



## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие ко второму изданию . . . . .	11
Введение . . . . .	18
<b>Глава 1. Выборка. Эмпирическое распределение. Асимптотические свойства статистик . . . . .</b>	<b>21</b>
§ 1. Понятие выборки . . . . .	21
§ 2. Эмпирическое распределение (одномерный случай) . . . . .	24
§ 3. Выборочные характеристики. Основные типы статистик . . . . .	28
1. Примеры выборочных характеристик (28). 2. Два типа статистик (29). 3. $L$ -статистики (31). 4. $M$ -статистики (32). 5. О других статистиках (33).	
§ 4. Многомерные выборки . . . . .	33
1. Эмпирические распределения (33). 2*. Более общие варианты теоремы Глиенко–Кантелли. Закон повторного логарифма (34). 3. Выборочные характеристики (35).	
§ 5. Теоремы непрерывности . . . . .	35
§ 6*. Эмпирическая функция распределения как случайный процесс. Сходимость к броуновскому мосту . . . . .	40
1. Распределение процесса $nF_n^*(t)$ (40). 2. Предельное поведение процесса $w^n(t)$ (43).	
§ 7. Предельное распределение для статистик первого типа . . . . .	46
§ 8*. Предельное распределение для статистик второго типа . . . . .	51
§ 9*. Замечания о непараметрических статистиках . . . . .	62
§ 10*. Сглаженные эмпирические распределения. Эмпирические плотности . . . . .	63

Глава 2. Теория оценивания неизвестных параметров . . . . .	69
§ 11. Предварительные замечания . . . . .	69
§ 12. Некоторые параметрические семейства распределений и их свойства . . . . .	71
1. Нормальное распределение на прямой (71). 2. Многомерное нормальное распределение (71). 3. Гамма-распределение (72). 4. Распределение «хи-квадрат» $\mathbf{H}_k$ с $k$ степенями свободы (73). 5. Экспоненциальное распределение (74). 6. Распределение Фишера с числом степеней свободы $k_1, k_2$ (74). 7. Распределение Стьюдента $T_k$ с $k$ степенями свободы (75). 8. Бэта-распределение (В-распределение) (77). 9. Равномерное распределение (78). 10. Распределение Коши $K_{\alpha, \sigma}$ с параметрами $(\alpha, \sigma)$ (80). 11. Логнормальное распределение $L_{\alpha, \sigma^2}$ (80). 12. Вырожденное распределение (81). 13. Распределение Бернулли $B_p^n$ (81). 14. Распределение Пуассона $\Pi_\lambda$ (81). 15. Полиномиальное распределение (81).	
§ 13. Точечное оценивание. Основной метод получения оценок. Состоятельность, асимптотическая нормальность . . . . .	82
1. Метод подстановки. Состоятельность (82). 2. Асимптотическая нормальность. Одномерный случай (85). 3. Асимптотическая нормальность. Случай многомерного параметра (86).	
§ 14. Реализация метода подстановки в параметрическом случае. Метод моментов. $M$ -оценки . . . . .	87
1. Метод моментов. Одномерный случай (87). 2. Метод моментов. Многомерный случай (89). 3. $M$ -оценивание как обобщенный метод моментов (90). 4. Состоятельность $\bar{M}$ -оценок (92). 5. Состоятельность $M$ -оценок (95). 6. Асимптотическая нормальность $M$ -оценок (96). 7. Замечания о многомерном случае (98).	
§ 15*. Метод минимального расстояния . . . . .	99
§ 16. Метод максимального правдоподобия. Оптимальность оценок максимального правдоподобия в классе $M$ -оценок . . . . .	101
1. Определения. Общие свойства (101). 2. Асимптотические свойства о. м. п. Состоятельность (109). 3. Асимптотическая нормальность о. м. п. Оптимальность в классе $M$ -оценок (113).	
§ 17. О сравнении оценок . . . . .	115
1. Среднеквадратический подход. Одномерный случай (116). 2. Асимптотический подход. Одномерный случай (119). 3. Нижняя граница рассеивания для $L$ -оценок (121). 4. Среднеквадратический и асимптотический подходы в многомерном случае (124). 5. Некоторые эвристические подходы к определению дисперсий оценок. Методы складного ножа и бутстрэп (127).	
§ 18. Сравнение оценок в параметрическом случае. Эффективные оценки . . . . .	128
1. Одномерный случай. Среднеквадратический подход (129). 2. Асимптотический подход. Асимптотическая эффективность в классах $M$ - и $L$ -оценок (131). 3. Многомерный случай (138).	
§ 19. Условные математические ожидания . . . . .	140
1. Определение у. м. о. (140). 2. Свойства у. м. о. (143).	
§ 20. Условные распределения . . . . .	146
§ 21. Байесовский и минимаксный подходы к оцениванию параметров . . . . .	150
§ 22. Достаточные статистики . . . . .	157

