.

### Gauss:

A partir de la matriz de coeficientes  $A_{81 \times 81}$  se supone un sistema de ecuaciones lineales con solución única. Por lo cual se procede a operar hasta obtener un sistema triangular superior para posteriormente aplicar sustitución hacia atrás. En donde se despeja la última incógnita de la última ecuación, se sustituye en la penúltima ecuación; se despeja de esta ecuación la penúltima incógnita y se repite el proceso hasta calcular el valor de la primera incógnita.

$$A \cdot u = b$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & \dots & a_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & \dots & a_{4n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

### Jacobi:

El cálculo mediante el método iterativo de Jacobi consiste en suponer valores iniciales iguales a 0 para los nodos interiores de la matriz U.

Evaluando la siguiente ecuación para cada uno de estos:

$$\Rightarrow u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} - 4u_{i,j} = 0$$

Despejando  $u_{i,j}$

$$4u_{i,j} = u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}$$

$$u_{i,j}^1 = 0.25 (u_{i+1,j}^0 + u_{i-1,j}^0 + u_{i,j+1}^0 + u_{i,j-1}^0)$$

Este nuevo valor  $u_{i,j}^1$  correspondiente a la primera iteración se almacena en una matriz que llamaremos “ $u_2$ ”, copia de  $u$ , con la finalidad de obtener la resta de sus normas y verificar si el error es menor a la tolerancia establecida. Posteriormente se igualan las matrices “ $u$ ” y “ $u_2$ ”, y se repite el proceso nuevamente hasta que se cumpla la condición de error. Así se generarían nuevas matrices  $U$  que se van acercando a la solución aproximada buscada con cada iteración.

### Gauss-Seidel:

La diferencia de este método con Jacobi, radica principalmente en la utilización de los valores que ya fueron obtenidos durante la iteración que está en curso. De esta forma se logra obtener la solución aproximada en un menor número de iteraciones.

$$u_{i,j}^1 = 0.25 (u_{i+1,j}^0 + u_{i-1,j}^1 + u_{i,j+1}^0 + u_{i,j-1}^1)$$

En esta ecuación se supuso que los valores  $u_{i-1,j}^1$  y  $u_{i,j-1}^1$  fueron los calculados en el paso previo.

La forma de implementar esta condición en el programa se realiza haciendo el cálculo y escribiendo los valores obtenidos en la misma matriz ( $u_2$ ). De forma tal, que se estarían usando para el cálculo del valor de  $u_{i,j}$  valores de los nodos adyacentes ya calculados en esa iteración (de haberlo sido), de lo contrario usaría el valor correspondiente a la iteración anterior.

Al igual que en el método de Jacobi, posterior a cada iteración se calcula la diferencia con la matriz “ $u$ ” correspondiente a la iteración anterior, de esta forma el bucle de iteraciones se detiene cuando la diferencia entre estas matrices es menor a la tolerancia preestablecida.

### Resultados obtenidos en cada método:

#### Gauss:

0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
0,090000	0,064374	0,048748	0,039206	0,034001	0,032343	0,034001	0,039206	0,048748	0,064374	0,090000
0,160000	0,118750	0,091411	0,074074	0,064455	0,061371	0,064455	0,074074	0,091411	0,118750	0,160000
0,210000	0,159210	0,124070	0,101220	0,088375	0,084231	0,088375	0,101220	0,124070	0,159210	0,210000
0,240000	0,184000	0,144460	0,118380	0,103590	0,098803	0,103590	0,118380	0,144460	0,184000	0,240000
0,250000	0,192340	0,151370	0,124230	0,108800	0,103800	0,108800	0,124230	0,151370	0,192340	0,250000
0,240000	0,184000	0,144460	0,118380	0,103590	0,098803	0,103590	0,118380	0,144460	0,184000	0,240000
0,210000	0,159210	0,124070	0,101220	0,088375	0,084231	0,088375	0,101220	0,124070	0,159210	0,210000
0,160000	0,118750	0,091411	0,074074	0,064455	0,061371	0,064455	0,074074	0,091411	0,118750	0,160000
0,090000	0,064374	0,048748	0,039206	0,034001	0,032343	0,034001	0,039206	0,048748	0,064374	0,090000
0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000

**Jacobi:**

0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
0,090000	0,064373	0,048747	0,039205	0,034000	0,032342	0,034000	0,039205	0,048747	0,064373	0,090000
0,160000	0,118750	0,091410	0,074072	0,064453	0,061369	0,064453	0,074072	0,091410	0,118750	0,160000
0,210000	0,159200	0,124070	0,101220	0,088372	0,084228	0,088372	0,101220	0,124070	0,159200	0,210000
0,240000	0,184000	0,144450	0,118370	0,103590	0,098800	0,103590	0,118370	0,144450	0,184000	0,240000
0,250000	0,192340	0,151370	0,124230	0,108800	0,103800	0,108800	0,124230	0,151370	0,192340	0,250000
0,240000	0,184000	0,144450	0,118370	0,103590	0,098800	0,103590	0,118370	0,144450	0,184000	0,240000
0,210000	0,159200	0,124070	0,101220	0,088372	0,084228	0,088372	0,101220	0,124070	0,159200	0,210000
0,160000	0,118750	0,091410	0,074072	0,064453	0,061369	0,064453	0,074072	0,091410	0,118750	0,160000
0,090000	0,064373	0,048747	0,039205	0,034000	0,032342	0,034000	0,039205	0,048747	0,064373	0,090000
0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000

