

## Расстояния в статистике. Последовательный анализ.

- 1 Доказать, что расстояние Хеллингера между двумя плотностями  $p_\xi$  и  $p_\eta$  больше или равно расстоянию полной вариации между этими плотностями.
- 2 Пусть  $\{p_\theta(x)\}_{\theta \in \Theta}$  – параметрическое семейство вероятностных плотностей. Доказать, что для расстояния Хеллингера  $H(p_{\theta_1}, p_{\theta_2})$  выполнено следующее соотношение

$$\liminf_{\theta_1, \theta_2 \rightarrow \theta} \frac{H(p_{\theta_1}, p_{\theta_2})}{(\theta_1 - \theta_2)^2} = \frac{I(\theta)}{4},$$

где  $I(\theta)$  – информация Фишера.

- 3 Пусть  $X_1, \dots, X_n$  – выборка из  $N(\theta, 1)$  с неизвестным параметром  $\theta$ . Вычислить оперативную характеристику для проверки методом последовательного анализа гипотезы  $H_0 : \theta = \theta_0$  против альтернативы  $H_1 : \theta = \theta_1$ .
- 4 Пусть  $L(\theta)$  – эта оперативная характеристика последовательного критерия проверки гипотезы  $H_0 : \theta = \theta_0$  против альтернативы  $H_1 : \theta = \theta_1$  с параметрами  $(\alpha, \beta)$ ,  $B = \frac{\beta}{1-\alpha}$ ,  $A = \frac{1-\beta}{\alpha}$ ,  $Z_1 = \frac{p(X_1, \theta_1)}{p(X_1, \theta_0)}$ ,  $p(x, \theta)$  – плотность  $X_1$ . Доказать, что математическое ожидание числа наблюдений в процессе равно (если пренебречь эффектом превышения границ после окончания процесса)

$$E_\theta(n) = \frac{L(\theta) \ln B + (1 - L(\theta)) \ln A}{E_\theta Z_1}.$$

*Указание.* Воспользоваться тождеством Вальда.

- 5 Выдана выборка  $X_1, \dots, X_n$  из  $N(a, \sigma^2)$ , где  $a, \sigma^2 > 0$  неизвестны. Предложить последовательный критерий Вальда и проверить гипотезу  $H_0 : a = 0$  для данной модели при  $\alpha = \beta = 0.02$ .
- 6 Выдана выборка  $X_1, \dots, X_n$  из экспоненциального закона  $Exp(\theta)$  с неизвестным параметром  $\theta > 0$ . Проверить гипотезу  $H_0 : \theta \geq \theta_0$  против альтернативы  $H_1 : \theta < \theta_1$  ( $\theta_0$  и  $\theta_1$  будут выданы) с помощью последовательного критерия Вальда для  $\alpha = \beta = 0.05$ . Сколько наблюдений потребовалось для проверки гипотезы? Сравните это количество с количеством наблюдений, нужных для проверки гипотезы  $H_0$  против альтернативы  $H_1$  с помощью критерия Неймана-Пирсона.