§ 23*. Минимальные достаточные статистики . . . . .	164
§ 24. Построение эффективных оценок с помощью достаточных статистик. Полные статистики . . . . .	171
1. Одномерный случай (171). 2. Многомерный случай (173). 3. Полные статистики и эффективные оценки (173).	
§ 25. Экспоненциальное семейство . . . . .	178
§ 26. Неравенство Рао–Крамера и $R$ -эффективные оценки . . . . .	185
1. Неравенство Рао–Крамера и его следствия (185). 2. $R$ -эффективные и асимптотически $R$ -эффективные оценки (191). 3. Неравенство Рао–Крамера в многомерном случае (194). 4. Некоторые выводы (200).	
§ 27*. Свойства информации Фишера . . . . .	200
1. Одномерный случай (200). 2. Многомерный случай (203). 3. Матрица Фишера и замена параметра (206).	
§ 28*. Оценки параметра сдвига и масштаба. Эффективные эквивариантные оценки . . . . .	207
1. Оценки параметра сдвига и масштаба (207). 2. Эффективная оценка параметра сдвига в классе эквивариантных оценок (208). 3. Минимаксность оценок Питмена (211). 4. Об оптимальных оценках параметра масштаба (212).	
§ 29*. Общая задача об эквивариантном оценивании . . . . .	215
§ 30. Интегральное неравенство типа Рао–Крамера. Критерии асимптотической байесовости и минимаксности оценок . . . . .	218
1. Эффективные и сверхэффективные оценки (218). 2. Основные неравенства (220). 3. Неравенства в случае, когда функция $q(\theta)/I(\theta)$ не дифференцируема (224). 4. Некоторые следствия. Критерии асимптотической байесовости и минимаксности (225). 5. Многомерный случай (228).	
§ 31. Расстояния Кульбака–Лейблера, Хеллингера и $\chi^2$ . Их свойства . . .	228
1. Определения и основные свойства расстояний (228). 2. Связь расстояний Хеллингера и других с информацией Фишера (232). 3. Существование равномерных границ для $r(\Delta)/\Delta^2$ (233). 4. Многомерный случай (234). 5*. Связь рассматриваемых расстояний с оценками (236).	
§ 32*. Свойства информации Фишера. Разностное неравенство типа Рао–Крамера	238
§ 33. Вспомогательные неравенства для отношения правдоподобия. Асимптотические свойства оценок максимального правдоподобия . . . . .	243
1. Основные неравенства (244). 2. Оценки для распределения и моментов о.м.п. Состоятельность о.м.п. (246). 3. Асимптотическая нормальность (247). 4. Асимптотическая эффективность (249). 5. Асимптотическая байесовость о.м.п. (250).	
§ 34. Асимптотические свойства отношения правдоподобия. Дальнейшие свойства оптимальности о.м.п. . . . .	251
§ 35*. Приближенное вычисление оценок максимального правдоподобия .	260
§ 36. Результаты § 33, 34 для случая многомерного параметра . . . . .	269