N.º de iteraciones: 213

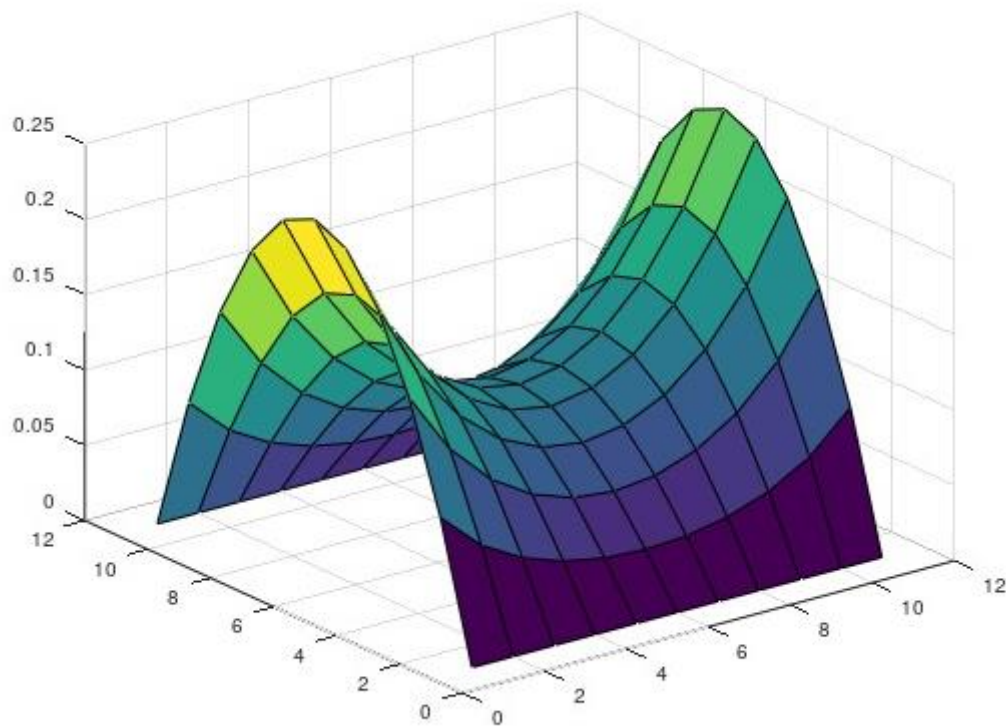
Error= 0.00000095569

**Gauss-Seidel:**

0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
0,090000	0,064374	0,048747	0,039205	0,034000	0,032343	0,034001	0,039205	0,048747	0,064374	0,090000
0,160000	0,118750	0,091410	0,074073	0,064454	0,061370	0,064454	0,074073	0,091410	0,118750	0,160000
0,210000	0,159210	0,124070	0,101220	0,088373	0,084230	0,088374	0,101220	0,124070	0,159210	0,210000
0,240000	0,184000	0,144450	0,118370	0,103590	0,098801	0,103590	0,118370	0,144450	0,184000	0,240000
0,250000	0,192340	0,151370	0,124230	0,108800	0,103800	0,108800	0,124230	0,151370	0,192340	0,250000
0,240000	0,184000	0,144450	0,118370	0,103590	0,098801	0,103590	0,118370	0,144450	0,184000	0,240000
0,210000	0,159210	0,124070	0,101220	0,088374	0,084230	0,088374	0,101220	0,124070	0,159210	0,210000
0,160000	0,11875	0,091410	0,074073	0,064455	0,061370	0,064455	0,074073	0,091410	0,118750	0,160000
0,090000	0,064374	0,048747	0,039205	0,034001	0,032343	0,034001	0,039205	0,048747	0,064374	0,090000
0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000

N.º de iteraciones: 114

Error= 0.00000098609



**Figura 3.** Valores obtenidos. Este gráfico podría representar la distribución interna de temperaturas obtenidas al aplicar una temperatura en la frontera del dominio que cumpla con los datos iniciales.

