Polinoame

1) Forma algebrică a unui polinom

Prin ***forma algebrică sau forma canonică*** înţelegem $f = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1X + a_0$. Prescurtat putem scrie $f = \sum_{k=0}^{n} a_kX^k$.

! $a_0, a_1, ..., a_n$ sunt ***coeficienţii polinomului*** cu $a_n \neq 0$,

! a_n se numeşte ***coeficient dominant*** şi a_nX^n ***termen dominant***

! $a_n = 1$ atunci polinomul se numeşte ***monic*** sau ***unitar***

! a_0 ***termen liber .***

! $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{C}$ $\Rightarrow$ polinomul este cu coeficienţi complecşi şi scriem $f \in \mathbb{C}[X]$, unde $\mathbb{C}[X]$ este mulţimea polinoamelor cu coeficienţi complecşi.

! $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$polinomul este cu coeficienţi reali şi scriem $f \in \mathbb{R}[X]$, unde $\mathbb{R}[X]$ este mulţimea polinoamelor cu coeficienţi reali.

! $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{Q}$ $\Rightarrow$polinomul este cu coeficienţi raţionali şi scriem $f \in \mathbb{Q}[X]$, unde $\mathbb{Q}[X]$ este mulţimea polinoamelor cu coeficienţi raţionali .

! $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow$ polinomul este cu coeficienţi întregi şi scriem $f \in \mathbb{Z}[X]$, unde $\mathbb{Z}[X]$ este mulţimea polinoamelor cu coeficienţi întregi .

! $\mathbb{Z}[X] \subset \mathbb{Q}[X] \subset \mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$.

! $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{Z}_n$ $\Rightarrow$polinomul este cu coeficienţi căciuli şi scriem $f \in \mathbb{Z}_n[X]$, unde $\mathbb{Z}_n[X]$ este mulţimea polinoamelor cu coeficienţi în mulţimea claselor de resturi .

2) Gradul unui polinom

Dacă $f = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1X + a_0$ şi $a_n \neq 0$ atunci spunem că ***polinomul f are gradul n*** . Notaţie $grad(f) = n$ sau $gr(f) = n$

! Dacă $f = a_0$ atunci polinomul se numeşte constant şi $grad(f) = 0$.

! Dacă $f = a_0$ şi $a_0 \neq 0$ atunci polinomul se numeşte constant şi $grad(f) = 0$.

! Dacă $f = 0$ atunci polinomul se numeşte nul şi $grad(f) = -\infty$.

3) Egalitatea polinoamelor

Fie $f = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1X + a_0$ şi $g = b_mX^m + b_{m-1}X^{m-1} + ... + b_1X + b_0$. Polinoamele f şi g sunt egale şi scriem $f = g$ dacă $n = m$ şi $a_i = b_i$, $i = \overline{1,n}$ adică au grade egale iar coeficienţii corespunzători egali.

4) Valoarea unui polinom

Fie $f = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1X + a_0$ şi $\alpha \in \mathbb{C}$.

Numărul $f(\alpha) = a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + ... + a_1\alpha + a_0$ se numeşte ***valoarea polinomului în α*** şi se obţine din calculul înlocuirii nedeterminatei X cu *α*.

! Dacă $f(\alpha) = 0$ atunci numărul *α* se numeşte rădăcină a polinomului *f*

! Suma coeficienţilor se obţine calculând valoarea polinomului în 1 adică $f(1) = a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0$

! Termenul liber a_0 se obţine calculând valoarea polinomului în 0 adică $f(0) = a_0$

5) Operaţii cu polinoame

Fie $f,g\in\mathbb{C}[X],\ f=\sum_{i=0}^{n}a_iX^i$ şi $g=\sum_{j=0}^{m}b_jX^j,\quad n>m$.

Suma polinoamelor f şi g este polinomul definit prin: $f+g=\sum_{k=0}^{n}c_kX^k$, unde $c_k=\begin{cases}a_k+b_k, k\le m\\ a_k, m<k\le n\end{cases}$ şi $\text{grad}(f+g)=\max\{\text{grad}(f),\text{grad}(g)\}$.

