



# Integrasi Numerik untuk Dinamika Orbit Sistem $N$ -Benda

*Dr. Muhamad Irfan Hakim*

Astronomy Research Division  
FMIPA – ITB

**Pelatihan dan Pengenalan Perangkat Lunak REBOUND untuk Simulasi Sistem  $N$ -Benda**



# Pengumuman

File ini dapat diakses di repositori [reboundIntro](https://github.com/irfan200867/reboundIntro) di [github.com/irfan200867](https://github.com/irfan200867)



# Penghargaan

Terima kasih kepada FMIPA – ITB sehingga sesi materi ini dapat menjadi bagian dari kegiatan **Penelitian, Pengabdian kepada Masyarakat dan Inovasi ITB (P2MI)** tahun 2023.



# Daftar Isi

- 1 **Pendahuluan**
- 2 **Masalah  $N$ -benda: Tinjauan Klasik**
- 3 **Perkiraan Waktu Komputasi**
- 4 **Contoh Kasus: Masalah Dua Benda**
- 5 **Solusi Numerik**
- 6 **Skema Dasar Rancangan Simulasi dalam REBOUND**



# Pendahuluan

## Mengapa masalah $N$ -benda penting?

- memahami **evolusi** sistem gravitasi  $N$ -benda
- memahami **kestabilan** sistem gravitasi  $N$ -benda

## Contoh domain

- sistem keplanetan ( $N \sim 10$ )
- gugus bintang ( $N \sim 10^4 - 10^6$ )
- galaksi ( $N > 10^8$ )

Pendekatan statistik? Dapat diterapkan sebagian.

Metode yang lebih praktikal? **INTEGRASI LANGSUNG**



# Masalah $N$ -benda: Tinjauan Klasik I

## Tiga pendekatan tinjauan gravitasi

**Newtonian** Untuk tinjauan masalah gravitasi yang paling luas, berbasis pada sistem koordinat kartesian, seringkali sukar dipecahkan terutama pada sistem yang kompleks atau melibatkan interaksi antar objek dalam jumlah yang sangat banyak

**Lagrangian** *Fleksibel*, tidak terkungkung pada suatu sistem koordinat, digunakan dengan mengenalkan *konsep koordinat umum*  $q_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, d$ -derajat kebebasan), dan  $\dot{q}_i$  untuk *kecepatan* yang menjadi sekawannya

**Hamiltonian** Bermanfaat untuk identifikasi *besaran-besaran bernilai kekal pada sistem dinamik*. Tinjauan jejak evolusi besaran-besaran di dalam sistem menjadi relatif lebih mudah.



# Masalah $N$ -benda: Tinjauan Klasik II

Setiap partikel  $i$  dengan massa  $m_i$  memiliki vektor posisi  $\mathbf{r}_i$  dan vektor kecepatan  $\mathbf{v}_i$  pada waktu  $t$ . Nilai Hamiltonian  $H$  dari sistem adalah

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m_i} - \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N \frac{Gm_i m_j}{|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|} \quad (1)$$

dengan momentum  $\mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_i$ , dan posisi  $\mathbf{q}_i = \mathbf{r}_i$  untuk semua objek ke- $i$  dengan  $i = 1 \dots N$

$$\dot{\mathbf{q}}_i(t) = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_i} \implies \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \mathbf{v}_i \quad (2)$$

$$\dot{\mathbf{p}}_i(t) = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}_i} \implies \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \mathbf{a}_i \quad (3)$$



# Masalah $N$ -benda: Tinjauan Klasik III

dengan  $\mathbf{a}_i$  adalah percepatan yang dialami objek ke- $i$

$$\mathbf{a}_i(t) = \sum_{j \neq i}^N Gm_j \frac{\mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}^3} \quad (4)$$

dengan  $\mathbf{r}_{ij} \equiv \mathbf{r}_j(t) - \mathbf{r}_i(t)$ , dan  $r_{ij} \equiv |\mathbf{r}_{ij}|$ .

Bila diperlukan, nilai besaran **hentakan** (*jerk*) juga dihitung

$$\dot{\mathbf{a}}_i(t) = \sum_{j \neq i}^N Gm_j \left( \frac{\mathbf{v}_{ij}}{r_{ij}^3} - \frac{3(\mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij})}{r_{ij}^5} \mathbf{r}_{ij} \right) \quad (5)$$

dengan  $\mathbf{v}_{ij} \equiv \mathbf{v}_j(t) - \mathbf{v}_i(t)$ , dan  $v_{ij} \equiv |\mathbf{v}_{ij}|$ .





