Subiectul 3, ex. 2

Variante date

1 Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{x}$.

a) Calculaţi $\int_4^5 xf(x)dx$.

b) Arătaţi că funcţia $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, F(x)=4+\ln x$ este o primitivă a funcţiei f.

c) Determinaţi numărul real $a, a>5$, pentru care aria suprafeței plane delimitate de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţie $x=5$ şi $x=a$, este egală cu $\ln 3$.

2 Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+1$.

a) Verificaţi dacă funcţia $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, F(x)=\frac{x^3}{3}+x$ este o primitivă a funcţiei f.

b) Calculaţi aria suprafeţei plane delimitate de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţie $x=0$ şi $x=1$.

c) Arătaţi că $\int_1^2 \frac{f(x)}{x}dx=\frac{3}{2}+\ln 2$.

3 Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=2x+1+\frac{1}{x}$.

a) Calculaţi $\int_1^2\left(f(x)-\frac{1}{x}\right)dx$.

b) Arătaţi că funcţia $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, F(x)=x^2+x+\ln x$ este o primitivă a funcţiei f.

c) Calculați aria suprafeței delimitate de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţie $x=1$ şi $x=2$.

4 Se consideră funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^x-x$ şi $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, F(x)=e^x-\frac{x^2}{2}-1$.

a) Arătaţi că $\int_0^1 e^x dx=e-1$.

b) Arătaţi că funcţia F este o primitivă a funcţiei f.

c) Calculaţi $\int_0^1 F(x)dx$.

5 Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=2x+\frac{1}{x}$.

a) Arătaţi că $\int_1^e \frac{1}{x}dx=1$.

b) Arătaţi că funcţia $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, F(x)=x^2+\ln x+2$ este o primitivă a funcţiei f.

c) Arătaţi că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=1$ şi $x=2$ are aria mai mică strict decât 4 .

6 Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+2x+1$.

a) Arătaţi că $\int_{-1}^1(2x+1)dx=2$.

b) Determinaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei $g:[0,1]\to\mathbb{R}, g(x)=f(x)-2x-1$.

c) Demonstraţi că orice primitivă a funcţiei f este o funcţie crescătoare pe $\mathbb{R}$.

7 Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^2}{x+1}$.

a) Arătaţi că $\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}$.

b) Determinaţi aria suprafeţei plane delimitate de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=0$ şi $x=1$.

c) Arătaţi că orice primitivă a funcţiei f este funcţie crescătoare pe intervalul $(-1,+\infty)$.

8 Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3x^2+2x$.
a) Arătaţi că $\int_1^2 3x^2 dx=7$.
b) Determinaţi primitiva $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a funcţiei f pentru care $F(1)=2014$.
c) Determinaţi numărul natural $n, n\geq 2$ ştiind că $\int_1^n \frac{f(x)}{x}dx=\frac{13}{2}$.

9 Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-4$.
a) Arătaţi că $\int_0^1 (f(x)+4)dx=\frac{1}{3}$.
b) Determinaţi aria suprafeței plane delimitate de graficul funcţiei $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=\frac{1}{f(x)+5}$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$.
c) Determinaţi numărul real $a, a>1$, pentru care $\int_1^a \frac{f(x)+4}{x}dx=12$.

10 Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=2x+\frac{1}{x}$.
a) Arătaţi că $\int_2^3 \left(f(x)-\frac{1}{x}\right)dx=5$.
b) Demonstrați că funcția $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, F(x)=x^2+\ln x+2015$ este o primitivă a funcției f.
c) Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[1,2]\to\mathbb{R}, g(x)=f(x)-2x$.

11 Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+2$.
a) Arătaţi că $\int_0^1 (f(x)-2)dx=\frac{1}{3}$.
b) Determinaţi primitiva F a funcţiei f pentru care $F(3)=5$.
c) Arătați că suprafața delimitată de graficul funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=e^x\cdot f(x)$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$, are aria egală cu $3e-4$.

12 Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=4x^3+3x^2$.
a) Arătaţi că $\int_1^2 (f(x)-3x^2)dx=15$.
b) Determinaţi primitiva F a funcţiei f pentru care $F(1)=2015$.
c) Determinaţi numărul natural $n, n>1$, ştiind că $\int_1^n \frac{f(x)}{x^2}dx=9$.

13 Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+\sqrt{x}$.
a) Arătaţi că $\int_1^3 (f(x)-\sqrt{x})dx=\frac{26}{3}$.
b) Demonstrați că funcția $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, F(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{2x\sqrt{x}}{3}+2015$ este o primitivă a funcției f.
c) Arătați că suprafața delimitată de graficul funcției $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, g(x)=(f(x)-\sqrt{x})e^x$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=2$, are aria egală cu $e(2e-1)$.