1. Неравенства для отношения правдоподобия и свойства о.м.п. (результаты § 33) (269). 2. Асимптотические свойства отношения правдоподобия (результаты § 33, 34) (271). 3. Свойства о.м.п. (результаты § 33, 34) (275). 4. Приближенное вычисление о.м.п. (278). 5. Свойства о.м.п. при отсутствии условий регулярности (результаты § 14, 16) (278).	
§ 37. Равномерность по $\theta$ асимптотических свойств отношения правдоподобия и оценок максимального правдоподобия . . . . .	278
1. Равномерные закон больших чисел и центральная предельная теорема (278). 2. Равномерные варианты теорем об асимптотических свойствах отношения правдоподобия и оценок максимального правдоподобия (280). 3. Некоторые следствия (283).	
§ 38*. О статистических задачах, связанных с выборками случайного объема. Последовательное оценивание . . . . .	284
§ 39. Интервальное оценивание . . . . .	285
1. Определения (285). 2. Построение доверительных интервалов в байесовском случае (286). 3. Построение доверительных интервалов в общем случае. Асимптотические доверительные интервалы (287). 4. Построение точного доверительного интервала с помощью заданной статистики (290). 5. Другие методы построения доверительных интервалов (293). 6. Многомерный случай (295).	
§ 40. Точные выборочные распределения и доверительные интервалы для нормальных совокупностей . . . . .	296
1. Точные распределения статистик $\bar{X}$ , $S_0^2$ (296). 2. Построение точных доверительных интервалов для параметров нормального распределения (298).	
<b>Глава 3. Теория проверки гипотез . . . . .</b>	<b>301</b>
§ 41. Проверка конечного числа простых гипотез . . . . .	301
1. Постановка задачи. Понятие статистического критерия. Наиболее мощный критерий (301). 2. Байесовский подход (303). 3. Минимаксный подход (308). 4. Наиболее мощные критерии (309).	
§ 42. Проверка двух простых гипотез . . . . .	311
§ 43*. Два асимптотических подхода к расчету критериев. Численное сравнение . . . . .	315
1. Предварительные замечания (315). 2. Фиксированные гипотезы (316). 3. Близкие гипотезы (320). 4. Сравнение асимптотических подходов. Числовой пример (323). 5. Связь н.м.к. с асимптотической эффективностью о.м.п. (328).	
§ 44. Проверка сложных гипотез. Классы оптимальных критериев . . . . .	329
1. Постановка задачи и основные понятия (329). 2. Равномерно наиболее мощные критерии (331). 3. Байесовские критерии (332). 4. Минимаксные критерии (333).	
§ 45. Равномерно наиболее мощные критерии . . . . .	333
1. Односторонние альтернативы. Монотонное отношение правдоподобия (333). 2. Двусторонняя основная гипотеза. Экспоненциальное семейство (336). 3. Другой подход к рассматриваемым задачам (341). 4. Байесовский подход и наименее благоприятные априорные распределения при построении н.м.к. и р.н.м.к. (342).	

