Integrasi Numerik untuk Dinamika Orbit Sistem N-Benda

Dr. Muhamad Irfan Hakim

Astronomy Research Division
FMIPA – ITB

Pelatihan dan Pengenalan Perangkat Lunak REBOUND untuk Simulasi Sistem N-Benda

Pengumuman

File ini dapat diakses di repositori reboundIntro di github.com/irfan200867

Penghargaan

Terima kasih kepada FMIPA – ITB sehingga sesi materi ini dapat menjadi bagian dari kegiatan **Penelitian, Pengabdian kepada Masyarakat dan Inovasi ITB** (**P2MI**) tahun 2023.

Daftar Isi

Pendahuluan

Mengapa masalah N-benda penting?

- memahami **evolusi** sistem gravitasi N-benda
- memahami **kestabilan** sistem gravitasi N-benda

Contoh domain

- sistem keplanetan ($N \sim 10$)
- gugus bintang ($N \sim 10^4 - 10^6$)
- galaksi ($N > 10^8$)

Pendekatan statistik? Dapat diterapkan sebagian.
Metode yang lebih praktikal? **INTEGRASI LANGSUNG**

Masalah N-benda: Tinjauan Klasik I

Tiga pendekatan tinjauan gravitasi

Newtonian Untuk tinjauan masalah gravitasi yang paling luas, berbasis pada sistem koordinat kartesian, seringkali sukar dipecahkan terutama pada sistem yang kompleks atau melibatkan interaksi antar objek dalam jumlah yang sangat banyak

Lagrangian *Fleksibel*, tidak terkungkung pada suatu sistem koordinat, digunakan dengan mengenalkan *konsep koordinat umum* q_i $(i = 1, 2, 3, \ldots, d$-derajat kebebasan), dan $\dot{q}_i$ untuk *kecepatan* yang menjadi sekawannya

Hamiltonian Bermanfaat untuk identifikasi *besaran-besaran bernilai kekal pada sistem dinamik*. Tinjauan jejak evolusi besaran-besaran di dalam sistem menjadi relatif lebih mudah.

Masalah N-benda: Tinjauan Klasik II

Setiap partikel i dengan massa m_i memiliki vektor posisi $\mathbf{r}_i$ dan vektor kecepatan $\mathbf{v}_i$ pada waktu t. Nilai Hamiltonian H dari sistem adalah

$$H = \sum_{i=1}^{N} \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m_i} - \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=i+1}^{N} \frac{G m_i m_j}{|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|} \tag{1}$$

dengan momentum $\mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_i$, dan posisi $\mathbf{q}_i = \mathbf{r}_i$ untuk semua objek ke-i dengan $i = 1 \dots N$

$$\dot{\mathbf{q}}_i(t) = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_i} \implies \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \mathbf{v}_i \tag{2}$$

$$\dot{\mathbf{p}}_i(t) = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}_i} \implies \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \mathbf{a}_i \tag{3}$$

Masalah N-benda: Tinjauan Klasik III

dengan $\mathbf{a}_i$ adalah percepatan yang dialami objek ke-i

$$\mathbf{a}_i(t) = \sum_{j \neq i}^{N} G m_j \frac{\mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}^3} \tag{4}$$

dengan $\mathbf{r}_{ij} \equiv \mathbf{r}_j(t) - \mathbf{r}_i(t)$, dan $r_{ij} \equiv |\mathbf{r}_{ij}|$.
Bila diperlukan, nilai besaran **hentakan** (*jerk*) juga dihitung

$$\dot{\mathbf{a}}_i(t) = \sum_{j \neq i}^{N} G m_j \left(\frac{\mathbf{v}_{ij}}{r_{ij}^3} - \frac{3(\mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij})}{r_{ij}^5} \mathbf{r}_{ij} \right) \tag{5}$$

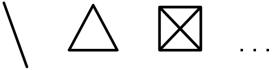
dengan $\mathbf{v}_{ij} \equiv \mathbf{v}_j(t) - \mathbf{v}_i(t)$, dan $v_{ij} \equiv |\mathbf{v}_{ij}|$.