14 Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^5+x^3+2x$.
a) Arătaţi că $\int_{-1}^1 (f(x)-x^3-2x)dx=0$.
b) Arătaţi că $\int_0^2 e^x(f(x)-x^5-x^3+1)dx=3e^2+1$.
c) Demonstrați că orice primitivă a funcției f este convexă pe $\mathbb{R}$.

15 Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+3x$.
a) Arătaţi că $\int_{-1}^1 (f(x)-3x)dx=\frac{2}{3}$.

b) Arătaţi că $\int_0^1 (f(x) - x^2)e^x dx = 3$.
c) Determinaţi volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcţiei $g: [1,2] \to \mathbb{R}, g(x) = \frac{3f(x)}{x}$

16 Se consideră funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^4 + x + 1$.
a) Arătaţi că $\int_0^1 (f(x) - x - 1)dx = \frac{1}{5}$.
b) Arătaţi că $\int_1^e (f(x) - x^4 - 1)\ln x dx = \frac{e^2+1}{4}$.
c) Determinaţi aria suprafeţei plane delimitate de graficul funcţiei f, axa Ox și dreptele de ecuaţii $x = 0$ şi $x = 1$.

17 Se consideră funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x + 2$.
a) Arătaţi că $\int_{-1}^1 (f(x) - 2)dx = 0$.
b) Arătaţi că $\int_0^1 e^x f(x)dx = 2e - 1$.
c) Determinaţi numărul real a, știind că $\int_0^a f(x)dx = \int_0^{6-a} (f(x) - 4)dx$.

18 Se consideră funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 - x^2 + x - 1$.
a) Arătaţi că $\int_{-1}^1 (f(x) + x^2 - x + 1)dx = 0$.
b) Arătaţi că funcţia $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x$ este o primitivă a funcţiei f.
c) Determinaţi volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcţiei g: $[1,2] \to \mathbb{R}, g(x) = \frac{f(x)}{x^2+1}$

19 Se consideră funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + x + 1$.
a) Arătaţi că $\int_0^1 (f(x) - x^2 - 1)dx = \frac{1}{2}$.
b) Demonstrați că funcţia $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 2017$ este o primitivă a funcţiei f.
c) Determinaţi numărul natural n, ştiind că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x = 0$ şi $x = 2$ are aria egală cu $n^2 - \frac{7}{3}$.

20 Se consideră funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 4x^3 - x$.
a) Arătaţi că $\int_0^1 (f(x) + x)dx = 1$.
b) Arătaţi că $\int_0^1 (4x^3 - f(x))e^x dx = 1$.
c) Determinaţi aria suprafeţei plane delimitate de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x = 1$ şi $x = 3$.

21 Se consideră funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3x^2 + 2x - 4$.
a) Arătaţi că $\int_1^2 (f(x) - 2x + 4)dx = 7$.
b) Determinaţi primitiva F a funcţiei f pentru care $F(1) = 2017$.
c) Determinaţi numărul real a pentru care $\int_1^a f(x)dx = a^3 - 2$.

22 Se consideră funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 5x$.
a) Arătaţi că $\int_0^1 (f(x) - 5x)dx = \frac{1}{3}$.
b) Arătaţi că funcţia $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 2017$ este o primitivă a funcţiei f.
c) Demonstrați că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcţiei $g: [1,2] \to \mathbb{R}, g(x) = \frac{f(x)}{x}$ este egal cu $\frac{127\pi}{3}$

23 Se consideră funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3x^2 + 1$.

a) Arătaţi că $\int_{-1}^{1} (f(x) - 1)dx = 2$.

b) Demonstrați că orice primitivă a funcției f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

c) Calculați $\int_{1}^{e} f(x)\ln x dx$.

24 Se consideră funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + 5$.

a) Arătaţi că $\int_{0}^{1} (f(x) - x^3)dx = 9$.

b) Demonstrați că orice primitivă a funcției f este o funcție convexă pe $\mathbb{R}$.

c) Arătați că $\int_{2}^{4} \frac{3}{f'(x)+12} dx = \frac{\pi}{8}$.

25 Se consideră funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{e^x} + x$.

a) Arătaţi că $\int_{-1}^{1} \left(f(x) - \frac{1}{e^x}\right) dx = 0$.

b) Demonstrați că orice primitivă a funcției f este concavă pe intervalul $(-\infty, 0]$.

c) Calculați $\int_{0}^{1} e^x f(x)dx$.

26 Se consideră funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 3x^2 - x, & x \in (-\infty, 1] \\ 2 + \frac{1}{x} \cdot \ln x, & x \in (1, +\infty) \end{cases}$.

a) Arătaţi că $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 2$.

b) Arătaţi că funcţia f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

c) Determinaţi numărul natural n pentru care $\int_{0}^{2} f(x)dx = \frac{n^2-4+\ln^2 2}{2}$.