§ 46*. Несмещенные критерии . . . . .	344
1. Определения. Несмещенные р. н. м. к. (344). 2. Двусторонние альтернативы. Экспоненциальное семейство (347).	
§ 47*. Инвариантные критерии . . . . .	349
§ 48*. Связь с доверительными множествами . . . . .	353
1. Связь статистических критериев и доверительных множеств. Связь свойств оптимальности (353). 2. Наиболее точные доверительные интервалы (356). 3. Несмещенные доверительные множества (359). 4. Инвариантные доверительные множества (360).	
§ 49. Байесовский и минимаксный подходы к проверке сложных гипотез . . . . .	363
1. Байесовские и минимаксные критерии (363). 2. Минимаксные критерии для параметра $\alpha$ нормальных распределений (366). 3. Вырожденные наименее благоприятные распределения для односторонних гипотез (373).	
§ 50. Критерий отношения правдоподобия . . . . .	375
§ 51*. Последовательный анализ . . . . .	378
1. Вводные замечания (378). 2. Байесовский последовательный критерий (379). 3. Последовательный критерий, минимизирующий среднее число испытаний (383). 4. Вычисление параметров наилучшего последовательного критерия (385).	
§ 52. Проверка сложных гипотез в общем случае . . . . .	388
§ 53. Асимптотически оптимальные критерии. Критерий отношения правдоподобия как асимптотически байесовский критерий для проверки простой гипотезы против сложной . . . . .	397
1. Асимптотические свойства к. о. п. и байесовского критерия (397). 2. Асимптотическая байесовость к. о. п. (399). 3. Асимптотическая несмещенность к. о. п. (403)	
§ 54. Асимптотически оптимальные критерии для проверки близких сложных гипотез . . . . .	404
1. Постановка задачи и определения (404). 2. Основные утверждения (407).	
§ 55. Свойства асимптотической оптимальности критерия отношения правдоподобия, вытекающие из предельного признака оптимальности . . . . .	412
1. А. р. н. м. к. для близких гипотез с односторонними альтернативами (412). 2. А. р. н. м. к. для двусторонних альтернатив (413). 3. Асимптотически минимаксный критерий для близких гипотез, касающихся многомерного параметра (415). 4. Асимптотически минимаксный критерий о принадлежности выборки параметрическому подсемейству (417).	
§ 56. Критерий $\chi^2$ . Проверка гипотез по сгруппированным данным . . . . .	423
1. Критерий $\chi^2$ . Свойства асимптотической оптимальности (423). 2. Применения критерия $\chi^2$ . Проверка гипотез по сгруппированным данным (427).	
§ 57. Проверка гипотез о принадлежности выборки параметрическому семейству . . . . .	430
1. Проверка гипотезы $X \in \mathbf{B}_{\theta(\alpha)}$ . Группировка данных (430). 2. Общий случай (434).	
§ 58. Устойчивость статистических решений (робастность) . . . . .	438



1. Постановка задачи. Качественная и количественная характеристики робастности (438). 2. Оценка параметра сдвига (445). 3. Статистики Стьюдента и  $S_0^2$  (448). 4. Критерий отношения правдоподобия (449).

#### Глава 4. Статистические задачи с двумя и более выборками . . . . . 450

##### § 59. Проверка гипотез об однородности (полной или частичной) в параметрическом случае . . . . . 450

1. Рассматриваемый класс задач (450). 2. Асимптотически минимаксный критерий для проверки близких гипотез об обычной однородности (452). 3. Асимптотически минимаксные критерии для задачи об однородности при наличии мешающего параметра (458). 4. Асимптотически минимаксный критерий для задачи о частичной однородности (463). 5. Некоторые другие задачи (466).

##### § 60. Задачи об однородности в общем случае . . . . . 466

1. Постановка задачи (466). 2. Критерий Колмогорова–Смирнова (467). 3. Критерий знаков (469). 4. Критерий Вилкоксона (470). 5. Критерий  $\chi^2$  как асимптотически оптимальный критерий проверки однородности по сгруппированным данным (475).

##### § 61. Задачи регрессии . . . . . 476

1. Постановка задачи (476). 2. Оценка параметров (477). 3. Проверка гипотез относительно линейной регрессии (484). 4. Оценивание и проверка гипотез при наличии линейных связей (488).

##### § 62. Дисперсионный анализ . . . . . 491

1. Задачи дисперсионного анализа как задачи регрессии. Случай одного фактора (491). 2. Влияние двух факторов. Элементарный подход (494).

##### § 63. Распознавание образов . . . . . 496

1. Параметрический случай (497). 2. Общий случай (497).