Perkiraan Waktu Komputasi

Tabel 1: Jumlah perhitungan akselerasi $\mathbf{a}_i$ menurut jumlah benda (N)

N	Jumlah Perhitungan
2	1
3	3
4	6
5	10
$\ldots$	$\ldots$
N	$N(N-1)/2$

Untuk nilai N yang besar, kesetaraan N dengan waktu komputasi adalah $\sim N^2$



Contoh Kasus: Masalah Dua Benda I

Nilai besaran Hamiltonian $H = H(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \to H(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \mathbf{p}_{\mathsf{cm}})$ untuk sistem dua benda dapat diuraikan atas komponen gerak pusat massa (H_{cm}) dan gerak relatif (H_{rel}). Didefinisikan beberapa besaran:

- massa total, $M \equiv m_1 + m_2$
- massa tereduksi, $\mu \equiv m_1 m_2 / M$
- vektor jarak antar dua benda, $\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, dan $r \equiv |\mathbf{r}|$
- vektor momentum relatif, $\mathbf{p} \equiv \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2$
- momentum pusat massa, $\mathbf{p}_{\mathsf{cm}}$

Contoh Kasus: Masalah Dua Benda II

$$H_{\mathrm{cm}} = \frac{\mathbf{p}_{\mathrm{cm}}^2}{2M} \tag{6}$$

$$H_{\mathrm{rel}} = \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} - \frac{Gm_1m_2}{r} \tag{7}$$

$$H = H_{\mathrm{cm}} + H_{\mathrm{rel}} \tag{8}$$

$$\dot{\mathbf{p}} = \mu\dot{\mathbf{v}} = -\frac{Gm_1m_2}{r^3}\mathbf{r} \tag{9}$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{v}} = -\frac{GM}{r^3}\mathbf{r} \tag{10}$$

Contoh Kasus: Masalah Dua Benda III

Dari sudut pandang Hamiltonian, yang memfasilitasi identifikasi **besaran-besaran yang nilainya kekal**, ada beberapa besaran yang dapat ditinjau

1. vektor **momentum sudut** spesifik, $\mathbf{j}$

$$\mathbf{j} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} \tag{11}$$

$$\frac{d\mathbf{j}}{dt} = \mathbf{v} \times \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}} = -\frac{GM}{r^3}(\mathbf{r} \times \mathbf{r}) = 0 \tag{12}$$

Contoh Kasus: Masalah Dua Benda IV

2. vektor **Runge-Lenz**, $\mathbf{e}$

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{j}}{GM} - \frac{\mathbf{r}}{r} \tag{13}$$

Dengan memanfaatkan sifat perkalian vektor $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$, maka

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{r}}{r^3} &= \frac{(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{r}}{r^3} = \frac{\mathbf{v}}{r} - \mathbf{r}\frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})}{r^3} \\ &= \frac{1}{r}\frac{d\mathbf{r}}{dt} + \mathbf{r}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right) = d\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) \end{aligned} \tag{14}$$

sehingga

Contoh Kasus: Masalah Dua Benda V

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{e}} = \frac{d\mathbf{e}}{dt} &= \frac{\frac{d\mathbf{v}}{dt} \times \mathbf{j}}{GM} + \frac{\mathbf{v} \times \frac{d\mathbf{j}}{dt}}{GM} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) \\
&= -\frac{GM}{r^3}\frac{\mathbf{r} \times \mathbf{j}}{GM} + 0 - \frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) \\
&= \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{r}}{r^3} - d\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) = 0
\end{aligned} \tag{15}
$$

Dengan memanfaatkan sifat perkalian vektor $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$, kita juga dapat memperoleh

Contoh Kasus: Masalah Dua Benda VI

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r}\cdot\mathbf{e} &= re\cos(\phi-\phi_0) = \frac{\mathbf{r}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{j})}{GM} - \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}}{r} \\
&= \frac{\mathbf{j}\cdot(\mathbf{r}\times\mathbf{v})}{GM} - r = \frac{j^2}{GM} - r \\
r(1+e\cos(\phi-\phi_0)) &= \frac{j^2}{GM} \\
r(\phi) &= \frac{j^2/(GM)}{1+e\cos(\phi-\phi_0)} \qquad (16)
\end{aligned}
$$

Persamaan (16) adalah persamaan irisan kerucut pada masalah dua benda dengan $e = |\mathbf{e}|$ adalah **eksentrisitas**. Pada interaksi gaya ikat gravitasi yang tertutup, e adalah eksentrisitas ellips.