27 Se consideră funcţia $f: (-1, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$.

a) Arătaţi că $\int_{0}^{2} x(x+1)\left(f(x) + \frac{1}{x+2}\right) dx = 2$.

b) Arătaţi că $\int_{0}^{1} xf(x)dx = \ln\frac{9}{8}$.

c) Determinaţi numărul natural p, știind că suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa

Ox şi dreptele de ecuaţii $x = 0$ și $x = 1$ are aria egală cu $\ln\left(p^2 + \frac{1}{3}\right)$.

28 Se consideră funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{3x^2 + 6x + 7}$.

a) Arătaţi că $\int_{0}^{1} f^2(x)dx = 11$.

b) Calculaţi $\int_{-1}^{1} \frac{x+1}{f(x)} dx$.

c) Demonstrați că, pentru orice $a \in (0, +\infty)$, suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = a$ are aria mai mare sau egală cu $a\sqrt{7}$.

29 Se consideră funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (x - 1)e^x$.

a) Arătaţi că $\int_{0}^{1} \frac{f(x)}{e^x} dx = -\frac{1}{2}$.

b) Demonstrați că $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, F(x) = (x - 2)e^x + 2019$ este o primitivă a funcției f.

c) Calculați $\int_{0}^{1} f^2(x)f'(x)dx$.

30 Se consideră funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2 + 8x - 2, & x \in (-\infty, 0] \\ x - 2, & x \in (0, +\infty) \end{cases}$.

a) Arătaţi că $\int_{1}^{2} f(x)dx = -\frac{1}{2}$.

b) Demonstrați că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

c) Demonstrați că suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x = -1$ şi $x = 0$ are aria egală cu $\frac{17}{3}$.

31 Se consideră funcția $f: (-1, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x}{x+1}$.

a) Arătați că $\int_0^2 (x+1)f(x)dx = e^2 - 1$.

b) Arătați că $\int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)} dx = 1 - \ln 2$.

c) Arătați că $\int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 e^x \ln(x+1)dx = e \ln 2$.

32 Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4}}$.

a) Arătaţi că $\int_0^1 f(x)\sqrt{x^2+4}dx = \frac{5}{2}$.

b) Arătaţi că $\int_0^1 (f^2(x) - 1)dx = 2\ln\frac{5}{4}$.

c) Determinați $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, primitiva lui f pentru care $F(0) = 0$.

33 Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 1 + \frac{x}{x^2+1} - \frac{2}{x^2+1}$.

a) Arătați că $\int_0^1 (x^2+1)f(x)dx = -\frac{1}{6}$.

b) Determinaţi primitiva F a funcției f pentru care $F(0) = 0$.

c) Arătați că $\int_1^2 \left(f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)\right) dx = \ln\frac{5}{2}$.

34 Se consideră functia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^x + 3x^2 + 3$.

a) Arătați că $\int_1^2 (f(x) - e^x - 3)dx = 7$.

b) Arătați că $\int_0^1 x(f(x) - 3x^2)dx = \frac{5}{2}$.

c) Determinați $a \in (0,1)$, știind că $\int_0^a \frac{1}{f(x)-f'(x)} dx = \frac{1}{6}$.

35 Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + \ln x - 1$.

a) Arățai că $\int_1^4 (f(x) - \ln x + 1)dx = 21$.

b) Arătați că $\int_2^4 \frac{x}{f(x)-\ln x} dx = \frac{1}{2}\ln 5$.

c) Determinați $a \in (1, +\infty)$ pentru care $\int_1^a \frac{f(x)}{x^2} dx = \frac{a-\ln a}{a}$.

36 Se consideră funcția $f: (-1, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = 6x + \frac{2}{x+1}$.

a) Arătați că $\int_0^2 \left(f(x) - \frac{2}{x+1}\right) dx = 12$.

b) Arătați că $\int_0^1 (f(x) - 6x)dx = 2\ln 2$.

c) Determinați numărul real a pentru care $\int_1^e \left(f(x) - \frac{2}{x+1}\right) \cdot \ln^2 x dx = \frac{a(e^2-1)}{2}$.

37 Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x + 3e^x$.

a) Arătați că $\int_2^3 (f(x) - 3e^x)dx = 5$.

b) Arătai că $\int_0^1 x(f(x) - 2x)dx = 3$.

c) Determinați numărul real a, știind că $\int_0^1 \frac{f'(x)-x}{2f(x)-x^2} dx = a\ln\left(e + \frac{1}{2}\right)$.

38 Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (x-1)e^x$.

a) Arătați că $\int_0^2 \frac{f(x)}{e^x} dx = 0$.

b) Arătați că $\int_0^1 f(x)dx = 2 - e$.

c) Determinați numărul natural $n, n > 2$, pentru care $\int_2^n \frac{x}{f(x)\cdot f(-x)}dx = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{8}$.