### Discretización en 3 variables:

Evaluando un dominio en tres variables, utilizando coordenadas cartesianas y cuyas superficies exteriores son valores conocidos, se procede a encontrar una función que cumpla con Laplace de la siguiente forma:

$$\frac{\partial u^2}{\partial x^2} + \frac{\partial u^2}{\partial y^2} + \frac{\partial u^2}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{\partial u^2}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i-1,j,k} - 2u_{i,j,k} + u_{i+1,j,k}}{\Delta x^2}$$

$$\frac{\partial u^2}{\partial y^2} \approx \frac{u_{i,j-1,k} - 2u_{i,j,k} + u_{i,j+1,k}}{\Delta y^2}$$

$$\frac{\partial u^2}{\partial z^2} \approx \frac{u_{i,j,k-1} - 2u_{i,j,k} + u_{i,j+1,k}}{\Delta z^2}$$



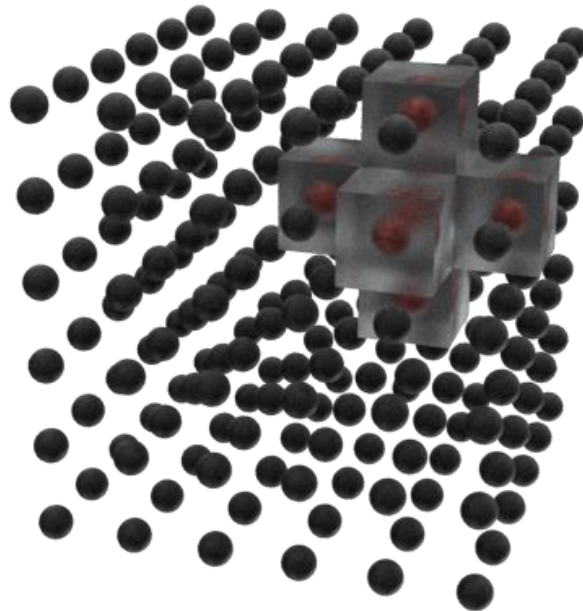
$$0 \approx \frac{u_{i-1,j,k} - 2u_{i,j,k} + u_{i+1,j,k}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j-1,k} - 2u_{i,j,k} + u_{i,j+1,k}}{\Delta y^2} + \frac{u_{i,j,k-1} - 2u_{i,j,k} + u_{i,j+1,k}}{\Delta z^2}$$

Suponiendo una grilla con iguales distancias en los 3 ejes se obtiene:

$$\Delta x = \Delta y = \Delta z$$

$$u_{i-1,j,k} - 6u_{i,j,k} + u_{i+1,j,k} + u_{i,j-1,k} + u_{i,j+1,k} + u_{i,j,k-1} + u_{i,j+1,k} = 0$$

Esta ecuación al igual que la anterior evalúa uno a uno los puntos del interior de la matriz, en este caso los puntos adyacentes serán tomados en 3 dimensiones (tensor) como indica a continuación (véase Figura 4).



**Figura 4.** Nodos involucrados en cada análisis de los puntos interiores de la grilla.

Planteando una matriz de 11x11x11 se obtendría un sistema de 729 ecuaciones, una por cada punto interior de la matriz.

### CONCLUSIONES

Del análisis de los métodos utilizados con anterioridad se puede apreciar que dependiendo del tipo de sistema de ecuaciones puede resultar conveniente el uso de un método por sobre los otros. Si la matriz de coeficientes asociada al SEL tuviese gran parte de sus elementos diferentes de cero resultaría conveniente el uso del método directo de Gauss, ya que la existencia de estos elementos no representa una mayor cantidad de pasos para su resolución. Por otro lado, si puede resultar un inconveniente que el tamaño de dicha matriz sea demasiado grande, ya que aumenta considerablemente la cantidad de cálculos que deben realizarse.

En el caso donde las matrices tienen gran parte de sus elementos iguales a cero se reduce el “costo”, tiempo y cantidad de pasos para su resolución mediante el uso de métodos iterativos, tanto Jacobi como Gauss-Seidel. Por ello resulta conveniente el uso de éstos en problemas cuyas matrices sean de gran tamaño y con gran parte de sus elementos iguales a cero. Previo a su respectiva implementación es conveniente realizar un análisis de convergencia.

Del punto de vista del error inherente en cada método se puede observar que en los métodos iterativos existe asociado un error de truncamiento, dicho error no existe en los métodos directos y por ello estos últimos resultan más exactos en cuanto a la solución obtenida.

Por último, puede realizarse una observación con respecto al método iterativo de Jacobi, que podría considerarse antecedente del método de Gauss-Seidel, ya que éste último mejora en forma notable su algoritmo al acelerar su convergencia en menor cantidad de iteraciones, como puede notarse en los resultados obtenidos.

### REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1]. Molano Rembiasz, J.; Martín Romero, J; Rodríguez Galván, R. “Introducción informal a Matlab y Octave”. (2008). GNU Free Documentation License. P 73-76.
- [2]. Mendoza Bernal, O. “Resolución de Ecuaciones Diferenciales Parciales Mediante el Método de Diferencias Finitas y su Paralelización”. (2016). México DF, México. P 5-23.
- [3]. Burden, Richard L.; Faires, J. Douglas. “Numerical Analysis”. Edición Número 9 (2010). Boston, USA.