# Perkiraan Waktu Komputasi

**Tabel 1:** Jumlah perhitungan akselerasi  $a_i$  menurut jumlah benda ( $N$ )

$N$	Jumlah Perhitungan
2	1
3	3
4	6
5	10
...	...
$N$	$N(N-1)/2$

Untuk nilai  $N$  yang besar, kesetaraan  $N$  dengan waktu komputasi adalah  $\sim N^2$



# Contoh Kasus: Masalah Dua Benda I

Nilai besaran Hamiltonian  $H = H(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \rightarrow H(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \mathbf{p}_{\text{cm}})$  untuk sistem dua benda dapat diuraikan atas komponen gerak pusat massa ( $H_{\text{cm}}$ ) dan gerak relatif ( $H_{\text{rel}}$ ).

Didefinisikan beberapa besaran:

- massa total,  $M \equiv m_1 + m_2$
- massa tereduksi,  $\mu \equiv m_1 m_2 / M$
- vektor jarak antar dua benda,  $\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ , dan  $r \equiv |\mathbf{r}|$
- vektor momentum relatif,  $\mathbf{p} \equiv \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2$
- momentum pusat massa,  $\mathbf{p}_{\text{cm}}$



# Contoh Kasus: Masalah Dua Benda II

$$H_{\text{cm}} = \frac{\mathbf{p}_{\text{cm}}^2}{2M} \quad (6)$$

$$H_{\text{rel}} = \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} - \frac{Gm_1m_2}{r} \quad (7)$$

$$H = H_{\text{cm}} + H_{\text{rel}} \quad (8)$$

$$\dot{\mathbf{p}} = \mu \dot{\mathbf{v}} = -\frac{Gm_1m_2}{r^3} \mathbf{r} \quad (9)$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{v}} = -\frac{GM}{r^3} \mathbf{r} \quad (10)$$



# Contoh Kasus: Masalah Dua Benda III

Dari sudut pandang Hamiltonian, yang memfasilitasi identifikasi **besaran-besaran yang nilainya kekal**, ada beberapa besaran yang dapat ditinjau

- 1 vektor **momentum sudut** spesifik,  $\mathbf{j}$

$$\mathbf{j} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} \quad (11)$$

$$\frac{d\mathbf{j}}{dt} = \mathbf{v} \times \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}} = -\frac{GM}{r^3}(\mathbf{r} \times \mathbf{r}) = 0 \quad (12)$$



# Contoh Kasus: Masalah Dua Benda IV

2 vektor **Runge-Lenz**,  $\mathbf{e}$

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{j}}{GM} - \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (13)$$

Dengan memanfaatkan sifat perkalian vektor  $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$ , maka

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{r}}{r^3} &= \frac{(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{r}}{r^3} = \frac{\mathbf{v}}{r} - \mathbf{r} \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})}{r^3} \\ &= \frac{1}{r} \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \mathbf{r} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{r} \right) = d \left( \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \end{aligned} \quad (14)$$

sehingga



# Contoh Kasus: Masalah Dua Benda V

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{e}} = \frac{d\mathbf{e}}{dt} &= \frac{\frac{d\mathbf{v}}{dt} \times \mathbf{j}}{GM} + \frac{\mathbf{v} \times \frac{d\mathbf{j}}{dt}}{GM} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \\
 &= -\frac{GM}{r^3} \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{j}}{GM} + 0 - \frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \\
 &= \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{r}}{r^3} - d \left( \frac{\mathbf{r}}{r} \right) = 0
 \end{aligned} \tag{15}$$

Dengan memanfaatkan sifat perkalian vektor  $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ , kita juga dapat memperoleh



# Contoh Kasus: Masalah Dua Benda VI

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r} \cdot \mathbf{e} &= re \cos(\phi - \phi_0) = \frac{\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{j})}{GM} - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}{r} \\
 &= \frac{\mathbf{j} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{v})}{GM} - r = \frac{j^2}{GM} - r \\
 r(1 + e \cos(\phi - \phi_0)) &= \frac{j^2}{GM} \\
 r(\phi) &= \frac{j^2/(GM)}{1 + e \cos(\phi - \phi_0)}
 \end{aligned} \tag{16}$$

Persamaan (16) adalah persamaan irisan kerucut pada masalah dua benda dengan  $e = |\mathbf{e}|$  adalah **eksentrisitas**. Pada interaksi gaya ikat gravitasi yang tertutup,  $e$  adalah eksentrisitas ellips.