! Suma se efectuează prin adunarea termenilor(monoamelor) asemenea

Produsul polinoamelor *f* şi *g* este polinomul definit prin:
$f\cdot g=c_{n+m}X^{n+m}+...+c_1X+c_0$, unde $c_k=\sum_{i+j=k}a_ib_j,\ k=\overline{0,n+m}.$ şi $\text{grad}(f\cdot g)=\text{grad}(f)+\text{grad}(g)$.

! produsul se efectuează prin desfacerea parantezelor şi apoi prin reducerea termenilor(monoamelor) asemenea

Împărţirea polinoamelor f şi g se efectuează aplicând algoritmul pentru aflarea câtului şi a restului.

! ***Nu este indicat să aplicăm algoritmul la împărţirea cu binomul*** $X-\alpha$

! Restul împărţirii unui polinom *f* prin binomul $X-\alpha$ este egal cu valoarea polinomului în α adică $f(\alpha)$ deci reţinem că $r=f(\alpha)$

! Câtul şi restul împărţirii unui polinom *f* prin binomul $X-\alpha$ se pot afla cu ***schema lui Horner***

Teorema împărţirii cu rest.

Oricare ar fi polinoamele $f,g\in\mathbb{C}[X],\ grad(f)\ge grad(g)$, $g\ne0$, există şi sunt unice polinoamele $q,r\in\mathbb{C}[X]$ care au proprietăţile: $f=g\cdot q+r$; şi $grad(r)<grad(g)$. Avem evident că $grad(q)=grad(f)-grad(g)$

! Dacă efectiv nu putem aplica algoritmul la împărţirea cu $(X-\alpha)(X-\beta)$ atunci determinarea restului se va face astfel:
- Aplicăm T.I.R şi obţinem $f=(X-\alpha)(X-\beta)\cdot q+mx+n$
- Calculăm $f(\alpha)$ şi $f(\beta)$ în două moduri şi obţinem un sistem în m şi n
- Rezolvăm sistemul şi obţinem $m=\frac{f(a)-f(b)}{a-b}$, $n=\frac{af(b)-bf(a)}{a-b}$, $a\ne b$

6) Divizibilitatea polinoamelor

Fie $f,g\in\mathbb{C}[X]$. ***Polinomul f este divizibil cu polinomul g*** dacă există un polinom $q\in\mathbb{C}[X]$ astfel încât $f=g\cdot q$. Notăm $f\,\vdots\,g$ sau $g\,|\,f$.

! $f\,\vdots\,g$ dacă şi numai dacă f împărţit la *g* dă restul 0

! $f\,\not\vdots\,g$ dacă f împărţit la *g* nu dă restul 0

! Dacă $f\,\vdots\,g$ atunci $grad(f)\ge grad(g)$

! Dacă $f\,\vdots\,g$ dacă şi numai dacă rădăcinile lui *g* sunt şi rădăcini pentru *f*.

! $f\,\not\vdots\,g$ dacă o rădăcină a lui *g* nu este rădăcină şi pentru *f*.

7) Rădăcinile polinoamelor

Numărul α este rădăcină pentru polinomului *f* dacă şi numai dacă $f(\alpha)=0$.

Teorema lui Bézout. Fie $f\in\mathbb{C}[X]$ un polinom nenul şi $\alpha\in\mathbb{C}$.

Polinomul f este divizibil cu binomul $X-\alpha$ dacă şi numai dacă $f(\alpha)=0$ adică a este rădăcină.