39 Se consideră funcția $f: (-9, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{8x}{x+9}$.

a) Arățai că $\int_0^1 (x+9)\cdot f(x)dx = 4$.

b) Arătați că $\int_1^6 \frac{1}{8x}\cdot f(x)dx = \ln\frac{3}{2}$.

c) Determinați numărul real a pentru care $\int_0^3 f(x^2)dx = 6(4 + a\pi)$.

40 Se consideră funcția $f: \left(-\frac{3}{2}, +\infty\right) \to \mathbb{R}, f(x) = e^x + \frac{6}{2x+3}$.

a) Arătați că $\int_1^3 \left(f(x) - \frac{6}{2x+3}\right)dx = e(e^2 - 1)$.

b) Arățai că $\int_{-1}^0 (f(x) - e^x)dx = 3\ln 3$.

c) Arătați că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g: \left(-\frac{3}{2}, +\infty\right) \to \mathbb{R}, g(x) = (2x^2 + 3x)f(x)$, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 1$ are aria egală cu $2(e+1)$.

Teste de antrenament

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2x - 1, x \in (-\infty, 0] \\ \frac{3x-1}{x+1}, x \in (0, +\infty) \end{cases}$.

a) Arătați că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

b) Calculați $\int_1^2 f(x)dx$.

c) Arătați că $\int_{-1}^0 e^x f(x)dx = \frac{5-3e}{e}$.

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sin x$.

a) Arătați că orice primitivă F a funcției f este crescătoare pe $[0, \pi]$.

b) Calculați $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 2f(x)f'(x)dx$.

c) Arătați că $\int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(x)dx = 1$

3. Se consideră funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x(x^2 + 1) - 2$.

a) Arătaţi că $\int_{-1}^1 (f(x) - x + 2)dx = 0$.

b) Calculaţi $\int_0^1 (f(x) - x^3 + 2)e^x dx$

c) Determinaţi numărul real pozitiv m, ştiind că $\int_1^2 f(x)dx = m^2 + 1$.

4. Se consideră funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2+1}$.

a) Arătaţi că $\int_0^1 (x^2 + 1)(f(x) - x^2)dx = 1$.

b) Calculaţi $\int_{-1}^1 xf(x)dx$

c) Determinaţi numărul natural n, ştiind că $\int_0^1 f(x)dx = \frac{n^2}{3} + \frac{\pi}{4} - 1$.

5. Se consideră funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 2, x \in (-\infty, 0) \\ e^x + 1, x \in [0, +\infty) \end{cases}$.

a) Arătaţi că $\int_0^1 f(x)dx = e$.

b) Demonstrați că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

c) Calculați $\int_{-1}^{1} xf(x)dx$

6. Se consideră funcția $f: (-4, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x+2}{x+4}$.

a) Arătați că $\int_{0}^{2} (x+4)f(x)dx = 6$.

b) Calculați $\int_{-2}^{0} f(x)dx$.

c) Demonstrați că $\int_{-3}^{a} f'(x)f''(x)dx = 2\left(\frac{1}{(a+4)^4} - 1\right)$, pentru orice $a \in (-3, +\infty)$.

7. Se consideră funcțiile $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x}{x}$ și $g: (0, +\infty) \to \mathbb{R}, g(x) = e^x \ln x$.

a) Arătați că $\int_{1}^{2} xf(x)dx = e(e-1)$.

b) Calculați $\int_{e}^{e^2} \frac{g(x)}{xe^x} dx$.

c) Demonstrați că $\int_{1}^{e} (f(x) + g(x))dx = e^e$.

8. Se consideră funcțiile $F: (-1, +\infty) \to \mathbb{R}, F(x) = \frac{x^2}{x+1}$ și $f: (-1, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = 1 - \frac{1}{(x+1)^2}$.

a) Demonstraţi că funcţia F este o primitivă a funcţiei f.

b) Calculaţi $\int_{0}^{1} f(x)dx$

c) Determinaţi numărul real $a, a > 1$, pentru care $\int_{1}^{a} \frac{f(x)}{F(x)} dx = \ln\frac{8}{3}$.

9. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x\sqrt{x^2+1}$.

a) Arătați că $\int_{1}^{e} \frac{\sqrt{x^2+1}}{f(x)} dx = 1$.

b) Calculați $\int_{1}^{2} f^2(x)dx$.

c) Demonstrați că $\int_{0}^{2020} f(x)dx \leq \int_{0}^{a} f(x)dx$, pentru orice $a \in [2020, +\infty)$.

10. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^{2020} - 2020x + 1$.

a) Arătaţi că $\int_{0}^{1} (f(x) + 2020x - 1)dx = \frac{1}{2021}$.

b) Demonstrați că orice primitivă a funcției f este convexă pe $[1, +\infty)$.

c) Calculați $\int_{0}^{1} (f(-x) - f(x))e^x dx$

11. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^5 + x^3 + 2x + 2$.

a) Arătați că $\int_{-1}^{1} (f(x) - x^3 - 2x - 2)dx = 0$.

b) Arătați că $\int_{0}^{2} e^x(f(x) - x^5 - x^3 - 3x - 1)dx = -2$.

c) Demonstrați că orice primitivă a funcției f este convexă.

12. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 + x^2 + 3x$.

a) Arătaţi că $\int_{-1}^{1} (f(x) - x^2 - 3x)dx = 0$.

b) Arătaţi că $\int_{0}^{1} (f(x) - x^3 - x^2)e^x dx = 3$.

c) Se consideră funcția $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, primitiva funcției f pentru care $F(0) = 1$. Demonstrați că $\int_{0}^{1} \frac{f(x)}{F^2(x)} dx = \frac{25}{37}$.

13. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^4 + x + e^x$.

a) Arătaţi că $\int_{-1}^{1} (f(x) - x - e^x)dx = \frac{2}{5}$.

b) Arătaţi că $\int_1^e (f(x) - x^4 - e^x)\ln x dx = \frac{e^2+1}{4}$.

c) Determinaţi numărul real a pentru care $\int_0^a f(x)dx = \frac{5a^2+54}{10} + e^a$.

14. Se consideră funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

a) Arătaţi că $\int_{-1}^1 f(x) \cdot (x^2+1)dx = 0$.

b) Calculaţi $\int_0^1 (x^2+1)e^x f(x)dx$

c) Determinaţi $a \in (0, +\infty)$ pentru care $\int_0^a (f(x) - f(-x))dx = \ln(2a)$.

15. Se consideră funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$.

a) Arătaţi că $\int_{-1}^1 (f(x) - x^2 - x - 1)dx = 0$.

b) Arătaţi că funcţia $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, F(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x$ este o primitivă a funcţiei f.

c) Determinaţi numerele reale a pentru care $\int_1^2 \frac{f(x)}{x^2+1} \cdot e^x dx = (ae)^2 - e$.

16. Se consideră funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 4$.

a) Arătaţi că $\int_0^3 (f(x) + 4)dx = 9$.

b) Calculaţi $\int_0^1 \frac{1}{f(x)+5} dx$.

c) Determinaţi numărul real $a, a > 0$, pentru care $\int_{\frac{1}{a}}^a f\left(\frac{1}{x}\right) dx = -8$.

17. Se consideră funcţia $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = 5x + \frac{1}{x}$.

a) Arătaţi că $\int_2^4 \left(f(x) - \frac{1}{x}\right) dx = 30$.

b) Demonstraţi că funçia $F: (0, +\infty) \to \mathbb{R}, F(x) = \frac{5x^2+2020}{2} + \ln x$ este o primitivă a funçiei f.

c) Calculaţi $\int_1^e (f(x) - 5x)\ln x dx$.

18. Se consideră funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 + 2$.

a) Arătaţi că $\int_0^1 (f(x) - 2)dx = \frac{1}{4}$.

b) Determinaţi primitiva F a funcţiei f pentru care $F(2) = 7$.

c) Arătaţi că $\int_0^1 e^x(f(x) - x^3 + x^2)dx = 3e - 4$.

19. Se consideră funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3x^3 + 4x^2$.

a) Arătaţi că $\int_0^2 (f(x) - 4x^2)dx = 12$.

b) Determinaţi primitiva F a funcţiei f pentru care $F(0) = 2020$.

c) Determinaţi numărul real $m, m > 1$, ştiind că $\int_1^m \frac{f(x)}{x^2} dx = \frac{17}{2}$.

20. Se consideră funcţia $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - \sqrt{x}$.

a) Arătaţi că $\int_1^4 (f(x) + \sqrt{x})dx = 21$.

b) Demonstraţi că funcţia $F: (0, +\infty) \to \mathbb{R}, F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{2x\sqrt{x}}{3} + 2020$ este o primitivă a funcţiei f.

c) Arătaţi că $\int_1^2 (f(x) + \sqrt{x})e^x dx = e(2e - 1)$.

21. Se consideră funcţia $f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x-1}{x+1}$.

a) Arătaţi că $\int_1^2 f(x)(x+1)dx = \frac{1}{2}$.

b) Arătați că $\int_2^3 f(x)dx = 1 + \ln\frac{9}{16}$.

c) Determinați numărul real $a > 1$ astfel încât $\int_1^a f(x)f'(x)dx = \frac{1}{8}$.

22. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x(x^2 - 1) + 3$.

a) Arătați că $\int_{-1}^1 (f(x) + x - 3)dx = 0$.

b) Calculați $\int_0^1 (f(x) - x^3 - 3)e^x dx$.

c) Determinați numărul real $a, a > 0$, știind că $\int_0^1 f(x)dx = -a^2 + 5$.