# Contoh Kasus: Masalah Dua Benda VII

Sifat-sifat lain yang dapat digali dari masalah dua benda dan orbitnya antara lain jarak terpanjang (terpendek), setengah sumbu panjang (pendek), dan periode orbit (kecepatan sudut):

$$r_{\max;\min} = \frac{j^2/(GM)}{1 \mp e} \quad (17)$$

$$a = \frac{1}{2}(r_{\min} + r_{\max}) = \frac{j^2/(GM)}{1 - e^2} \quad (18)$$

$$b = \sqrt{r_{\min} r_{\max}} \quad (19)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{P_{\text{orb}}} = \sqrt{\frac{GM}{a^3}} \quad (20)$$





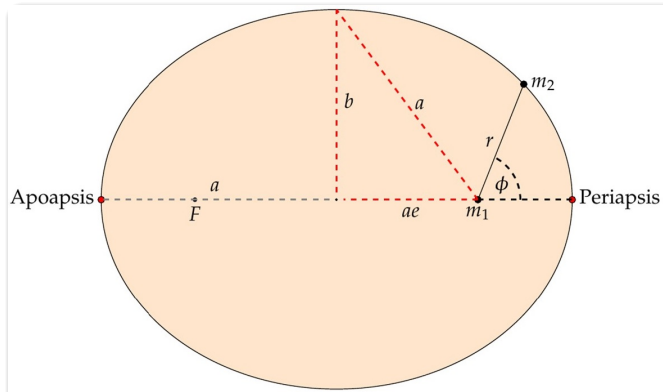
## Contoh Kasus: Masalah Dua Benda VIII

Dengan  $\theta = \phi - \phi_0$ , persamaan (16) dapat dituliskan kembali

$$r(\theta) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta} \quad (21)$$

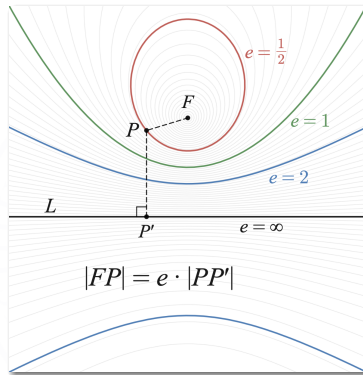


# Contoh Kasus: Masalah Dua Benda IX



**Gambar 1:** Orbit ellips untuk masalah dua benda. Persamaan (16) merujuk pada nilai  $\phi_0 = 0$  (Schäfer, 2022).

# Contoh Kasus: Masalah Dua Benda X



**Gambar 2:** Kumpulan irisan kerucut yang berbagi titik fokus  $F$  yang sama. Nilai  $e = 0$  untuk **lingkaran** (infinitesimal di  $F$ ),  $e < 1$  untuk **ellips**,  $e = 1$  untuk **parabola**,  $e > 1$  untuk **hiperbola**,  $e = \infty$  untuk **garis direktriks** (Wikipedia, 2023).



# Contoh Kasus: Masalah Dua Benda XI

## 3 energi $E$

Diketahui bahwa vektor kecepatan hanya memiliki sebanyak dua komponen yaitu dalam arah radial,  $\hat{\mathbf{r}}$ , dan arah tangensial,  $\hat{\theta}$ . Dalam arah tegak lurus bidang orbit, misal arah  $\hat{\mathbf{k}}$  tidak ada.

$$\mathbf{v} = v_R \hat{\mathbf{r}} + v_T \hat{\theta} + 0 \hat{\mathbf{k}} = \dot{r} \hat{\mathbf{r}} + r \dot{\theta} \hat{\theta} \quad (22)$$

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \quad (23)$$

$$j = |\mathbf{j}| = |\mathbf{r} \times \mathbf{v}| = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{r}} & \hat{\theta} & \hat{\mathbf{k}} \\ r & 0 & 0 \\ \dot{r} & r \dot{\theta} & 0 \end{vmatrix} = 0 \hat{\mathbf{r}} - 0 \hat{\theta} + r^2 \dot{\theta} \hat{\mathbf{k}} \quad (24)$$

Persamaan ini dapat disederhanakan untuk nilai  $\dot{\theta}$  dengan menggunakan persamaan (21) untuk  $r$  dan persamaan (18) untuk  $j$ , sehingga diperoleh