- ! Dacă α este rădăcină pentru polinomul f atunci $f \vdots (X-\alpha)$
- ! Dacă α şi β sunt rădăcini pentru polinomul f atunci $f \vdots (X-\alpha)$ şi $f \vdots (X-\beta)$
- ! Dacă $f \vdots (X-\alpha)$ şi $f \vdots (X-\beta)$ atunci $f \vdots (X-\alpha)\cdot(X-\beta)$

Spunem că $\alpha \in \mathbb{C}$ este rădăcină multiplă de ordin p pentru polinomul $f \in \mathbb{C}[X]$, dacă $f \vdots (X-\alpha)^p$ şi $f \not\vdots (X-\alpha)^{p+1}$. Dacă $p=2$ atunci α se mai numeşte rădăcină dublă pentru polinom, iar dacă $p=3$ atunci α se mai numeşte rădăcină triplă pentru polinom.

- ! $\alpha \in \mathbb{C}$ este rădăcină dublă pentru polinomul $f \in \mathbb{C}[X]$, dacă $\begin{cases} f(\alpha)=0 \\ f^{I}(\alpha)=0 \\ f^{II}(\alpha)\neq 0 \end{cases}$ adică α este rădăcină pentru f, pentru f^{I} şi nu e pentru f^{II}
- ! $\alpha \in \mathbb{C}$ este rădăcină triplă pentru polinomul $f \in \mathbb{C}[X]$, dacă $\begin{cases} f(\alpha)=0 \\ f^{I}(\alpha)=0 \\ f^{II}(\alpha)=0 \\ f^{III}(\alpha)\neq 0 \end{cases}$ adică α este rădăcină pentru *f*, pentru f^{I}, pentru f^{II} şi nu e pentru f^{III}.
- ! Polinomul care are o infinitate de rădăcini este polinomul nul

8) Rădăcinile polinoamelor cu coeficienţi reali

Fie $f \in \mathbb{R}[X]$ şi numerele $\alpha = a+bi$, $b \neq 0$ respectiv $\overline{\alpha} = a-bi$, $a,b \in \mathbb{R}$

- ! Dacă f are rădăcina complexă $\alpha = a+bi$, $b\neq 0$ atunci şi $\overline{\alpha} = a-bi$ este rădăcină şi amândouă au acelaşi ordin de multiplicitate.
- ! Dacă f are rădăcina complexă $\alpha = a+bi$, $b \neq 0$ atunci $f \vdots (X-\alpha)\cdot(X-\overline{\alpha})$.
- ! Numărul rădăcinilor din $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ adică pur complexe ale polinomului *f* este par.
- ! Dacă gradul lui *f* este impar atunci polinomul are cel puţin o rădăcină reală
- ! Dacă gradul lui *f* este impar atunci polinomul are un număr impar de rădăcini reale.
- ! Dacă gradul lui *f* este par atunci polinomul are un număr par de rădăcini reale sau deloc
- ! Dacă $f(a)\cdot f(b)<0$ atunci polinomul *f* are cel puţin o rădăcină reală în intervalul (a,b), $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$

9) Rădăcinile polinoamelor cu coeficienţi raţionali

Fie $f \in \mathbb{Q}[X]$ şi numerele $\alpha = a+b\sqrt{d}$, $d>0$, $\sqrt{d}\notin\mathbb{Q}$ respectiv $\overline{\alpha} = a-b\sqrt{d}$, $a,b,d \in \mathbb{Q}$

- ! Dacă f are rădăcina iraţională $\alpha = a+b\sqrt{d}$, $d>0$, $\sqrt{d}\notin\mathbb{Q}$ atunci şi $\overline{\alpha} = a-b\sqrt{d}$ este rădăcină şi amândouă au acelaşi ordin de multiplicitate.
- ! Dacă f are rădăcina iraţională $\alpha = a+b\sqrt{d}$, $d>0$, $\sqrt{d}\notin\mathbb{Q}$ atunci $f \vdots (X-\alpha)\cdot(X-\overline{\alpha})$.

10) Rădăcinile polinoamelor cu coeficienţi întregi

Fie $f \in \mathbb{Z}[X]$ şi numărul $\alpha = \frac{p}{q}$ unde $p,q\in\mathbb{Z}$, $(p,q)=1$

- ! Dacă f are rădăcina fracţia ireductibilă $\alpha = \frac{p}{q}$ atunci p/a_0 şi q/a_n adică p divide termenul liber şi q divide coeficientul dominant.