23. Se consideră funcția $f: (-2, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2+1}{x+2}$.

a) Arătați că $\int_{-1}^2 (x + 2)f(x)dx = 6$.

b) Calculați $\int_0^4 \left(f(x) - \frac{x^2}{x+2}\right) dx$

c) Determinați numărul natural n, știind că $\int_0^6 (x^2 - 9)f(x + 1)dx = n^2$.

24. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (2x - 1)(x + 1)$.

a) Arătați că $\int_1^5 \frac{f(x)}{x+1} dx = 20$.

b) Calculați $\int_1^2 \frac{f(x)}{x^2} dx$

c) Determinați numărul real $a, a \in \left[\frac{1}{2}, 2\right)$, știind că $\int_a^2 f'(x)\sqrt{f(x)}dx = 18$.

25. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x + \ln x - 2$.

a) Arătați că $\int_1^3 (f(x) - \ln x)dx = 0$.

b) Calculați $\int_1^e (f(x) - x + 2)dx$.

c) Demonstrați că orice primitivă $F: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ a funcției f este convexă.

26. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{x^2+1} + 1, & x \in (-\infty, 0] \\ e^x, & x \in (0, +\infty) \end{cases}$.

a) Arătați că $\int_1^4 f(x)dx = e(e^3 - 1)$.

b) Calculați $\int_1^2 xf(x)dx$

c) Determinați numărul real $a, a > 0$, știind că $\int_{-a}^0 f(x)dx = a - \ln(a + 1)$.

27. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x^5 + x^2 - 1$.

a) Arătați că $\int_{-1}^1 (f(x) - x^2)dx = -2$.

b) Arătați că $\int_2^4 \frac{f(x)-2x^5}{2x} dx = \frac{6-\ln 2}{2}$.

c) Calculați $\int_0^1 x^4(f(x) - x^2)^2 dx$

28. Se consideră funcția $f: (-1, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{2x}{x+1}$.

a) Arătați că $\int_0^2 (x + 1)f(x)dx = 4$.

b) Calculați $\int_1^3 \frac{f(x)}{x} dx$

c) Arătați că $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) \cdot f(-x)dx = 4(1 - \ln 3)$.

29. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x - 2\sqrt{x} + 2$.

a) Arătați că $\int_1^3 (f(x) + 2\sqrt{x})dx = 8$.

b) Arătați că funcția f este o primitivă a funçiei $g: (0, +\infty) \to \mathbb{R}, g(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$.

c) Calculați $\int_1^2 \frac{1}{f(x^2)} dx$.

30. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 1$.

a) Arătați că $\int_0^1 f(x)dx = -\frac{2}{3}$.

b) Arătați că $\int_1^e (f(x) + 1)\ln x dx = \frac{2e^3+1}{9}$.

c) Determinați numărul real, $a, a \in (0, +\infty)$, pentru care $\int_0^{\frac{\pi}{3}} (f(\sin x) + f(\cos x))\operatorname{tg} x dx = \ln a$.

31. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x + 1$.

a) Arătați că $\int_0^2 f(x)dx = 6$.

b) Calculați $\int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx$.

c) Determinați $a \in (0,2)$ pentru care $\int_{-a}^{a} \frac{1}{x^2+2f(x)+2} dx = \frac{2}{3}$.

32. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2+5}{x^2+1}$.

a) Arătați că $\int_0^3 (x^2 + 1)f(x)dx = 24$.

b) Calculați $\int_0^1 (f(x) - 1)dx$.

c) Arătați că orice primitivă F a funcției f este concavă pe $[0, +\infty)$.

33. Se consideră funcția $f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = (x + 1)\sqrt{x}$.

a) Arătați că $\int_1^2 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx = \frac{5}{2}$.

b) Arătați că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului functiei $g: [0,1] \to \mathbb{R}, g(x) = f(x)$, este egal cu $\frac{17\pi}{12}$.

c) Determinați numărul real a, știind că $\int_1^e \frac{f(x)\sqrt{x}\ln x}{x+1} dx = \frac{e^2+a}{4}$.

34. Se consideră funcția $f: (-4, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{4x}{x+4}$.

a) Arătați că $\int_1^2 (x + 4)f(x)dx = 6$.

b) Arătați că $\int_1^4 \frac{1}{x} \cdot f(x^2)dx = 4\ln 2$.

c) Demonstrați că orice primitivă a funcției f este convexă.

35. Se consideră funcția $f: (-1, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x + 1 + \frac{1}{\sqrt{x+1}}$.

a) Arătaţi că $\int_1^3 \left(f(x) - \frac{1}{\sqrt{x+1}}\right) dx = 6$.

b) Arătați că $\int_0^8 (f(x) - x - 1)dx = 4$.

c) Arătați că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g: [0,3] \to \mathbb{R}, g(x) = f(x)$, este egal cu $\pi\left(\frac{91}{3} + \ln 4\right)$.