Contoh Kasus: Masalah Dua Benda VII

Sifat-sifat lain yang dapat digali dari masalah dua benda dan orbitnya antara lain jarak terpanjang (terpendek), setengah sumbu panjang (pendek), dan periode orbit (kecepatan sudut):

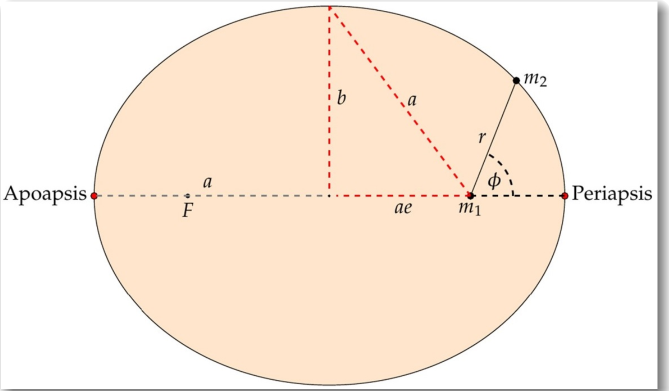
$$
\begin{aligned}
r_{\text{max;min}} &= \frac{j^2/(GM)}{1 \mp e} && (17)\\
a &= \frac{1}{2}(r_{\text{min}} + r_{\text{max}}) = \frac{j^2/(GM)}{1 - e^2} && (18)\\
b &= \sqrt{r_{\text{min}} r_{\text{max}}} && (19)\\
\omega = \frac{2\pi}{P_{\text{orb}}} &= \sqrt{\frac{GM}{a^3}} && (20)
\end{aligned}
$$

Contoh Kasus: Masalah Dua Benda VIII

Dengan $\theta = \phi - \phi_0$, persamaan (16) dapat dituliskan kembali

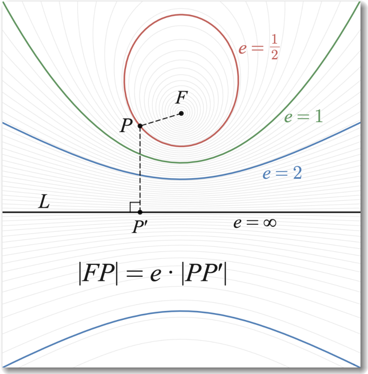
$$r(\theta) = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta} \tag{21}$$

Contoh Kasus: Masalah Dua Benda IX



Gambar 1: Orbit ellips untuk masalah dua benda. Persamaan (16) merujuk pada nilai $\phi_0 = 0$ (Schäfer, 2022).

Contoh Kasus: Masalah Dua Benda X



Gambar 2: Kumpulan irisan kerucut yang berbagi titik fokus F yang sama. Nilai $e = 0$ untuk **lingkaran** (infinitesimal di F), $e < 1$ untuk **ellips**, $e = 1$ untuk **parabola**, $e > 1$ untuk **hiperbola**, $e = \infty$ untuk **garis direktriks** (Wikipedia, 2023).

Contoh Kasus: Masalah Dua Benda XI

3. **energi** E

Diketahui bahwa vektor kecepatan hanya memiliki sebanyaknya dua komponen yaitu dalam arah radial, $\hat{\mathbf{r}}$, dan arah tangensial, $\hat{\theta}$. Dalam arah tegak lurus bidang orbit, misal arah $\hat{\mathbf{k}}$ tidak ada.

$$\mathbf{v} = v_{\mathsf{R}}\,\hat{\mathbf{r}} + v_{\mathsf{T}}\,\hat{\theta} + 0\,\hat{\mathbf{k}} = \dot{r}\,\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\,\hat{\theta} \tag{22}$$

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 \tag{23}$$

$$j = |\mathbf{j}| = |\mathbf{r} \times \mathbf{v}| = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{r}} & \hat{\theta} & \hat{\mathbf{k}} \\ r & 0 & 0 \\ \dot{r} & r\dot{\theta} & 0 \end{vmatrix} = 0\,\hat{\mathbf{r}} - 0\,\hat{\theta} + r^2\dot{\theta}\,\hat{\mathbf{k}} \tag{24}$$

Persamaan ini dapat disederhanakan untuk nilai $\dot{\theta}$ dengan menggunakan persamaan (21) untuk r dan persamaan (18) untuk j, sehingga diperoleh