! Rădăcinile întregi sunt divizori ai termenului liber

! Un polinom nu admite rădăcini întregi dacă valorile polinomului în divizori întregi ai termenului liber sunt nenule.

! Dacă f este monic(unitar) atunci rădăcinile raţionale sunt numai întregi

! Un polinom monic nu admite rădăcini raţionale dacă nu are nici întregi.

! $f(x)-f(y) \vdots x-y$

11) Descompunerea în factori

Fie $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1 X + a_0$ cu rădăcinile distincte $x_1, x_2, ..., x_n$.

Formula de descompunere este :

$f = a_n (X - x_1)(X - x_2) \cdot ... \cdot (X - x_n)$

! Dacă rădăcinile nu sunt distincte atunci:

$f = a_n (X - x_1)^{p_1} (X - x_2)^{p_2} \cdot ... \cdot (X - x_k)^{p_k}$ unde $p_1, p_2, ..., p_k$ sunt ordinele de multiplicitate a rădăcinilor $x_1, x_2, ..., x_k$

! Orice polinom de grad $n \geq 1$ cu coeficienţi reali poate fi descompus într-un produs de polinoame de gradul I sau gradul II cu coeficienţi reali.

! Pentru descompuneri căutăm rădăcini întregi printre divizorii termenului liber aplicând schema lui Horner.

! Dacă cunoaştem rădăcinile $x_1, x_2, ..., x_n$ putem afla polinomul desfăcând parantezele $a_n (X - x_1)(X - x_2) \cdot ... \cdot (X - x_n)$.

! În formula de descompunere $f = a_n (X - x_1)(X - x_2) \cdot ... \cdot (X - x_n)$ putem da valori particulare pentru nederminata X şi vom obţine diverse relaţii.

12) Polinoame reductibile-ireductibile

Polinomul f cu $grad(f) = n,\ n > 1$ se numeşte reductibil peste mulţimea de numere M dacă există polinoamele g,h din $M[X]$ de grade strict mai mici decât gradul lui f, astfel încât $f = g \cdot h$. În caz contrar polinomul f este ireductibil peste mulţimea M.

! Orice polinom de grad 1 este ireductil

! Orice polinom de grad 2 este reductil peste $\mathbb{C}$

! Dacă un polinom $f \in M[X]$ este ireductibil peste o mulţime de numere M atunci nu are rădăcini în M dar invers nu, adică dacă $f \in M[X]$ nu are rădăcini în M nu înseamnă că este ireductibil peste M ($f \in M[X]$ este reductibil peste M, dar nu are rădăcini în mulţimea de numere M, exemplu $f = x^4 + 3x^2 + 2$ nu are rădăcini reale, dar este reductibil deoarece $f = x^4 + 3x^2 + 2 = (x^2 + 1)(x^2 + 2)$)

! Polinoamele ireductibile peste $\mathbb{R}$ sunt de forma $f = ax + b$ sau $f = ax^2 + bx + c$, $\Delta < 0$ unde $a, b, c \in \mathbb{R}$

! Un polinom f poate fi ireductibil peste o mulţime dar reductibil peste altă mulţime.

13) *Relaţii între rădăcini şi coeficienţi-Relaţiile lui Viète.*

Fie $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1 X + a_0$ cu rădăcinile $x_1, x_2, ..., x_n$. ***Relaţiile lui Viète*** sunt :

$$V_1 = x_1 + x_2 + ... + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$V_2 = \underbrace{x_1x_2 + x_1x_3 + ... + x_{n-1}x_n}_{C_n^2 \text{ termeni}} = \frac{a_{n-2}}{a_n}$

$V_3 = \underbrace{x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + ... + x_{n-2}x_{n-1}x_n}_{C_n^3 \text{ termeni}} = -\frac{a_{n-3}}{a_n}$

....;

$V_n = x_1x_2...x_n = (-1)^n \cdot \frac{a_0}{a_n}$.