Simulări

1 Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$.

a) Verificați dacă funcția $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, F(x)=x-\frac{1}{x}+\ln x$ este o primitivă a funcției f.

b) Calculați $\int_1^e x\cdot f(x^2)dx$.

c) Determinați numărul real $a>1$, pentru care $\int_1^a\left(f(x)-\frac{1}{x}\right)dx=\frac{3}{2}$.

2 Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^5+x$.

a) Calculați $\int_{-1}^1 x^5dx$

b) Arătați că $\int_0^1(f(x)-x^5)e^xdx=1$.

c) Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[1,2]\to\mathbb{R}$, definită prin $g(x)=\frac{f(x)-x}{x^3}$

3 Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=3-\frac{1}{x}$.

a) Calculați $\int_1^2(3-f(x))dx$.

b) Determinați primitiva $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ a funcției f pentru care $F(1)=3$.

c) Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[1,2]\to\mathbb{R}, g(x)=xf(x)$.

4 Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=5x^4+3x^2+1$.

a) Arătaţi că $\int_0^1(f(x)-3x^2-1)dx=1$

b) Calculați aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=2$.

c) Demonstrați că orice primitivă a funcției f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

5 Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-2x$.

a) Arătați că $\int_{-1}^1(f(x)+2x)dx=\frac{2}{3}$.

b) Calculați $\int_0^1 e^x(x^2-f(x))dx$.

c) Demonstrați că suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=0$ şi $x=1$ are aria egală cu $\frac{2}{3}$.

6 Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{e^x+1}$.

a) Arătați că $\int_0^1(e^x+1)f(x)dx=1$.

b) Arătați că $\int_0^1\frac{x}{f(x)}dx=\frac{3}{2}$.

c) Determinați volumul corpului obținut prin rotația î jurul axei Ox a graficului funcției $g:[0,1]\to\mathbb{R}, g(x)=\sqrt{e^xf(x)}$

7 Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+\frac{1}{x}$.

a) Determinați primitiva F a funcției f pentru care $F(1)=0$.

b) Arătați că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[1,2]\to\mathbb{R}, g(x)=f(x)$ este egal cu $\frac{97\pi}{10}$.

c) Determinați numărul $m\in(1,+\infty)$, știind că $\int_1^m(f(x)-x^2)\ln x dx=\frac{1}{2}$.

8 Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^5 + x + 1$.

a) Arătați că $\int_{-1}^{1} (f(x) - x^5 - 1)dx = 0$.

b) Calculați $\int_{0}^{1} x^{2020}(f(x) - x - 1)dx$.

c) Arătați că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g: [1,2] \to \mathbb{R}, g(x) = \frac{1}{x}(f(x) - x^5)$ este egal cu $\pi\left(2\ln 2 + \frac{3}{2}\right)$

9 Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x - \frac{1}{x}$.

a) Arătați că $\int_{1}^{3} \left(f(x) + \frac{1}{x}\right) dx = 4$.

b) Arătați că $\int_{1}^{2} \left(f(x) + \frac{1}{x}\right) \ln x dx = 2\ln 2 - \frac{3}{4}$.

c) Determinați cel mai mare număr natural nenul n pentru care $\int_{1}^{\sqrt{2}} x^{n+1} f^n(x)dx \geq \frac{1}{2021}$.

10 Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x + \frac{e^x}{2} + 1$.

a) Arătați că $\int_{0}^{2} \left(f(x) - \frac{e^x}{2}\right) dx = 4$

b) Arătați că $\int_{0}^{1} 2x(f(x) - 1)dx = \frac{5}{3}$.

c) Determinați numărul real a pentru care $\int_{-1}^{0} (f(x) - x) \cdot f(x)dx = \frac{(3e+1)(3e+a)}{8e^2}$.

11 Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3x^2 + 4x + 2$.

a) Arătați că $\int_{0}^{2} (f(x) - 4x)dx = 12$.

b) Arătați că $\int_{0}^{1} (f(x) - 3x^2 - 2)e^x dx = 4$.

c) Determinați $a \in (0, +\infty)$ pentru care $\int_{-1}^{0} a \cdot f'(x) \cdot (f(x))^{a-1} dx = 63$.

12 Se consideră funcţiile $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^x + 2x$ și $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, F(x) = e^x + x^2 + 2014$.

a) Calculaţi $\int_{1}^{2} (f(x) - e^x)dx$

b) Arătați că funcția F este o primitivă a funcției f.

c) Calculați $\int_{0}^{1} f(x)F(x)dx$.