Contoh Kasus: Masalah Dua Benda XII

$$\dot{\theta} = \frac{\sqrt{a(1-e^2)GM}}{r^2} \tag{25}$$

Dan karena telah diketahui

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta} \quad ; \quad \frac{1}{r^2} = \frac{(1+e\cos\theta)^2}{a^2(1-e^2)^2}$$

$$\dot{r} = \frac{ae(1-e^2)\sin\theta}{(1+e\cos\theta)^2}\,\dot{\theta}$$

$$\dot{r} = e\sqrt{\frac{GM}{a(1-e^2)}}\,\sin\theta \tag{26}$$

Contoh Kasus: Masalah Dua Benda XIII

Karena itu persamaan (23) dapat ditulis menjadi

$$
\begin{aligned}
v^2 &= \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 \\
&= \frac{GMe^2\sin^2\theta}{a(1-e^2)} + \frac{GMa(1-e^2)}{r^2} \\
\frac{v^2}{GM} &= \frac{e^2\sin^2\theta}{a(1-e^2)} + \frac{a(1-e^2)(1+e\cos\theta)^2}{a^2(1-e^2)^2} \\
&= \frac{1+2e\cos\theta+e^2\sin^2\theta+e^2\cos^2\theta}{a(1-e^2)} \\
&= \frac{1+2e\cos\theta+e^2}{a(1-e^2)} = \frac{2(1+e\cos\theta)-(1-e^2)}{a(1-e^2)} \\
&= \left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)
\end{aligned}
$$

Contoh Kasus: Masalah Dua Benda XIV

Persamaan vis-viva ("living force")

$$v^2 = GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) \tag{27}$$

Dengan mengingat bahwa $M = m_1 + m_2$ dan massa tereduksi $\mu = m_1 m_2/M$, dan menggunakan persamaan *vis-viva* ini, energi adalah

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}\mu v^2 - \frac{Gm_1m_2}{r} \\ &= \frac{1}{2}\mu GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) - \frac{Gm_1m_2}{r} \\ &= \frac{Gm_1m_2}{r} - \frac{Gm_1m_2}{r} - \frac{Gm_1m_2}{2a} \end{aligned}$$

Contoh Kasus: Masalah Dua Benda XV

$$E = -\frac{Gm_1 m_2}{2a} \tag{28}$$

Untuk salah satu dari tiga bentuk orbit di bawah ini, **energi** E adalah **konstan** pada masalah dua benda (lihat kembali persamaan [18] untuk nilai a):

- **ellips/lingkaran**: $0 \leq e < 1 \quad ; \quad 0 < a < \infty$

$$E < 0$$

- **parabola**: $e = 1$, dianggap $a = \infty$

$$E_{\text{parab.}} = 0$$

- **hiperbola**: $e > 1$, dianggap $a < 0$

$$E_{\text{hyperb.}} > 0$$

Skema Solusi Numerik

Lima contoh skema numerik pada masalah N-Benda (Bodenheimer et al., 2007)

Runge-Kutta Skema baku yang banyak digunakan untuk penyelesaian numerik (sistem) persamaan diferensial

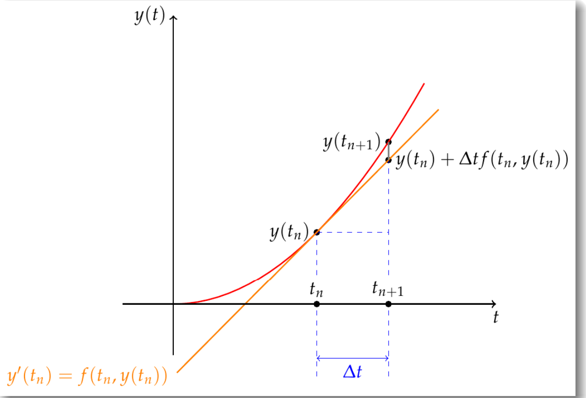
Bulirsch-Stoer Untuk kebutuhan **akurasi tinggi** pada **jumlah benda terbatas** (*few bodies problem*) seperti sistem keplanetan

Pemetaan Simplektik *Symplectic map* sangat umum digunakan pada simulasi **sistem keplanetan** untuk **waktu integrasi yang sangat panjang**, biasanya dalam konteks ketiadaan *close encounter* antar benda

Prediktor-Korektor Untuk simulasi dengan **jumlah benda yang lebih banyak dibanding umumnya sistem keplanetan** (contoh: `NBODY` dari Aarseth [1999])

Katak Melompat *Leapfrog* yang biasa digunakan untuk **jumlah benda N yang sangat besar dan ekstrim**, namun dengan **kebutuhan akurasi yang tidak tinggi** dan **integrasi dalam skala dinamik yang relatif tidak lama**.