# Contoh Kasus: Masalah Dua Benda XII

$$\dot{\theta} = \frac{\sqrt{a(1-e^2)GM}}{r^2} \quad (25)$$

Dan karena telah diketahui

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta} \quad ; \quad \frac{1}{r^2} = \frac{(1+e\cos\theta)^2}{a^2(1-e^2)^2}$$

$$\dot{r} = \frac{ae(1-e^2)\sin\theta}{(1+e\cos\theta)^2} \dot{\theta}$$

$$\dot{r} = e\sqrt{\frac{GM}{a(1-e^2)}} \sin\theta \quad (26)$$



# Contoh Kasus: Masalah Dua Benda XIII

Karena itu persamaan (23) dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned}
 v^2 &= \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \\
 &= \frac{GM e^2 \sin^2 \theta}{a(1 - e^2)} + \frac{GM a(1 - e^2)}{r^2} \\
 \frac{v^2}{GM} &= \frac{e^2 \sin^2 \theta}{a(1 - e^2)} + \frac{a(1 - e^2)(1 + e \cos \theta)^2}{a^2(1 - e^2)^2} \\
 &= \frac{1 + 2e \cos \theta + e^2 \sin^2 \theta + e^2 \cos^2 \theta}{a(1 - e^2)} \\
 &= \frac{1 + 2e \cos \theta + e^2}{a(1 - e^2)} = \frac{2(1 + e \cos \theta) - (1 - e^2)}{a(1 - e^2)} \\
 &= \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)
 \end{aligned}$$



# Contoh Kasus: Masalah Dua Benda XIV

## Persamaan vis-viva (“living force”)

$$v^2 = GM \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \quad (27)$$

Dengan mengingat bahwa  $M = m_1 + m_2$  dan massa tereduksi  $\mu = m_1 m_2 / M$ , dan menggunakan persamaan *vis-viva* ini, energi adalah

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \mu v^2 - \frac{G m_1 m_2}{r} \\ &= \frac{1}{2} \mu G M \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) - \frac{G m_1 m_2}{r} \\ &= \frac{G m_1 m_2}{r} - \frac{G m_1 m_2}{r} - \frac{G m_1 m_2}{2a} \end{aligned}$$



# Contoh Kasus: Masalah Dua Benda XV

$$E = -\frac{Gm_1m_2}{2a} \quad (28)$$

Untuk salah satu dari tiga bentuk orbit di bawah ini, **energi**  $E$  adalah **konstan** pada masalah dua benda (lihat kembali persamaan [18] untuk nilai  $a$ ):

- **elips/lingkaran:**  $0 \leq e < 1$  ;  $0 < a < \infty$

$$E < 0$$

- **parabola:**  $e = 1$ , dianggap  $a = \infty$

$$E_{\text{parab.}} = 0$$

- **hiperbola:**  $e > 1$ , dianggap  $a < 0$

$$E_{\text{hyperb.}} > 0$$





# Skema Solusi Numerik

Lima contoh skema numerik pada masalah  $N$ -Benda (Bodenheimer et al., 2007)

**Runge-Kutta** Skema baku yang banyak digunakan untuk penyelesaian numerik (sistem) persamaan diferensial

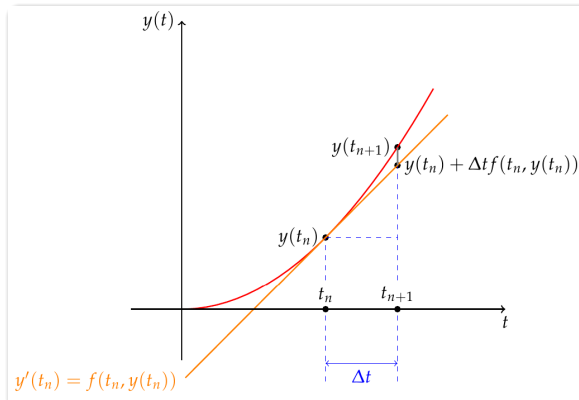
**Bulirsch-Stoer** Untuk kebutuhan **akurasi tinggi** pada **jumlah benda terbatas** (*few bodies problem*) seperti sistem keplanetan

**Pemetaan Simplektik** *Symplectic map* sangat umum digunakan pada simulasi **sistem keplanetan** untuk **waktu integrasi yang sangat panjang**, biasanya dalam konteks ketiadaan *close encounter* antar benda

**Prediktor-Korektor** Untuk simulasi dengan **jumlah benda yang lebih banyak dibanding umumnya sistem keplanetan** (contoh: NBODY dari Aarseth [1999])

**Katak Melompat** *Leapfrog* yang biasa digunakan untuk **jumlah benda  $N$  yang sangat besar dan ekstrim**, namun dengan **kebutuhan akurasi yang tidak tinggi** dan integrasi dalam skala dinamik yang relatif tidak lama.