- ! Suma inverselor rădăcinilor $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n} = \frac{V_{n-1}}{V_n}$
- ! Suma pătratelor rădăcinilor $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = V_1^2 - 2V_2$
- ! Dacă $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 < 0$ atunci polinomul nu are toate rădăcinile reale
- ! Dacă aplicăm definiţia rădăcini pentru fiecare în parte atunci prin adunarea relaţiilor putem obţine informaţii despre alte sume de puteri de rădăcini
- ! Dacă cunoaştem $V_1, V_2, ..., V_n$ atunci ecuaţia care are soluţiile $x_1, x_2, ..., x_n$ este : $x^n - V_1x^{n-1} + V_2x^{n-2} + ... + (-1)^k V_k x^{n-k} + ... + (-1)^n V_n = 0$.

14) ***Teoremă.*** Orice ecuaţiei polinomială de grad n are exact n rădăcini complexe nu neapărat distincte.

15) ***Teorema fundamentală a algebrei (teorema D'Alembert – Gauss).*** Orice ecuaţie polinomială de grad mai mare sau egal cu 1 are cel puţin o rădăcină complexă.

16) ***Teorema Abel-Ruffini .*** Orice ecuaţie polinomială de grad mai mare decât 4 nu este rezolvabilă prin radicali.

17) **Rezolvarea ecuaţiilor polinomiale** de forma $a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1X + a_0 = 0$

- ! Pentru ecuaţiile de gradul I şi II avem formule de rezolvare cunoscute.
- ! Pentru rezolvarea **ecuaţiilor bipătrate** de forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$ se face substituţia $x^2 = t$
- ! Pentru **ecuaţiile reciproce** adică ecuaţiile cu coeficienţii termenilor egal depărtaţi de extremi, egali aplicăm algoritmul :
  - Dacă gradul este impar atunci -1 este rădăcină şi aplicând schema lui Horner obţinem o altă ecuaţie reciprocă, dar de grad par
  - Dacă gradul este par atunci se face substituţia $x \pm \frac{1}{x} = t,\ x \neq 0$ şi prin calcul se observă că $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$
- ! **Ecuaţiile binome** de grad impar de forma $x^{2k+1} = a\ , a \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$ au rădăcina reală $x = \sqrt[2k+1]{a}$
- ! **Ecuaţiile binome** de grad par de forma $x^{2k} = a\ , a \geq 0, k \in \mathbb{N}^*$ au rădăcinile reale $x = \pm\sqrt[2k]{a}$

18) Studiul rădăcinilor unei ecuaţii se poate face şi cu teoremele **Darboux** , **Rolle**. Cu ajutorul acestor teoreme se pot determina numărul rădăcinilor reale ale ecuaţiei precum şi intervalele în care aceste rădăcini sunt situate, dacă asociem funcţia polinomială $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

! **Consecinţă a Teoremei lui Darboux**. Dacă o funcţia este continuă pe un interval I şi $f(a)\cdot f(b)<0,\ a,b\in I,\ I\subset\mathbb{R}$ atunci ecuaţia $f(x)=0$ are cel puţin o soluţie în intervalul (a,b).

! **Şirul lui Rolle**. Între două rădăcini ale derivatei există cel mult o rădăcină a funcţiei. Algoritmul este:

- Se rezolvă ecuaţia $f^{l}(x)=0$ şi obţinem rădăcinile $x_1, x_2, ..., x_k$
- Facem un tabel de forma.

x	$-\infty$	x_1	x_2	...	x_k	∞
$f^{l}(x)$		0	0	...	0	
$f(x)$	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	...	$f(x_k)$	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$

- analizăm variaţia semnului funcţiei *f*. Între două variaţii de semn consecutive ale funcţiei $f(x)$ există o rădăcină a polinomului *f*.