#### Глава 5. Статистика разнораспределенных наблюдений . . . . . 500

##### § 64. Предварительные замечания. Примеры . . . . . 500

##### § 65. Основные методы построения оценок. $M$ -оценки. Состоятельность и асимптотическая нормальность . . . . . 507

1. Предварительные замечания и определения (507). 2.  $M$ -оценки (508). 3\*. Состоятельность  $\widehat{M}$ -оценок (514). 4. Состоятельность  $M$ -оценок (519). 5. Асимптотическая нормальность  $M$ -оценок (521).

##### § 66. Оценки максимального правдоподобия. Основные принципы сравнения оценок. Оптимальность о. м. п. в классе $M$ -оценок . . . . . 524

1. Оценки максимального правдоподобия (524). 2. Асимптотические свойства о. м. п. (526). 3. Основные принципы сравнения оценок. Асимптотическая эффективность о. м. п. в классе  $M$ -оценок (531).

##### § 67. Достаточные статистики. Эффективные оценки. Экспоненциальные семейства . . . . . 533

##### § 68. Эффективные оценки в задаче оценивания «хвостов» распределений (пример 64.7). Асимптотические свойства оценок . . . . . 535







1. Оценки максимального правдоподобия (535). 2. Асимптотическая нормальность $\hat{\theta}^*$ в задаче В (537). 3*. Асимптотическая нормальность и оптимальность в задаче А (540).	
§ 69. Неравенство Рао–Крамера . . . . .	545
§ 70. Неравенства для отношения правдоподобия и асимптотические свойства о. м. п. . . . .	547
1. Неравенства для отношения правдоподобия и состоятельность о. м. п. (547). 2. Асимптотическая нормальность о. м. п. (550). 3. Асимптотическая эффективность (552). 4. Замечания об о. м. п. для многомерного параметра (552).	
§ 71. Замечания о проверке гипотез по неоднородным наблюдениям . . . .	553
§ 72. Задача о разладке (пример 64.6) . . . . .	556
1. Задача о разладке как задача проверки гипотез (556). 2. Задача о разладке как задача оценки параметра (563). 3. Последовательные процедуры (566).	
<b>Глава 6. Теоретико-игровой подход к задачам математической статистики</b>	<b>575</b>
§ 73. Предварительные замечания . . . . .	575
§ 74. Основные понятия и теоремы, связанные с игрой двух лиц . . . . .	576
1. Игра двух лиц (576). 2. Равномерно оптимальные стратегии в подклассах (577). 3. Байесовские стратегии (577). 4. Минимаксные стратегии (579). 5. Полный класс стратегий (587).	
§ 75. Статистические игры . . . . .	587
1. Описание статистических игр (587). 2. Классификация статистических игр (590). 3. Две фундаментальные теоремы теории статистических игр (591).	
§ 76. Байесовский принцип. Полный класс решающих функций . . . . .	593
§ 77. Достаточность, несмещенность, инвариантность . . . . .	599
1. Достаточность (599). 2. Несмещенность (600). 3. Инвариантность (602).	
§ 78. Асимптотически оптимальные оценки при произвольной функции потерь . . . . .	605
§ 79. Оптимальные статистические критерии при произвольной функции потерь. Критерий отношения правдоподобия как асимптотически байесовское решение . . . . .	616
1. Свойства оптимальности статистических критериев при произвольной функции потерь (616). 2. К. о. п. как асимптотически байесовский критерий (616).	
§ 80. Асимптотически оптимальные решения при произвольной функции потерь в случае близких сложных гипотез . . . . .	620
Таблицы . . . . .	625
Приложение I . . . . .	634
Приложение II . . . . .	637
Приложение III . . . . .	644
Приложение IV . . . . .	647

---

Приложение V . . . . .	658
Приложение VI . . . . .	664
Приложение VII . . . . .	669
Приложение VIII . . . . .	679
Библиографические замечания . . . . .	685
Список литературы . . . . .	692
Список основных обозначений . . . . .	698
Предметный указатель . . . . .	701