# Pemetaan Simplektik Sederhana I



**Gambar 3:** Skema metode simplektik Euler (Schäfer, 2022).

# Pemetaan Simplektik Sederhana II

Solusi suatu persamaan diferensial yang diringkaskan dalam fungsi  $\varphi_h(y)$  didekati dengan integrator numerik dalam kumpulan fungsi  $\phi_h(y)$ . Tujuan pendekatan ini dilakukan dengan menghitung nilai  $y_{n+1} = \phi_h(y_n)$ .

## Metode Euler Eksplisit & Implisit untuk $\dot{y} = f(y)$

**Eksplisit:**

$$y_{n+1} = hf(y_n) \quad (29)$$

**Implisit:**

$$y_{n+1} = hf(y_{n+1}) \quad (30)$$

Metode simplektik Euler untuk sistem Hamiltonian dapat diungkapkan dengan merujuk pada persamaan (2) dan (3)



# Pemetaan Simplektik Sederhana III

## Simplektik Euler Sistem Hamiltonian

$$p_{n+1} = p_n - h \nabla_q H(p_{n+1}, q_n) \quad (31)$$

$$q_{n+1} = q_n + h \nabla_p H(p_{n+1}, q_n) \quad (32)$$

atau

$$p_{n+1} = p_n - h \nabla_q H(p_n, q_{n+1}) \quad (33)$$

$$q_{n+1} = q_n + h \nabla_p H(p_n, q_{n+1}) \quad (34)$$



# Pemetaan Simplektik Sederhana IV

## Integrator pada REBOUND (simplektik & non-simplektik)

- 1 **Simplektik:** WHFast, SEI, LEAPFROG, EOS
- 2 **Simplektik orde tinggi:** SABA, WHKernel
- 3 **Simplektik bauran (*hybrid*):** MERCURIUS (untuk asumsi *close encounter*)
- 4 **Non-simplektik:** IAS15, Gragg-Bulirsch-Stoer (akurasi tinggi dan *step* waktu adaptif)



# Skema Dasar Rancangan Simulasi dalam REBOUND I

Skema dasar yang menuntun pada rancangan yang baik dan standar dapat dilihat di repositori [reboundIntro](#) di [github.com/irfan200867](https://github.com/irfan200867)



# Skema Dasar Rancangan Simulasi dalam REBOUND II

## SKEMA LOAD-UNLOAD

```
1  import rebound
2
3  # LOAD rebound to simulation, named 'sim'
4  sim = rebound.Simulation()
5
6  # ... many steps here ...
7
8  # UNLOAD rebound from simulation (to free the memory)
9  sim = None
10
```



# Skema Dasar Rancangan Simulasi dalam REBOUND III

## Contoh Rancangan Simulasi $N$ -Benda

```
1  sim = rebound.Simulation()
2
3  # 3-body, including small body with m = 0 msun
4  # with Internet connection to NASA Horizons system
5  sim.add('Sun', date = '2000-01-01 00:00')
6  sim.add(m = 1e-3, a = 1.0, e = 0.3)
7  sim.add(m = 0, a = 1.25)
8
9  # DON'T FORGET TO MOVE TO THE CENTER OF MASS
10 sim.move_to_com()
11
```





# Skema Dasar Rancangan Simulasi dalam REBOUND IV

Beberapa fitur penting (dalam contoh; menggunakan numpy dengan alias np):

- **WAKTU:** `times = np.linspace(0, 1*2*np.pi, 250)` (satu kali periode orbit, berisi 250 step waktu)
- **INTEGRATOR:** `sim.integrator = 'leapfrog'` (*default* IAS15 jika tidak dipesan)
- **INTEGRASI:** `sim.integrate(t)` (dengan syarat terdefinisi `for i, t in times`)
- **ENERGI:** `sim.energy()` (di setiap step waktu)
- **MOMENTUM SUDUT** (3 komponen):  
`Lx[i], Ly[i], Lz[i] = sim.angular_momentum()`
- **HITUNG ORBIT:** `for orb in sim.calculate_orbits()` (lanjutkan dengan `print(orb)`)
- **SATUAN** (massa, jarak, waktu): `sim.units = ('yr', 'au', 'msun')`



# Terima kasih.

◀ Kembali ke Beranda