13 Se consideră funcțile $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x - 1$ și $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, F(x) = x^2 - x + 1$.

a) Calculați $\int_{0}^{1} (f(x) + 1)dx$.

b) Arătați că funcția F este o primitivă a funcţiei f.

c) Determinați numărul natural nenul n, știind că $\int_{0}^{n} F(x)dx = \frac{n^3}{3}$.

14 Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

a) Calculaţi $\int_{0}^{2} (f(x) + 3x^2 - 2)dx$.

b) Arătați că $\int_{0}^{1} (f(x) - x^3 + 3x^2 + x)e^x dx = 2e - 1$.

c) Demonstrați că $\int_{1-a}^{1+a} f(x)dx = 0$, pentru orice număr real a.

15 Se consideră funcțiile $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = 1 + \ln x$ și $F: (0, +\infty) \to \mathbb{R}, F(x) = x\ln x$.

a) Calculați $\int_{1}^{e} (f(x) - \ln x)dx$.

b) Arătaţi că F este o primitivă a funcției f.

c) Arătați că $\int_{1}^{e} f(x)F(x)dx = \frac{e^2}{2}$.

16 Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = xe^x$.

a) Arătați că $\int_1^2 \frac{f(x)}{x} dx = e(e-1)$.

b) Determinați primitiva $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a funcției f pentru care $F(1) = 0$.

c) Determinați numărul real a pentru care $\int_0^1 f(x)f'(x)dx = \frac{1}{2}e^a$.

17 Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 6x^2 + 4x + 1$.

a) Arătați că $\int_0^1 f(x)dx = 5$.

b) Demonstrați că orice primitivă a funcției f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

c) Determinați numărul real $a, a > 1$, pentru care $\int_1^a \frac{f(x)}{x} dx = 13 + \ln a$.

18 Se consideră funcția f: R → R, $\mathrm{f(x)} = e^x(x^2 + x + 1)$.

a) Să se calculeze $\int [\mathrm{f(x)} - (x^2+1) \cdot e^x] dx$.

b) Să se calculeze $\int \frac{\mathrm{f(x)}}{(x^2+x+1)(e^x+2)} dx$

c) Să se determine punctele de inflexiune ale primitivei $F(x)$ a funcției $f(x)$.

19 Se consideră funcțile $f, F: 1, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \ln x - \frac{1}{x}$ sin $F(x) = (x-1)\ln x - x + 2023$.

a) Să se arate că funcția F este o primitivă a funcției f.

b) Să se calculeze $\int \left(f(x) + \frac{1}{x}\right) dx$.

c) Să se calculeze $\int f(x)F^2(x)dx$.

20 Se consideră funcțiile $f, F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^x(x^2 - 3x - 3), F(x) = e^x(x^2 - 5x + 2)$.

a) Arătați că funcția F este o primitivă a funcției f.

b) Arătați că $\int_{-2}^{-1} f(x)dx = \frac{8e-16}{e^2}$.

c) Determinați punctele de inflexiune ale graficului funcției F.

21 Se consideră funcția $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x}$.

a) Arătați că $\int_1^2 \left(f(x) - \frac{1}{x+1}\right) dx = 1$.

b) Demonstrați că funcția $F: (0, \infty) \to \mathbb{R}, F(x) = \ln(x^2 + x) - \ln 2$ este o primitivă a funcției f.

c) Demonstrați că orice primitivă a funcției f este strict crescătoare pe intervalul $(0, \infty)$.

22 Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^x(x^2 + 1)$.

a) Calculați $\int \frac{f(x)}{e^x} dx$.

b) Demonstrați că funcția $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = e^x(x^2 - 2x + 3) + 2022$ este o primitivă a funcției f.

c) Demonstrați că orice primitivă a funcției f este convexă pe $\mathbb{R}$.

23 Fie functiile $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x - 1$ și $g(x) = x^2 - x + 1$

a) Arătați că $\int_0^3 (g(x) + x - 1)dx = 9$.

b) Verificați că funcția g este o primitivă a funcției f.

c) Calculați $\int_{-1}^1 f(x)dx$.

24 Se consideră funcțiile $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x + \ln x - 2$ și $F: (0, \infty) \to \mathbb{R}, F(x) = \frac{x^2}{2} - 3x + x\ln x$.

a) Demonstrați că funcția F este o primitivă a funcției f.

b) Arătați că $\int_2^4 (f(x) - \ln x)dx = 2$.

c) Demonstrați că orice primitivă a funcției f este funcție convexă pe $(0, \infty)$.

25 Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$.

a) Verificați dacă funcția $F: (0, +\infty) \to \mathbb{R}, F(x) = x - \frac{1}{x} + \ln x$ este o primitivă a funcției f.

b) Calculați $\int_1^e x \cdot f(x^2)dx$.

c) Determinați numărul real $a > 1$, pentru care $\int_1^a \left(f(x) - \frac{1}{x}\right) dx = \frac{3}{2}$.