Pemetaan Simplektik Sederhana I



Gambar 3: Skema metode simplektik Euler (Schäfer, 2022).

Pemetaan Simplektik Sederhana II

Solusi suatu persamaan diferensial yang diringkaskan dalam fungsi $\varphi_h(y)$ didekati dengan integrator numerik dalam kumpulan fungsi $\phi_h(y)$. Tujuan pendekatan ini dilakukan dengan menghitung nilai $y_{n+1} = \phi_h(y_n)$.

Metode Euler Eksplisit & Implisit untuk $\dot{y} = f(y)$

Eksplisit:

$$y_{n+1} = hf(y_n) \tag{29}$$

Implisit:

$$y_{n+1} = hf(y_{n+1}) \tag{30}$$

Metode simplektik Euler untuk sistem Hamiltonian dapat diungkapkan dengan merujuk pada persamaan (2) dan (3)

Pemetaan Simplektik Sederhana III

Simplektik Euler Sistem Hamiltonian

$$
\begin{aligned}
p_{n+1} &= p_n - h\nabla_q H(p_{n+1}, q_n) && (31)\\
q_{n+1} &= q_n + h\nabla_p H(p_{n+1}, q_n) && (32)
\end{aligned}
$$

atau

$$
\begin{aligned}
p_{n+1} &= p_n - h\nabla_q H(p_n, q_{n+1}) && (33)\\
q_{n+1} &= q_n + h\nabla_p H(p_n, q_{n+1}) && (34)
\end{aligned}
$$

Pemetaan Simplektik Sederhana IV

Integrator pada REBOUND (simplektik & non-simplektik)

1. **Simplektik**: `WHFast`, `SEI`, `LEAPFROG`, `EOS`
2. **Simplektik orde tinggi**: `SABA`, `WHKernel`
3. **Simplektik bauran** (*hybrid*): `MERCURIUS` (untuk asumsi *close encounter*)
4. **Non-simplektik**: `IAS15`, `Gragg-Bulirsch-Stoer` (akurasi tinggi dan *step* waktu adaptif)

Skema Dasar Rancangan Simulasi dalam REBOUND I

Skema dasar yang menuntun pada rancangan yang baik dan standar dapat dilihat di repositori reboundIntro di `github.com/irfan200867`

Skema Dasar Rancangan Simulasi dalam REBOUND II

SKEMA LOAD-UNLOAD

```python
import rebound

# LOAD rebound to simulation, named 'sim'
sim = rebound.Simulation()

# ... many steps here ...

# UNLOAD rebound from simulation (to free the memory)
sim = None

```

Skema Dasar Rancangan Simulasi dalam REBOUND III

Contoh Rancangan Simulasi N-Benda

```python
sim = rebound.Simulation()

# 3-body, including small body with m = 0 msun
# with Internet connection to NASA Horizons system
sim.add('Sun', date = '2000-01-01 00:00')
sim.add(m = 1e-3, a = 1.0, e = 0.3)
sim.add(m = 0, a = 1.25)

# DON'T FORGET TO MOVE TO THE CENTER OF MASS
sim.move_to_com()

```

Skema Dasar Rancangan Simulasi dalam REBOUND IV

Beberapa fitur penting (dalam contoh; menggunakan `numpy` dengan alias `np`):

- **WAKTU**: `times = np.linspace(0, 1*2*np.pi, 250)` (satu kali periode orbit, berisi 250 step waktu)
- **INTEGRATOR**: `sim.integrator = 'leapfrog'` (*default* `IAS15` jika tidak dipesan)
- **INTEGRASI**: `sim.integrate(t)` (dengan syarat terdefinisi `for i, t in times`)
- **ENERGI**: `sim.energy()` (di setiap step waktu)
- **MOMENTUM SUDUT** (3 komponen):
  `Lx[i], Ly[i], Lz[i] = sim.angular_momentum()`
- **HITUNG ORBIT**: `for orb in sim.calculate_orbits()` (lanjutkan dengan `print(orb)`)
- **SATUAN** (massa, jarak, waktu): `sim.units = ('yr', 'au', 'msun')`

Terima kasih.

◂ Kembali ke Beranda